МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

ПОСІБНИК

для виконання лабораторних робіт та курсових проектів

з дисципліни «Методи синтезу та аналізу виміряних сигналів»,

для студентів галузі знань 0510 “Метрологія, вимірювальна техніка та інформаційно-вимірювальні технології спеціальності «Метрологія та вимірювальна техніка» освітньо-кваліфікаційного рівня «магістр»

Затверджено методичною радою факультету, протокол № 1 від 7 «вересня» 2018 р.

Харків

2018

Укладачі: к. т. н. доцент Коваль О. А.
к. т. н. Коваль А. О.

Кафедра Метрології та безпеки життєдіяльності

1. ПОНЯТТЯ СИГНАЛУ В ТЕОРІЇ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ. ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ПОДАННЯ ТЕОРІЇ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ. ОСНОВНІ ОПЕРАЦІЇ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ. ВИДИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

Поняття сигналу в теорії цифрової обробки сигналів

Класифікація сигналів

Визначимо поняття сигналу через основні поняття теорії обробки сигналів.

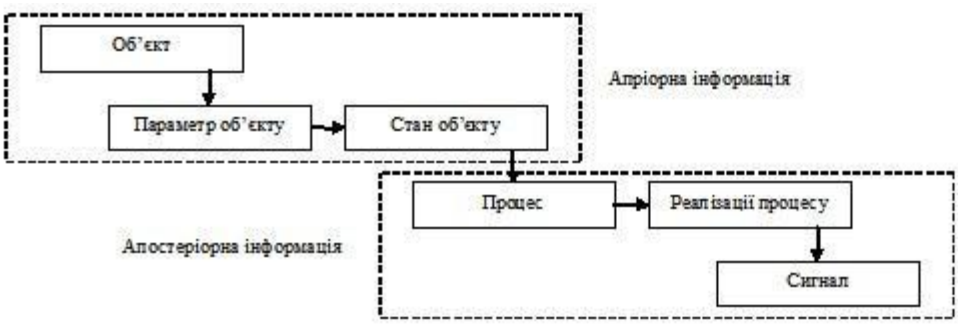


Рисунок 1.1 – Основні поняття теорії обробки сигналів

Об'єкт – частина матеріального світу, процес або явище, наділене певними властивостями, має функціональне призначення та на яке спрямована дослідницька діяльність.

Параметр об'єкту – фізична величина, значення якої описують кількісні характеристики властивостей об'єкту.

Стан об'єкту – безліч значень змінних параметрів об'єкту, які описують властивості об'єкту.

Процес - послідовна зміна станів об'єкту у часі.

Реалізація процесу – функціональна часова залежність параметрів процесу, що стала відомою після виміру значення параметра процесу.

Сигнал – це одна з реалізацій процесу в часовій області - зміна фізичної величини (параметра), яка передає інформацію, що кодується певним способом (фізичний процес, що містить в собі деяку інформацію).

Тепер наведемо класифікацію сигналів за двома ознаками – за природою фізичного процесу та за областю визначення реалізації у часовій області.

Детерміновані – процеси, миттєві значення і параметри яких відомі у будь-який момент часу з ймовірністю рівній одиниці. Тобто часову залежність миттєвих значень і параметрів таких сигналів можна задати математичним описом (формулою).

Періодичні – процеси, миттєві значення яких повторюються через однакові інтервали часу.

Гармонічні – періодичні процеси, поведінка миттєвих значень яких описується гармонічною залежністю.

Полігармонічні - періодичні процеси, поведінка миттєвих значень яких описується сумою декількох гармонійних залежностей, відношення будь-яких частот яких є раціональним числом.

Неперіодичні - процеси, миттєві значення яких не повторюються через однакові інтервали часу.

Майже періодичні – полігармонічні процеси, відношення будь-яких частот яких не є раціональним числом.

Перехідні – це все неперіодичні процеси, за винятком майже періодичних.

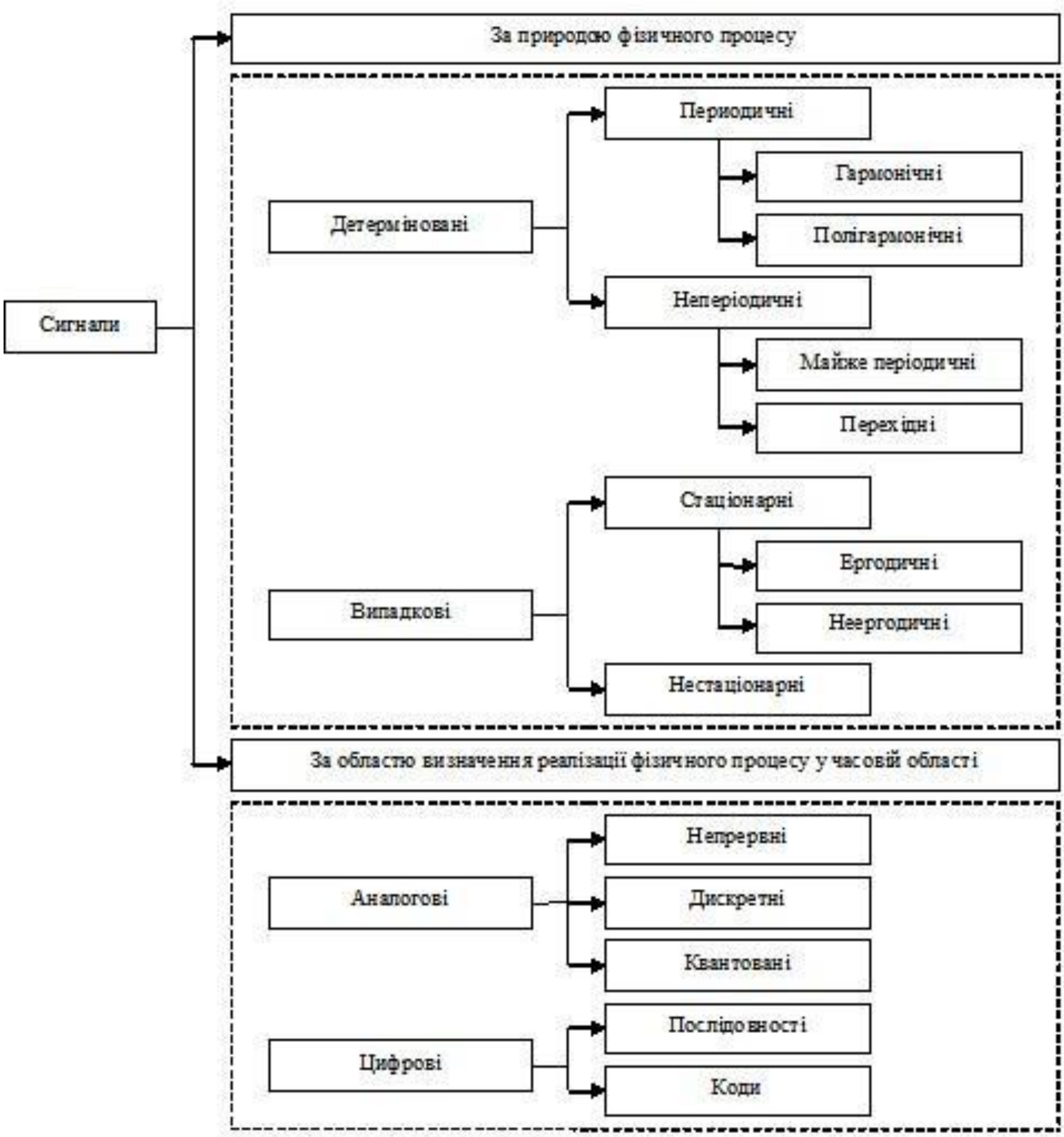


Рисунок 1.2 – Класифікація сигналів

Випадкові - процеси, миттєві значення і параметри яких відомі у будь-який момент часу з ймовірністю меншою за одиницю.

Стаціонарний (слабо стаціонарний, стаціонарний в широкому сенсі) – процес, для якого перший і змішаний моменти, обчислені по ансамблю реалізацій не залежать від часу. Стаціонарний (строго стаціонарний, стаціонарний у вузькому сенсі) – процес, для якого всі моменти і змішаний момент, обчислені по ансамблю реалізацій не залежать від часу.

Нестаціонарний - процес, для якого перший і змішаний моменти, обчислені по ансамблю реалізацій залежать від часу процес.

Ергодичний – стаціонарний процес, для якого моменти, обчислені по реалізаціях збігаються з моментами, обчисленими по ансамблю.

Неергодичний - стаціонарний процес, для якого моменти, обчислені по реалізаціях не збігаються з моментами, обчисленими по ансамблю.

Квазідетерміновані – процеси, один або декілька параметрів якого, є випадковими.

Аналогові - сигнали, область визначення або область значення яких є неперервний простір, тобто простір, що не є дискретним.

Дискретні – сигнали, область визначення яких є дискретний простір.

Квантовані – сигнали, область значення яких є дискретний простір.

Цифрові - сигнали, область визначення і область значення яких є простір дискретних значень.

Послідовності - сигнали, область визначення яких є простір послідовностей, тобто простір коефіцієнтів Фур'є (рахункового набору чисел, що визначають неперервну функцію на кінцевому інтервалі області визначення).

Коди – цифрові сигнали, область значень яких, належить сформованій за певним правилом множині, та призначені для сприйняття технічними засобами.

Цифрові сигнали

Нехай є неперервний сигнал (функція) $x(t)$, заданий на інтервалі $[0,\infty)$

Оцифрування цього сигналу виконується в два кроки:

1. Дискретизація – заміна вихідного неперервного сигналу $x(t)$ послідовністю його значень $y[n] = x(nT), n = 0,1,\ldots$ через рівні проміжки часу T (з кроком дискретизації T)

2. Квантування – розбиття області значень $-M \le x(t) \le M$ неперервного сигналу $x(t)$ на r частин (рівних або ні). Після цього кожне значення $x(t)$ приводиться до середини інтервалу або верхньої або нижньої границі інтервалу у який воно потрапило.

На кожному із згаданих кроків відбувається огрублення сигналу. Отже завдання цифрової обробки полягають у:

1. оцінці спотворення вихідного сигналу;
2. отриманні з сигналу потрібної інформації;
3. придушенні шумів;
4. стискування інформації (з втратою інформації) певним способом;
5. оцінка втрат пов'язаних з усіканням нескінчених послідовностей (області визначення сигналу).

Ці завдання вирішується за допомогою цифрової фільтрації.

Існує обернена задача – відновлення аналогового сигналу з цифрового. Умови, за яких можливе повне відновлення аналогового сигналу по його цифровому еквіваленту із збереженням всієї інформації, що початково містилася в сигналі, виражаються теоремами Найквіста, Уіттекера, Котельникова, Шенона, суть яких практично однакова. Для дискретизації аналогового сигналу з повним збереженням інформації в його цифровому еквіваленті максимальні частоти в аналоговому сигналі мають бути не менше ніж удвічі менше, ніж частота дискретизації, тобто $f_{max} \le \frac{1}{2} f_d$. Якщо ця умова порушується, в цифровому сигналі виникає ефект маскування (підміни) „дійсних" частот „уявними" нижчими частотами. Прикладом цього ефекту може слугувати кіноілюзія обертання колеса автомобіля у протилежному від руху напрямку. Це виникає коли між послідовними кадрами (аналог частоти дискретизації) колесо здійснює більш ніж півоберта. При цьому в цифровому сигналі замість фактичної реєструється уявна частота, а, отже, відновлення фактичної частоти при відновленні аналогового сигналу стає неможливим.

Перетворення сигналу в цифрову форму

Перетворення сигналу в цифрову форму виконується аналого-цифровими перетворювачами (АЦП). Як правило, вони використовують двійкову систему подання при рівномірній шкалі з певним числом розрядів. Збільшення числа розрядів підвищує точність вимірів і розширює динамічний діапазон вимірюваних сигналів. Втрачена через нестачу розрядів АЦП інформація невідновна, і існують лише оцінки похибки, наприклад, через потужність шуму, породженого помилкою в останньому розряді. Для того, щоб оцінити вплив завади, вводиться поняття "Відношення сигнал-шум" - відношення потужності сигналу до потужності шуму (у децибелах).

Найчастіше використовуються 8-, 10-, 12-, 16-, 20- і 24-х розрядні АЦП. Кожен додатковий розряд покращує відношення сигнал-шум на 6 децибел. Проте збільшення кількості розрядів знижує швидкість дискретизації і збільшує вартість апаратури. Важливим аспектом є також динамічний діапазон, який визначається максимальним і мінімальним значенням сигналу. Для зворотного перетворення використовується цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП), основні характеристики якого (розрядність, частота дискретизації, число каналів і тому подібне) аналогічні характеристикам АЦП.

Основні характеристики АЦП:

– кількість розрядів n;

– роздільна здатність;

– точність, похибка;

– швидкодія.

За лінійністю перетворення, АЦП розрізняють:

– Лінійні

– Нелінійні.

За принципом дії АЦП класифікують наступним чином:

– АЦП прямого перетворення (паралельні АЦП).

– АЦП послідовного наближення (АЦП з порозрядним врівноваженням).

– АЦП диференціального кодування.

– АЦП порівняння з пилоподібним сигналом.

– АЦП з урівноваженням (АЦП з двохстадійною інтеграцією, АЦП з багатостадійною інтеграцією).

– Конвейєрні АЦП.

– Сигма-Дельта АЦП.

Обробка цифрових сигналів

Обробка цифрових сигналів виконується або спеціальними процесорами, або на універсальних ЕОМ і комп'ютерах за спеціальними програмами. Найбільш прості для розгляду є лінійні системи.

Лінійними називаються системи, для яких має місце:

– Суперпозиція, або лінійність - відгук на суму двох вхідних сигналів дорівнює сумі відгуків на ці сигнали окремо;

– однорідність, або гомогенність - відгук на вхідний сигнал, посилений в певне число разів, буде посилений в те ж число разів.

Лінійність дозволяє розглядати об'єкти дослідження по частинах, а однорідність - в зручному масштабі. Для реальних об'єктів властивості лінійності можуть виконуватися приблизно і в певному інтервалі вхідних сигналів.

Властивості однорідності та гомогенності також використовуються і при складанні моделі сигналу, та лінійної системи його обробки. Так наприклад у структурному аналізі масштабні моделі, які детальніше розглянуті у розділі „Кратно масштабний аналіз”.

Якщо вхідний сигнал $x(t-t_0)$ породжує однаковий вихідний сигнал в $(t-t_0)$ при будь-якому зсуві t_0, то систему називають інваріантною в часі. Її властивості можна досліджувати в будь-які довільні моменти часу. Для опису лінійної системи вводиться спеціальний вхідний сигнал - одиничний імпульс (імпульсна функція).

Через властивість суперпозиції і однорідності будь-який вхідний сигнал можна представити у вигляді суми таких імпульсів, що подаються в різні моменти часу і помножених на відповідні коефіцієнти. Вихідний сигнал системи в цьому випадку є сумою відгуків на ці імпульси, помножених на вказані коефіцієнти.

Відгук на одиничний імпульс називають імпульсною характеристикою системи $h(n)$, а відгук на довільний вхідний сигнал $s(k)$ можна виразити згорткою $g(k)=h(n)\otimes s(k-n)$.

Якщо $h(n)=0$ при $n\leq 0$, то систему називають каузальною (причинною). У такій системі реакція на вхідний сигнал з'являється лише після подання сигналу на її вхід. Некаузальні системи реалізувати фізично неможливо. Якщо потрібно фізично реалізувати згортку сигналів з двосторонніми операторами (при диференціюванні, перетворенні Гільберта, і тому подібне), то це виконується із затримкою (зсувом) вхідного сигналу мінімум на довжину лівобічної частини оператора згортки.

Природа сигналів

За своєю природою сигнали можуть бути випадкові або детерміновані. До детермінованих відносять сигнали, значення яких у будь-який момент часу або в довільній точці простору є апріорі відомими або можуть бути точно визначені (обчислені) по відомій або передбачуваній функції, навіть якщо ми не знаємо її явного вигляду. Випадкові сигнали в принципі не мають певного закону зміни своїх значень в часі або в просторі. Для кожного конкретного моменту (відліку) випадкового сигналу можна знати лише вірогідність того, що він набуде якого-небудь значення в якої-небудь певної області можливих значень. Закон розподілу (функція розподілу – вірогідність того, що випадкова величина набуде значення менше аргументу функції, або щільність розподілу – похідна функції розподілу) не завжди відомий.

Одним з найпоширеніших є нормальний закон (Гауса), щільність розподілу якого має вигляд симетричного дзвону. Для його опису вистачає двох перших моментів. Його поширеність обумовлена тим, що сума випадкових величин по мірі збільшення їх кількості прагне до нормального закону. Певне поширення мають і рівномірний на заданому відрізку закон, і подвійний експоненціальний, схожий формою на нормальний, але з довшими “хвостами” (вірогідність великих відхилень більша, ніж для нормального), та інші, у тому числі несиметричні закони.

Найбільш прості характеристики законів розподілу – середнє значення випадкових величин (математичне чекання) і дисперсія (математичне чекання квадрата відхилення від середнього), що характеризує розкид значень випадкових величин відносно середнього значення.

Параметри динаміки випадкових сигналів (процесів) в часі характеризуються функціями автокореляції (кількісна оцінка взаємозв'язку значень випадкового сигналу на різних інтервалах) або автоковаріації (то ж, при центруванні випадкових сигналів).

Аналогічною мірою взаємозв'язку двох випадкових процесів і міри їх схожості по динаміці розвитку є кроскореляция або кросковаріація (взаємна кореляція або коваріація). Максимальне значення взаємної кореляції досягається при збігу двох сигналів. При затримці одного з сигналів по відношенню до іншого положення максимуму кореляційної функції дає можливість оцінити величину цієї затримки.

Основні математичні подання теорії цифрової обробки сигналів

Математичне подання сигналу

При малому інтервалі дискретизації можна достатньо точно відтворити вихідний аналоговий сигнал з цифрового. Якщо часовий інтервал $[a, b]$ спостереження сигналу розбити на однакові відрізки, а вже дискретизований сигнал f перевести у цифрову форму і записати у вигляді ряду значень N точок $f = (f_1, f_2, ..., f_N)$, то f можна подати N - мірним вектором, кожен елемент якого є компонентом цього вектора.

Якість наближення функції $f(t)$ залежить від кількості точок N. Якщо збільшувати N до нескінченості, то вся інформація, яка міститься в $f(t)$ буде міститися у f.

Отже функцію можна подати N - мірним вектором.

Двомірний вектор $f = (f_1, f_2)$ розміщено у двовимірному просторі (тобто на площині). Тримірний $f = (f_1, f_2, f_3)$ – у тримірному просторі, а N -мірний $f = (f_1, f_2, ..., f_N)$ - у N -мірному просторі.

Якщо уявити $N \to \infty$ - мірний простір, то можна сказати, що функція $f(t)$ - є однією точкою цього простору. Такий $N \to \infty$ -мірний простір є простором функцій.

Тепер, якщо уявити сигнал $f(t)$ у вигляді вектору, то його властивості можна виявити через кут та величину цього вектору. Можна також визначити відстань між двома векторами (функціями, сигналами) та їх скалярний добуток.

В теорії цифрової обробки поняття відстані та скалярного добутку широко використовуються при обчисленні інтегральних характеристик сигналів (кореляційний, спектральний, статистичний аналізи).

Скалярний та векторний добуток, відстань для двовимірних векторів

Досліджимо взаємозв’язок двох сигналів $f(t)$ та $g(t)$. Для цього зробимо їх вибірки, з яких візьмемо по дві точки відповідно f_1, f_2 та g_1, g_2. Визначимо двомірні вектори $f = (f_1, f_2)$ та $g = (g_1, g_2)$.

По-перше визначимо величину векторів, через поняття норми:

$$\|f\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \quad \|g\| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$$
,

По-друге визначимо силу зв’язку між сигналами через відстань між векторами:

$$d(f, g) = |f - g| = \sqrt{(f_1 - g_1)^2 + (f_2 - g_2)^2}$$

Чим менша відстань тим сильніший зв’язок. Але сила зв’язку залежить не тільки від відстані між векторами, але і від куту між ними. Отже слід використовувати скалярний добуток векторів:

$$\langle f, g \rangle = \|f\|\|g\|\cos\Theta$$
,

Звідки

$$\cos\Theta = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\|\|g\|} = r$$

Величина r відображає силу зв’язку між векторами через кут між ними та називається коефіцієнтом кореляції.

Оскільки $-1 \le \cos\Theta \le 1$ то найбільша сила зв’язку дорівнює 1 при нульовому куті між векторами.

Питання для самостійної роботи:

1. Дайте опис та пояснення фізичного змісту функції кореляції на конкретному прикладі.

2. Дайте визначення та математичний опис функції автокореляції.

Функціональні перетворення сигналів

Ортонормований базис

Для вимірювання величини необхідно вибрати одиницю вимірювання. Так само для вимірювання вектору слід вибрати одиничний вектор – орт. У двовимірному просторі слід вибрати два орти, які утворять ортогональний базис: $\{v_1, v_2\}$. Якщо виконується умова $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$, то такий базис є ортонормованим.

Тепер можна записати вектор у такому вигляді $f = C_1 v_1 + C_2 v_2$, де (C_1, C_2) - коефіцієнти, що виражають величину вектора по двом напрямам. Вектори $C_1 v_1, C_2 v_2$ - проекції вектора f.

Властивості ортонормованого базису:

- $\langle v_1, v_1 \rangle = \|v_1\|^2 = 1$,
- $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$,
- $C_1 = \langle f, v_1 \rangle$, $C_2 = \langle f, v_2 \rangle$.

Перехід від простору векторів до простору функцій

Запишемо викладене вище для N-мірного простору.

Норма вектору $f = (f_1, f_2, ..., f_N)$: $\|f\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + ... + f_N^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} f_k^2}$.

У випадку $N \to \infty$-мірного простору відбувається перехід від вектора до функції та від суми до інтегралу. Отже маємо для $f(t)$, $(a \le t \le b)$:

$$\|f(t)\| = \sqrt{\frac{1}{a+b}\int_a^b f^2(t)dt}.$$

Відстань у $N \to \infty$-мірному просторі:

$$d(f,g) = \|f-g\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N}(f_k + g_k)^2}, \quad d(f(t),g(t)) = \sqrt{\frac{1}{a-b}\int_a^b \{f(t)-g(t)\}^2 dt}.$$

Скалярний добуток:

$$\langle f,g \rangle = \sum_{k=1}^{N} f_k g_k, \quad \langle f(t),g(t) \rangle = \sqrt{\frac{1}{a+b}\int_a^b f(t)g(t)dt}.$$

Коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{\langle f,g \rangle}{\|f\|\|g\|} = \frac{\sum_{k=1}^{N} f_k g_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} f_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{N} g_k^2}}, \quad r = \frac{\langle f(t),g(t) \rangle}{\|f(t)\|\|g(t)\|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{a+b}\int_a^b f(t)g(t)dt}}{\sqrt{\frac{1}{a+b}\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\frac{1}{a+b}\int_a^b g^2(t)dt}}.$$

Система ортонормованих функцій

Для ортонормованого базису $N \to \infty$-мірного простору можна записати наступну умову:

$$\langle v_m, v_n \rangle = \begin{cases} 0, & m \ne n \\ 1, & m = n \end{cases}.$$

Для виразу ортонормованого базису використовується символ Кронекеру:

$$\delta_{mn} = \langle v_m, v_n \rangle.$$

У $N \to \infty$-мірному просторі можна ввести ортонормовану систему функцій $(f(t), g(t), h(t), \ldots)$, або $\{k_n(t), n = 1,2,3,\ldots\}$.

По аналогії з вищенаведеним маємо, що $f(t) = \sum_{t=0}^{\infty} C_n k_n(t)$, звідки $C_n = \langle f(t), k_n(t) \rangle = \sqrt{\frac{1}{a+b}\int_a^b f(t) k_n(t) dt}$, $\{n = 1,2,3,\ldots\}$.

Інтегральні перетворення у ЦОС

Коли введено поняття ортонормованого базису можна переходити до функціональних перетворень у ЦОС.

У витоках класичної теорії обробки сигналів лежить теорія операційного числення на основі інтегральних перетворень:

$$C_n = \langle f(t), k_n(t) \rangle = \sqrt{\frac{1}{a+b}\int_a^b f(t) k_n(t) dt}$$

Якщо подати аргумент $\{k_n(t), n = 1,2,3,\ldots\}$ у вигляді двомірного вектору $k(t,n)$ та замінити $n = p$, $C_n = F(p)$

$$F(p) = \int_b^a f(t) k(t,p) dt$$

,

де $x(t)$ - перетворювана функція, $k(t,p)$ - ядро (базис) інтегрального перетворення, від якого залежить вид перетворення та характер задач, які за допомогою нього вирішуються. Таким чином, відповідно до наведених вище понять ортонормованого базису та кореляції, сутність інтегрального перетворення полягає у тому, щоб подати функцію $f(t)$ у просторі з ортонормованих базисом $k(t,p)$ (знайти проекцію $f(t)$ на p).

Найбільш узагальненим є перетворення Лапласа ($k(t,p) = e^{-pt}$, $a = -\infty$, $b = \infty$) оскільки з ним можна зв’язати перетворення, які отримали найбільше практичне впровадження. Перетворення Лапласа пов'язує клас функцій дійсної змінної t з функцією-зображенням комплексної змінної $p = s + j\sigma$. Тобто зображення по Лапласу є спектральна функція експоненційно-згасаючої гармонічної функції з коефіцієнтом загасання s, та частотою коливань σ. Звідси слідує зв'язок з гармонічним аналізом за Фур'є ($s = 0$, $\sigma = \omega$) - перетворення сигналів у частотну область та подальший аналіз отриманих спектрів. Застосування цього інтегрального перетворення є дуже наочною демонстрацією головних періодичних властивостей сигналу, які описуються всього двома дійсними функціями $\sin \omega t$ та $\cos \omega t$, або однією комплексною $e^{j\omega t}$. Перетворення Фур'є дає блискучі результати для стаціонарних сигналів, а його реалізація не потребує великих витрат. З розвитком технологій і ускладненням вирішуваних задач почали даватися взнаки обмеження застосування перетворення Фур'є, зокрема для сигналів, які втрачають глобальну стаціонарність. Тут на допомогу приходять вікна та алгоритми розбиття сигналів у часі на стаціонарні відрізки, за допомогою яких будуються спектруми (STFT – short-time Fourier Transform). Отже тепер результат перетворення Фур'є стає функцією не тільки частоти, але й часу і вигляду та розміру вікна. Для такого багатовимірного перетворення часто застосовують термін „часо-частотно-масштабне" перетворення (від англ. TFS – time-friquency-scale), а класичне перетворення Фур'є називають одновимірним.

У 1946 році угорсько-анлійський фізик Денеш Габор, який пізніше став лауреатом Нобелівської премії за працю з голографії, вперше запропонував в якості базису для перетворення Фур'є використовувати двовимірну функцію, параметрами якої є не тільки частота, а й час. Отже базисна функція набула властивостей вікна, що одразу спрощувало застосування перетворення Фур'є для аналізу нестаціонарних сигналів. В якості такого базису в перетворенні Габора виступало гармонійне коливання модульоване по амплітуді функцією гауса, яка рухалась вздовж осі часу.

На початку 1980-х років французькі фізики Морле та Гросман встановили, що застосування у перетворенні Габора базису у вигляді солітоноподібної, не обов'язково періодичної функції значно розширює можливості цього перетворення не лише для аналізу властивостей сигналів, а й для опису динаміки складних нелінійних процесів з широкими діапазонами частот. Так з'явилось перетворення вейвлет (wavelet - з анлійської мови дослівно перекладається як „маленька хвиля" – добре локалізована у часовій та частотній області функція). Вейвлет перетворенням присвячено багато праць та воно набуло широкого застосування починаючи вже з початку 1990-х років.

Приблизно в цей самий період часу виходить праця Стіва Мена, який пропонує застосовувати у якості базової функції вейвлети з кутовою модуляцією – чіплети, - що дозволяє аналізувати просторові властивості процесу, який породжує вимірювальний сигнал.

В теорії обробки сигналів перетворення чірплет є розкладом вхідного сигналу по базисним функціям, що мають назву чірплети. Терміни чірплет (chirplet - з анлійської мови дослівно перекладається як „цвірінькання" – маленькі сигнали, частота яких зростає або зменшується з плином часу) та „перетворення чірплет" зявилися порівняно недавно. Вперше їх увів професор Торонтського університету Стів Мен у 1991 році в праці „Перетворення чірплет: узагальнення перетворення Габора”. Нажаль на той час через складність реалізації та обмеженість ресурсів ЕОМ перетворення чірплет не знайшло такого широкого розповсюдження як поріднене з ним вейвлет перетворення. Чірплет залишався альтернативою для вирішення задач, де користь від його застосування значно перевищувала витрати. На сьогодні, в умовах швидкого зростання можливостей ЕОМ чірплети стали надзвичайно актуальними для вирішення задач аналізу сигналів радарів, біомедичних дослідженнях, при обробці зображень та класифікації образів, для усунення ефекту Доплера, у рефлектометрії, метеорології, геології та ще багатьох галузях людської діяльності. Однак вони ще не достатньо широко відомі колу дослідників, які займаються аналізом експериментальних даних.

2.3.5 Перетворення Лапласа та $t-p$ - локалізація

Нехай є функція $x(t) \in L^2(R)$. Перетворення Лапласа цієї функції має вигляд:

$$L[x(t)](p) = L(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt$$

,

де $L(p)$ - зображення по Лапласу функції-оригіналу $x(t)$, тобто $x(t) \to L(p)$.

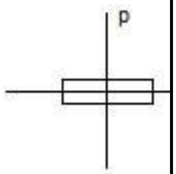
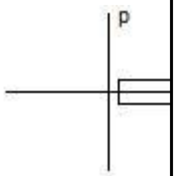
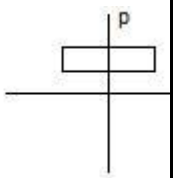
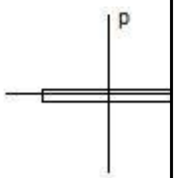
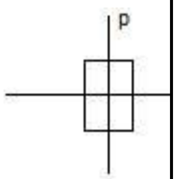
Зворотне перетворення має вигляд:

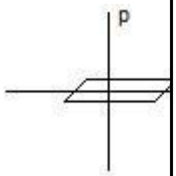
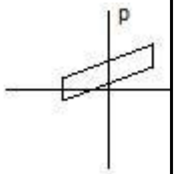
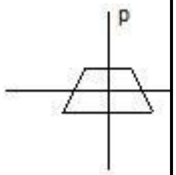
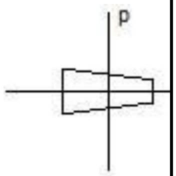
$$L^{-1}[x(t)](p) = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} \frac{L(p)}{p} e^{pt} dp$$

.

Перетворення Лапласа можна адаптувати до властивостей аналізованої функції в t або p області, виконуючи перетворення подібності (зсув, масштабування та ін.) базису $k(t,p)$ на площини (t,p). На цьому принципі побудовано інтегральні перетворення, які широко використовуються в теорії обробки сигналів (Фур’є, Габора, вейвлет, чірплет). У таблиці 1 наведено результати восьми перетворень подібності та показано локалізацію функції $x(t)$ і її зображення $L(p)$ на площині (t,p)

Таблиця 1.1 – **Перетворення Лапласа та** $t-p$ **- локалізація**

N	**Базис**	**Функція**	**Зображення**	**Локалізація в області** $(t;p)$
0	$k(t,p)=e$	$x(t)$	$L(p)$	
1	$k(t-\tau,p)$	$x(t-\tau)$	$e^{\tau p}L(p)$	
2	$k(t,p-\rho)$	$e^{\rho t}x(t)$	$L(p-\rho)$	
3	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}k\left(\frac{t}{\alpha}\right.$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x\left(\frac{t}{\alpha}\right)$	$\sqrt{\alpha}L(\alpha p)$	
4	$\frac{1}{\sqrt{\beta}}k\left(t,\frac{p}{\beta}\right.$	$\sqrt{\beta}x(\beta t)$	$\frac{1}{\sqrt{\beta}}L\left(\frac{p}{\beta}\right)$	

5	$k(t-\upsilon p, p$	$e^{\upsilon t^2} * x(t)$	$e^{\upsilon p^2} L(p)$	
6	$k(p, p-\lambda$	$e^{\iota t^2} x(t)$	$e^{\iota p^2} * L(p)$	
7	$\frac{1}{C} k(t(p), p$	$\frac{1}{C}\langle L(p) \mid k(t(p$	$\frac{1}{C}\langle x(t) \mid \overline{k(t(p}$	
8	$\frac{1}{c} k(t, p(t))$	$\frac{1}{c}\langle L(p) \mid k(t, p$	$\frac{1}{c}\langle x(t) \mid \overline{k(t, p(}$	

2.3.6 Перетворення Фур’є

Одним з основних методів частотного аналізу і обробки сигналів є перетворення Фур'є. Розрізняють поняття:

– “Перетворення Фур'є” - передбачає безперервний розподіл частот

– “ряд Фур'є” - задається на дискретному наборі частот

Сигнали також можуть бути задані в наборі тимчасових відліків або як неперервна функція часу. Це дає чотири варіанти перетворень:

– перетворення Фур'є з неперервним часом;

– перетворення Фур'є з дискретним часом;

– ряд Фур'є з неперервним часом;

– ряд Фур'є з дискретним часом.

–

Найбільш практична з точки зору цифрової обробки сигналів дискретизація і в часовій, і в частотної області, але не слід забувати, що вона є апроксимацією неперервного перетворення. Неперервне перетворення Фур'є дозволяє точно представляти будь-які явища.

Сигнал, поданий рядом Фур'є, може бути лише періодичний. Сигнали довільної форми можуть бути подані рядом Фур'є лише приблизно, оскільки при цьому передбачається періодичне повторення даного інтервалу сигналу за межами його завдання.

На стиках періодів при цьому можуть виникати розриви і злами сигналу, і виникати помилки обробки, викликані явищем Гіббса, для мінімізації яких застосовують певні методи (вагові вікна, продовження інтервалів завдання сигналів, і ін.).

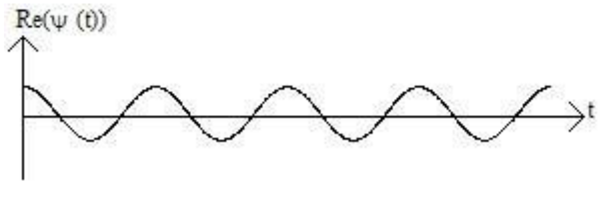
Нехай є функція $f(t) \in L^2(0,2\pi)$, яка може бути періодично розширена і визначена на $R(-\infty,\infty)$ так, що $f(t) = f(t-2\pi)$, $t \in (0,2\pi)$. Будь-яку таку функцію можна подати у вигляді інтегралу Фур'є:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\psi(t,\omega)d\omega$$

,

де $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi(t,\omega)}dt$ - перетворення Фур'є функції $f(t)$,

$\psi(t,\omega) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$ – ортонормований базис простору $L^2(0,2\pi)$, побудований шляхом масштабного перетворення по частоті $\omega \in R$ функції $e^{jt} = \cos(t) + j\sin(t)$ (рисунок 1.3).



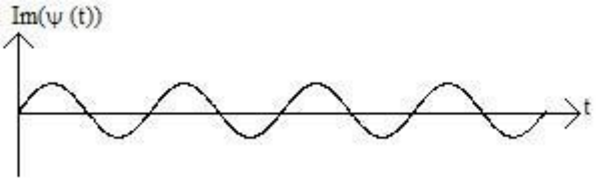


Рисунок 1.3 – Базисна функція перетворення Фур’є для $\omega = const$

Перетворення Фур’є дає інформацію про вміст кожної частоти ω в аналізованому сигналі, але оскільки інтегрування проводиться по всій нескінченій числовій осі, то немає можливості виявити момент часу коли саме має місце та чи інша частота. Для прикладу наведемо результати перетворення Фур’є двох сигналів (рисунок 1.4):

$$f_1(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) \tag{1.1}$$

та

$$f_2(t) = \begin{cases} \sin(\omega_1 t), & t[-\infty, a); \\ \sin(\omega_2 t), & [a, \infty). \end{cases} \tag{1.2}$$

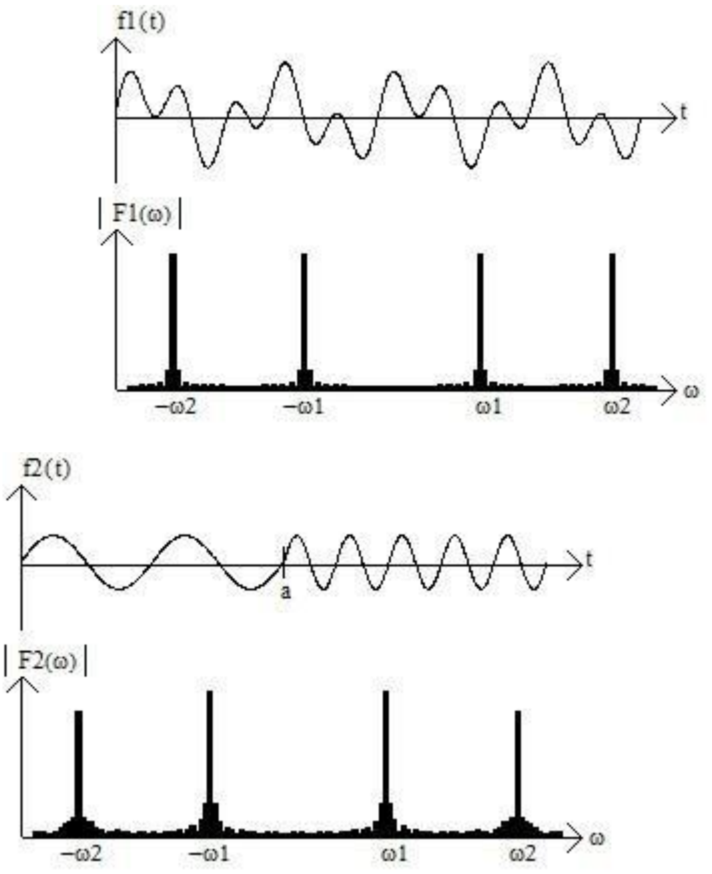


Рисунок 1.4 – Сигнали $f_1(t)$ та $f_2(t)$ і їх перетворення Фур'є.

Отже бачимо, що для аналізу нестаціонарних сигналів перетворення Фур'є можна ефективно застосувати лише у випадку коли цікавою є інформація про загальний частотний склад сигналу, а не про час існування окремих частотних складових.

Під час дискретизації і у часовій, і у частотної області, замість "дискретно-часовий ряд Фур'є" зазвичай (що не дуже точно) говорять про дискретне перетворення Фур'є (ДПФ):

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_m f_m e^{-j2\pi nm/M}$$

,

де M- кількість відліків сигналу.

Застосовується воно для обчислення спектрів потужності, оцінювання передаточних функцій і імпульсних відгуків, швидкого обчислення згорток при фільтрації, розрахунку кореляції, розрахунку перетворень Гільберта, і ін.

Розрахунок ДПФ за наведеною формулою вимагає обчислення n коефіцієнтів, кожен з яких залежить від m елементів вихідного відрізку, так що число операцій не може бути менше nm.

Існує ціле сімейство алгоритмів, відоме, як “Швидке Перетворення Фур'є” - ШПФ, що скорочує час праці до n log(m) операцій. “Швидке” не слід трактувати, як “спрощене” і “неточне”. При точній арифметиці результати розрахунків ДПФ і по алгоритмах ШПФ співпадають..

Відоме вживання знаходять і варіанти перетворення Фур'є: косинусне для парних і синусне для непарних сигналів, а також перетворення Хартлі, де базисними функціями є суми синусів і косинусів, що дозволяє підвищити продуктивність обчислень і позбавитися від комплексної арифметики.

Замість косинусних і синусних функцій використовуються також меандрові функції Уолша, що набувають значень лише +1 і -1.

І, нарешті, останнім часом в завданнях спектрально-часового аналізу нестаціонарних сигналів, вивчення нестаціонарностей і локальних особливостей сигналів "під мікроскопом", очищення від шумів і стискування сигналів починають отримувати у якості базисів розкладання вейвлети ("короткі хвилі"), локалізовані як у часовій, так і в частотній області.

2.3.7 Z-перетворення

Для аналізу дискретних сигналів і систем широко використовується z-перетворення, яке є узагальненням дискретного перетворення Фур'є. Цим перетворенням довільної безперервної функції $s(t)$, рівномірно дискретизированної і відображеної відліками $s_k = s(k\Delta t)$, ставиться у відповідність степенний поліном по z (або степенний поліном по $z^{-1} = \frac{1}{z}$), послідовними коефіцієнтами якого є відліки функції:

$$s_k = s(k\Delta t) \leftrightarrow TZ\left[s(k\Delta t)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k z^k = S(z)$$

де $z = \sigma + j\omega = r \cdot \exp(-j\varphi)$ - довільна комплексна змінна. Це перетворення дозволяє використовувати всю міць диференціального й інтегрального числення, алгебри й інших глибоко розвинених розділів аналітичної математики.

Системи звичайно описується лінійними різницевими рівняннями з постійними коефіцієнтами:
$y(k)=\sum b(n)x(k-n)-\sum a(m)x(k-m),\ n=0,1,..,N,\ m=1,2,..,M$. Цим рівнянням встановлюється, що вихідний сигнал $y(k)$ системи в певний момент k_i (наприклад, у момент часу $k_i\Delta t$) залежить від значень вхідного сигналу $x(k)$ в даний k_i і попередні моменти (k_i-n) й значень сигналу $y(k)$ в попередні моменти (k_i-m).

Z-Перетворення цього рівняння, виражене щодо передаточної функції системи $H(z)={Y(z)}/{X(z)}$, являє собою раціональну функцію від z у вигляді відношення двох поліномів від z. Коріння полінома в чисельнику називаються нулями, а в знаменнику - полюсами функції $H(z)$.

Значення нулів і полюсів дозволяють визначити деякі властивості лінійної системи. Так, якщо всі полюси лежать поза одиничною окружністю $|z|=1$ на комплексній z-площині (по модулю більше одиниці), те система є стійкою (не вийде з рівноваги ні при яких вхідних впливах).

Нулі функції $Y(z)$ перетворюють на нуль $H(z)$ і показують, які коливання зовсім не будуть сприйматися системою ("антирезонанс"). Полюси функції $X(z)$ перетворюють $H(z)$ на нескінченність, такий сигнал на вході системи викликає резонанс і необмежене зростання сигналу на виході. Систему називають мінімально-фазовою, якщо всі полюси й нулі передаточної функції лежать поза одиничною окружністю. Принагідно зауважимо, що застосування z-перетворення з негативними ступенями z^{-1} міняє положення полюсів і нулів щодо одиничної окружності $|z|=1$ (область поза колом переміщається усередину кола, і навпаки).

Розділ 3 Основні операції цифрової обробки сигналів

3.1 Лінійна згортка

Існують численні алгоритми ЦОС як загального типу для сигналів у їхній класичній тимчасовій формі (телекомунікації, зв'язок, телебачення та ін.), так і спеціалізовані у всіляких галузях науки й техніки (геоінформатиці, геології й геофізиці, медицині, біології, військовому справі, та ін.). Однак усі ці алгоритми, як правило – блокового типу, побудовані на як завгодно складних комбінаціях досить невеликого набору типових цифрових операцій, до основних з яких ставляться згортка (деконволюція), кореляція, фільтрація, функціональні перетворення, модуляція. Частково ці операції вже розглядалися нами в "Теорії сигналів і систем". Нижче приводяться тільки ключові позиції по цих операціях .

Лінійна згортка – основна операція ЦОС, особливо в режимі реального часу. Для двох кінцевих причинних послідовностей $h(n)$ і $y(k)$ довжиною відповідно N і K згортка визначається виразом:

$$s(k) = h(n) \otimes y(k) \equiv h(n) * y(k) = \sum_{n=0}^{N} h(n) y(k-n)$$

, (1.3)

де $\otimes$ або $*$ - символьні позначення операції згортки.

Як правило, у системах обробки одна з послідовностей $y(k)$ являє собою оброблювані дані (сигнал на вході системи), друга $h(n)$ – оператор (імпульсний відгук) системи, а функція $s(k)$ – вихідний сигнал системи. У комп'ютерних системах з пам'яттю для вхідних даних оператор $h(n)$ може бути двостороннім від $-N_1$ до $+N_2$, наприклад – симетричним $h(-n) = h(n)$, з відповідною зміною меж підсумовування в (1.3), що дозволяє одержувати вихідні дані без зсуву фази частотних гармонік щодо вхідних даних. При строго коректній згортці з обробкою всіх відліків вхідних даних розмір вихідного масиву рівний $K + N_1 + N_2 - 1$ і повинні задаватися початкові умови по відлікам $y(k)$ для значень $y(0-n)$ до $n=N_2$ й кінцеві для $y(K-n)$ до $n=N_1$. Приклад виконання згортки наведено на рисунку 1.5.

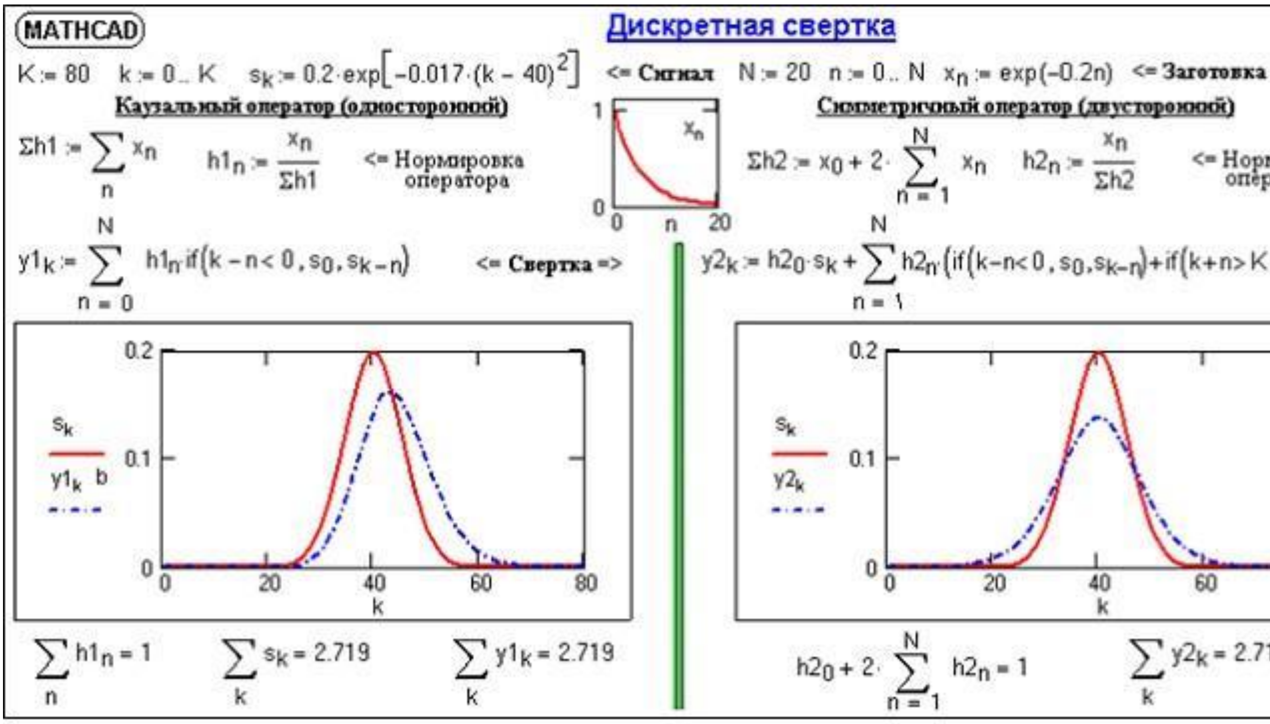


Рисунок 1.5 – Приклади дискретної згортки

Перетворення згортки однозначно визначає вихідний сигнал для встановленого значення вхідного сигналу при відомому імпульсному відгуку системи. Зворотне завдання деконволюції - визначення функції $y(k)$ по функціях $s(k)$ і $h(n)$, має розв'язок тільки за певних умов. Це пояснюється тим, що згортка може суттєво змінити частотний спектр сигналу $s(k)$ й відновлення функції $y(k)$ стає неможливим, якщо певні частоти її спектра в сигналі $s(k)$ повністю втрачені.

3.2 Кореляція

Кореляція існує у двох формах: автокореляції й взаємної кореляції.

Взаємо-кореляційна функція (ВКФ, cross-correlation function - CCF), і її окремий випадок для центрованих сигналів функція взаємної коваріації (ФВК)– це показник ступеня подібності форми й властивостей двох сигналів. Для двох послідовностей $x(k)$ і $y(k)$ довжиною ДО с нульовими середніми значеннями оцінка взаємної коваріації виконується по формулах:

$$K_{xy}(n) = \frac{1}{K-n+1}\sum_{k=0}^{K-n} x(k)\,y(k+n),\ n = 0, 1, 2, ..$$

(1.4)

$$K_{xy}(n) = \frac{1}{K-n+1}\sum_{k=0}^{K-n} x(k-n)\,y(k),\ n = 0, -1, -2, ..$$

(1.5)

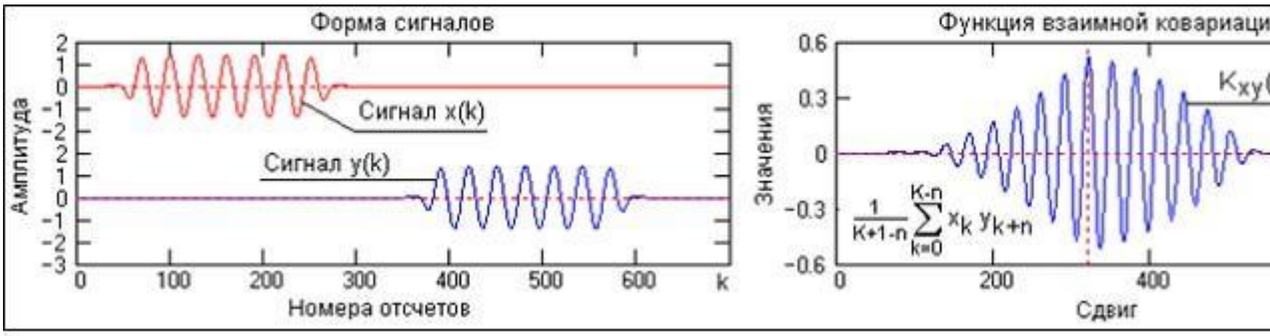


Рисунок 1.6 – Функція взаємної коваріації двох детермінованих сигналів

Приклад визначення зсуву між двома детермінованими сигналами, представленими радіоімпульсами, по максимуму ФВК наведено на рисунку 1.6. У принципі, по максимуму ФВК може визначатися й зсув між локальними сигналами, досить різними за формою.

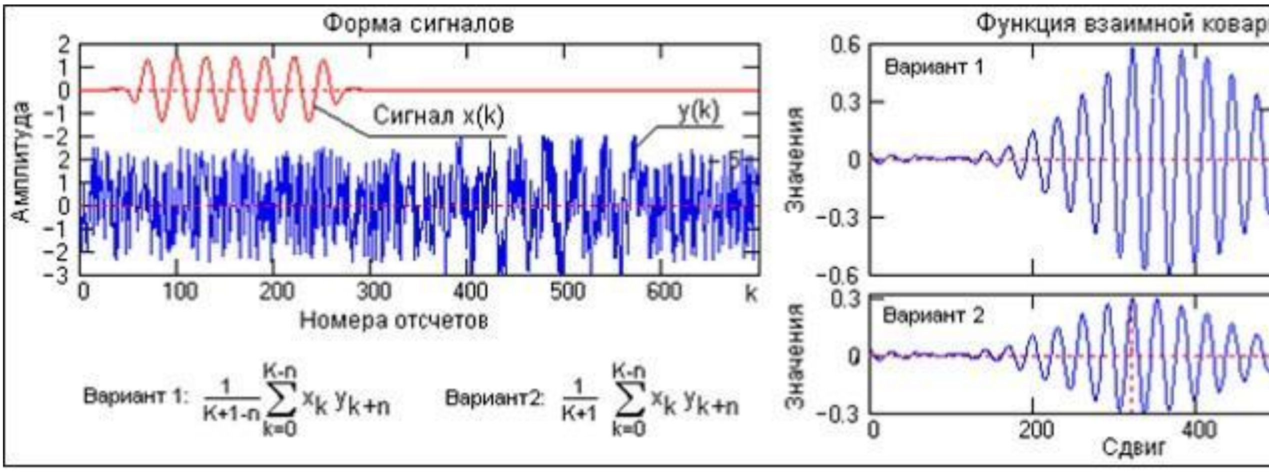


Рисунок 1.7 – ФВК двох сигналів, один з яких сильно зашумлений.

На рисунку 1.7 наведений аналогічний приклад ФВК двох однакові за формою сигналів, на один з яких накладений шумовий сигнал, потужність якого перевищує потужність сигналу. Обчислення ФВК у цьому випадку звичайно виконується по варіанту 2 – з постійним нормувальним множником. Це визначається тим, що в міру зростання зрушення n і зменшення кількості членів у формулі, що сумуються (1.4) за рахунок шумових сигналів суттєво наростає помилка оцінки ФВК, яка до того ж збільшується за рахунок нелінійного збільшення значення нормувального множника, особливо при малій кількості відліків. Збереження множника постійним якоюсь мірою компенсує цей ефект.

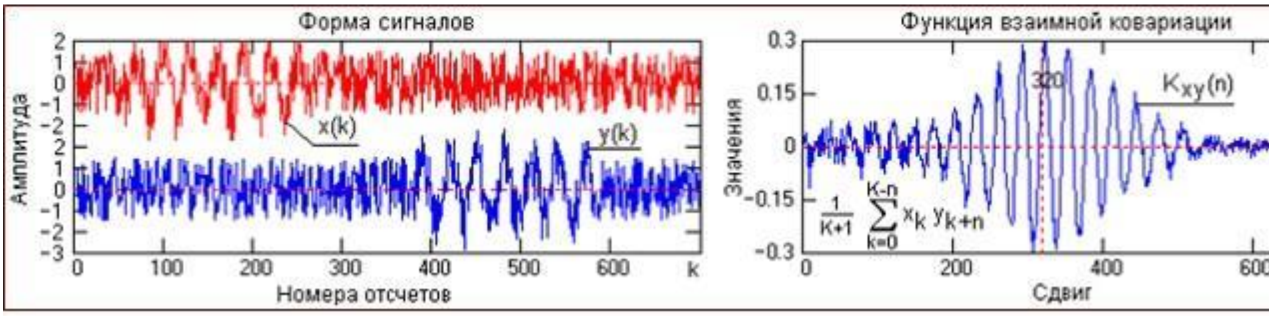


Рисунок 1.8 – ФВК двох зашумленних радіоімпульсів.

На рисунку 1.8 наведений приклад обчислення функції взаємноїковариації двох однакових сигналів, схованих у шумах. ФВК дозволяє не тільки визначити величину зсуву між сигналами, але й досить упевнено оцінити період коливань у досліджуваних радіоімпульсах.

Відносний кількісний показник ступеня подібності двох сигналів $x(k)$ і $y(k)$ – *функція взаємних кореляційних коефіцієнтів* $\rho_{xy}(n)$. Вона обчислюється через центровані значення сигналів (для обчислення взаємної коваріації нецентрованих сигналів достатньо центрувати тільки один з них), і нормується на добуток значень стандартів (середніх квадратичних варіацій) функцій $x(k)$ і $y(k)$:

$$\rho_{xy}(n) = K_{xy}(n) \Big/ (\sigma_x \sigma_y) \qquad (1.6)$$

$$\sigma_x^2 = K_{xx}(0) = \frac{1}{K+1}\sum_{k=0}^{K}(x(k))^2,$$
$$\sigma_y^2 = K_{yy}(0) = \frac{1}{K+1}\sum_{k=0}^{K}(y(k))^2 \qquad (1.7)$$

Інтервал зміни значень кореляційних коефіцієнтів при зсувах n може змінюватися від –1 (повна зворотна кореляція) до 1 (повна подібність або стовідсоткова кореляція). При зсувах n, на яких спостерігаються нульові значення $r_{xy}(n)$, сигнали некорельовані. Коефіцієнт взаємної кореляції дозволяє встановлювати наявність певного зв'язку між сигналами незалежно від фізичних властивостей сигналів і їх величини.

Зауважимо, що в технічній літературі в термінах "кореляція" і "коварiацiя" у цей час існує неабияка плутанина. Найчастіше кореляційними функціями називають як функції по нецентрованим, так і по центрованих сигналах, а також і функцію взаємних кореляційних коефіцієнтів.

Автокореляційна функція (АКФ, correlation function, CF) є кількісною інтегральною характеристикою форми сигналу, подає інформацію про структуру сигналу і його динаміці в часі. Вона, по суті, є частковим випадком ВКФ для одного сигналу і являє собою скалярний добуток сигналу і його копії у функціональній залежності від змінної величини значення зсуву:

$$B_{xy}(n) = \frac{1}{K-n+1}\sum_{k=0}^{K-n} x(k)\,y(k+n),\ n = 0,1,2,.. \qquad (1.8)$$

АКФ має максимальне значення при $n=0$ (множення сигналу на самого себе), є парною функцією $B_{xy}(-n)=B_{xy}(n)$, і значення АКФ для негативних координат звичайно не обчислюються. АКФ центрованого сигналу $K_x(n)$ являє собою функцію автоковариації (ФАК). ФАК, нормована на своє значення $K_x(0)=\sigma_x^2$ в $n=0$:

$$\rho_x(n)=K_x(n)/K_x(0) \tag{1.9}$$

називається *функцією автокореляційних коефіцієнтів*.

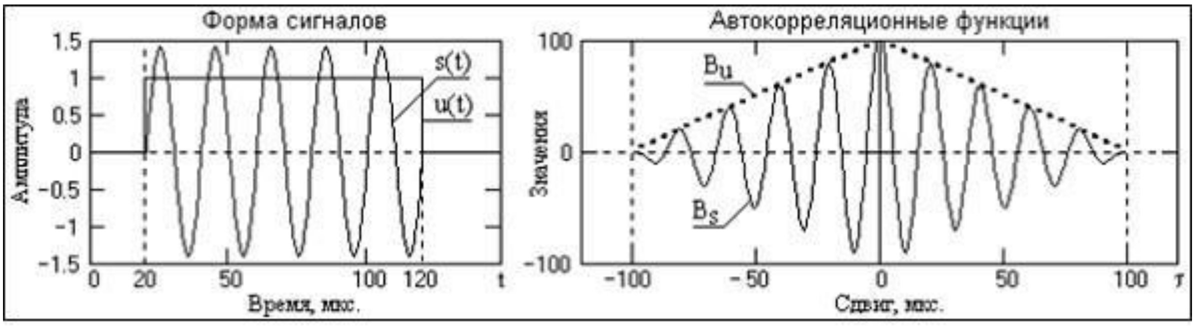


Рисунок 1.9 – Авто*кореляційні* функції

Як приклад на рисунку 1.9 наведено два сигнали – прямокутний імпульс і радіоімпульс однакової тривалості Т, і відповідні до даних сигналів форми їх АКФ. Амплітуда коливань радіоімпульсу встановлена рівної $\sqrt{T}$ амплітуди прямокутного імпульсу, при цьому енергії сигналів будуть однаковими, що підтверджується рівними значеннями максимумів АКФ. При кінцевій тривалості імпульсів тривалості АКФ також кінцеві, і дорівнюють подвоєним значенням тривалості імпульсів (при зсуві копії кінцевого імпульсу на інтервал його тривалості як уліво, так і вправо, добуток імпульсу зі своєю копією стає рівним нулю). Частота коливань АКФ радіоімпульсу дорівнює частоті коливань заповнення радіоімпульсу (бічні мінімуми й максимуми АКФ виникають щораз при послідовних зсувах копії радіоімпульсу на половину періоду коливань його заповнення).

3.3 Лінійна цифрова фільтрація

Лінійна цифрова фільтрація є однією з операцій ЦОС, що мають першорядне значення, і визначається як

$$s(k)=\sum_{n=0}^{N}h(n)y(k-n) \qquad (1.10)$$

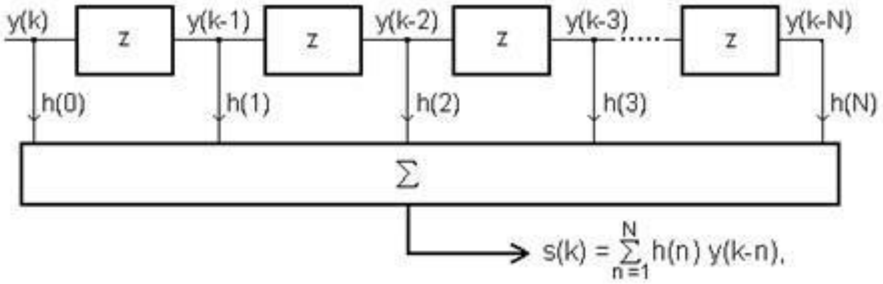


Рисунок 1.10 – Трансверсальний цифровий фільтр

де $h(n), n=0,1,2,...,N$ – коефіцієнти фільтра, $y(k)$ і $s(k)$ – вхід і вихід фільтра. Це по суті згортка сигналу з імпульсною характеристикою фільтра.

На рисунку 1.10 показана блок-схема фільтра, який у такому вигляді широко відомий, як трансверсальний (z – затримка на один інтервал дискретизації).

До основних операціям фільтрації інформації відносять операції згладжування, прогнозування, диференціювання, інтегрування й поділу сигналів, а також виділення інформаційних (корисних) сигналів і придушення шумів (перешкод). Основними методами цифрової фільтрації даних є частотна селекція сигналів і оптимальна (адаптивна) фільтрація.

3.4 Дискретні перетворення

Дискретні перетворення дозволяють описувати сигнали з дискретним часом у частотних координатах або переходити від опису в тимчасовій області до опису в частотній. Перехід від тимчасових (просторових) координат до частотних необхідний у багатьох застосуваннях обробки даних.

Найпоширенішим перетворенням є дискретне перетворення Фур'є. При K відліків функції:

$$S(n)=\sum_{k=0}^{K-1} s(k)\exp(-j2\pi kn/K)$$

(1.11)

Нагадаємо, що дискретизація функції за часом приводить до періодизації її спектра, а дискретизація спектра по частоті - до періодизації функції.

Для дискретних перетворень $s(k\Delta t) \Leftrightarrow S(n\Delta f)$, і функція, і її спектр дискретні й періодичні, а числові масиви їх представлення відповідають завданню на головних періодах $T=K\Delta t$ (від 0 до T або від $-T/2$ до $-T/2$), і $2f_N=N\Delta f$ (від $-f_N$ до f_N), де K, N – кількість відліків сигналу і його спектра відповідно, при цьому:

$$\Delta f=\frac{1}{T}=\frac{1}{K\Delta t},$$
$$\Delta t=\frac{1}{2f_N}=\frac{1}{N\Delta f},$$
$$\Delta t\Delta f=\frac{1}{N},$$
$$N=2Tf_N=K$$

(1.12)

Співвідношення (1.12) є умовами інформаційної рівноцінності динамічної й частотної форм вистави дискретних сигналів. Іншими словами: для перетворень без втрат інформації число відліків функції і її спектра повинні бути однаковими.

У принципі, згідно із загальною теорією інформації, останній висновок дійсний і для будь-яких інших видів лінійних дискретних перетворень.

3.5 Модуляція сигналів

Системи реєстрації, обробки, інтерпретації, зберігання й використання інформаційних даних стають усе більш розподіленими, що вимагає комунікації даних по високочастотних каналах зв'язку. Як правило, інформаційні сигнали є низькочастотними й обмеженими по ширині спектра, на відміну від широкосмугових високочастотних каналів зв'язку, розрахованих на передачу сигналів від множини джерел одночасно із частотним поділом каналів.

Перенесення спектра сигналів з низькочастотної області у виділену для їхньої передачі область високих частот виконується операцією модуляції. При модуляції значення інформаційного (модулюючого) сигналу переносяться на певний параметр високочастотного (несучого) сигналу.

Найпоширеніші схеми модуляції для передачі цифрової інформації із широкосмугових каналів – це амплітудна (amplitude shift keying – ASK), фазова (phase shift keying – PSK) і частотна (frequensy shift keying – FSK) маніпуляції. При передачі даних по цифрових мережах використовується також імпульсно-кодова модуляція (pulse code modulation – PCM).

Розділ 4 Види цифрової обробки сигналів

4.1 Поняття обробки сигналів, аналізу та синтезу

Поняття обробки сигналів включає до собі два аспекти: аналіз сигналу шляхом оцінки його інформативних параметрів та синтез сигналу з оцінок його інформативних параметрів.

Аналіз сигналу – процедура розкладу сигналу на складові по деякому базису. Пошук коефіцієнтів при ортах базису. Перехід від загального до часткового.

Синтез сигналу – процедура зворотна аналізу сигналу. Перехід від часткового до загального.

4.2 Первинна, вторинна та третинна обробка сигналів

Процес вимірювань містить у собі наступні етапи:

- первинна обробка;
- вторинна обробка;
- аналіз отриманої інформації.

Первинна обробка передбачає приведення вимірювальної інформації з даного параметра до фізичного виду. При цьому враховуються методичні погрішності виміру, нелінійність датчиків і масштабування. Крім того, проводиться фільтрація параметра й видалення аномальних вимірів.

Вторинна обробка служить для визначення характеристик динамічних систем по сукупності обмірюваних параметрів. При цьому виникають наступні задачі, які вирішуються алгоритмічно на ЕОМ:

- виявлення зміни параметра стану об'єкта;
- виявлення відходу параметра від заданого значення;
- згладжування й екстраполяція параметрів.

В основі вторинної обробки лежить виконання математичних перетворень вигляду:

$$X = f\left(p_1 \ldots p_n; M_1 \ldots M_m\right)$$

де X - досліджувана характеристика об'єкта; p_i - вимірювані параметри; M_m - коефіцієнти.

Характер коефіцієнтів може бути двоякий - постійні коефіцієнти й коефіцієнти, що є функцією одного, або декількох параметрів.

Математична обробка результатів вимірювань містить у собі ряд логічних, арифметичних і інших перетворень. При цьому найбільш трудомісткими є трансцендентні операції (sin, cos, tg, ctg, ln, lg, ex та ін.). В обчислювальній математиці в застосуванні до ЕОМ обчислення таких функцій проводиться шляхом подання їх у вигляді рядів, тобто зведення до арифметичних операцій. Однак це вимагає великого машинного часу й утрудняє обробку інформації в реальному масштабі часу. У зв'язку із цим більш кращим є зберігання таких функцій у вигляді таблиць. Однак при цьому потрібні більші об'єми пам'яті. Крім того, розкладання в ряди випадкових функцій украй важко.

Тому що практично всі процеси в природі й техніку носять випадковий характер і описуються стохастичними динамічними моделями, то під вторинною обробкою будемо розуміти статистичну задачу алгоритмічного визначення чисельних значень параметрів об'єкта як функцій часу.

При цьому висунемо наступні вимоги:

- мінімум витрат об'ємів пам'яті;
- робота в реальному часі (мінімум витрат часу на обчислення);
- виключення впливу випадкових впливів на точність результату виміру;

Основними процедурами статистичних методів вимірювання є оцінювання й фільтрація. Оцінювання - одержання нерекурентних оцінок - не здатне забезпечити роботу в реальному масштабі часу, вимагає більших витрат пам'яті. Оцінювання може бути використане для обробки стаціонарних процесів, або таких процесів, нестаціонарність яких зв'язана лише зі зміною математичного очікування.

4.3 Обробка в амплітудній області (статистичний аналіз)

Статистичний аналіз виконується в амплітудній області. Він відповідає на такі питання: як розподіляються дані, у якій області смороді знаходяться, яку саме значення випадає найбільш часто, яка величина середнього значення та дисперсії.

При аналізі реалізацій фізичних процесів функціонування будь-якої системи можна виділити два основних етапи:

А. Підготовка реалізацій досліджуваного фізичного процесу до аналізу.

1. Центрування – приведення значень реалізації до нульового середнього значення та одиничної дисперсії.

1.1. Знаходження вибіркового середнього значення: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$, де x_i – поточне значення у вибірці; *N* – кількість відліків вибірки.

1.2. Перетворення x_i до наступного вигляду: $y_i = x_i - \bar{x}$.

1.3. Знаходження середньоквадратичного відхилення:

$$D^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i)^2 \qquad D = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i)^2}$$

та дисперсії .

1.4. Перетворення y_i до наступного вигляду: $z_i = \frac{y_i}{D}$.

2. Видалення тренду.

2.1. Побудова лінії тренду (регресії) у вигляді $z_i' = ai\Delta t + b$ за методом найменших квадратів, або іншим.

2.2. Видалення тренду шляхом перетворення z_i до наступного вигляду: $s_i = z_i - z_i'$.

3. Фільтрація.

3.1. Застосування фільтру низьких частот для видалення високочастотних складових (завад).

Б. Оцінювання основних властивостей реалізацій досліджуваного фізичного процесу.

1. Побудова статистичного розподілу значень вибірки.

1.1. Побудова розподілу щільності ймовірності та гістограми.

1.2. Побудова функції ймовірності.

2. Перевірка гіпотез про належність розподілу вибірки до того чи іншого закону розподілу.

2.1. Перевірка гіпотези про закон розподілу за критерієм хі-квадрат.

2.2. Перевірка гіпотези про закон розподілу за критерієм Стьюдента.

2.3. Перевірка гіпотези про закон розподілу за критерієм Фішера.

3. Обчислення основних інформативних параметрів розподілу.

3.1. Обчислення перших чотирьох статистичних моментів.

3.2. Обчислення змішаного моменту.

4.4 Обробка в часовій області (кореляційний аналіз)

Кореляційний аналіз дає уявлення про такі властивості сигналу в часі, як швидкість зміни, тривалість сигналу без розкладання його на гармонічні складові. У якості такої часової характеристики широко застосовується кореляційна функція сигналу. Для сигналу $s(t)$ кінцевою тривалістю кореляційна функція визначається наступним виразом:

$$R_{SS}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt$$

,

де τ - величина часового зсуву сигналу.

Отже звідси можна зробити висновок, що $R_{SS}(\tau)$ характеризує ступінь зв'язку (кореляції) сигналу $s(t)$ зі своєю копією, що здвинута на величину τ по осі годині. Функція $R_{SS}(\tau)$ досягає максимуму при $\tau = 0$, тому що будь-який сигнал повністю корелірований сам з собою. При цьому максимальне значення кореляційної функціі дорівнює енергіі сигналу.

Кореляційний оператор використовується для визначення енергетичних характеристик як випадкових так і невипадкових сигналів.

Кореляційний аналіз включає в собі обчислення двох характеристик:

1. Автокореляційна функція:

$$R_{SS} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} s(t)s(t-\tau)dt, 0 \le t \le T$$

2. Взаємо кореляційна функція:

$$R'_{sx} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} s(t)x(t-\tau)dt, 0 \le t \le T$$

4.5 Обробка в частотній області (спектральний аналіз)

Види спектрів (потужності, миттєвий, середній)

Теорема Вінера-Хінчина

4.6 Обробка в частотно-часовій області

Двовимірне перетворення Фур'є, вейвлет-перетворення, чірплет-перетворення.

4.7 Оцінювання та фільтрація

Припустимо, що підлягаючі вимірюванню інформативні параметри $\lambda_i(t)$ корисного сигналу $s(t,\lambda(t),\xi(t))$ постійні на інтервалі спостереження ($\lambda_i(t)$ =const= λ, $t\in[0,T]$).

Перешкода $\xi(t)$, під якою розуміються помилки виміру параметрів сигналу, являє собою нормальний випадковий процес із відомою кореляційною функцією й рівним нулю математичним очікуванням. При цьому процес вимірювання полягає в одержанні вибірки значень $y_1, y_2, \dots, y_n$ функції $y(t)$ в моменти часу $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Таку процедуру називають оцінкою параметрів сигналу.

Методу оцінки параметрів сигналу на основі фіксованої вибірки властиві наступні недоліки.

- У процесі оцінки параметрів необхідно зберігати велику кількість результатів попередніх вимірювань, що при одночасному дослідженні декількох об'єктів приводить до збільшення машинної пам'яті.
- Кожна нова оцінка параметрів виходить незалежно від попередньої, отже, точність оцінки обмежена фіксованим числом використовуваних даних.
- Має місце затримка видачі оцінок параметрів.
- Припущення, що ($\lambda_i(t)$ =const= λ, $t\in[0,T]$)часто є неприпустимим і потрібне відстеження миттєвих значень мінливих інформаційних параметрів.

Для усунення відзначених недоліків використовуються рекурентні алгоритми обробки, що забезпечують послідовне (на кожному кроці) уточнення параметрів сигналу за результатами нових вимірів – фільтрацію.

У задачі фільтрації необхідно оцінювати процеси, тобто знаходити поточні оцінки мінливого в часі скалярного або векторного сигналу, перекрученого перешкодою й у силу цього недоступного безпосередньому спостереженню. На ряду з фільтрацією для одержання оцінок майбутніх або минулих значень сигналу, використовують різні відомі методи прогнозу або інтерполяції відповідно.

Розділ 5 Області застосування цифрової обробки сигналів

5.1 Процесори ЦОС

Нема рації перераховувати і давати оцінку можливостей ЦОС у різних галузях науки й техніки. З досить малою ймовірністю можна спробувати знайти галузь, де ЦОС ще не одержала широкого розповсюдження. Тому торкнемося тільки тих областей, де застосування ЦОС розвивається найбільш швидкими темпами.

Обробка даних у реальному часі звичайно виконується на спеціальних процесорах (чіпах) ЦОС. Вони, як правило, мають:

- Вбудовані перемножувачі або перемножувачі –накопичувачі, що працюють паралельно.
- Окремі шини й області пам'яті для програм і даних.
- Команди організації циклів.
- Більші швидкості обробки даних і тактові частоти.
- Використання конвеєрних методів обробки даних.

Тема 2 Цифрові фільтри обробки сигналів

Розділ 6 Поняття дискретної лінійної системи

6.1 Класифікація систем

Перетворення й обробка сигналів здійснюється в системах. Поняття сигналу й системи нерозривні, тому що будь-який сигнал існує в якій-небудь системі його обігу. Система обробки сигналів може бути реалізована як у матеріальній формі (спеціальний пристрій, вимірювальний прилад і т.п.), так і програмно на ЕОМ або на будь-якому іншому обчислювальному пристрої. Існують і комплексні вимірювально-обчислювальні системи (ВОС), які виконують як реєстрацію й первинну обробку сигналів безпосередньо в матеріальній формі їх представлення, так і перетворення сигналів у цифрову форму, і наступну програмну обробку. Форма реалізації систем істотного значення не має й визначає тільки їх можливості при аналізі й обробці сигналів.

6.1.1 Загальні поняття систем

Безвідносно до призначення й виконанню система завжди має вхід, на який подається вхідний сигнал або вхідний вплив, у загальному випадку багатомірне, і вихід, з якого знімається оброблений вихідний сигнал. Якщо пристрій системи й внутрішній операції перетворень принципового значення не мають, то система в цілому може сприйматися як “чорний ящик”, у формалізованому вигляді. Формалізована система являє собою певний системний оператор (алгоритм) перетворення вхідного сигналу – впливу $s(t)$, у сигнал на виході системи $y(t)$ – відгук або вихідну реакцію системи. Символічне позначення операції перетворення (трансформації):

$$y(t)=T\left[s(t)\right].$$

Системний оператор Т - це правило (набір правил, алгоритм) перетворення сигналу $s(t)$ в сигнал $y(t)$. Для загальновідомих операцій перетворення сигналів застосовуються також розширені символи операторів трансформації, де другим символом і спеціальними індексами позначається конкретний вид операції (як, наприклад, TF - перетворення Фур'є, TF^{-1} - зворотне перетворення Фур'є).

Вхідний сигнал системи може являти собою m - мірний вектор (m вхідних сигналів), а вихідний сигнал n - мірний вектор, при цьому система буде мати m входів і n виходів.

Для детермінованих вхідних сигналів співвідношення між вихідними й вхідними сигналами однозначно задається системним оператором. У випадку реалізації на вході системи випадкового вхідного процесу також існує однозначна відповідність процесів на виході й вході системи, однак при цьому одночасно відбувається зміна статистичних характеристик вихідного сигналу (математичного очікування, дисперсії, кореляційній функції та ін.), яке також визначається системним оператором.

Для визначення системи необхідно задати характер, тип і області припустимих величин вхідних і вихідних сигналів. Як правило, системи виконуються на сигнали одного типу по входу/виходу й підрозділяються на системи безперервного часу (аналогові або дискретні сигнали на вході й виході) і цифрові системи. Сукупність системного оператора Т и простору сигналів утворює математичну модель системи.

6.1.2 Лінійні системи

Будь-які перетворення сигналів супроводжуються зміною їх спектра й по характеру цих змін розділяються на два види: лінійні й нелінійні. До нелінійних відносять зміни, при яких у складі спектра сигналів з'являються нові гармонійні складові. При лінійних змінах сигналів змінюються амплітуди й/або початкові фази гармонійних складових спектра. Обидва види змін можуть відбуватися як зі збереженням корисної інформації, так і з її викривленням. Це залежить не тільки від характеру зміни спектра сигналів, але й від спектрального складу самої корисної інформації.

Лінійні системи становлять основний клас систем обробки сигналів. Термін лінійності означає, що система перетворення сигналів повинна мати довільну, але в обов'язковому порядку лінійний зв'язок між вхідним сигналом (порушенням) і вихідним сигналом (відгуком). У нелінійних системах зв'язок між вхідним і вихідним сигналом визначається довільним нелінійним законом.

Система вважається лінійною, якщо в межах установленої області вхідних і вихідних сигналів її реакція на вхідні сигнали адитивна (виконується принцип суперпозиції сигналів) і однорідна (виконується принцип пропорційної подоби).

Принцип адитивності вимагає, щоб реакція на суму двох вхідних сигналів була дорівнює сумі реакцій на кожний сигнал окремо:

$$T\left[a(t)+b(t)\right]=T\left[a(t)\right]+T\left[b(t)\right]$$

.

Принцип однорідності або пропорційної подоби вимагає збереження однозначності масштабу перетворення при будь-якій амплітуді вхідного сигналу:

$$T\left[c \times a(t)\right] = c \times T\left[a(t)\right]$$

.

Інакше кажучи, відгук лінійної системи на зважену суму вхідних сигналів повинен бути дорівнює зваженій сумі відгуків на окремі вхідні сигнали незалежно від їхньої кількості й для будь-яких вагових коефіцієнтів, у тому числі комплексних.

При програмній реалізації лінійних систем на ЕОМ особливих труднощів із забезпеченням лінійності в розумних межах значень вхідних і вихідних сигналів, як правило, не виникає. При фізичній (апаратній) реалізації систем обробки даних діапазон вхідних і/або вихідних сигналів, у якому забезпечується лінійність перетворення сигналів, завжди обмежений і повинен бути спеціально застережений у технічній документації або методичній інструкції.

6.1.3 Основні системні операції

До базових лінійних операцій, з яких можуть бути сформовані будь-які лінійні оператори перетворення, належать операції скалярного множення, зсуву й додавання сигналів:

$$y(t) = b \times x(t),$$
$$y(t) = x(t - \Delta t),$$
$$y(t) = a(t) + b(t).$$

Графічне відображення операцій (цифрова форма) наведено на рисунку 2.1.

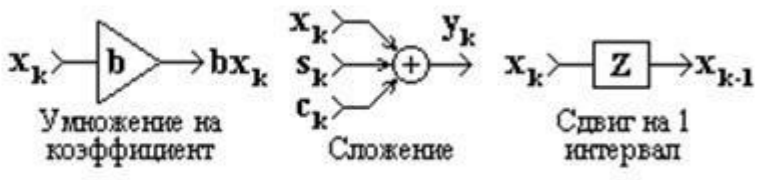


Рисунок 2.1 – Графіки системних операцій

Відзначимо, що операції додавання й множення є лінійними тільки для аналогових і дискретних сигналів. У випадку цифрових сигналів вони лінійні щодо самих цифрових сигналів, але якщо останні – результат операції амплітудно-цифрового перетворення, то додавання й множення не може вважатися лінійним абсолютно точно стосовно вихідних сигналів.

Для систем, з розмірністю 2 і більше існує також ще одна базова операція, яка називається операцією просторового маскування, яка може розглядатися як узагальнення скалярного множення. Так, для двовимірних систем:

$$z(x,y)=c(x,y)\cdot u(x,y)$$

,

де $u(x,y)$ – двовимірний вхідний сигнал,

$c(x,y)$ – просторова маска постійних (вагових) коефіцієнтів.

Просторове маскування являє собою поелементний добуток значень сигналу з коефіцієнтами маски.

6.1.4 Інваріантність систем до зсуву

Система називається інваріантної до зсуву (інваріантної в часі, а рівно й по будь-яких інших аргументах), якщо зсуву вхідного сигналу по аргументах викликає відповідне зсуву вихідного сигналу:

$$s(x,t)=T\left[a(x,t)\right],$$

$$T\left[a(x-\Delta x,t-\Delta t)\right]=s(x-\Delta x,t-\Delta t).$$

Лінійність і інваріантність до зсуву є незалежними властивостями систем і не визначають один одного. Так, наприклад, операція квадратування сигналу (зведення у квадрат усіх значень сигналу) інваріантна до зсуву, але нелінійна.

У теорії аналізу й обробки даних основне місце займають системи, лінійні й інваріантні до зсуву (ЛІС - системи). Вони мають досить широкі практичні можливості при відносній простоті математичного апарата. Надалі, якщо це спеціально не оговорюється, будемо мати на увазі саме такі системи.

Перевага, яка віддається ЛИС - системам у методах обробки інформації, базується на можливості розкладання вхідного сигналу кожної, як завгодно складної форми, на складові найпростіших форм, відгук системи на які відомий і добре вивчений, з наступним обчисленням вихідного сигналу у вигляді суми відгуків на всі складові вхідного сигналу. У якості найпростіших форм розкладання сигналів використовуються, як правило, одиничні імпульси й гармонійні складові. Перша застосовується при виставі сигналу в динамічній формі й використовує перетворення згортки, друга - частотне подання сигналу й перетворення Фур'є.

Іншої важливою особливістю ЛІС - систем є те, що будь-які їхні комбінації також є ЛІС - системами, а будь-яку складну ЛІС - систему можна розкласти на комбінації простих систем. Так, наприклад, при послідовному (каскадному) з'єднанні систем, коли вихідний сигнал однієї системи служить вхідним сигналом для другої і т.д., утворена система в цілому також є ЛИС - системою, якщо лінійні й інваріантні до зсуву всі системи, у неї вхідні, при цьому стосовно загальної системної операції перетворення порядок з'єднання вхідних у неї систем значення не має.

6.1.5 Математична модель системи

Математична модель системи задає зв'язок фізичних (програмних) елементів, що утворюють технічний пристрій, здатне сприймати зовнішній вплив $s(t)$ і формувати вихідну величину $y(t)$, певним чином залежну від впливу $x(t)$. В аналітичній формі цей зв'язок в аналоговій одномірній лінійній системі звичайно виражається лінійним диференціальним рівнянням:

$$\sum_{m=0}^{M} a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} = \sum_{n=0}^{N} b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n}$$

. (2.1)

При нормуванні до $a_0 = 1$, звідси випливає:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N} b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} - \sum_{m=1}^{M} a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m}$$

. (2.1’)

По суті, правою частиною цього виразу в самій загальній математичній формі відображається зміст операції перетворення вхідного сигналу, тобто задається оператор трансформації вхідного сигналу у вихідний.

Для однозначного розв'язку рівнянь (2.1) повинні задаватися початкові умови: значення розв'язку $y(0)$ і його похідних за часом у початковий (нульовий) момент часу. У фізичній системі ці значення визначаються початковою енергією в елементах, здатних її накопичувати. Вхідним впливом може бути довільний сигнал. Коефіцієнти a_m й b_n, які визначаються складом і властивостями системи, повинні бути відомими.

Як правило, розв'язок рівняння (2.1) складається із суми примушеної $y_{np}(t)$ й вільної $y_{св}(t)$ складових:

$$y(t) = y_{np}(t) + y_{св}(t)$$

.

У стійких системах $y_{св}(t)$ визначається параметрами системи (реакція на "ударне" вплив – одиничний "дельта-імпульс" або стрибок) і із часом загасає. Якщо вхідний вплив достатній гладке й не містить стрибків (розривів першого роду), то після закінчення певного часу загасання $y_{св}(t)$, який звичайно називають часом перехідного процесу, система переходить у динамічний режим, що встановився, а вихідний $y(t)$ сигнал визначається тільки $y_{np}(t)$ значенням і лінійно пов'язаний із вхідним $x(t)$ впливом .

Аналогічна модель у цифрової системи описується різницевими рівняннями:

$$\sum_{m=0}^{M} a_m y((k-m)\,\Delta t) = \sum_{n=0}^{N} b_n s((k-n)\,\Delta t)$$

(2.3)

$$y(k\Delta t) = \sum_{n=0}^{N} b_n s((k-n)\,\Delta t) - \sum_{m=1}^{M} a_m y((k-m)\,\Delta t)$$

(2.3')

Останнє рівняння можна розглядати як алгоритм послідовного обчислення значень $y(k\Delta t)$, k = 0,1,2, …, за значеннями вхідного сигналу $s(k\Delta t)$ й попередніх обчислених значень $y(k\Delta t)$ при відомих значеннях коефіцієнтів a_m, b_n і з урахуванням завдання певних початкових умов - значень $s(k\Delta t)$ і $y(k\Delta t)$ при $k<0$. Інтервал дискретизації в цифрових послідовностях відліків звичайно приймається рівним 1, тому що виконує тільки роль масштабного множника.

6.1.6 Нерекурсивні цифрові системи

При нульових значеннях коефіцієнтів a_m рівняння (2.2') переходить у рівняння дискретної згортки $x(k)$ з оператором b_n:

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n x(k-n) \qquad (2.3)$$

При встановлених значеннях коефіцієнтів b_n значення вихідних відліків згортки для будь-якого аргументу k визначаються поточним і "минулими" значеннями вхідних відліків. Така система називається нерекурсивною цифровою системою (НЦС).

Приклад найпростішої НЦС наведений на рисунку. 2.2.

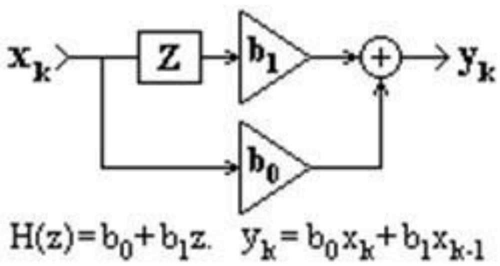


Рисунок 2.2 – Приклад НЦС

Інтервал підсумовування по n одержав назву "вікна" системи. Вікно системи (2.3) становить N+1 точку, система є однобічною каузальною, причинно обумовленою поточними й "минулими" значеннями вхідного сигналу, вихідний сигнал не випереджає вхідного. Каузальна система може бути реалізована апаратно в реальному масштабі часу. При $k < n$ проведення обробки вхідних даних можливо тільки при завданні певних початкових умов для точок $x(-k)$, $k=1,2,\dots,N$.

Як правило, у якості початкових умов приймаються нульові значення або значення відліку $x(0)$. Застосовується також парне або непарне продовження функції $x(k)$ на інтервал негативних значень k. Якщо при обробці даних початкові інтервали масивів $x(k)$ істотного значення не мають, то обробку можна починати з відліку $k=N$.

При обробці даних на ЕОМ обмеження по каузальності системного оператора знімається. У програмному розпорядженні системи можуть перебувати як "минулі", так і "майбутні" значення вхідних відліків, при цьому рівняння (2.3) буде мати вигляд:

$$y(k)=\sum_{n=-N'}^{N} b_n x(k-n) \qquad (2.3')$$

При $N'=N$ система називається двосторонньою симетричною. Симетричні системи, на відміну від каузальних, не змінюють фази оброблюваних сигналів.

Техніка виконання згортки в координатній області не відрізняється від техніки виконання звичайної дискретної згортки двох масивів даних.

Уявимо, що на одній смужці паперу виписано один по одному зверху вниз значення даних $x(k)$. На другій смужці паперу перебувають записані у зворотному порядку значення коефіцієнтів системи b_n. Для обчислення $y(k)$ розташовуємо другу смужк проти першої таким чином, щоб значення b_0 збіглося зі значенням $x(k)$, перемножуємо всі значення b_n з розташованими проти них значеннями $x(k-n)$ й підсумуємо результати перемножування. Результат підсумовування є вихідним значенням сигналу $y(k)$. Зрушуємо вікно системи - смужку коефіцієнтів b_k, на один відлік послідовності $x(k)$ вниз (один по одному зростання номерів k) або масив $x(k)$ зрушуємо на відлік нагору й обчислюємо аналогічно наступне значення, і т.д.

Описаний процес згортки в речовинній області масиву даних $x(k)$ з нерекурсивним оператором системи b_n (масивом вагових коефіцієнтів системи) звичайно називають нерекурсивною цифровою фільтрацією даних, а саму систему, якщо вона виконує тільки дану операцію, нерекурсивним цифровим фільтром (НЦФ).

6.1.7 Рекурсивні цифрові системи

Системи, які описуються повним різницевим рівнянням (2.2), прийнято називати рекурсивними цифровими системами (РЦС) або рекурсивними цифровими фільтрами (РЦФ), тому що в обчисленні поточних значень вихідного сигналу бере участь не тільки вхідний сигнал, але й значення вихідного сигналу, обчислені в попередніх циклах розрахунків.

З урахуванням останнього фактору рекурсивні системи називають системами зі зворотним зв'язком. Приклад рекурсивної системи наведено на рисунку 2.3.

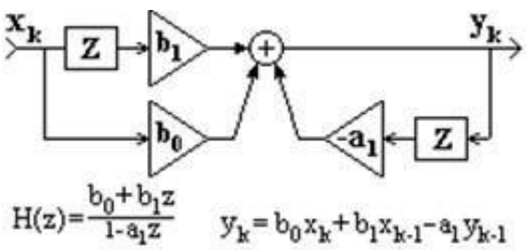


Рисунок 2.3 – Приклад РЦС

Повне вікно рекурсивної системи складається із двох складових: нерекурсивної частини b_n, аналогічної вікну нерекурсивної системи й обмеженої в роботі поточними й "минулими" значеннями вхідного сигналу (при реалізації на ЕОМ можливо використання й “майбутніх” відліків сигналу), і рекурсивної частини a_m, яка працює тільки з "минулими", раніше обчисленими значеннями вихідного сигналу. Техніка обчислень для РЦС наведено на рисунку 2.4.

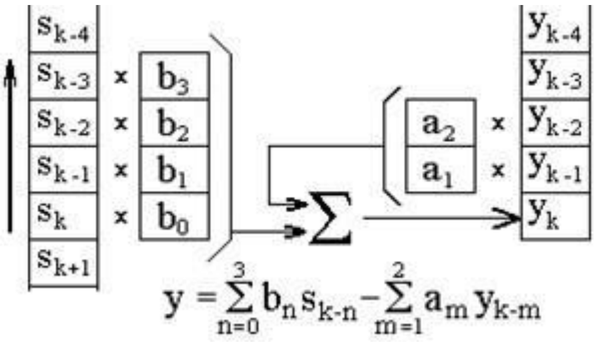


Рисунок 2.4 – Техніка обчислень у РЦС

6.1.8 Стаціонарні й нестаціонарні системи

Система вважається стаціонарною й має постійні параметри, якщо її властивості (математичний алгоритм оператора перетворення) у межах заданої точності не залежать від вхідного й вихідного сигналів і не змінюються ні в часі, ні від яких-небудь інших зовнішніх факторів. Математично це означає завдання системи рівняннями типу (2.1-2.2) з постійними значеннями коефіцієнтів a_j і b_i й реакція системи на який-небудь вплив не залежить від часу (координат) його додатка. А якщо ні, то система є нестаціонарною або параметричною (системою зі змінними параметрами).

Серед останніх велике значення мають так звані адаптивні системи обробки даних. У цих системах проводиться, наприклад, оцінювання певних параметрів вхідних і вихідних сигналів, за результатами порівняння яких здійснюється підстроювання параметрів перетворення (перехідні характеристики системи) таким чином, щоб забезпечити оптимальні по продуктивності умови обробки сигналів або мінімізувати погрішність обробки.

6.2 Цифрові фільтри

У загальному випадку терміном Цифровий фільтр називають апаратну або програмну реалізацію математичного алгоритму, входом якого є цифровий сигнал, а виходом – інший цифровий сигнал з певним чином модифікованою формою й/або амплітудною й фазовою характеристикою.

Класифікація цифрових фільтрів звичайно базується на функціональних ознаках алгоритмів цифрової фільтрації, згідно з яким ЦФ підрозділяються на 4 групи: фільтри частотної селекції, оптимальні (квазіоптимальні), адаптивні й евристичні.

6.2.1 Загальні поняття

В одномірній дискретній лінійній системі зв'язок між входом і виходом (вхідний і вихідний дискретними послідовностями значень сигналу – відліками), задається лінійним оператором перетворення TL:

$$y(k\Delta t) = TL\left[x(k\Delta t)\right]$$

.

Цей вираз відображає короткий запис лінійного різницевого рівняння:

$$\sum_{m=0}^{M} a_m y(k\Delta t - m\Delta t) = \sum_{n=0}^{N} b_n x(k\Delta t - n)\Delta t$$

(2.4)

де k = 0, 1, 2, …- порядковий номер відліків,

Δt - інтервал дискретизації сигналу,

a_m і b_n - речовинні або, у загальному випадку, комплексні коефіцієнти.

Покладемо $a_0 = 1$, що завжди може бути виконане відповідним нормуванням рівняння (2.4), і, приймаючи надалі $\Delta t = 1$, тобто переходячи до числової нумерації цифрових послідовностей значень сигналів, приведемо його до виду:

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n x(k-n) - \sum_{m=1}^{M} a_m y(k-m)$$

(2.5)

Оператор, представлений правою частиною даного рівняння, одержав назву цифрового фільтра (ЦФ), а виконувана їм операція - цифрової фільтрації даних (інформації, сигналів). Якщо хоча б один з коефіцієнтів a_m або b_n залежить від змінної k, то фільтр називається параметричним, тобто зі змінними параметрами. Нижче ми будемо розглядати фільтри з постійними коефіцієнтами (інваріантними по аргументу).

6.2.2 Основні переваги цифрових фільтрів

- Цифрові фільтри можуть мати параметри, реалізація яких неможлива в аналогових фільтрах, наприклад, лінійну фазову характеристику.

- ЦФ не вимагають періодичного контролю й калібрування, тому що їхня працездатність не залежить від дестабілізуючих факторів зовнішнього середовища, наприклад, температури.

- Один фільтр може обробляти кілька вхідних каналів або сигналів.

- Вхідні й вихідні дані можна зберігати для наступного використання.

- Точність цифрових фільтрів обмежена тільки використовуваною розрядністю відліків (довжиною слів).

- Фільтри можуть використовуватися при дуже низьких частотах і у великому діапазоні частот, для чого досить тільки змінювати частоту дискретизації даних.

6.2.3 Нерекурсивні фільтри

При нульових значеннях коефіцієнтів a_m рівняння (2.5) переходить у рівняння лінійної дискретної згортки функції $x(k)$ з оператором b_n:

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n x(k-n) \quad (2.6)$$

Значення вихідних відліків згортки (2.6) для будь-якого аргументу k визначаються поточним і "минулими" значеннями вхідних відліків. Такий фільтр називається нерекурсивним цифровим фільтром (НЦФ). Інтервал підсумовування по n одержав назву "вікна" фільтра.

Вікно фільтра становить N+1 відлік, фільтр є однобічним каузальним, тобто причинно обумовленим поточними й "минулими" значеннями вхідного сигналу, і вихідний сигнал не може випереджати вхідного. Каузальний фільтр може бути реалізований фізично в реальному масштабі часу. При $k < n$, а також при $k < m$ для фільтра (2.5), проведення фільтрації можливо тільки при завданні початкових умов для точок $x(-k),\ k = 1, 2, \ldots, N$, і $y(-k),\ k = 1, 2, \ldots, M$. Як правило, у якості початкових умов ухвалюються нульові значення, або продовження перших відліків вхідних сигналів або його тренда назад по аргументу.

При обробці даних на ЕОМ обмеження по каузальності знімається. У програмному розпорядженні фільтра можуть перебувати як "минулі", так і "майбутні" значення вхідної послідовності відліків щодо поточної крапки обчислень k, при цьому рівняння (2.6) буде мати вигляд:

$$y(k) = \sum_{n=-N'}^{N} b_n x(k-n) \qquad (2.7)$$

При $N' = N$ фільтр називається двостороннім симетричним. Симетричні фільтри, на відміну від однобічних фільтрів, не змінюють фази оброблюваного сигналу.

Тому що реакція НЦФ на одиничний вхідний імпульс (а рівно й на будь-який довільний вхідний сигнал) завжди кінцева й обмежена розміром вікна фільтра, такі фільтри називають також фільтрами з кінцевої імпульсної характеристики (КІХ-фільтри).

Техніка виконання фільтрації не відрізняється від техніки виконання звичайної дискретної згортки двох масивів даних.

Представимо, що на одній смужці паперу виписано один по одному зверху вниз значення даних $x(k) \equiv s_k$ (рисунок 2.5).

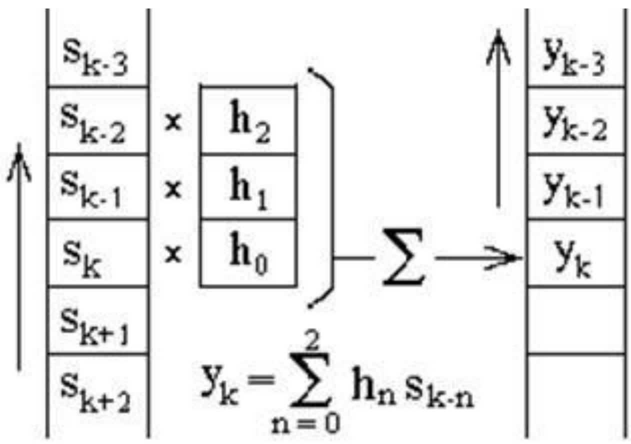


Рисунок 2.5 – Нерекурсивний ЦФ

На другій смужці паперу перебувають записані у зворотному порядку значення коефіцієнтів фільтра $b_n \equiv h_n$ (позначення h для коефіцієнтів операторів НЦФ є загальноприйнятим). Для обчислення $y_k \equiv y(k)$ розташовуємо другу смужк проти першої таким чином, щоб значення h_0 збіглося зі значенням s_k, перемножуємо всі значення h_n з розташованими проти них значеннями s_{k-n}, і підсумуємо всі результати перемножування. Результат підсумовування є вихідним значенням сигналу y_k. Зрушуємо вікно фільтра -

смужку коефіцієнтів h_k, на один відлік послідовності s_k вниз (або масив s_k зрушуємо на відлік нагору) і обчислюємо аналогічно наступне значення вихідного сигналу, і т.д.

Описаний процес є основною операцією цифрової фільтрації, і називається згорткою у речовинній області масиву даних $x(k)$ з функцією (оператором) фільтра b_n (масивом коефіцієнтів фільтра). Для математичного опису поряд з формулами (2.6-2.7) застосовується також символічні форми запису фільтрації:

$$y(k) = b(n) * x(k-n) = b(n) \otimes x(k-n)$$

.

Сума коефіцієнтів фільтра визначає коефіцієнт передачі (посилення) середніх значень сигналу у вікні фільтра й постійної складової у цілому по масиву даних (з урахуванням початкових і кінцевих умов). Як правило, сума коефіцієнтів фільтра нормується до 1.

Є цілий ряд методів обробки даних, досить давно й широко відомих, які по суті ставляться до методів цифрової фільтрації, хоча й не називаються такими. Наприклад, методи згладжування відліків у ковзному вікні постійної тривалості. Так, для лінійного згладжування даних по п'яти точкам з однаковими ваговими коефіцієнтами використовується формула:

$$y_k = 0.2(x_{k-2} + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} + x_{k+2})$$

.

З позицій цифрової фільтрації це не що інше, як двосторонній симетричний нерекурсивний цифровий фільтр:

$$y_k = \sum_{n=-2}^{2} b_n x_{k-n} \quad b_n = 0.2$$

,

.

(2.8)

Аналогічно, при згладжуванні даних методом найменших квадратів (МНК) на основі кубічного рівняння:

$$y_k = \left(-3x_{k-2} + 12x_{k-1} + 17x_k + 12x_{k+1} - 3x_{k+2}\right)/35$$

(2.9)

$$b_0 = 17/35,$$
$$b_1 = b_{-1} = 12/35,$$
$$b_2 = b_{-2} = -3/35.$$

Це також НЦФ із коефіцієнтами:

Приклад 2.1.

Рівняння НЦФ: $y_k = \sum_{n=-2}^{2} b_n x_{k-n}$, $b_n = 0.2$. Початкові умови - нульові.

Вхідний сигнал – стрибок функції (щабель): x_k = {0,0,0,0,0,0,10,10,10,10,…}.

Вихідний сигнал: y_k = {0,0,0,0,2,4, 6, 8,10,10,10,10,…}.

Результат фільтрації наведений на рисунку. 2.6(А). Перевірте результат (виконайте фільтрацію, як це показане на рисунку. 2.5, з урахуванням парності фільтра).

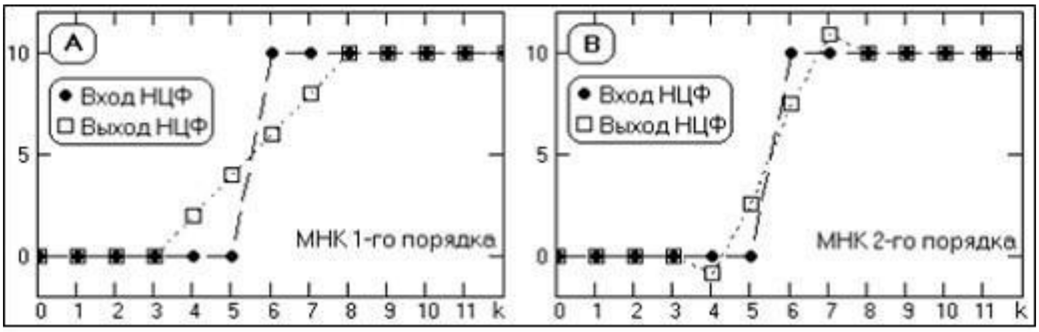


Рисунок 2.6 – Згладжування МНК у ковзному вікні по п'яти точкам

Зауважимо: сума коефіцієнтів, що згладжують НЦФ завжди повинна бути рівна 1, при цьому сума значень масиву вихідного сигналу дорівнює сумі значень масиву вхідного сигналу. Координатна детальність вихідного сигналу нижче вхідного, різкі зміни вхідних сигналів "розмазуються" по аргументу.

Повторіть фільтрацію фільтром МНК на основі кубічного рівняння. Порівняйте результати фільтрації з результатами першого НЦФ (наведені на рисунку. 2.6(В)).

Для операції фільтрації характерні наступні основні властивості:

- Дистрибутивність: $h(n)\otimes[a(k)+b(k)]=h(n)\otimes a(k)+h(n)\otimes b(k)$.
- Комутативність: $h(n)\otimes a(k)\otimes b(k)=a(k)\otimes b(k)\otimes h(n)$.
- Асоціативність: $[a(k)\otimes b(k)]\otimes h(n)=h(n)\otimes a(k)\otimes b(k)$.

Фільтрація однозначно визначає вихідний сигнал $y(k)$ для встановленого значення вхідного сигналу $s(k)$ при відомому значенні імпульсного відгуку фільтра $h(n)$.

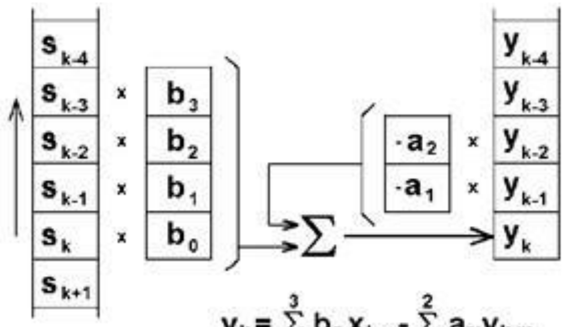
6.2.4 Рекурсивні фільтри

Фільтри, які описуються повним різницевим рівнянням (2.5):

$$y(k)=\sum_{n=0}^{N} b_n x(k-n)-\sum_{m=1}^{M} a_m y(k-m)$$

,

прийнято називати рекурсивними цифровими фільтрами (РЦФ), тому що в обчисленні поточних вихідних значень беруть участь не тільки вхідні дані, але й значення вихідних даних фільтрації, обчислені в попередніх циклах розрахунків. З урахуванням останнього фактору рекурсивні фільтри називають також фільтрами зі зворотним зв'язком, позитивним або негативним залежно від знака суми коефіцієнтів a_m. По суті, повне вікно рекурсивного фільтра складається із двох складових: нерекурсивної частини b_n, обмеженої в роботі поточними й "минулими" значеннями вхідного сигналу (при реалізації на ЕОМ можливо використання й “майбутніх” відліків сигналу) і рекурсивної частини a_m, яка працює тільки з "минулими" значеннями вихідного сигналу. Техніка обчислень для РЦФ наведена на рисунку. 2.7.



$$y_k=\sum_{n=0}^{3} b_n x_{k-n}-\sum_{m=1}^{2} a_m y_{k-m}$$

Рисунок 2.7 – Рекурсивний ЦФ

Приклад 2.2.

Рівняння РЦФ: $y_k = b_0 x_k + a_1 y_{k-1}$, при $b_0 = a_1 = 0.5,\ y_{-1} = 0$.

Вхідний сигнал: x_k = {0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1....}

Розрахунки вихідного сигналу:

$$y_0 = 0,5x_0 + 0,5y_{-1} = 0;$$
$$y_1 = 0,5x_1 + 0,5y_0 = 0;$$
$$y_2 = 0,5x_2 + 0,5y_1 = 0,5;$$
$$y_3 = 0,5x_3 + 0,5y_2 = 0,25;$$
$$y_4 = 0,5x_4 + 0,5y_3 = 0,125;$$

и т.д.

Вихідний сигнал: y_k = {0, 0, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125, 0.015625,...}(Рисунок 2.8).

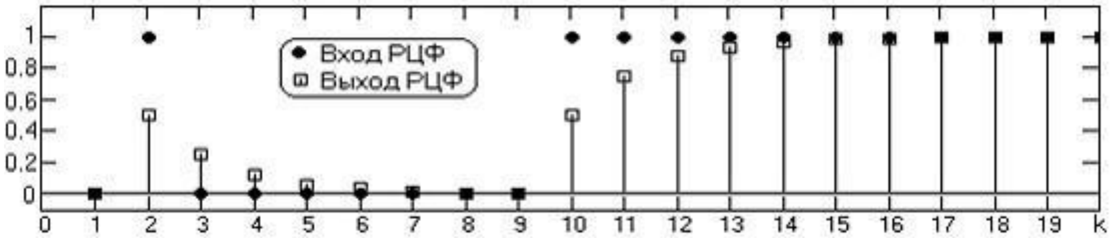


Рисунок 2.8 – Рекурсивна фільтрація

Із прикладу можна бачити, що реакція РЦФ на кінцевий вхідний сигнал (наприклад, на одиничний імпульс Кронекера в точці 2), у результаті діючого позитивного зворотного зв'язку, у принципі, може мати нескінченну тривалість (у цьому випадку із близькими до нуля, але не нульовими значеннями), на відміну від реакції НЦФ, яка завжди обмежена кількістю членів b_k (вікном фільтра). Фільтри такого типу називають також фільтрами з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ-фільтри).

Приклад 2.3.

Рівняння РЦФ: $y_k = b_0x_k - a_1y_{k-1}$, при $b_0 = 0.5, a_1 = 1.1, y_{-1} = 0$.

Вхідний сигнал: x_k = {0, 10, 0, 0, 0,....}.

Вихідний сигнал: y_k = {0,0,5,-5.5,6.05,-6.655,7.321,-8.053,8.858,-9.744,10.718,-11.79,… і т.д.}

Зауважимо: коефіцієнт зворотного зв'язку більше $a_1 > 1$ й вихідний сигнал іде "у рознос" (Рисунок 2.9).

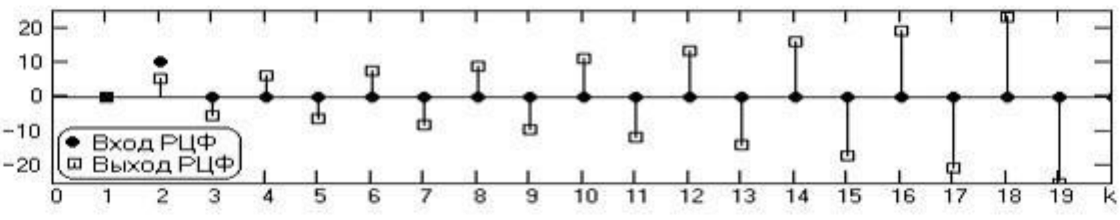


Рисунок 2.9 – Нестійкий рекурсивний фільтр

Операції, що належать до рекурсивної фільтрації, також відомі у звичайній практиці, наприклад - інтегрування. При інтегруванні по формулі трапецій:

$$y_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} + y_{k-1}$$

, (2.10)

т.ч. тут ми маємо РЦФ із коефіцієнтами: $b_0 = b_1 = 0.5,\ a_1 = 1$.

Приклад 2.4.

Рівняння РЦФ: $y_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} + y_{k-1}$, початкові умови - нульові.

Вхідний сигнал: x_k ={0,0,2,2,4,0,0,0,4,4,4,0,0,0,5,0,0,0,....}

Виконайте фільтрацію.

Контроль: y_k = {0,0,0,1,3,6,8,8,8,10,14,18,20,20,20,22.5,25,25,25...} (рисунок 2.10).

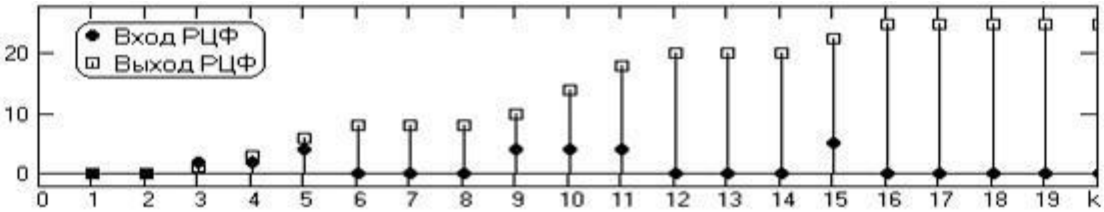


Рисунок 2.10 – Інтегруючий рекурсивний фільтр

6.3 Структурні схеми цифрових фільтрів

6.3.1 Структурні схеми

Алгоритми цифрової фільтрації сигналів (цифрових фільтрів) представляються у вигляді структурних схем, базові елементи яких показано на рисунку 2.11 разом із прикладами структурних схем фільтрів. Як правило, структурні схеми відповідають програмній реалізації фільтрів на ЕОМ, але не визначають апаратної реалізації в спеціальних радіотехнічних пристроях, яка може суттєво відрізнятися від програмної реалізації.

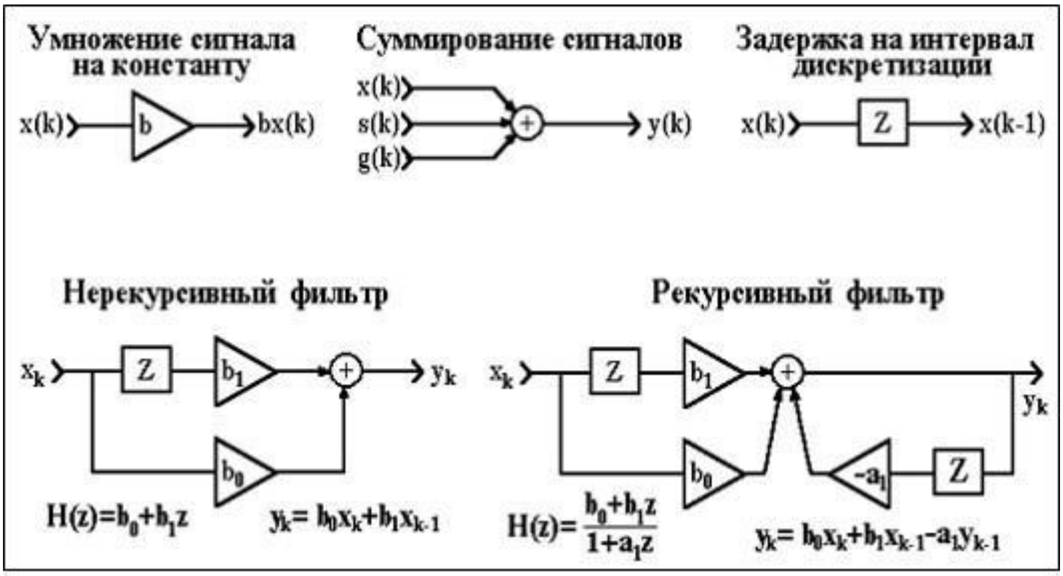


Рисунок 2.11 – Структурні схеми цифрових фільтрів

3.2 Графи фільтрів

Поряд зі структурною схемою фільтр може бути представлений у вигляді графа, який відображає діаграму проходження сигналів, і складається з направлених гілок і вузлів.

Приклад структурної схеми фільтра з передаточною функцією $H(z)=\frac{1+b_1z}{1+a_1z}$ й графа, їй відповідного, наведено на рисунку 2.12.

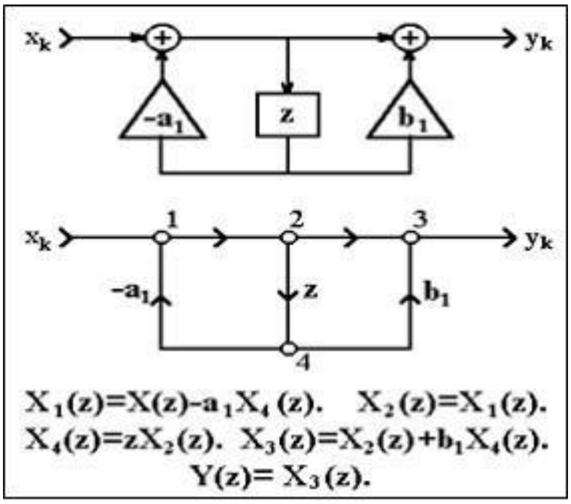


Рисунок 2.12 – Граф фільтра

З кожним і - вузлом графа пов'язане значення сигналу $x_i(k)$ або його образа $X_i(z)$, які визначаються сумою всіх сигналів або z-образів вхідних у вузол гілок. У кожній ij гілці (з вузла і у вузол j) відбувається перетворення сигналу відповідно до передатної функції гілки, наприклад затримка сигналу або множення на коефіцієнт.

6.3.3 З'єднання фільтрів

Розрізняють наступні з'єднання фільтрів.

6.3.3.1 Послідовне з'єднання (Рисунок 2.13). Вихідний сигнал попереднього фільтрає вхідним для наступного.

Еквівалентна Передавальна функція загальної системи дорівнює добутку передаточних функцій фільтрів, у неї вхідних: $H(z)=H_1(z)\cdot H_2(z)\cdot\ldots\cdot H_N(z)$.

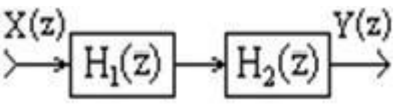


Рисунок 2.13 – Послідовне з'єднання

6.3.3.2 Паралельне з'єднання р 2.14). Сигнал подається на входи всіх паралельно з'єднаних фільтрів одночасно, вихідні сигнали фільтрів підсумуються.

Еквівалентна Передавальна функція загальної системи дорівнює сумі передаточних функцій фільтрів, у неї вхідних: $H(z)=H_1(z)+H_2(z)+\ldots+H_N(z)$.

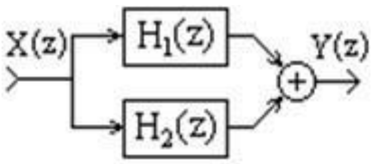


Рисунок 2.14 – Паралельне з'єднання

6.3.3.3 З'єднання зворотного зв'язку (рисунок 2.15). Вихідний сигнал першого фільтра подається на вихід системи й одночасно на вхід фільтра зворотному зв'язка, вихідний сигнал якого підсумується, зі знаком плюс або мінус залежно від виду зв'язку (негативної або позитивної), із вхідним сигналом системи.

Еквівалентна Передавальна функція системи:

$$H(z) = H_1(z) / \left(1 \pm H_1(z) \cdot H_2(z)\right)$$

.

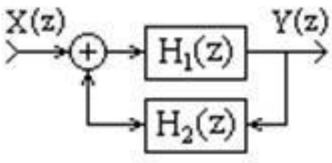


Рисунок 2.15 – З'єднання зворотного зв'язку

6.3.4 Схеми реалізації фільтрів

По принципах структурної реалізації фільтрів розрізняють наступні схеми:

6.3.4.1 Пряма форма (рисунок 2.16) реалізується безпосередньо по різницевому рівнянню:

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n x(k-n) - \sum_{m=1}^{M} a_m y(k-m)$$

,

або по передаточній функції

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n \Big/ 1 + \sum_{m=1}^{M} a_m z^m$$

.

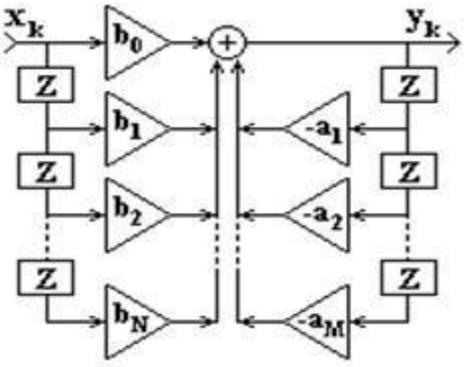


Рисунок 2.16 – Пряма форма

6.3.4.2 Пряма канонічна форма (рисунок 2.17) містить мінімальне число елементів затримки. Передаточну функцію РЦФ можна представити в наступному виді:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

,

$$H_1(z) = \frac{V(z)}{X(z)} = 1 \Big/ 1 + \sum_{m=1}^{M} a_m z^m$$

,

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n$$

.

Звідси:

$$v(k) = x(k) - \sum_{m=1}^{M} a_m v(k-m)$$

, (2.10)

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n v(k-n)$$

. (2.11)

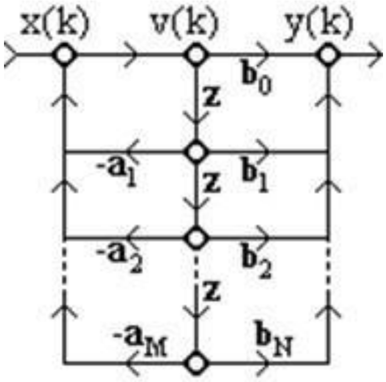


Рисунок 2.17 – Пряма канонічна форма

У різницевих рівняннях (2.10-2.11) здійснюється тільки затримка сигналів $v(k)$. Граф реалізації РЦФ у прямій канонічній формі наведено на рисунку 2.17.

6.3.4.3 Каскадна (послідовна) форма відповідає уявленню передаточної функції у вигляді добутку:

$$H(z)=\prod_{i=1}^{k}H_i(z).$$

$H_i(z)$ – складові функції виду $(1-r_i z)/(1-p_i z)$ при виставі $H(z)$ у факторизованої формі, де r_i і p_i - нулі й полюси функції $H(z)$.

У якості функцій $H_i(z)$ звичайно використовуються передаточні функції біквадратних блоків - фільтрів другого порядку:

$$H_i(z)=\left(b_{0i}+b_{1i}\cdot z+b_{2i}\cdot z^2\right)/\left(1+a_{1i}\cdot z+a_{2i}\cdot z^2\right).$$

6.3.4.4 Паралельна форма використовується багато рідше, і відповідає уявленню передаточної функції у вигляді суми біквадратних блоків або більш простих функцій.

6.3.5 Обернені форми

У теорії лінійних спрямованих сигнальних графів існують процедури перетворення вихідних графів зі збереженням передаточних функцій. Одна з таких процедур - обертання (транспозиція) графів, яка виконується шляхом зміни напрямку всіх гілок ланцюга, при цьому вхід і вихід графа також міняються місцями.

Для ряду систем така транспозиція дозволяє реалізувати більш ефективні алгоритми обробки даних. Приклад обігу графа прямої канонічної форми рекурсивної системи (з перебудуванням графа на звичне розташування входу з лівої сторони) наведений на рисунку. 2.18.

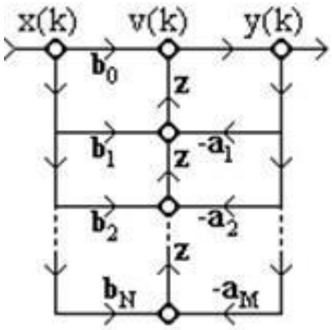


Рисунок 2.18 – Паралельна форма

Розділ 7 Аналіз та синтез лінійних дискретних систем

7.1 Імпульсна реакція фільтрів

7.1.1 Функція відгуку

Якщо на вхід нерекурсивного фільтра подати одиничний імпульс (імпульс Кронекера), розташований у точці k = 0, то на виході фільтра ми одержимо його реакцію на одиничний вхідний сигнал (формула 2.6), яка визначається ваговими коефіцієнтами b_n оператора фільтра:

$$y(k) = TL\left[\delta(0)\right] = b_n \otimes \delta(k-n) = h(k) \equiv b_n$$

.
(2.12)

Для рекурсивних фільтрів реакція на імпульс Кронекера залежить як від коефіцієнтів b_n фільтра, так і від коефіцієнтів зворотного зв'язку a_m.

З використанням формули (2.5):

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n \delta(k-n) - \sum_{m=1}^{M} a_m y(k-m) = h_k$$

(2.12')

Функція $h(k)$, яка зв'язує вхід і вихід фільтра по реакції на одиничний вхідний сигнал і однозначно визначається оператором перетворення фільтра, одержала назву імпульсного відгуку фільтра (функції відгуку).

Якщо довільний сигнал на вході фільтра представити у вигляді лінійної комбінації зважених імпульсів Кронекера

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) x(k-n)$$

,

те, з використанням функції відгуку, сигнал на виході фільтра можна розглядати як суперпозицію запізнілих імпульсних реакцій на вхідну послідовність зважених імпульсів:

$$y(k) = \sum_{n} h(n)\left(\delta(n) x(k-n)\right) \equiv \sum_{n} h(n) x(k-n)$$

.

Для нерекурсивних фільтрів межі підсумовування в останньому виразі встановлюються безпосередньо по довжині імпульсного відгуку $h(n)$. Для рекурсивних фільтрів довжина імпульсного відгуку, у принципі, може бути нескінченною.

7.1.2 Визначення імпульсної реакції

Визначення імпульсної реакції на практиці потрібно, як правило, тільки для рекурсивних фільтрів, тому що імпульсна реакція для НЦФ при відомих значеннях коефіцієнтів $b(n)$, як це випливає з виразу (2.12), спеціального визначення не вимагає: $h(n) \equiv b(n)$.

Якщо вираз для системи відомо в загальній формі (2.5), визначення імпульсної реакції проводиться підстановкою в рівняння системи імпульсу Кронекера з координатою k = 0 при нульових початкових умовах. Відповідно до виразу (2.12) сигнал на виході системи буде являти собою імпульсну реакцію системи.

Приклад 2.5.

Рівняння РЦФ: $y_k = x_k + 0,5 y_{k-1}$.

Вхідний сигнал: $x_k = \delta_0 = \{1, 0, 0, 0, \ldots\}$

Розрахунки вихідного сигналу при нульових початкових умовах:

$$y_0 = x_0 + 0,5 y_{-1} = 1 + 0 = h_0,$$
$$y_1 = x_1 + 0,5 y_0 = 0 + 0,5 = h_1,$$
$$y_2 = x_2 + 0,5 y_1 = 0 + 0,25 = h_2,$$

і т.д.

Імпульсний відгук фільтра: $h_k = (0,5)^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

Визначення імпульсної реакції фізичної системи звичайно проводиться подачею на вхід системи східчастої функції (функції Хевісайда), яка рівна $u(k) = \begin{cases} 1, & k \ge 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$:

$$g(k) = \sum_{n=0}^{N} h(n) u(k-n) = \sum_{n=0}^{k} h(n).$$

Звідси: $h(k) = g(k) - g(k-1)$.

Функція $g(k)$ одержала назву перехідної характеристики системи (переходу з одного статичного стану в інший). Форму реакції фільтра на функцію Хевісайда можна бачити на рисунку. 2.7 (с точки k = 10 і далі) у зіставленні з реакцією на імпульс Кронекера в точці k = 2.

7.1.2.1 Імпульсний відгук системи

По визначенню, імпульсними характеристиками систем (другий широко використовуваний термін - імпульсний відгук систем) називаються функції $h(t)$ для аналогових і $h(k\Delta t)$ для цифрових систем, які є реакцією (відгуком) систем на одиничні вхідні сигнали: дельта-функцію $\delta(t)$ для аналогових і імпульс Кронекера $\delta(k\Delta t)$ для цифрових систем, що надходять на вхід систем відповідно при t=0 і k=0. Ця реакція однозначно визначається оператором перетворення:

$$y(t) = T\left[\delta(t)\right] \equiv h(k) \qquad (2.13)$$

$$y(k\Delta t) = T\left[\delta(k\Delta t)\right] \equiv h(k\Delta k) \qquad (2.13')$$

Імпульсний відгук аналогової системи, як результат операції над дельта-функцією, у певній мірі являє собою математичну абстракцію ідеального перетворення. Із практичної точки зору під імпульсним відгуком аналогової системи можна розуміти математичне відображення реакції системи на вхідний сигнал довільної форми із площею, рівної 1, якщо тривалість сигналу дуже мала в порівнянні згодом реакції системи або з періодом її власних коливань. Під часом (довжиною) реакції системи звичайно розуміють інтервал, на якому значення функції $h(t)$ суттєво відрізняються від нуля після припинення дії одиничного сигналу на її вході.

Для цифрових систем імпульсний відгук однозначно визначається реакцією системи на імпульс Кронекера $\delta(k\Delta t)=1$ при k=0. Функцію імпульсного відгуку називають також ваговою функцією системи.

На рисунку 2.18 наведений приклад імпульсного відгуку $h(t)$ інтегруючого RC-кола.

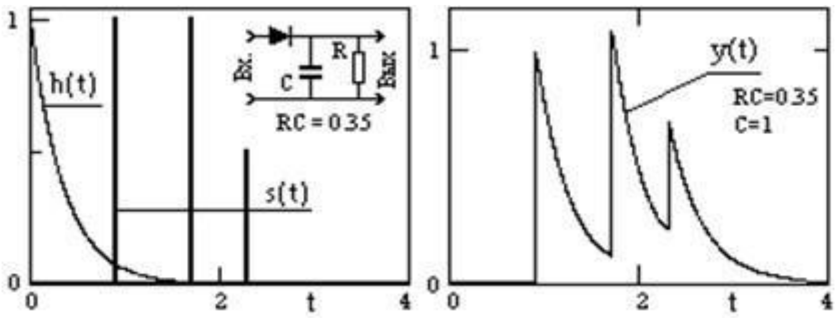


Рисунок 2.18 – Імпульсний відгук системи $h(t)$,вхідний сигнал $s(t)$ і вихідна реакція системи $y(t)$

При подачі на вхід Rc-Ланцюга імпульсу заряду Δq ємність Із заряджається до напруги $V_0 = \Delta q / C$ й починає розряджатися через опір R, при цьому напруга на ній змінюється за законом $V(t)=V_0 \cdot \exp(-t/RC)=\Delta q/C \cdot \exp(-t/RC)$.

Звідси, відгук Rc-Ланцюга по вихідній напрузі на вхідний сигнал $\Delta q = 1$: $h(t)=1/C \cdot \exp(-t/RC)$.

По суті, імпульсним відгуком системи $h(t)$ визначається частка вхідного сигналу, яка діє на виході системи після закінчення часу t після вступу сигналу на вхід (запізніла реакція системи).

7.1.2.2 Реакція системи на довільний сигнал

Якщо функція імпульсного відгуку системи відома, те, з урахуванням принципу суперпозиції сигналів у лінійній системі, можна виконати розрахунки реакції системи в будь-який довільний момент часу на будь-яку кількість вхідних сигналів з будь-якими моментами часу їх приходу шляхом підсумовування запізнілих реакцій системи на ці вхідні сигнали, як це показано на рисунку 2.18 для трьох вхідних імпульсів. У загальному випадку довільний сигнал на вході системи може бути розкладений у лінійну послідовність зважених одиничних імпульсів:

$$y(t)=T\left[s(t)\right]\equiv T\left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau\right]$$

На підставі принципу суперпозиції лінійний оператор T може бути внесений під знак інтеграла, тому що останній являє собою граничне значення суми. При цьому операція перетворення діє тільки по змінній t:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)T\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

Це вираз являє собою інтеграл Дюамеля або згортку (конволюцію) вхідного сигналу з імпульсної характеристикою системи. Заміною змінних $t-\tau=\tau$ можна переконатися в тому, що ця операція, як і має бути згортку, комутативна:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)s(t-\tau)\,d\tau$$

Аналогічно, для дискретних сигналів:

$$y(k\Delta t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t)h(k\Delta t-n\Delta t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta t)s(k\Delta t-n\Delta t)$$

(2.15’)

У символічній формі математичної представлення:

$$y(t)=s(\tau)\otimes h(t-\tau)=s(t-\tau)\otimes h(\tau)\equiv s(t)\otimes h(t)$$

.

У реальних фізичних системах імпульсний відгук $h(t)$ дорівнює нулю при t<0 (реакція на виході системи не може випереджати вхідний сигнал) і, як правило, відмінний від нуля тільки на певному інтервалі r, по якому й ведеться інтегрування або підсумовування у виразеннях згортки. При обробці даних на ЕОМ вимог по однобічності імпульсного відгуку не пред'являється, так само як і по його розмірах вперед та назад від нуля по координатах.

7.1.2.3 Посилення постійної складової сигналу

Подамо на вхід системи постійний сигнал $s(t)=A$. При цьому сигнал на виході системи:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(h(\tau)s(t-\tau)\right)d\tau=A\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)d\tau=A\cdot K_{nc}$$

. (2.16)

т.ч. площа імпульсного відгуку (для цифрової системи відповідно сума коефіцієнтів імпульсного відгуку) є коефіцієнтом K_{nc} підсилення постійної складовій вхідного сигналу. Якщо при обробці сигналів повинні змінюватися тільки динамічні характеристики їх форми без зміни постійної складової, а рівно й різних постійних рівнів (тла, п'єдесталів, регіональних трендів і т.п.), то площа імпульсного відгуку (сума коефіцієнтів) повинна нормуватися до одиниці.

На рисунку 2.19 наведений приклад виконання згортки розглянутої нами вище Rc-Ланцюгом при нормованій до 1 площі імпульсного відгуку $h(\tau)$. Вхідний сигнал $s(t)$ перебуває на постійному фоновому значенні, у цьому випадку - нульовому, при цьому, як і слід було сподіватися, площа вихідного сигналу $y(t)$ дорівнює площі вхідного сигналу.

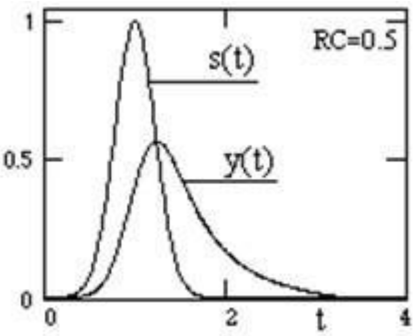


Рисунок 2.19 – Приклад виконання згортки Rc-Ланцюга

7.1.2.4 Посилення шумів

Критерієм якості системи при використанні будь-якого методу обробки інформації можна вважати виконання цільового призначення з мінімальним посиленням шумів (максимальним їхнім пригніченням).

Припустимо, що система має нормований до 1 імпульсний відгук $h(k)$. Позначимо через $\varepsilon(k)$ адитивний шум з математичним очікуванням $M\{\varepsilon(k)\}=\overline{\varepsilon}=0$ і дисперсією $D_\varepsilon=\sigma^2$, який у сумі із сигналом надходить на вхід системи. Значення $\varepsilon(k)$ статистично незалежні й некорелировані із сигналом.

З урахуванням перешкоди у вхідному сигналі значення сигналу на виході системи:

$$y(k)=\sum_n h(n)\left[x(k-n)+\varepsilon(k-n)\right]$$

Математичне очікування значень вихідного сигналу:

$$M\{y(k)\}=\sum_n h(n)\left[x(k-n)+M\{\varepsilon(k-n)\}\right]=\sum_n h(n)x(k-n)$$

Обчислимо дисперсію розподілу відліків вихідного сигналу:

$$D\{y(k)\}=M\left\{\sum_n h(n)\left[x(k-n)+\varepsilon(k-n)-M\{y(k)\}\right]^2\right\}=M\left\{\left[\sum_n h(n)\varepsilon(k-n)\right]^2\right\}$$

Якщо праву частину останнього виразу представити у вигляді

$$M\left\{\left[\sum_n h(n)\varepsilon(k-n)\right]\cdot\left[\sum_m h(m)\varepsilon(k-m)\right]\right\}$$

,

то в цьому виразі математичні сподівання всіх членів добутку зі співмножниками $\varepsilon(n), \varepsilon(m)$ при $n\neq m$ рівні 0 у чинність статистичної незалежності значень шуму. Залишаються тільки члени з $n=m$, тобто:

$$M\left\{\sum_n h^2(n)\varepsilon^2(k)\right\}=\sum_n h^2(n)M\left\{\varepsilon^2(k)\right\}=D_\varepsilon\sum_n h^2(n)=\sigma^2\sum_n h^2(n)$$

(2.17)

Звідси випливає, що сума квадратів значень нормованого імпульсного відгуку системи являє собою коефіцієнт підсилення адитивних шумів у вхідному сигналі.

Приклад 2.6.

фільтр, що згладжує $y(k)=0,2\sum_{n=-2}^{2}x(k-n)$: .

Коефіцієнт підсилення шумів: $5\cdot 0,2^2=0,2$.

Дисперсія шумів зменшується в $1/0,2=5$ раз.

Для систем з m входами й n виходами аналогічно визначаються парціальні імпульсні відгуки $h_{ij}(t)$, i = {1,2, ... ,n}, j = {1,2, ... ,m}, кожним з яких відображається сигнал на i-му виході при вступі сигналу $\delta(t)$ на j-й вхід. Повна сукупність імпульсних відгуків утворює матрицю:

$$\bar{h}(t)=\begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,m} \\ . & . & . & . \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \cdots & h_{n,m} \end{vmatrix},$$

а вираз згортки набуває вигляду:

$$\overline{U}_{вих}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{h}(t-\tau)\overline{u}_{вх}(\tau)d\tau.$$

7.2 Передавальні функції фільтрів

7.2.1 Z-Перетворення

Зручним методом розв'язку різницевих рівнянь лінійних систем є z-перетворення. Застосовуючи z-перетворення до обом частинам рівності (2.4), с урахуванням зсуву функцій ($y(k-m) \Leftrightarrow z^{m}Y(z)$), одержуємо:

$$Y(z)\sum_{m=1}^{M} a_m z^{m} = X(z)\sum_{n=0}^{N} b_n z^{n} \qquad (2.18)$$

де X(z),Y(z)- відповідні z-образи вхідного й вихідного сигналу.

Звідси, вважаючи $a_0 = 1$, одержуємо в загальній формі функцію зв'язку виходу фільтра з його входом - рівняння передаточної функції системи в z-області:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=0}^{N} b_n z^{n} \Bigg/ \left(1 + \sum_{m=1}^{M} a_m z^{m}\right) \qquad (2.19)$$

Для НЦФ, при нульових коефіцієнтах a_m:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^{n} \qquad (2.20)$$

При проектуванні фільтрів вихідною, як правило, є частотна Передавальна функція фільтра $H(\omega)$, по якій обчислюється її Z-Образ $H(z)$ і зворотним переходом у простір сигналів визначається алгоритм обробки даних. У загальній формі для вихідних сигналів фільтра:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z).$$

$$Y(z)\left(1+\sum_{m=1}^{M} a_m z^m\right) = X(z)\sum_{n=0}^{N} b_n z^n$$

$$Y(z) = X(z)\sum_{n=0}^{N} b_n z^n - Y(z)\sum_{m=1}^{M} a_m z^m$$

. (2.21)

Після зворотного Z-перетворення виразу (2.21):

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n \delta(k-n) - \sum_{m=1}^{M} a_m y(k-m) \qquad (2.22)$$

При подачі на вхід фільтра одиничного імпульсу Кронекера δ_0, що має z-образ $\delta(z) = z^n = 1$ сигнал на виході фільтра буде являти собою імпульсну реакцію фільтра $y(k) \equiv h(k)$, при цьому:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{\delta(z)} = Y(z) = TZ\left[y(z)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^k \qquad (2.23)$$

,

т.ч. Передавальна функція фільтра є z-образом його імпульсної реакції. При зворотному z-перетворенні передаточної функції відповідно одержуємо імпульсну характеристику фільтра:

$$h(k) \Leftrightarrow H(z) \qquad (2.24)$$

.

Якщо функція $H(z)$ представлена кінцевим статечним поліномом, що, як правило, характерно для НЦФ, що є Ких-Фільтрами, то зворотне z-перетворення здійснюється елементарно ідентифікацією коефіцієнтів по ступенях z.

Передавальна функція РЦФ також може бути представлена статечним поліномом прямим розподілом чисельника на знаменник правої частини виразу (2.19), однак результат при цьому може виявитися як кінцевим, так і нескінченним, тобто система може мати або кінцеву, або нескінченну імпульсну характеристику. Практично використовувані рекурсивні фільтри звичайно мають нескінченну імпульсну характеристику (НІХ-фільтри) при кінцевому числі членів алгоритму фільтрації (2.22).

Приклад 2.7.

Передавальна функція РЦФ: $H(z)=\dfrac{1-z^5}{1-z}$.

Прямим розподілом чисельника на знаменник одержуємо:
$H(z)=1+z+z^2+z^3+z^4$.

$H(z)\Leftrightarrow h(n)=\{1,1,1,1,1\}$. Фільтр РЦФ є КІХ-фільтром.

Приклад 2.8.

Передавальна функція: $H(z)=\dfrac{1}{1-2z}$.

Методом зворотного z-перетворення: $h(n)=2^n$. Фільтр РЦФ є НІХ - фільтром.

2.2 Стійкість фільтрів

Фільтр називається стійким, якщо при будь-яких початкових умовах реакція фільтра на будь-який обмежений вплив також обмежена. Критерієм стабільності фільтра є абсолютна збіжність відліків його імпульсного відгуку:

$$\Sigma_n|h(n)|<\infty \qquad (2.25)$$

Аналіз стабільності може бути проведений по передаточній функції.

У стійкій системі значення $H(z)$ повинне бути кінцевим у всіх точках z-площини, де $|z|<1$, а, отже, Передавальна функція не повинна мати особливих точок (полюсів) на й усередині одиничного кола на z-площині.

Полюси $H(z)$ визначаються коріннями багаточлена знаменника передаточної функції (2.19).

Приклад 2.9.

- Передавальна функція фільтра рисунку 2.7: $H(z)=\frac{b_0}{1-a_1 z}$.

При $a_1=0,5$ полюс знаменника: $z_p=2$. $|z_p|<1$. Фільтр стійкий.

- Передавальна функція фільтра рисунку 2.8: $H(z)=\frac{b_0}{1+a_1 z}$.

При $a_1=1,1$ полюс знаменника: $z_p=-0,909$. $|z_p|<1$. Фільтр нестійкий, що й підтверджує приклад фільтрації.

- Передавальна функція фільтра рисунку. 2.9: $H(z)=0,5\frac{1+z}{1-z}$.

Полюс знаменника: $z_p=1$. У принципі, фільтр нестійкий, але ця нестійкість проявляється тільки при $k=\infty$. Імпульсний відгук фільтра $h(n)$ = {0.5,1,1,1, ….}, сума якого рівна ∞ тільки при $n=\infty$, тобто при інтегруванні нескінченно більших масивів. При інтегруванні кінцевих масивів результат завжди кінцевий.

Наведений критерій стабільності належить до нескоротного дробу, тому що а якщо ні, то можлива компенсація полюса нулем передаточної функції, і слід перевірити наявність однозначних нулів і полюсів.

Перевірка на стійкість потрібно тільки для рекурсивних цифрових фільтрів (систем зі зворотним зв'язком), нерекурсивні системи завжди стійкі.

7.3 Частотні характеристики фільтрів

7.3.1 Загальні поняття

Від z-образів сигналів і передатних функцій підстановкою $z = \exp(-j\omega\Delta t)$ в рівняння (2.19) можна перейти до Фур'є-Образам функцій, тобто до частотних спектрів сигналів і частотної характеристики фільтрів, а точніше – до функцій їх спектральних щільність.

Можна застосувати й спосіб одержання частотних характеристик безпосередньо з різницевого рівняння системи обробки даних.

Тому що цифрова фільтрація належить до лінійних операцій, те, приймаючи для сигналу на вході фільтра вираз $x(k\Delta t) = B(\omega)\exp(j\omega\Delta t)$, ми маємо право очікувати на виході фільтра сигнал $y(k\Delta t) = A(\omega)\exp(j\omega\Delta t)$. Підставляючи ці вирази в різницеве рівняння фільтра (2.4), одержуємо:

$$\sum_{m=0}^{M} a_m A(\omega)\exp(j\omega k\Delta t - j\omega m\Delta t) = \sum_{n=0}^{N} b_n B(\omega)\exp(j\omega k\Delta t - j\omega n\Delta t),$$

$$A(\omega)\exp(j\omega k\Delta t)\sum_{m=0}^{M} a_m \exp(-j\omega m\Delta t) = B(\omega)\exp(j\omega k\Delta t)\sum_{n=0}^{N} b_n \exp(-j\omega n\Delta t),$$

$$A(\omega)\sum_{m=0}^{M} a_m \exp(-j\omega m\Delta t) = B(\omega)\sum_{n=0}^{N} b_n \exp(-j\omega n\Delta t) \qquad (2.26)$$

Передавальна частотна функція частотна характеристика при $a_0 = 1$:

$$H(\omega) = \frac{A(\omega)}{B(\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^{N} b_n \exp(-j\omega n\Delta t)}{1 + \sum_{m=0}^{M} a_m \exp(-j\omega m\Delta t)}. \qquad (2.27)$$

Неважко переконатися, що отримана частотна характеристика повторює функцію (2.19) при $z=\exp(-j\omega\Delta t)$, що й очікувалось. Аналогічно z-перетворенню (2.24), частотна характеристика фільтра являє собою Фур'є-образ його імпульсної реакції, і навпаки. При $\Delta t=1$:

$$H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\exp(-j\omega n)$$

(2.28)

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)\exp(j\omega n)\,d\omega$$

.
(2.29)

У загальному випадку $H(\omega)$ є комплексною функцією, модуль якої $R(\omega)$ називається амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ), а аргумент $\varphi(\omega)$ – фазово-частотною характеристикою (ФЧХ).

$$A(\omega)=\left|H(\omega)\right|=\sqrt{\mathrm{Re}^2 H(\omega)+\mathrm{Im}^2 H(\omega)}$$

$$\varphi(\omega)=arctg\,\frac{-\mathrm{Im}\,H(\omega)}{\mathrm{Re}H(\omega)}$$

.

Вибір знака фазового кута орієнтований на каузальні системи з негативним тимчасовим запізнюванням сигналів.

Припустимо, що система здійснює тільки зсув сигналу $x(t)$ вправо по часовій осі, т ч. $y(t)=x(t-\tau)$. Для перетворення Фур'є функції $y(t)$ маємо:

$$Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\exp(-j2\pi ft)\,dt=\exp(-j2\pi f t)\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,d$$

Звідси:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \exp(-j2\pi ft),$$

$$|H(f)| = 1,$$

$$\varphi_h(f) = -2\pi ft.$$

З останньої рівності випливає, що фаза являє собою пряму з негативним тангенсом кута нахилу $-2\pi f\tau$. Відповідно, для всіх каузальних фільтрів, що здійснюють перетворення з певною затримкою сигналу на виході, при виконанні операції над частотними складовими сигналу має місце:

$$Y(f) = H(f)\cdot X(f) = |H(f)|\exp(-j\varphi_h(f))\cdot|X(f)|\exp(-j\varphi_x(f)) = |H(f)|\cdot|X(f)|\exp\{j(\varphi_h($$

$$|Y(f)| = |H(f)|\cdot|X(f)|,$$

$$\varphi_y(f) = \varphi_h(f) + \varphi_x(f)$$

С урахуванням негативного знака $\varphi_h(f)$ фазової характеристики каузальних фільтрів це викликає зсув в "мінус" усіх частотних складових сигналу й відповідну затримку вихідного сигналу щодо вхідного.

На рисунках 2.20 - 2.22 наведені частотні характеристики фільтрів (модулі й аргументи спектральних плотностей), які були розглянуті вище в прикладах і на рисунках 2.7 – 2.9. Графіки наведені в границях головних діапазонів спектрів, і отримані безпосередньою підстановкою $z = \exp(-j\omega\Delta t)$ при $\Delta t = 1$ в рівняння передаточних функцій $H(z)$.

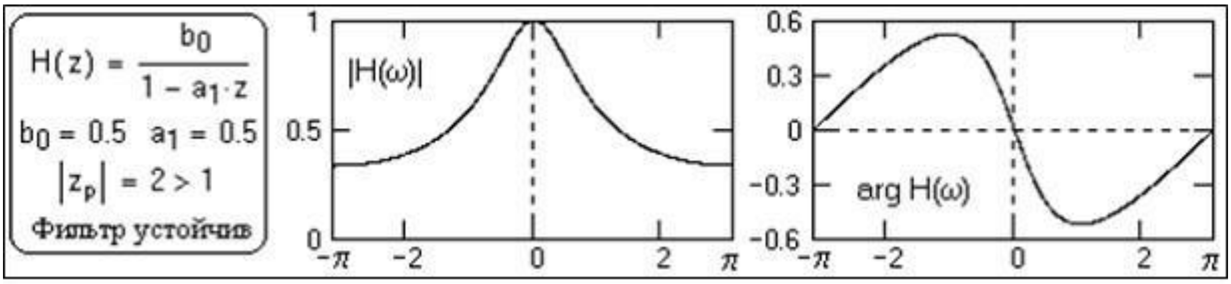


Рисунок 2.20 – Спектр не має особливих крапок

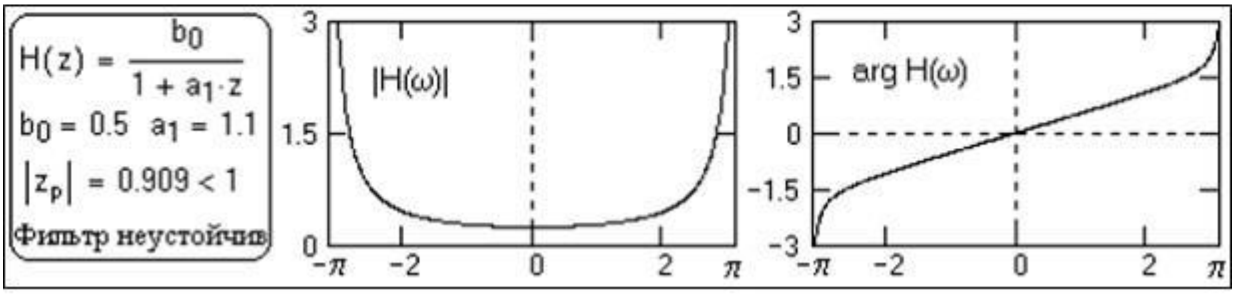


Рисунок 2.21 – Спектр має особливі точки на границях діапазонів

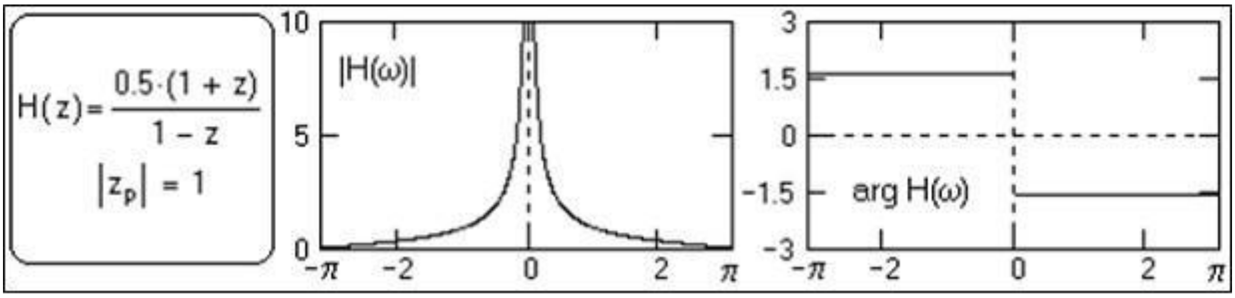


Рисунок 2.22 – Спектр інтегруючого фільтра. Особлива точка на нульовій частоті

При обробці обмежених масивів амплітуда центрального піка дорівнює кількості крапок масиву.

7.3.2 Основні властивості

Основні властивості частотних характеристик цифрових фільтрів:

1. Частотні характеристики є безперервними функціями частоти.

2. При дискретизації даних по інтервалах Δt функція $H(\omega)$ є періодичною. Період функції $H(\omega)$ дорівнює частоті дискретизації вхідних даних $F = \frac{1}{\Delta t}$. Перший низькочастотний період (по аргументу ω від $-\pi/\Delta t$ до $\pi/\Delta t$, по f від $-1/2\Delta t$ до $1/2\Delta t$) називається головним частотним діапазоном.

Граничні частоти головного частотного діапазону відповідають частоті Найквиста $\pm\omega_N,\ \omega=\pi/\Delta t$. Частота Найквіста визначає граничну частоту даних, яку здатний обробляти фільтр.

3. Для фільтрів з речовинними коефіцієнтами імпульсної реакції $h(n\Delta t)$ функція АЧХ є парною, а функція ФЧХ - непарної. З урахуванням цього частотні характеристики фільтрів звичайно задаються тільки на інтервалі додатних частот $0-\omega_N$ головного частотного діапазону. Значення функцій на інтервалі негативних частот є комплексно сполученими зі значеннями на інтервалі додатних частот.

Як правило, при частотному аналізі фільтрів значення Δt інтервалу дискретизації приймають за 1, що відповідно визначає задання частотних характеристик на інтервалі $(0,\pi)$ по частоті ω або (0,1/2) по f.

При використанні швидких перетворень Фур'є (БПФ) обчислення спектрів здійснюються в однобічному варіанті додатних частот у частотному інтервалі від 0 до 2π (від 0 до 1 Гц), де комплексно сполучена частина спектра головного діапазону (від $-\pi$ до 0) займає інтервал від π до 2π (для прискорення обчислень використовується принцип періодичності дискретних спектрів).

Зауважимо, що при виконанні БПФ кількість точок спектра дорівнює кількості точок вхідної функції, а, отже, відлік на частоті 2π, комплексно сполучений з відліком на частоті 0, відсутній. При нумерації точок вхідної функції від 0 до N він належить точці N+1 - початковій точці наступного періоду, при цьому крок по частоті рівний $2\pi/(N+1)$.

Сучасне програмне забезпечення БПФ допускає будь-яку кількість точок вхідної функції, при цьому для непарного значення N частоті π відповідає відлік на точці (N+1)/2, що не має сполученого відліку, а при парному значенні N відсутній звіт на частоті π (вона розташовується між відліками k=N/2 і N/2 +1). Відлікам з номерами k головного діапазону БПФ (за винятком крапки k=0) відповідають комплексно сполучені відліки N+1-k (за винятком точки k=(N+1)/2 при непарному N).

7.3.3 Фазова й групова затримка

Затримка сигналів у часі належить до характерної риси каузальних систем у цілому, а, отже, рекурсивних і однобічних нерекурсивних фільтрів.

Фазова затримка, це пряма характеристика часової затримки фільтром гармонійних коливань. При подачі на вхід фільтра гармоніки $\sin(\omega t)$, сигнал на виході каузального фільтра, без врахування зміни його амплітуди, рівний $\sin(\omega t-\varphi)$, при цьому:

$$\sin(\omega t-\varphi)=\sin\omega(t-t_p),$$
$$\omega t-\varphi=\omega(t-t_p).$$

Звідси, фазова затримка t_p на частоті ω рівна:

$$t_p=\varphi/\omega \qquad (2.30')$$

При поширенні (2.30') у цілому на спектральну передаточну функцію фільтра одержуємо:

$$t_p(\omega)=\varphi(\omega)/\omega \qquad (2.30)$$

Сталість значення $t_p(\omega)$ в певному частотному діапазоні забезпечує для всіх гармонік сигналу таке ж співвідношення їх фазових характеристик, яке було на вході системи, тобто не змінює форми сигналу, якщо його спектр повністю зосереджений у цьому частотному діапазоні, і значення АЧХ у цьому діапазоні також мають постійне значення. Ця умова є визначальною, наприклад, для систем передачі даних, для, що згладжують і смугових частотних фільтрів.

Що стосується каузальних фільтрів, то вони, як правило, мають у робочому діапазоні певну залежність значення t_p від частоти, яка характеризується груповим часом затримки (ГЧЗ). ГЧЗ характеризує середню часову затримку складеного сигналу.

Припустимо, що сигнал на вході фільтра являє собою суму двох гармонік із близькими частотами:

$$s(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$
.

Тотожний тригонометричний запис:

$$s(t) = 2\cos(0{,}5(\omega_1 + \omega_2)t) \cdot \cos(0{,}5(\omega_1 - \omega_2)t)$$
.

Цей запис показує, що суму двох гармонік із частотами ω_1 й ω_2 можна розглядати, як амплітудну модуляцію гармоніки із частотою $(\omega_1 + \omega_2)/2$ гармонікою із частотою $(\omega_1 - \omega_2)/2$. При проходженні через фільтр кожна з гармонік ω_1 і ω_2 може одержати різну затримку, при цьому сигнал на виході фільтра, без обліку амплітудних змін:

$$s(t) = \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

Тотожний запис:

$$s(t) = 2\cos\left(0{,}5((\omega_1 + \omega_2)t - (\varphi_1 + \varphi_2))\right) \cdot \cos\left(0{,}5((\omega_1 - \omega_2)t - (\varphi_1 - \varphi_2))\right)$$

Пульсацію коливань виразимо через групову часову затримку t_g:

$$\cos\left(0{,}5((\omega_1 - \omega_2)t - (\varphi_1 - \varphi_2))\right) = \cos\left(0{,}5(\omega_1 - \omega_2) \cdot (t - t_g)\right)$$

Звідси:

$$(\omega_1 - \omega_2) \cdot t_g = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$t_g = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\omega} \qquad (2.31)$$

При поширенні цього виразу на безперервну частотну характеристику фільтра:

$$t_g(\omega) == \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

.

(2.32)

Для обчислень ГЧЗ зручно використовувати комплексний логарифм передаточної функції фільтра:

$$Ln\left(H(\omega)\right) = \ln\left|H(\omega)\right| + j\cdot\varphi(\omega), \quad \varphi(\omega) = \mathrm{Im}\left[Ln\left(H(\omega)\right)\right].$$

$$t_g(\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \mathrm{Im}\left[d\left[Ln\left(H(\omega)\right)\right]/d\omega\right] = \mathrm{Im}\left\{d\left(H(\omega)\right)/\left[H(\omega)d\omega\right]\right\}$$

. (2.33)

Наближення для дискретних спектральних функцій:

$$t_g(k\Delta\omega) \approx \frac{2}{\Delta\omega} = \mathrm{Im}\left\{(H_{k+1} - H_k)/(H_{k+1} + H_k)\right\}$$

(2.34)

Розрізняють фільтри з лінійною й нелінійною фазовою характеристикою.

У фільтрах з нелінійної фазової характериски частотні компоненти сигналу затримуються на величину, не пропорційну частоті, і тим самим у вихідному сигналі змінюється гармонійний зв'язок між його компонентами, що може бути неприпустимо в багатьох випадках обробки сигналів (передача даних, обробка біосигналів, відтворення музики й відео, та ін.).

Щоб фільтр мав лінійну фазову характеристику необхідно й досить, якщо виконується одна з наступних умов:

$$\varphi(\omega) = \alpha\omega$$

(2.35)

$$\varphi(\omega) = \beta - \alpha\omega$$

(2.36)

де α й β - константи.

Умова (2.35) забезпечує постійні значення групової й фазової затримки. Воно виконується, якщо імпульсна характеристика фільтра має додатну симетрію:

$$h(n)=h(N-n-1),\begin{cases} n=0,1,2,\ldots,(N-1)/2,\ N-\textit{нечетное}, \\ n=0,1,2,\ldots,(N/2)-1,\ N-\textit{четное}. \end{cases}$$

При цьому фазова характеристика є функцією довжини фільтра:

$$\alpha=(N-1)/2$$

.

Приклад 2.10

Імпульсний відгук фільтра заданий параметрами: N=7, h(0)=h(6), h(1)=h(5), h(2)=h(4), h(3).

Передатна функція фільтра: $H(z)=\sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{k}$.

Підставляємо $z=\exp(-j\omega\Delta t)$ при $\Delta t=1$ й одержуємо частотну характеристику фільтра в головному діапазоні $(-\pi,\pi)$:

$$H(\omega)=h(0)+h(1)\exp(-j\omega)+h(2)\exp(-2j\omega)+h(3)\exp(-3j\omega)+h(4)\exp(-4j\omega)+$$
$$+h(5)\exp(-5j\omega)+h(6)\exp(-6j\omega)=$$
$$=\exp(-3j\omega)\{2h(0)\cos(3j\omega)+2h(1)\cos(2j\omega)+2h(2)\cos(j\omega)+h(3)\}$$

=

Змінюючи позначення й переходячи до індексації щодо центру симетрії a(0) = h(3), a = 2h(3-n), n=1, 2, 3, записуємо в компактній формі:

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{3} a(n)\cos(nj\omega)=|H(\omega)|\exp(j\varphi(\omega)),$$
$$\varphi(\omega)=-3\omega,$$
$$\alpha=3\equiv(N-1)$$

Частотна характеристика фільтра лінійна.

Умова (2.36) забезпечує постійну групову затримку й виконується при негативній симетрії імпульсної характеристики фільтра:

$$h(n) = h(N-n-1),$$
$$\alpha = (N-1)/2,$$
$$\beta = \pi/2.$$

Для того щоб переконатися в останньому, досить розглянути приклад, аналогічний вищенаведеному.

7.3.4 Кореляція входу й виходу фільтрів

Кореляція входу й виходу фільтрів може бути отримана на основі наступних простих міркувань.

Приймемо для вхідного сигналу $x(t) \leftrightarrow X(f)$ й вихідного сигналу $y(t) \leftrightarrow Y(f)$ за основу вираз перетворення в частотній області

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \qquad (2.37)$$

Помножимо обидві частини цього виразу на комплексно сполучену функцію $X^*(t)$ й знайдемо математичні сподівання лівої й правої частини:

$$M\{X^*(t)Y(f)\} = M\{X^*(t)H(f) \cdot X(f)\} = H(f)M\{X^*(t) \cdot X(f)\}.$$

Але математичні сподівання цих добутків спектрів являють собою спектри щільності потужності, і, при зворотному перетворенні Фур'є, залежність взаємної кореляційної функції вхідного й вихідного сигналів фільтра від кореляційної функції вхідного сигналу й функції імпульсного відгуку фільтра:

$$W_{xy} = H(f)W_x \leftrightarrow h(t) \otimes B_x(\tau).$$

Цей вираз в спектральній області може використовуватися для практичного визначення частотних передатних функцій фільтрів з невідомою формою імпульсних відгуків.

Якщо математичні сподівання взяти від квадратів модулів лівої й правої частини вихідного виразу (2.37), то в результаті одержимо вираз:

$$W_y(f) = |H(f)|^2 W_x(f) \leftrightarrow B_h(t) \otimes B_x(\tau)$$

.

7.4 Реакція систем на випадкові сигнали

Якщо сигнал на вході лінійної системи є детермінованим, то, при відомих параметрах системи, його співвідношення з вихідним сигналом є однозначним. Таким же однозначним є співвідношення процесів на вході й виході й для випадкових сигналів, однак у силу природи останніх явне подання, як вхідного сигналу, так і відгуку системи, не представляється можливим.

Для опису відгуку системи необхідно використовувати статистичний підхід. При розгляді даної теми обмежимося тільки фізично реалізованими системами з однобічним імпульсним відгуком $h(t)$ ($h(t)$ =0 при t<0) і відповідною частотною характеристикою $H(f)$. Якщо параметри вхідного сигналу спеціально не оговорюються, то за замовчуванням приймається, що на вхід системи надходить реалізація випадкового стаціонарного процесу $x(t)$ з нульовим середнім і викликає сигнал $y(t)$ на виході системи.

7.4.1 Квазідетермінований сигнал

Квазідетермінований сигнал якоюсь мірою дозволяє оцінити збереження однозначності перетворення системою випадкових сигналів.

Допустимо, що система має імпульсний відгук $h(t) = \exp(-\alpha t),\ t \geq 0$. Квазідетермінований випадковий сигнал стаціионарний, не має властивості ергодичності, але може бути описаний у явній математичній формі.

Задамо сигнал на вході системи наступного вигляду:

$$x(t) = A + \cos(2t + \varphi)$$

,

де A і φ - взаємно незалежні випадкові величини, причому ? рівномірно розподілена в інтервалі [0, 2π].

Вихідний сигнал визначиться виразом:

$$y(t)=h(\tau)\otimes x(t-\tau)\equiv\int_0^\infty h(\tau)\otimes x(t-\tau)\,d\tau=A/3+\left(3\cos(2t+\varphi)+2\sin(2t+\varphi)\right)/13$$

.

З виразу випливає, що вихідний сигнал системи також є випадковим процесом і містить ті ж самі випадкові параметри, що й вхідний сигнал, а, отже, для нього також можуть бути визначені статистичні характеристики.

7.4.2 Математичне сподівання

Математичне сподівання довільного випадкового стаціонарного сигналу $x(t)$ на виході лінійної системи визначиться виразом:

$$\bar{y}=M\left\{y(t)\right\}=\int_0^\infty M\left\{x(t-\tau)\right\}h(\tau)\,d\tau=\bar{x}\int_0^\infty h(\tau)\,d\tau=\bar{x}K_{пс}$$

Звідси випливає, що математичне сподівання вихідних сигналів системи дорівнює математичному сподіванню вхідних сигналів, помноженому на коефіцієнт підсилення системою постійної складової. Якщо система не пропускає постійну складову сигналів (площа або сума коефіцієнтів імпульсного відгуку системи дорівнює нулю), то випадковий вихідний сигнал завжди буде мати нульове математичне сподівання.

4.3 Кореляційні співвідношення

Для добутку вихідних сигналів $y(t)$ і $y(t+\tau)$ лінійної системи можна записати:

$$y(t)\cdot y(t+\tau)=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\alpha)h(\beta)x(t-\alpha)x(t+\tau-\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

Якщо взяти математичні сподівання від обох частин цієї рівності, те, з урахуванням співвідношення в підінтегральному виразі:

$$M\left\{x(t-\alpha)x(t+\tau-\beta)\right\} = -R_x\left(t-\alpha-t-\tau+\beta\right) = R_x\left(\tau+\alpha-\beta\right)$$

одержимо:

$$R_y\left(\tau\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty h(\alpha)h(\beta)R_x\left(\tau+\alpha-\beta\right)d\alpha\, d\beta = R_x\left(\tau\right)\cdot h(\tau+\alpha)\cdot h(\tau-\beta)$$

Таким чином, функція автокореляції (АКФ) вихідного сигналу рівна АКФ вхідного сигналу, згорнутого двічі, у прямому й зворотному напрямку, з імпульсним відгуком системи, що зберігає парність АКФ вихідного сигналу. Для нецентрованих процесів аналогічний висновок дійсний і для коваріаційних функцій.

Зауважимо, що для згортки імпульсних відгуків, роблячи заміну $\tau-\beta$ = t, ми маємо рівність:

$$h(\tau+\alpha)\cdot h(\tau-\beta) = h(t+\alpha+\beta)\cdot h(t) = h(t)\cdot h(t+\gamma) = K_h(t)$$

,

де $K_h(t)$ - функція коваріації імпульсного відгуку системи.

Звідси: $R_y\left(\tau\right) = R_x\left(\tau\right)\cdot K_h(t)$. (2.40)

Це означає появу у випадковому сигналі на виході системи певної кореляційної залежності, викликаною інерційністю системи, причому радіус кореляції вихідного сигналу обернено пропорційний верхній частоті системою, що пропускається.

Для взаємної кореляційної функції (ВКФ) R_{xy} вхідного й вихідного сигналів відповідно маємо:

$$x(t)\cdot y\left(t+\tau\right) = \int_0^\infty h(\alpha)x(t)y\left(t+\tau-\alpha\right)d\alpha$$

$$R_{xy}\left(\tau\right) = \int_0^\infty h(\alpha)R_x\left(\tau-\alpha\right)d\alpha = R_x\left(\tau\right)\cdot h(\tau-\alpha)$$

(2.41)

т.ч. функція взаємної кореляції вхідного й вихідного сигналів рівна згортку АКФ вхідного сигналу з функцією імпульсного відгуку системи - фільтрації АКФ сигналу цим же фільтром. Висновок дійсний і для функцій коваріації.

Інша взаємно кореляційна функція Ryx може бути отримана зі співвідношення:

$$R_{yx}(\tau)=R_{xy}(-\tau)=R_x(\tau)\cdot h(\tau+\alpha)$$

(2.42)

Відзначимо, що для статистично незалежних випадкових величин при однобічному імпульсному відгуку $h(\tau)=0$ при $\tau<0$ функція $R_{xy}(\tau)$ також є однобічною й рівна 0 при $\tau<0$, а функція $R_{yx}(\tau)$ відповідно рівна 0 при $\tau>0$.

7.4.4 Спектральні співвідношення

Спектральні співвідношення, які характеризують систему в цілому стосовно перетворення випадкових сигналів, це співвідношення частотних щільностей розподілу потужності випадкових процесів на вході й виході, які для стислості звичайно називають спектральними щільностями процесів (сигналів) або спектрами потужності.

Застосовуючи перетворення Фур'є до виразів (2.40), для спектра потужності вихідного сигналу одержуємо:

$$W_y(f)=W_x(f)\left|H(f)\right|^2$$

(2.43)

Спектр потужності сигналу на виході системи дорівнює спектру потужності вхідного сигналу, помноженому на квадрат модуля частотної характеристики фільтра. З урахуванням парності кореляційних функцій спектр потужності вихідного сигналу також є парною дійсною функцією й не має фазової характеристики процесу.

Аналогічно, для взаємного спектра потужності на основі виразів (2.41-2.42):

$$W_{xy}(f)=W_x(f)H(f)$$

(2.44)

$$W_{yx}(f)=W_x(f)H(-f)$$

.

Взаємний спектр потужності при однобічному імпульсному відгуку є комплексним і містить як амплітудну, так і фазову характеристику процесу.

Відзначимо, що з використанням виразу (2.44) можна проводити визначення частотної характеристики й імпульсного відгуку системи:

$$H(f)=W_{xy}(f)/W_x(f)\Leftrightarrow h(t)$$

.

7.4.5 Дисперсія вихідного сигналу

Дисперсія вихідного сигналу може бути визначена з використанням формул (2.40,2.43):

$$\sigma_y^2=R_y(0)=\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2W_x(f)df\equiv R_x(0)\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t)\,dt=\sigma_x^2\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t)\,dt$$

(2.45)

що повністю відповідає отриманій раніше формулі (2.17) для цифрової системи.

Якщо сигнал нецентрований і значення дисперсії вхідного сигналу невідомо, то по аналогічних формулах обчислюється спочатку середній квадрат вихідного сигналу або так звана середня щільність сигналу:

$$\overline{y^2}=\overline{y}^2(t)=R_y(0)\equiv\overline{x}^2\int_0^{\infty}h^2(t)\,dt\equiv\int_0^{\infty}|H(f)|^2W_x(f)df$$

, (2.46)

Висновок: середня потужність вихідного сигналу дорівнює середньої потужності вхідного сигналу, помноженої на квадрат площі імпульсної реакції системи (для цифрових систем - суму квадратів коефіцієнтів імпульсного відгуку). Для центрованих випадкових сигналів середня потужність рівна дисперсії сигналів. Для нецентрованих вихідних сигналів:

$$\sigma_y^2=\overline{y^2}-\overline{y}^2\equiv\left(\overline{x^2}-\overline{x}^2\right)\int_0^{\infty}h^2(t)\,dt$$

(2.47)

7.4.6 Функція когерентності

Функція когерентності дає оцінку точності прийнятої лінійної моделі системи. Когерентність вхідного й вихідного сигналів системи оцінюється по формулі:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \left|W_{xy}(f)\right|^2 / \left[W_x(f) \cdot W_y(f)\right] \qquad (2.48)$$

Якщо функції $W_x(f)$ й $W_y(f)$ відмінні від нуля й не містять дельта-функцій, то для всіх частот f значення функції когерентності укладені в інтервалі:

$$0 \le \gamma_{xy}^2(f) \le 1$$

Для виключення дельта-функцій на нульовій частоті (постійна складова сигналу) визначення функції когерентності проводиться по центрованих сигналах. Для лінійних систем з постійними параметрами функція когерентності рівна 1, у чому неважко переконатися, якщо у формулу (2.48) підставити вираз $W_{xy}(f)$ й $W_y(f)$, визначені через $W_x(f)$ у формулах (2.43-2.44). Для зовсім не зв'язаних сигналів функція когерентності дорівнює нулю.

Проміжні між 0 і 1 значення можуть відповідати трьом ситуаціям:

1. Система здійснює перетворення $x(t) \Rightarrow y(t)$, але у вимірах цих сигналів або одного з них присутній зовнішній шум. Так, наприклад, у сигналах, зареєстрованих з обмеженням по розрядності, з'являється шум квантування (округлення значень).

2. Система не є строго лінійною. Це може спостерігатися, наприклад, при певному обмеженні по розрядності обчислень у цифрових системах, при нагромадженні помилки в рекурсивних системах і т.п.

3. Вихідний сигнал $y(t)$ крім $x(t)$ залежить ще від якихось вхідних або внутрішніх системних процесів.

Величина $1-\gamma_{xy}^2(f)$ задає частку середнього квадрата сигналу $y(t)$ на частоті f, не пов'язану із сигналом $x(t)$.

7.5 Області застосування нерекурсивних та рекурсивних фільтрів

Області застосування НЦФ і РЦФ звичайно обумовлюються видом їх передаточних функцій.

У принципі, нерекурсивні цифрові фільтри універсальні й здатні реалізувати будь-які практичні задачі обробки сигналів. Це й зрозуміло, тому що реакція РЦФ на одиничний імпульс Кронекера являє собою імпульсний відгук НЦФ, а, отже, задачі, розв'язувані РЦФ, можуть виконуватися й НЦФ, але за умови відсутності обмежень по розмірах вікна.

У першу чергу це стосується реалізації НІХ-фільтрів з незатухаючим або слабко загасаючим імпульсним відгуком, наприклад, що інтегрують або фільтрів рекурсивної деконволюції. Обмеження по розмірах вікна є скоріш не теоретичним (нескінченних операторів НЦФ не потрібно, максимум – подвійна довжина вхідного сигналу для двосторонніх НЦФ), а чисто практичним. Нема рації застосовувати НЦФ із величезними розмірами операторів і витрачати машинний час, якщо та ж задача в багато разів швидше вирішується рекурсивним фільтром.

Істотною перевагою НЦФ є їхня стійкість, можливість виконання у вигляді двосторонніх симетричних фільтрів, що не змінюють фазу вихідних сигналів щодо вхідних, і реалізації строго лінійних фазових характеристик.

З іншого боку, нерекурсивні фільтри можуть бути перетворені в рекурсивні фільтри, якщо є можливість z-поліном передаточної функції НЦФ виразити у вигляді відношення двох коротких z-поліномів РЦФ типу (2.19), що може дати істотне підвищення продуктивності обчислень. Як правило, така можливість є для збіжних степеневих рядів. Відношення двох z-поліномів дозволяє реалізувати короткі й дуже ефективні фільтри із крутими зрізами на частотних характеристиках.

Тема 3 Фільтри згладжування. Метод найменших квадратів

Розділ 8 Оцінювання та фільтрація. Основні поняття статистичної обробки даних

1. Статистичний розподіл (функція розподілу, густина розподілу)

2. Поняття оцінки.

3. Генерація випадкових чисел.

4. Розподіл амплітуд.

Розділ 9 Обчислення згладжування

1. Апроксимація.

2. Інтерполяція.

3. Диференціювання.

4. Інтегрування.

Розділ 10 Фільтри НМК 1-го порядку

Основний інструмент цифрової фільтрації даних і проектування цифрових фільтрів – частотний (спектральний) аналіз. Частотний аналіз базується на використанні періодичних функцій, на відміну від чисельних методів аналізу й математичної статистики, де перевага віддається поліномам. У якості періодичних використовуються гармонійні функції синусів і косинусів.

По-суті, спектральний склад сигналів – це тонка внутрішня структура даних, які несе сигнал, і яка практично прихована в динамічному представленні даних навіть для досвідчених оброблювачів. Точно так само частотна характеристика цифрового фільтра – це його однозначний функціональний паспорт, що повністю визначає сутність перетворення фільтром вхідних даних.

Слід зазначити, що хоча ціль фільтрації сигналів полягає саме в спрямованій зміні частотного складу даних, які несе сигнал, у починаючих фахівців існує певна емоційна протидія частотному підходу і його ролі в аналізі даних. Подолати цю протидію можна тільки одним шляхом – на досвіді переконатися в ефективності частотного підходу.

Розглянемо приклад частотного аналізу фільтрів при згладжуванні даних методом найменших квадратів (МНК).

Припустимо, що потрібно здійснити згладжування (регуляризацію, апроксимацію) по методу найменших квадратів (МНК) рівномірного по аргументу масиву даних.

10.1 Розрахунки коефіцієнтів фільтра

Найпростіший спосіб апроксимації по МНК довільній функції $s(t)$ - за допомогою полінома першому ступеня, тобто функції виду $y(t) = A+Bt$ (метод ковзних середніх). Здійснимо розрахунок симетричного фільтра МНК на $(2N+1)$ точок з вікном від -N до N.

Для визначення коефіцієнтів полінома знайдемо мінімум функції наближення (функцію залишкових помилок). З урахуванням дискретності даних по точках $t_n = n\Delta t$ і приймаючи $\Delta t = 1$, для симетричного НЦФ із нумерацією відліків по n від центру вікна фільтра (у системі координат фільтра), функція залишкових помилок записується у формі:

$$\sigma(A,B) = \sum_n [s_n - (A+B\cdot n)]^2 .$$

Диференціюємо функцію залишкових помилок по аргументах A, B, і, прирівнюючи отримані рівняння нулю, формуємо 2 нормальних рівняння:

$$\sum_{n=-N}^{N} (s_n - (A+B\cdot n)) \equiv \sum_{n=-N}^{N} s_n - A\sum_{n=-N}^{N} 1 - B\sum_{n=-N}^{N} n = 0 ,$$

$$\sum_{n=-N}^{N}(s_n-(A+B\cdot n))\cdot n \equiv \sum_{n=-N}^{N} n\cdot s_n - A\sum_{n=-N}^{N} n \ - B\sum_{n=-N}^{N} n^2 \ = \ 0$$

.

З урахуванням очевидної рівності $\sum_{n=-N}^{N} n=0$, результат розв'язку даних рівнянь щодо значень A и B:

$$A \ = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} s_n,$$

$$B=\sum_{n=-N}^{N} n\cdot s_n \Big/ \sum_{n=-N}^{N} n^2.$$

Підставляємо значення коефіцієнтів у рівняння апроксимуючого полінома, переходимо в систему координат по точках k масиву $y(k+\tau) \ = A+B\cdot\tau$, де відлік τ проводиться від точки k масиву, проти якої знаходиться точка $n \ = \ 0$ фільтра, і одержуємо в загальній формі рівняння фільтра апроксимації:

$$y(k+\tau) \ = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} s_{k-n}+\tau \sum_{n=-N}^{N} n\cdot s_{k-n} \Big/ \sum_{n=-N}^{N} n^2$$

Для згладжуючого НЦФ обчислення проводяться безпосередньо для точки k у центрі вікна фільтра ($\tau=0$), при цьому:

$$y_k=\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} s_{k-n}$$

. (3.1)

10.2 Імпульсна реакція фільтра

Імпульсна реакція фільтра відповідно визначається $(2N+1)$ значеннями коефіцієнтів $b_n = 1/(2N+1)$.

Так, для 5-ти точкового НЦФ: $h(n) = \{0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2\}$.

Передаточна функція фільтра в z-області: $H(z) = 0.2\left(z^{-2}+z^{-1}+1+z^{1}+z^{2}\right)$.

Коефіцієнт підсилення дисперсії шумів: $K_q = S_n h^2(n) = 1/(2N+1)$,

т.ч. обернено пропорційний ширині вікна фільтра. Залежність значення K_q від ширини вікна наведено на рисунку 3.1.1.

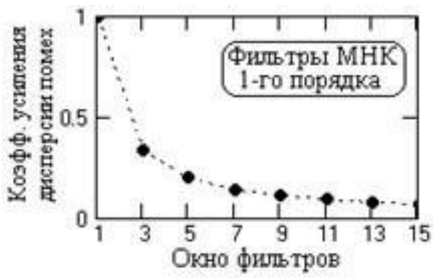


Рисунок 3.1.1 – Залежність значення K_q від ширини вікна

10.3 Частотна характеристика фільтра

Частотна характеристика фільтра (передаточна функція фільтра в частотній області) знаходиться перетворенням Фур'є імпульсної реакції $h(n)$ (фільтр симетричний, початок координат у центрі фільтра), або підстановкою

$z = \exp(-j\omega\Delta t)$ при $\Delta t = 1$ у вираз передаточної функції $H(z)$. І в тому, і в іншому випадку одержуємо:

$$H(\omega) = 0.2[\exp(2j\omega) + \exp(j\omega) + 1 + \exp(-j\omega) + \exp(-2j\omega)] \quad (3.2)$$

Можна використовувати й безпосереднє рівняння фільтра (3.1). Подамо на вхід фільтра гармонійний сигнал виду $s_k = \exp(j\omega k)$. Оскільки сигнальна функція належить до власних, на виході фільтра будемо мати сигнал $s_k = \exp(j\omega k)$.

Підставляючи вираз вхідного й вихідного сигналів у рівняння (3.1), одержуємо:

$$H(\omega)\ \exp(j\omega k) = 0.2\sum_{n=-2}^{2}\exp(j\omega(k-n)) = 0.2\ \exp(j\omega k)\sum_{n=-2}^{2}\exp(-j\omega n).$$

Звідси, вираз для передаточної функції:

$$H(\omega) = 0.2\sum_{n=-2}^{2}\exp(-j\omega n) = 0.2[\exp(2j\omega) + \exp(j\omega) + 1 + \exp(-j\omega) + \exp(-2j\omega)],$$

що повністю ідентично виразу (3.2).

Тому що імпульсна реакція фільтра МНК симетрична (функція $h(n)$ парна), частотне представлення передатної функції повинне бути речовинним, у чому неважко переконатися, об'єднавши комплексно сполучені члени вираз (3.2):

$$H(\omega) = 0.2(1 + 2\ \cos(\omega) + 2\ \cos\ 2\omega).$$

Альтернативне подання передаточної функції $H(\omega)$ для фільтра з довільною кількістю коефіцієнтів $(2N+1)$ нам досить добре відомо, як нормований фур'є-образ прямокутної функції, якийсь по суті і є селектуюче вікно фільтра (3.1.1):

$$H(\omega) = \sin((N+1/2)\omega)/[(N+1/2)\omega] = \operatorname{sin}c((N+1/2)\omega) \tag{3.3}$$

Графіки передаточних функцій (3.3) наведено на рисунку 3.2.

Рисунок 3.2 – Графіки передаточних функцій

По графіках можна бачити коефіцієнт передачі сигналу із входу на вихід фільтра на будь-якій частоті. Без ослаблення (з коефіцієнтом передачі 1) фільтром, що згладжує, пропускається (і повинен пропускатися по фізичному змісту згладжування даних) тільки сигнал постійного рівня (нульової частоти). Цим же визначається й той фактор (який варто запам'ятати), що сума коефіцієнтів, що згладжує НЦФ завжди повинна бути рівна 1 (відлік ненормованого дискретного фур'є-перетворення на частоті $\omega = 0$ дорівнює сумі значень вхідної функції).

Чим більше число коефіцієнтів фільтра (ширше вікно фільтра), тем уже смуга пропущення низьких частот. Придушення високих частот досить нерівномірне, з осциляціями передаточної функції щодо нуля. На рисунку 3.3 наведений приклад фільтрації випадкового сигналу (шуму) фільтрами з різним розміром вікна.

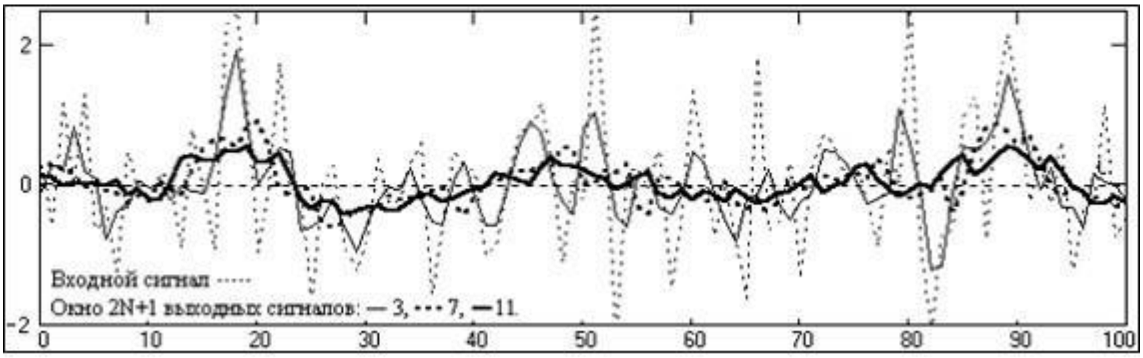


Рисунок 3.3. – Приклад фільтрації випадкового сигналу (шуму) фільтрами з різним розміром вікна

10.4 Модифікація фільтра

Частотне подання передаточних функцій дозволяє наочно бачити особливості фільтрів і цілеспрямовано поліпшувати їхні характеристики. Так, якщо в розглянутому нами фільтрі з однорідною імпульсною реакцією $h_n = 1/(2N+1)$ зменшити два крайні члени в 2 рази й заново нормувати до суми $\sum h_n = 1$, те частотні характеристики фільтра помітно поліпшуються.

Для знаходження передаточної функції модифікованого фільтра знімемо у виразі (3.3) нормування (помножимо на $(2N+1)$), віднімемо значення 1/2 крайніх членів $(\exp(-j\omega N)+\exp(j\omega N))/2 = \cos(\omega N)$ і заново пронормуємо отриманий вираз (розділимо на 2N).

Приклад нової передаточної функції при N=3 також наведено на рисунку 3.2.

Передаточні функції модифікованих у такий спосіб фільтрів приводяться до нуля на частоті Найквіста, при цьому трохи розширюється смуга пропущення низьких частот і зменшується амплітуда осциляцій в області придушення високих частот. Якщо дивитися на згладжування, як на операцію придушення високочастотних перешкод, то модифіковані фільтри без сумніву більше відповідає своєму цільовому призначенню.

10.5 Оптимізація згладжування

При виборі вікна фільтра слід ураховувати як коефіцієнт придушення дисперсії шумів, так і ступінь викривлення корисного сигналу, на який накладені шуми. Оптимальне вікно фільтра може бути визначене тільки в тому випадку, якщо спектр сигналу відомий і обмежений певною верхньою частотою, а потужність шумів не перевищує певного рівня. Розглянемо це на конкретному прикладі.

Припустимо, що потрібно забезпечити максимальне придушення дисперсії шумів при мінімальному викривленні верхньої граничної частоти сигналу $f_в$, при цьому потужність шумів дорівнює потужності сигнальної гармоніки $f_в$. Припустимо, значення $f_в$ рівне 0,08 частоти Найквіста дискретизації даних, тобто $f_в = 0,04$ Гц при $\Delta t = 1$. Відносні значення потужності гармоніки й шуму приймаємо рівними 1.

Спектр моделі сигналу плюс шуму в зіставленні з передаточними функціями фільтрів наведено на рисунку 3.4.

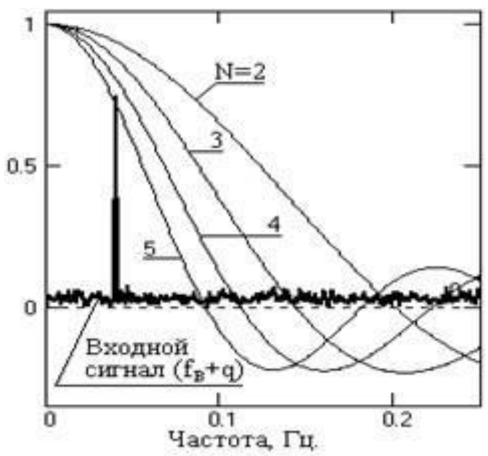


Рисунок 3.4 – Спектр моделі сигналу плюс шуму в зіставленні з передатними функціями фільтрів

По формулі (3.3) обчислюємо коефіцієнти $K_y(f_в)$ підсилення фільтрів з N від 0 до 6 на частоті $f_в$ (таблиця 3.1.1).

Таблиця 3.1.1 – Коефіцієнти підсилення фільтрів з N від 0 до 6 на частоті $f_в$

N	0	1	2	3	4	5	6	7
$K_y(f_в)$	1	0.98	0.94	0.88	0.8	0.7	0.6	0.51
$W_u(N)$	1	0.96	0.88	0.77	0.64	0.51	0.38	0.26
$W_q(N)$	1	0.33	0.2	0.14	0.11	0.09	0.08	0.07
$K_{c/ш}(N)$	1	2.88	4.4	5.4	5.8	5.6	4.89	3.85
$\delta^2(N)$	1	0.35	0.23	0.18	0.17	0.18	0.21	0.26
$\sigma^2(N)$	1	0.32	0.2	0.15	0.15	0.18	0.23	0.31

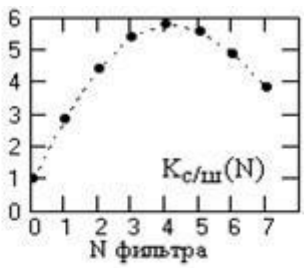


Рисунок 3.5 – Залежність $K_{c/ш}$ від N

При потужності гармоніки $W_u = 1$ амплітудне значення гармоніки на вході фільтра рівно $U = \sqrt{2W_u} = 1,41$. Потужності гармонік на виході фільтрів залежно від N:

$$W_u(N) = 0,5\cdot[U\cdot K_y(f_e)]^2$$
.

Відповідно, при потужності вхідного шуму $W_q = 1$ потужності шумів на виході фільтрів будуть чисельно дорівнюють коефіцієнтам посилення дисперсії шумів $W_q(N) = W_q\cdot K_q(N)$.

Максимум відношення $K_{c/ш}(N) = W_u(N) / W_q(N)$ визначає оптимальний фільтр із максимальним збільшенням відношення сигнал/шум, тобто, по суті, коефіцієнт збільшення відношення сигнал/шум при виконанні фільтрації з урахуванням зміни амплітудних значень корисної частини сигналу.

При $K_y(f_e) > 0,5$ й $W_u(N) = W_q(N) = 1$ чисельні значення величини $\delta^2(N) = 1/\ K_{c/ш}(N)$ в першому наближенні можуть служити оцінкою $\sigma^2(N)$ квадрата середнього квадратичного відхилення вихідних сигналів від "чистої" гармоніки f_e, заданої на вході. Свідченням цьому служать останні рядки таблиці 3.1.1, де наведені результати математичного моделювання фільтрації по даних умовах на вибірці 10000 точок.

На рисунку 3.6 наведені результати зіставлення розрахункових $\delta^2(N)$ і модельних $\sigma^2(N)$ значень даних коефіцієнтів.

Рисунок 3.6 – Результати зіставлення розрахункових $\delta^2(N)$ і модельних $\sigma^2(N)$ значень даних коефіцієнтів

Ефект фільтрації можна бачити на рисунку 3.1.7, де наведений приклад сигналів моделювання на обмеженому відрізку даних.

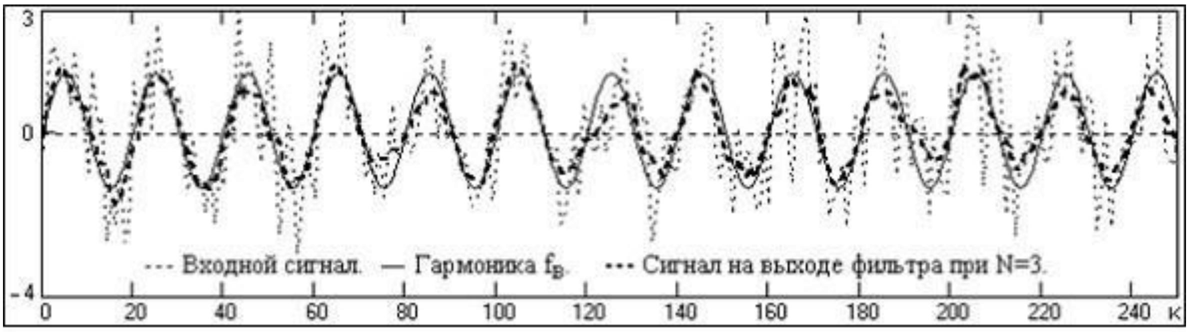


Рисунок 3.7 Сигнали на вході й виході фільтра МНК 1-го порядку

Питання для самостійної роботи.

Розділ 11 Фільтри МНК 2-го порядку

11.1 Розрахунки фільтрів

Фільтри МНК 2-го порядку (МНК-2) розраховуються й аналізуються аналогічно. Розглянемо квадратний многочлен виду $y(t) = A + B \cdot t + C \cdot t^2$. Для спрощення аналізу обмежимося симетричним, що згладжують НЦФ із інтервалом дискретизації даних $\Delta t = 1$.

Рівняння суми квадратів залишкових помилок:

$$\sigma(A,B,C) = \sum_{n=-N}^{N}\left[s_n - \left(A + B\cdot n + C\cdot n^2\right)\right]^2$$

(3.4)

Система рівнянь після диференціювання виразу (3.4) по A, B, C и прирівнювання отриманих виразів нулю:

$$A\sum_{n=-N}^{N}1 + B\sum_{n=-N}^{N}n + C\sum_{n=-N}^{N}n^2 = \sum_{n=-N}^{N}s_n$$

.

$$A\sum_{n=-N}^{N}n + B\sum_{n=-N}^{N}n^2 + C\sum_{n=-N}^{N}n^3 = \sum_{n=-N}^{N}n\cdot s_n$$

$$A\sum_{n=-N}^{N}n^2 + B\sum_{n=-N}^{N}n^3 + C\sum_{n=-N}^{N}n^4 = \sum_{n=-N}^{N}n^2\cdot s_n$$

При обчисленні значення квадратного многочлена тільки для центральної точки (t=0) необхідності в значеннях коефіцієнтів B и C немає. Розв'язуючи систему рівнянь відносно A, одержуємо:

$$A = \left\{\sum_{n=-N}^{N}n^4\sum_{n=-N}^{N}s_n - \sum_{n=-N}^{N}n^2\sum_{n=-N}^{N}n^2\cdot s_n\right\} \Big/ \left\{\sum_{n=-N}^{N}1\sum_{n=-N}^{N}n^4 - \left(\sum_{n=-N}^{N}n^2\right)^2\right\}$$

(3.5)

При розгортанні виразу (3.5) для 5-ти точкового НЦФ:

$$y_0 = \left\{17\sum_{n=-2}^{2}s_n - 5\sum_{n=-2}^{2}n^2\cdot s_n\right\} \Big/ 35 = \left(-3\cdot s_{-2} + 12\cdot s_{-1} + 17\cdot s_o + 12\cdot s_1 - 3\cdot s_2\right) \ / 35$$

(3.6)

Імпульсна реакція: $h_n = \{(-3,\ 12,\ 17,\ 12,\ -3)/35\}$.

Передаточна функція фільтра:

$$H(z) = \left(-3z^{-2} + 12z^{-1} + 17 + 12z^{1} - 3z^{2}\right)/35 \quad (3.7)$$

Аналогічним способом вираз (3.5) дозволяє одержати імпульсну реакцію для 7, 9, 11 і т.д. точок фільтра:

$$^{3}h_n = \{(-2, 3, 6, 7, 6, 3, -2)/21\}.$$

$$^{4}h_n = \{(-21, 14, 39, 54, 59, 54, 39, 14, -21)/231\}.$$

$$^{5}h_n = \{(-36, 9, 44, 69, 84, 89, 84, 69, 44, 9, -21)/459\}.$$

11.2 Частотні характеристики фільтрів

Підставляючи значення $z = \exp(-j\omega)$ в (3.7) або безпосередньо в (3.6) сигнал $s_n = \exp(j\omega n)$ і поєднуючи комплексно сполучені члени, одержуємо частотну характеристику 5-ти точкового фільтра, що згладжує, МНК другого порядку:

$$H(\omega) = (17 + 24\cos(\omega) - 6\cos(2\omega))/35.$$

Вивід формул передатних функцій для 7, 9, 11-ти точкових фільтрів МНК пропонується для самостійної роботи.

Вид частотних характеристик фільтрів при N=3 і N=5 приводиться на рисунку 3.8.

Рисунок 3.8. фільтри, що згладжують, МНК-2

При порівнянні характеристик з характеристиками фільтрів МНК-1 можна бачити, що підвищення ступеня полінома розширює низькочастотну смугу пропущення фільтра й збільшує крутість її зрізу. За рахунок розширення смуги пропущення головного частотного діапазону при тих же значеннях N коефіцієнти підсилення дисперсії шумів фільтрів МНК-2 вище, чим фільтрів 1-го порядку, що можна бачити на рисунку 3.9.

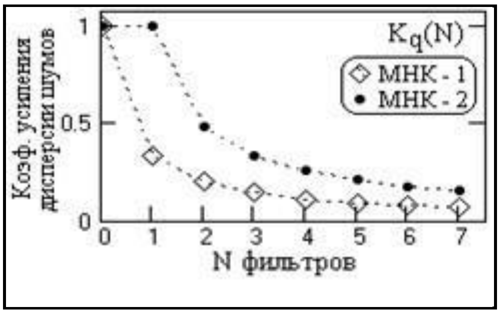


Рисунок 3.9. Коефіцієнти підсилення дисперсії шумів фільтрів МНК-2

Методика вибору вікна фільтра під частотні характеристики вхідних сигналів не відрізняється від фільтрів МНК 1-го порядку.

На рисунку 3.10 наведені значення $\delta^2(N)$ й $\sigma^2(N)$ фильтрів МНК-2 у зіставленні зі значеннями фільтрів МНК-1 для частоти $f_в$ = 0.08 Гц при $\Delta t = 1$.

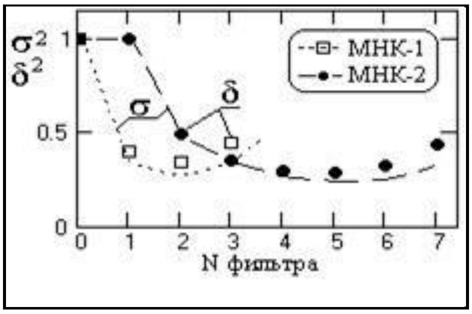


Рисунок 3.10. Зіставлення значень $\delta^2(N)$ і $\sigma^2(N)$ для фільтрів МНК-2 і МНК-1

Із зіставлення видно, що для одержання приблизно рівних значень придушення шумів фільтри МНК-2 повинні мати в 2 рази більшу ширину вікна, чому фільтри МНК-1. Про це ж свідчить і приклад моделювання фільтрації, наведений на рисунку 3.11.

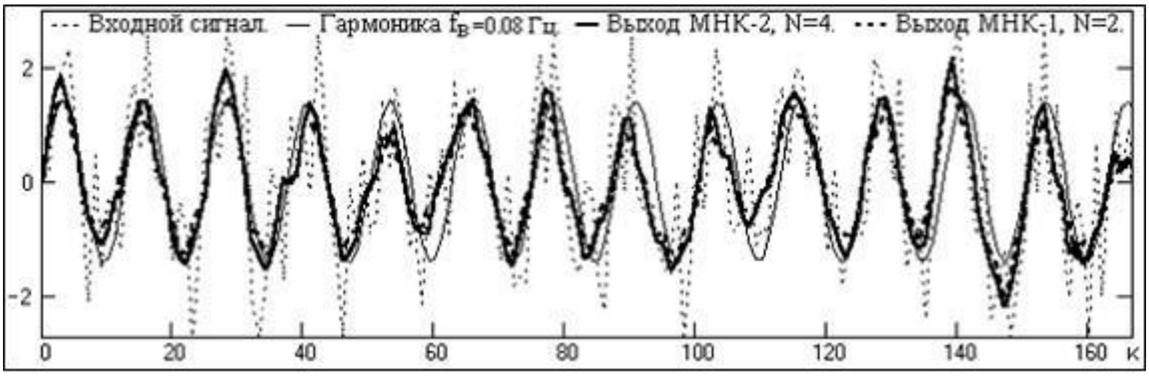


Рисунок 3.11. Приклад моделювання фільтрації

11.3 Модифікація фільтрів

Фільтри МНК другого порядку (так само як і інші фільтри подібного призначення) також можна модифікувати за умовою $H(\omega) \to 0$ при $\omega \to \pi$.

Один з найпростіших методів модифікації полягає в наступному. У вираз передаточної функції (з усіма коефіцієнтами фільтра, виду (3.7)) підставляємо $z = \exp(-j\omega)$, заміняємо значення кінцевих коефіцієнтів фільтра на параметри, приймаємо $\omega = \pi$ і, дорівнявши отримане вираз нулю, знаходимо нові значення кінцевих коефіцієнтів, після чого суму всіх коефіцієнтів нормуємо до 1 при $\omega = 0$.

Приклад модифікації фільтра МНК 2-го порядку

Передаточна функція: вираз (3.7). Частотна характеристика (нормування можна зняти):

$$H(\omega) = -3\exp(2j\omega)+12\exp(j\omega)+17+12\exp(-j\omega)-3\exp(-2j\omega).$$

Заміна кінцевих коефіцієнтів {значення 3} на параметр b і спрощення:

$$H(\omega) = 17+24\cos(\omega)+2b\cos(2\omega).$$

При $\omega = \pi$: $H(\pi) = 17-24+2b = 0$. Звідси: $b = 3{,}5$.

Нова частотна характеристика (із приведенням коефіцієнтів до цілих чисел):

$$H(\omega) = 68+96\cos(\omega)+14\cos(2\omega).$$

Сума коефіцієнтів при $\omega = 0$: $H(0) = 68+96+14 = 178$.

Нормована частотна характеристика: $H(\omega) = (68+96\cos(\omega)+14\cos(2\omega))/178$.

Коефіцієнти фільтра: $h_n = \{(7, 48, 68, 48, 7)/178\}$.

Приклад - завдання:

Модифікувати 7, 9 і 11-ти точкові фільтри, що згладжують, МНК 2-го порядку.

Контроль: $^{7}h_n = \{(1,6,12,14,12,6,1)/52\}$.

$$^{9}h_n = \{(-1,28,78,108,118,108,78,28,-1)/548\}.$$

$$^{11}h_n = \{(-11,18,88,138,168,178,168,138,88,18,-11)/980\}.$$

Порівняльні графіки частотних характеристик модифікованих фільтрів МНК другого порядку наведено на рисунку 3.8.

Фільтри МНК третього порядку по своїх частотних характеристиках еквівалентні фільтрам другого порядку.

Розділ 12 Фільтри НМК 4-го порядку

Розрахунки за аналогічною методикою фільтрів, що згладжують, МНК 4-ой ступеня дає наступні результати:

$$h_{0-3} = (131,75,-30,5)/231,$$

$$h_{0-4} = (179,135,30,-55,15)/429,$$

$$h_{0-5} = (143,120,60,-10,-45,18)/429.$$

На рисунку 3.12 наведене зіставлення частотних характеристик однорозмірних фільтрів МНК 1-го, 2-го й 4-го порядку.

Рисунок 3.12 Згладжуючі МНК

У цілому, по фільтрам, що згладжують, МНК можна зробити наступні висновки:

1. Підвищення порядку фільтра збільшує ступінь торкання частотною характеристикою рівня коефіцієнта передачі $H=1$ на частоті $\omega=0$ і розширює смугу пропущення фільтра.

2. Збільшення кількості членів фільтра приводить до звуження смуги пропущення й збільшує крутість її зрізу.

3. Модифікація фільтрів зменшує осциляції передаточної функції в смузі придушення сигналів.

Спільна зміна цих параметрів дозволяє підбирати для згладжування даних такий фільтр МНК, частотна характеристика якого щонайкраще задовольняє частотному спектру сигналів при мінімальній кількості коефіцієнтів фільтра.

Розділ 13 Розрахунок простого цифрового фільтру за частотною характеристикою.

Якщо шуми в оброблюваних сигналах зосереджені в основному у високочастотній області, то досить прості фільтри згладжування без значних осциляцій можуть бути синтезовані безпосередньо по частотній характеристиці.

Як приклад проведемо розрахунки простого симетричного, що згладжує НЦФ із вікном у п'ять точок:

$$y_k = as_{k-2} + bs_{k-1} + cs_k + bs_{k+1} + as_{k+2}$$

. (3.8)

Приймаємо $s_k = \exp(j\omega k)$, при цьому $y_k = H(\omega)\exp(j\omega k)$. Підставляємо значення вхідного й вихідного сигналу в рівняння фільтра, скорочуємо ліву й праву частини на загальний член $\exp(j\omega k)$ і, поєднуючи комплексно сполучені члени в правій частині, одержуємо рівняння передаточної функції:

$$H(\omega) = 2a\cos(2\omega) + 2b\cos(\omega) + c$$

.

Скорочуємо кількість параметрів функції завданням граничних умов по частоті. Як правило, має сенс прийняти: $H(0) = 1$, $H(\pi) = 0$. Звідси:

$$H(0) = 2a + 2b + c = 1$$

,

$$H(\pi) = 2a - 2b + c = 0$$

.

$$b = 1/4, c = 1/2 - 2a$$

.

При цьому функція $H(\omega)$ перетворюється в однопараметрову:

$$H(\omega) = 2a(\cos(2\omega) - 1) + (\cos(\omega) + 1)/2$$

.

По отриманому виразу рекомендується побудувати сімейство кривих у параметричній залежності від значень 'a' і вибрати фільтр, що задовольняє завданню. Приклад сімейства частотних характеристик наведено на рисунку 3.13.

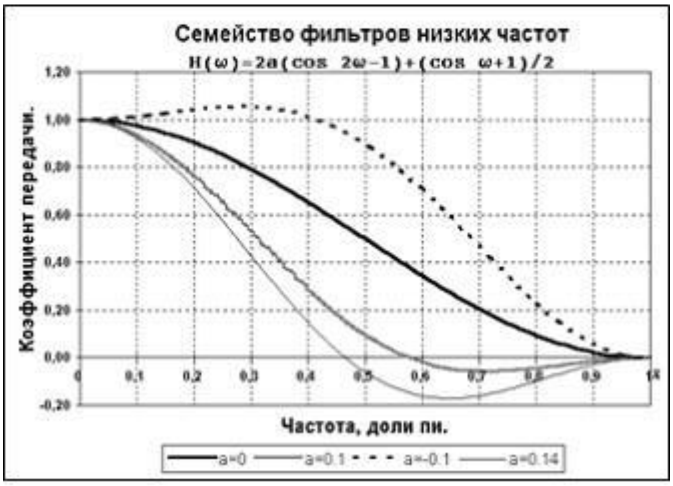


Рисунок 3.13. Частотні характеристики НЦФ.

Можна накласти ще одну додаткову умову й визначити всі коефіцієнти фільтра безпосередньо. Так, наприклад, якщо до двом граничним умовам задати третя умова збалансованості: $H(\omega) = 0,5$ при $\omega = \pi/2$, те із трьох отриманих рівнянь відразу ж одержимо всі три коефіцієнти фільтра: $a = 0,\ b = 1/4,\ c = 1/2$ (фільтр скорочується до трьох точок).

У принципі, таким методом можна задати будь-яку довільну форму частотної характеристики симетричного НЦФ із довільною кількістю N точок дискретизації, що визначить повне рівняння (3.8) з вікном 2N+1 точка й відповідну передаточну функцію фільтра, по якій можна скласти й розв'язати N+1 рівняння для визначення коефіцієнтів фільтра.

ема 4 Різницеві фільтри та фільтри інтегрування

Розділ 14 Різницеві оператори

Основний інструмент проектування цифрових фільтрів – частотний (спектральний) аналіз. Частотний аналіз базується на використанні періодичних функцій синусів і косинусів. По-істоті, спектральна характеристика цифрового фільтра – це тонка внутрішня структура системи, його однозначний функціональний паспорт направленої зміни частотного складу даних, що повністю визначає сутність перетворення фільтром вхідних даних.

Розглянемо приклади синтезу й частотного аналізу фільтрів стосовно до відомих способів диференціювання й інтегрування даних.

Розглянемо приклади частотного підходу при аналізі різницевих операторів.

Різницевий оператор 1-го порядку має вигляд:

$$\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$$

.

Послідовне n-кратне застосування оператора записується у вигляді оператора n-го порядку:

$$\Delta^n(s_k) = \Delta[\Delta^{n-1}(s_k)] = \Delta s_k \otimes \Delta^{n-1}(s_k) \qquad (4.1)$$

Вихідні значення імпульсної реакції різницевих операторів на одиничний імпульсний сигнал Кронекера наведено в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Вихідні значення імпульсної реакції різницевих операторів

k	s_k	$\Delta(s_k)$	$\Delta^2(s_k)$	$\Delta^3(s_k)$	$\Delta^4(s_k)$	$\Delta^5(s_k)$	$\Delta^6(s_k)$

-7	0	0	0	0	0	0	0
-6	0	0	0	0	0	0	1
-5	0	0	0	0	0	1	-6
-4	0	0	0	0	1	-5	15
-3	0	0	0	1	-4	10	-20
-2	0	0	1	-3	6	-10	15
-1	0	1	-2	3	-4	5	-6
0	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
K_q		2	6	20	70	252	924

Ряди послідовних різниць містять знакозмінні біноміальні коефіцієнти. У представленій формі різницеві оператори є каузальними фазозсуваючими (однобічними) фільтрами, але неважко помітити, що оператори парних ступенів можуть бути переведені в симетричну форму зсувом вліво на половину вікна оператора.

В останньому рядку таблиці приводяться коефіцієнти підсилення дисперсії шумів, значення яких різко наростає в міру збільшення порядку оператора. Це дозволяє використовувати різницеві оператори з порядком вище 1 для визначення місця розташування статистично розподілених шумів у масивах даних. Особливо наочно цю можливість можна бачити на частотних характеристиках операторів.

Підставляючи сигнал $s(k) = \exp(j\omega k)$ в (4.1) і спрощуючи, одержуємо:

$$\Delta^n s(k) = \left(j^n\right) \exp(j\omega n/2)\,[2\sin(\omega/2)]^n \exp(j\omega k)$$

.

$$H(\omega) = \left(j^n\right) \exp(j\omega n/2)\left[2\sin(\omega/2)\right]^n \tag{4.2}$$

Тому що модуль перших двох множників у виразі (4.2) рівний 1, залежність коефіцієнта передачі різницевого оператора від частоти визначається другим співмножником $\left[2\sin(\omega/2)\right]^n$ і представлено на рисунку 4.1.

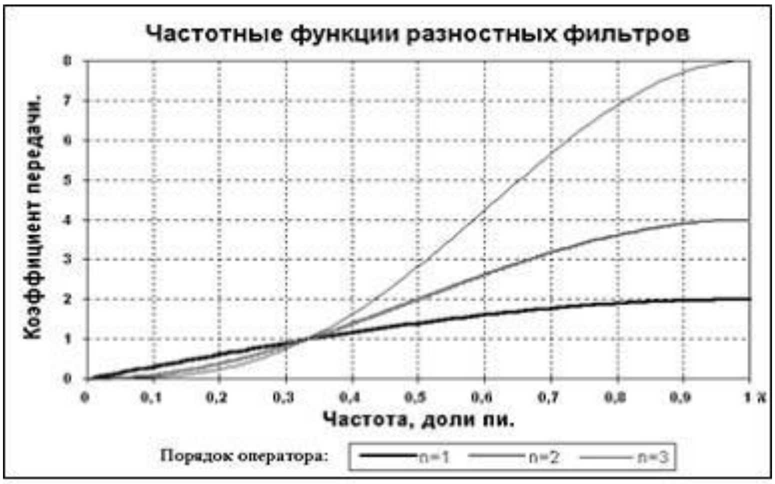


Рисунок 4.1 – Різницеві фільтри.

14.1 Виділення в сигналах шумів

Як випливає из малюнка 4.1, різницеві оператори пригнічують постійну складову сигналу і його гармоніки в першій третині інтервалу Найквіста й збільшують високочастотні складові сигналу в іншій частині інтервалу тим більше, чим більше порядок оператора. Як правило, цю частину головного інтервалу спектра сигналів займають високочастотні статистичні шуми.

Шуми при аналізі даних також можуть являти собою певну інформацію, наприклад, по стабільності умов вимірювань і по впливу на вимірювання зовнішніх дестабілізуючих факторів. На рисунку 4.2 наведений приклад виділення інтервалів інтенсивних шумів у даних акустичного каротажу, що може свідчити про сильну тріщинуватість порід на цих інтервалах. Така інформація ставиться вже не шумовий, а до досить корисної інформації при пошуках і розвідці нафти, газу й води.

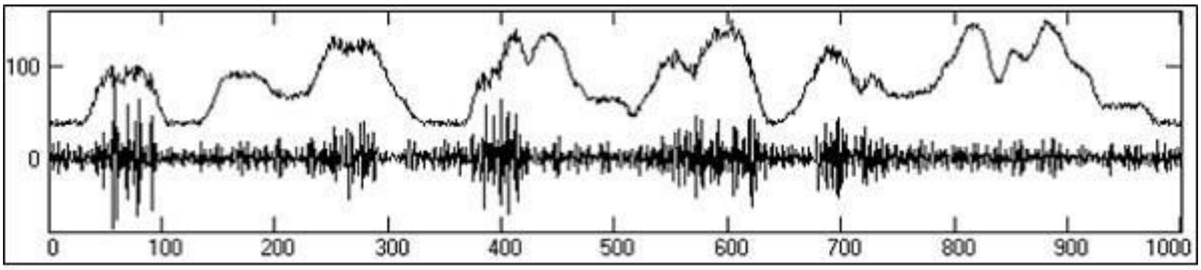


Рисунок 4.2 – Приклад виділення інтервалів інтенсивних шумів

14.2 Відтворення втрачених даних

Різницеві оператори мають одну особливість: оператор $n+1$ порядку анулює поліном ступеня n, тобто згортка оператора порядку $n+1$ з поліномом n-ой ступеня дає нульові значення: $\Delta^{n+1} \otimes P_n(k) = 0$. Цю особливість можна використовувати для створення дуже простих і досить надійних операторів відтворення в масивах пропущених і втрачених значень або для заміни анульованих при обробці величин (наприклад, явних викидів).

Приклад 4.1

$$P_2(k) = x_k = 1+2k-k^2,$$
$$k = 0,1,2,\dots,$$
$$x_k = 1,2,1,-2,-7,-14,-23,-34,\dots,$$
$$y_k = x_k \otimes \Delta^3 = 0,0,0,0,\dots$$

Якщо вважати, що відрізок даних, що містить пропуск, є многочленом деякого ступеня, то згортка даних з різницевим оператором наступного порядку повинна бути дорівнює нулю. Так, при апроксимації даних многочленом третьому ступеня для будь-якої точки масиву повинне виконуватися рівність:

$$\Delta^4 \otimes (s_k) = s_{k-2} - 4s_{k-1} + 6s_k - 4s_{k+1} + s_{k+2} = 0$$.

Інтерполяційний фільтр відтворення втраченої центральної точки даних:

$$s_k = (-s_{k-2} + 4s_{k-1} + 4s_{k+1} - s_{k+2})/6$$. (4.3)

Відповідно, оператор фільтра відтворення даних $h(n) = (-1,4,0,4,-1)/6$.

Коефіцієнт підсилення шумів $\sigma^2 = 17/18 = 0.944$.

Приклад 4.2

Фактичний відрізок масиву даних: $x_k = \{3,6,8,8,7,5,3,1\}$.

Припустимо, що на відрізку був зареєстрований явний викид:
$x_k = \{3,6,8,208,7,5,3,1\}$.

Відлік з викидом анульований.

Заміна відліку: $x_3 = (-x_1 + 4x_2 + 4x_4 - x_5)/6 = (-6+32+28-5)/6 \approx 8{,}17$.

У масиві втрачений 5-й відлік.

Відтворення: $x_4 = (-x_2 + 4x_3 + 4x_5 - x_6)/6 = (-8+32+20-3)/6 \approx 6{,}83$.

Приймаючи в (4.3) $k=0$ і підставляючи сигнал $s_k = \exp(j\omega k)$, одержуємо частотну характеристику, у цьому випадку - фільтра відтворення даних 4-го порядку:

$$H(\omega) = (4\cos\omega - \cos 2\omega)/3$$
.

Вид частотної характеристики для фільтрів відтворення пропущених даних 4-го й 6-го порядків наведено на рисунку 4.3.

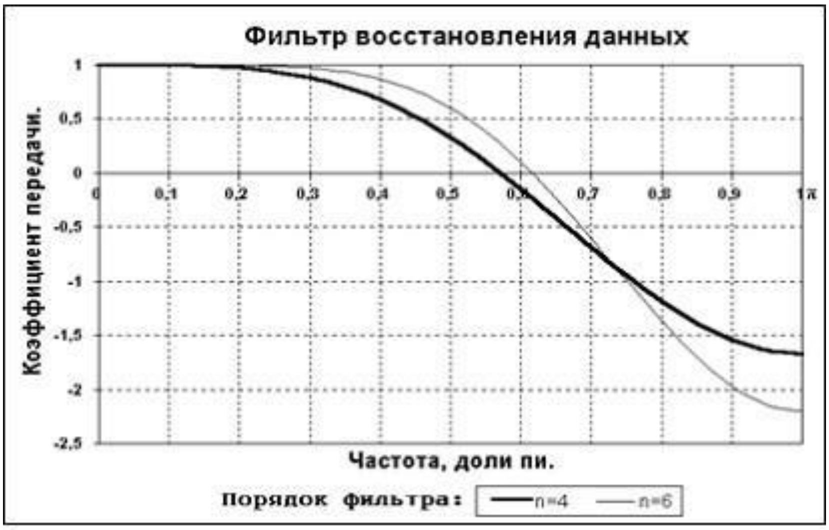


Рисунок 4.3. – Різницеві фільтри

Графіки наочно показують, що застосування різницевих інтерполяційних фільтрів відтворення даних можливо тільки для сигналів, високочастотні й шумові складові яких мінімум у три рази менше частоти Найквіста. Інтерполяційні фільтри вище 4-го порядку застосовувати не рекомендується, тому що вони мають коефіцієнт підсилення шумів більш 1.

На рисунку 4.4 – 4.6 наведені приклади відтворення втрачених даних у вхідних сигналах оператором 3-го порядку й спектри сигналів у зіставленні з передатною функцією оператора відтворення даних.

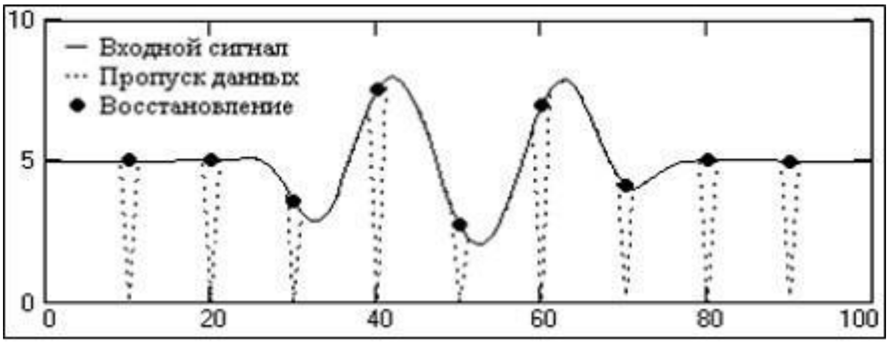


Рисунок 4.4 – Відтворення незашумлених даних

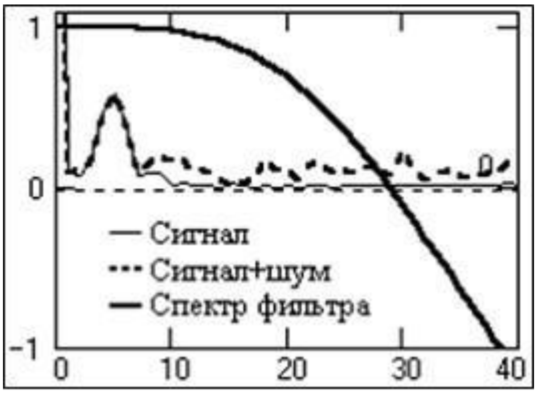


Рисунок 4.5 – Спектри

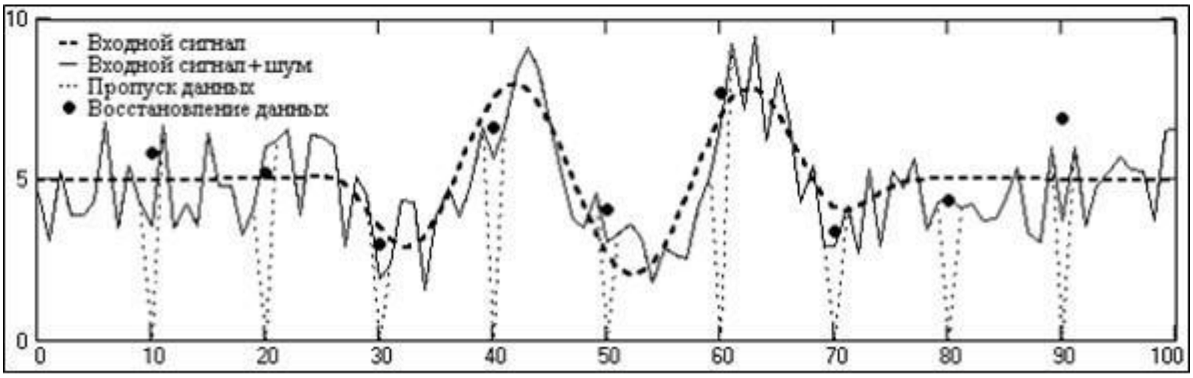


Рисунок 4.6 – Відтворення зашумлених даних

У сигналах, представлених на рисунках, втрачений кожний 10-ий відлік (наприклад, при передачі даних) при збереженні тактової частоти нумерації даних. Враховуючи, що всі значення вхідних сигналів позитивні, індикатором пропуску даних для роботи оператора служать нульові значення. У будь-яких інших випадках для оператора відтворення даних необхідно передбачати спеціальний маркер (наприклад, заміняти анульовані дані або викиди певним більшим або малим значенням відліків).

Як випливає из малюнка 4.5, спектр корисного сигналу повністю перебуває в зоні одиничного коефіцієнта частотної характеристики оператора, і відтворення даних виконується практично без погрішності (Рисунок 4.4).

При накладенні на сигнал статистично розподілених шумів (Рисунок 4.6) погрішність відтворення даних збільшується, але для інформаційної частини повного сигналу вона, як і у вхідних даних, не перевищує середньоквадратичного значення (стандарту) флуктуацій шуму. Про це свідчить Рисунок 4.7, отриманий для сигналів на рисунку 4.6 за даними математичного моделювання при різних значеннях стандарту шуму (вибірки по 10 точках відтворення).

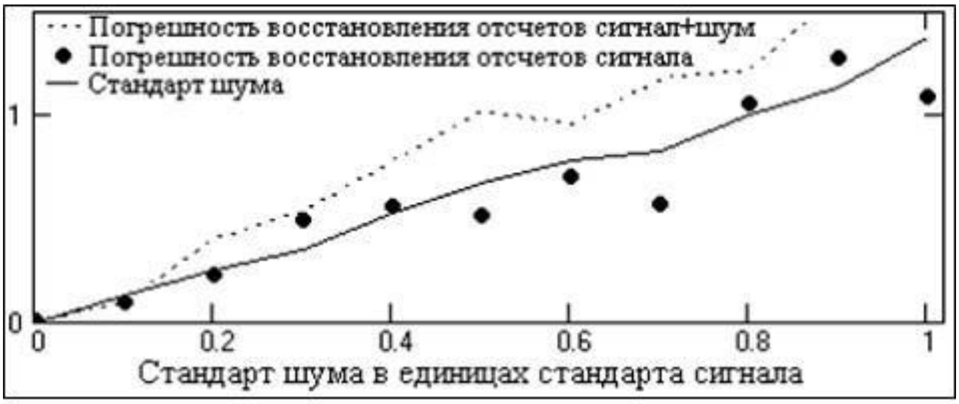


Рисунок 4.7. – Похибки відтворення сигналів

14.3 Апроксимація похідних

Апроксимація похідних - друга велика область застосування різницевих операторів. Оцінки першої, другої й третьої похідної можна робити по найпростіших формулах диференціювання:

$$(s_n)' = (s_{n+1} - s_{n-1}) / 2\Delta t. \qquad h1 = \{-0.5,\ 0,\ 0.5\}.$$
$$(s_n)'' = (s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1}) / \Delta t. \qquad h2 = \{1,\ -2,\ 1\}.$$
$$(s_n)''' = (-s_{n+2} + 2s_{n+1} - 2s_{n-1} + s_{n-2}) / 2\Delta t. \qquad h3 = \{0.5,\ -1,\ 0,\ 1,\ -0.5\}.$$

(4.4)

Оператор першої похідної є непарною функцією й має уявний спектр.

Якщо прийняти $s(t) = \exp(j\omega t)$, то дійсне значення першої похідній повинне бути рівно: $s'(t) = j\omega \cdot \exp(j\omega t)$. Передаточна функція $H(\omega) = j\omega$.

Оцінка першої похідної в точці $n=0$ по різницевому операторі при $\Delta t = 1$:

$$s'(0) = (\exp(j\omega) - \exp(-j\omega)) / 2 = j \sin\omega = H1(\omega)$$
.

Відношення розрахункового значення до дійсного на тій же точці: $K1(\omega) = \sin(\omega) / \omega$. Графіки функцій у правій половині головного діапазону наведено на рисунку 4.8.

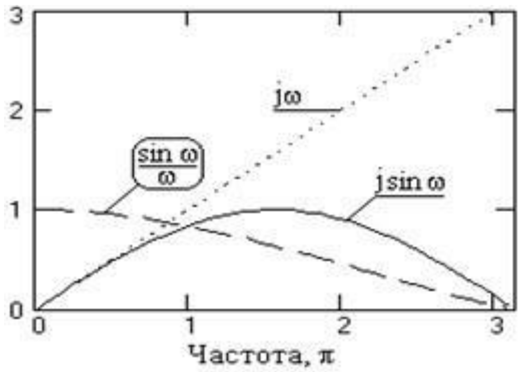


Рисунок 4.8. – Графіки функцій у правій половині головного діапазону

Як випливає из наведених виразів і графіків, значення $K(\omega)$ рівне 1 тільки на частоті $\omega = 0$. На всі інших частотах в інтервалі Найквіста формула дає занижені значення похідних. Однак при обробці практичних даних останній фактор може відіграти й позитивну роль, якщо сигнал низькочастотний (не більш 1/3 головного діапазону) і зареєстрований на рівні високочастотних шумів. Будь-яке диференціювання піднімає в спектрі сигналу частку його високочастотних складових. Коефіцієнт підсилення дисперсії шумів різницевим оператором диференціювання безпосередньо по його спектру в головному діапазоні:

$$K_q = (1/\pi)\int_0^{\pi} (\sin\omega)^2 d\omega = 0,5$$

.

При точному диференціюванні по всьому головному діапазону:

$$K_q = (1/\pi)\int_0^{\pi} \omega^2 d\omega = 3,29$$

.

Отже, різницевий оператор має практично в шість раз менший коефіцієнт підсилення дисперсії шумів, ніж повний по головному діапазону точний оператор диференціювання.

На рисунку 4.9 показаний приклад диференціювання гармоніки із частотою 0.1 частоти Найквіста (показана пунктиром) і цієї ж гармоніки з накладеними шумами (суцільна тонка крива).

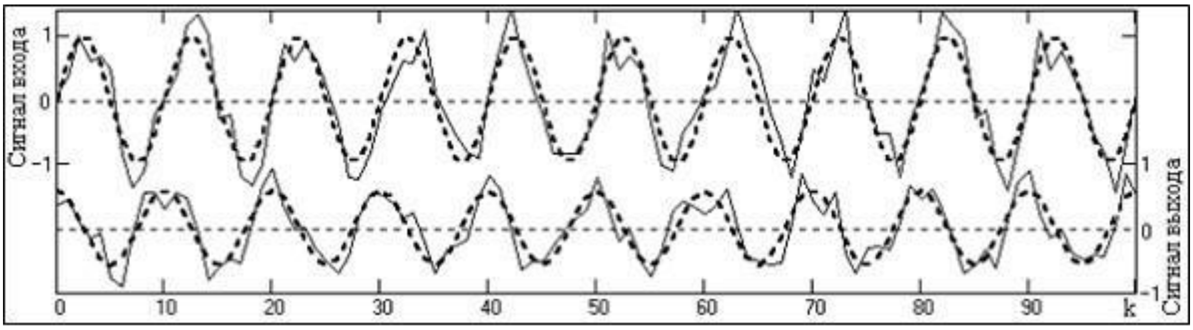


Рисунок 4.9. – Приклад диференціювання (вхідні сигнали – угорі, вихідні – унизу)

Оператор другої похідної належить до типу парних функцій. Частотна функція оператора: $H2(\omega) = -2(1-\cos\omega)$. Власне значення операції $H(\omega) = -\omega^2$. Відношення фактичного значення до власного:

$$K2(\omega) = [\sin(\omega/2)/(\omega/2)]^2$$

K2(?) = [sin(?/2)/(?/2)]^2,

і також рівно 1 тільки на частоті $\omega = 0$. На всіх інших частотах в інтервалі Найквіста формула дає занижені значення похідних, хоча й менші за відносними значенням, чому оператор першої похідної.

Частотні графіки функцій наведено на рисунку 4.10.

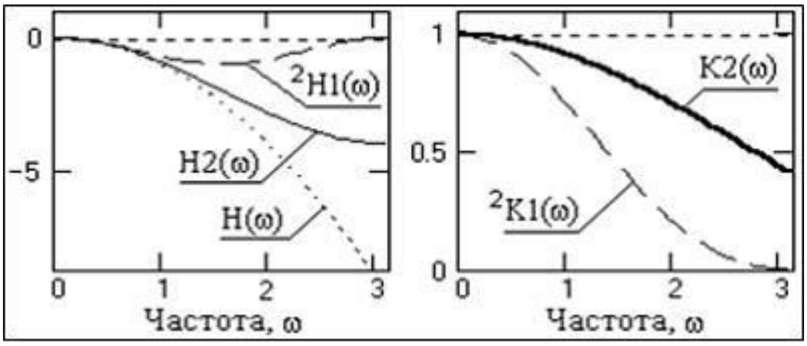


Рисунок 4.10 – Частотні функції 2-ой похідної

Коефіцієнт підсилення дисперсії шумів оператором другої похідної рівний 6 при власному значенні диференціювання, рівному 19,5. Ці значення показують, що операція подвійного диференціювання може застосовуватися тільки для даних, досить добре очищених від шумів, з основною енергією сигналу в першій третині інтервалу Найквіста.

У принципі, другу похідну можна одержувати й послідовним подвійним диференціюванням даних оператором першої похідної.

Однак для таких простих операторів ці дві операції не тотожні. Оператор послідовного подвійного диференціювання можна одержати згорткою оператора першої похідної із самим собою:

$$^2h1 = h1 \otimes h1 = \{0.25,\ 0, -0.5,\ 0,\ 0.25\}$$

,

і має коефіцієнт підсилення дисперсії шумів усього 0.375. Частотна характеристика оператора:

$$^2H1(\omega) = -0.5[1 - \cos(2\omega)]$$

.

Графіки $^2H1(\omega)$ й коефіцієнта відповідності $^2K1(\omega)$ наведені пунктиром на рисунку 4.10. З їхнього зіставлення із графіками другої похідної можна бачити, що послідовне подвійне диференціювання можливе тільки для даних, спектральний склад яких займає не більше п'ятої початкової частини головного діапазону, і по точності гірше оператора другої похідної.

Приклад застосування двох операторів другої похідної наведено на рисунку 4.11.

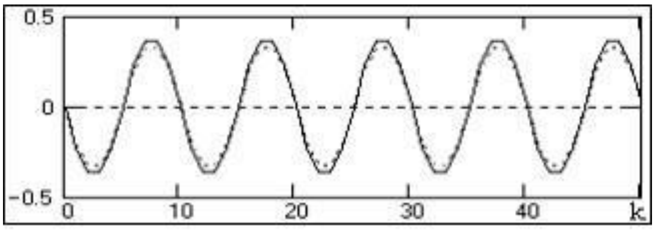


Рисунок 4.11. – Друга похідна гармоніки із частотою $\omega = 0,2\pi$?при $\Delta t = 1$ (пунктир – подвійне послідовне диференціювання)

Принагідно зауважимо, що частота Найквіста головного діапазону обернено пропорційна інтервалу Δt дискретизації даних ($w_N = \pi / \Delta t$), а, отже, інтервал дискретизації даних для коректного використання простих операторів диференціювання повинен бути в 3-5 раз менше оптимального для сигналів з відомими граничними частотами спектрального складу.

Частотні функції для третьої похідної пропонується одержати самостійно.

Розділ 15 Інтегрування даних

Інтегрування сигналів реалізується рекурсивними цифровими фільтрами. Розглянемо приклади аналізу інтегруючих операторів.

Як відомо, для точної операції інтегрування фінітних сигналів у загальному випадку дійсне перетворення:

$$\int_t s(t)\,dt \leftrightarrow (1/j\omega)S(\omega)$$
.

Цей вираз в правій частині має особливу точку при $\omega = 0$ й, відповідно, ваговий дельта-імпульс на нульовій частоті, пропорційний постійної складової сигналу. Оператор інтегрування в частотній області $(1/j\omega)$ при $\omega > 1$ послабляє в амплітудному спектрі високі частоти, а при $0 < \omega < 1$ підсилює низькі. Фазовий спектр сигналу зміщається на -90^0 для позитивних частот і на 90^0 для негативних.

Найбільш простими й розповсюдженими на практиці алгоритмами інтегрування є цифрові аналоги формул трапецій, прямокутників і Сімпсона.

15.1.1 Алгоритм інтегрування по формулі трапецій

Алгоритм інтегрування по формулі трапецій при нульових початкових умовах:

$$y_{k+1} = y_k + (s_{k+1} + s_k)/2$$
. (4.5)

Приймаючи $s_k = \exp(j\omega t)$ й $y_k = H(\omega)\ \exp(j\omega t)$, підставляємо сигнали в (4.5) при $t_k = k\Delta t$, $\Delta t = 1$ і вирішуємо відносно $H(\omega)$. Одержуємо:

$$H(\omega) = \cos(\omega/2)/[2j\ \sin(\omega/2)]$$
.

Частотна характеристика фільтра, а також фільтрів інтегрування по інших формулах, наведено на рисунку 4.12.

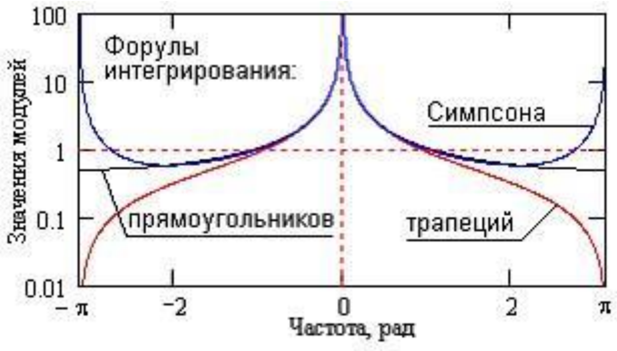


Рисунок 4.12 – Частотні характеристики фільтрів

У зв'язку з нагромадженням результатів по всьому попередньому циклу підсумовування й більшим діапазоном значень модуля АЧХ характеристики фільтра більш зручними, представницькими й інформаційними є частотні функції коефіцієнтів відповідності фактичного інтегрування дійсному:

$$K(\omega) = H(\omega)\exp(j\omega t) / [(1/j\omega)\exp(j\omega t)]$$
.

$$K(\omega) = \cos(\omega/2)[(\omega/2)/\sin(\omega/2)]$$
. (4.6)

Графіки коефіцієнтів відповідності всіх фільтрів інтегрування наведено на рисунку 4.13.

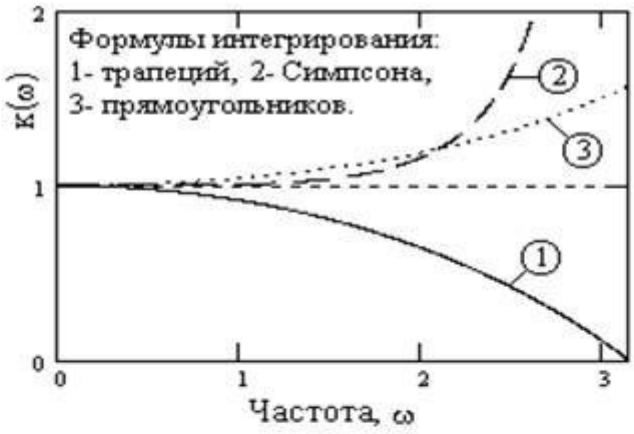


Рисунок 4.13 – Коефіцієнти відповідності

15.1.2 Оператор інтегрування по формулі прямокутників

Оператор інтегрування по формулі прямокутників (інтерполяційне середньоточкове):

$$y_{k+1} = y_k + s_{k+1/2}$$
. (4.7)

Після аналогічних підстановок сигналу й перетворень одержуємо:

$$K(\omega) = (\omega/2)/\sin(\omega/2)$$
.

15.1.3 Чисельне інтегрування по формулі Сімпсона

При чисельному інтегруванні по формулі Сімпсона рівняння фільтра має вигляд:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + (s_{k+1} + 4s_k + s_{k-1})/6$$
. (4.8)

Частотний аналіз фільтра проведіть самостійно. Контроль:

$$K(\omega) = (2+\cos\omega)/[3 \sin(\omega)/\omega]$$

Найбільш прості формули цифрового інтегрування (трапецій і прямокутників) поводяться різним способом у головному частотному діапазоні.

Формула прямокутників завищує результати на високих частотах, а формула трапецій - занижує. Ці особливості легко з'ясовні. Для одиночної гармоніки площа трапеції по двом послідовним відлікам завжди менше, ніж площа з опуклою дугою гармоніки між цими відліками, і різниця тим більше, чим більше частота. У межі, для гармоніки із частотою Найквіста, відліки відповідають знакозмінному ряду (типу 1, -1, 1, -1, ... або будь-які інші значення залежно від амплітуди й початкового фазового кута) і при нульових початкових умовах підсумовування двох послідовних відліків у формулі (4.5) буде давати 0 і нагромадження результатів не відбувається. Інтегрування по площі прямокутників зі звітом висоти по центральній точці між двома відліками завжди веде до завищення площі прямокутника щодо площі, обмеженою опуклою дугою гармоніки.

Формула Сімпсона відрізняється від формул трапецій і прямокутників більш високим ступенем дотику одиничного значення, що забезпечує більш високу точність інтегрування в першій половині головного діапазону. Однак на високих частотах погрішність починає різко наростати аж до виходу на нескінченність на кінці діапазону (полюс у знаменнику передатної функції рекурсивного фільтра на частоті Найквіста).

Ці особливості інтегрування слід ураховувати при обробці даних складного спектрального складу. Приклад інтегрування сигналу й зміни його спектра наведено на рисунку 4.14.

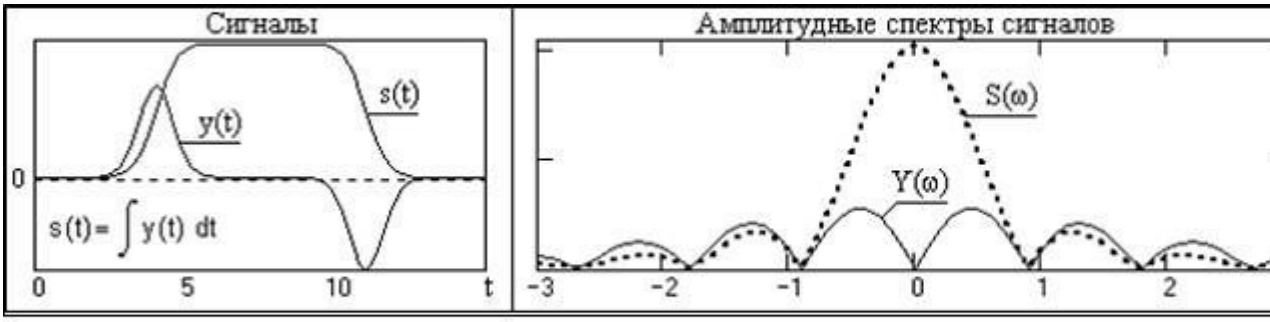


Рисунок 4.14 – Інтегрування сигналу й зміни його спектра

Тема 5 Фільтрація випадкових сигналів

Вступ

Якщо сигнал на вході фільтра є детермінованим, то його співвідношення з вихідним сигналом однозначно визначається імпульсним відгуком фільтра. Таким же однозначним є співвідношення входу - виходу й для випадкових сигналів, однак у силу природи останніх аналітичне подання як вхідного сигналу, так і відгуку системи, не представляється можливим. Для опису реакції фільтра на випадковий вхідний сигнал використовується статистичний підхід.

Розділ 16 Фільтрація випадкових сигналів

Якщо параметри випадкового вхідного сигналу спеціально не оговорюються, то за замовчуванням приймається, що на вхід фільтра надходить реалізація випадкового стаціонарного процесу $x(k\Delta t)$ з нульовим середнім, яка викликає сигнал $y(k\Delta t)$ на виході фільтра. Значення Δt, як звичайно, приймаємо рівним 1.

16.1 Збереження природи сигналу

Припустимо, що фільтр має імпульсний відгук $h(n) = \exp(-an),\ n > 0$. Задамо на вході фільтра стаціонарний квазідетермінований випадковий сигнал, який не має властивості ергодичності, але має всі властивості випадкового сигналу, і може бути описаний у явній математичній формі:

$$x(k) = A + \cos(2k+\varphi),$$

де A і φ - взаємно незалежні випадкові величини, причому значення рівномірне розподілене в інтервалі $[0,\ 2\pi]$.

При цьому вихідний сигнал визначиться виразом:

$$y(k) = h(n) \otimes x(k-n) \equiv \sum_{n=0}^{N} h(n)\ x(k-n) \tag{5.1}$$

$$y(k) = A/3 + [3\cos(2k+\varphi) + 2\sin(2k+\varphi)]/13.$$

Із цього виразу випливає, що вихідний сигнал фільтра також є випадковим і містить ті ж самі випадкові параметри, що й вхідний сигнал, а, отже, для нього існують певні статистичні характеристики. Приклад реалізації квазідетермінованого випадкового сигналу і його фільтрації аналогом, що згладжує Rc-Фільтра наведено на рисунку 5.1.

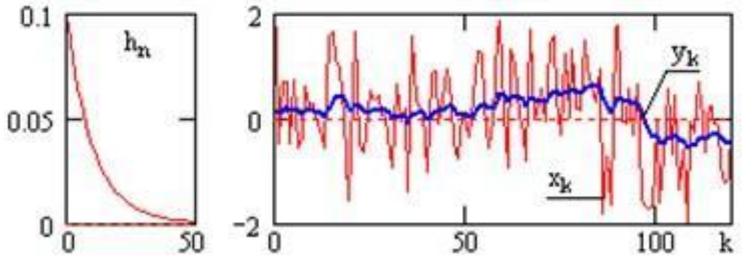


Рисунок 5.1 – Фільтрація квазідетермінованого сигналу

16.2 Математичне сподівання

Математичне сподівання (індекс операції – M) довільного вхідного випадкового стаціонарного сигналу $x(k)$ на виході фільтра визначиться виразом:

$$\bar{y} = M\{y(k)\} = M\{\sum_n h(n)x(k-n)\} = \sum_n M\{x(k-n)\}h(n) = \bar{x}\sum_n h(n) = \bar{x}\cdot K_{nc}$$
.

Звідси випливає, що математичне сподівання вихідних сигналів фільтра дорівнює математичному сподіванню вхідних сигналів, помноженому на коефіцієнт підсилення фільтром постійної складової.

При $K_{nc} = 1$ середнє значення вихідних сигналів не змінюється й дорівнює середньому значенню вхідних сигналів. Якщо фільтр не пропускає постійну складову сигналів (сума коефіцієнтів імпульсного відгуку фільтра дорівнює нулю), то випадковий вихідний сигнал завжди буде мати нульове математичне сподівання.

16.3 Кореляційні співвідношення

Для нецентрованих вхідних сигналів $x(k)$ розміром $(0-K)$ автокореляційна функція (АКФ), а рівно й функція автоковаріації $K_x(n)$ (ФАК) для центрованих випадкових сигналів, обчислюється по формулі:

$$R_x(n) = [1/(K+1-n)]\sum_{n=0}^{K-n} x(k)\, x(k+n)$$
. (5.2)

Формула застосовується досить рідко, в основному для детермінованих сигналів з невеликим числом відліків. Для випадкових і зашумлених сигналів зменшення знаменника $(K-n)$ й числа, що перемножуються відліків у міру збільшення зрушення приводить до наростання статистичних флуктуацій обчислення АКФ.

Більшу достовірність у цих умовах забезпечує обчислення АКФ в одиницях потужності сигналу по формулі:

$$R_s(n) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K} s_k \cdot s_{k+n}, \quad s_{k-n} = 0 \quad \text{при} \quad k+n > K, \quad (5.3)$$

т.ч. з нормуванням на постійний множник $1/K$ і із продовженням сигналу нульовими значеннями (у ліву сторону при зсувах $(k-n)$ або в праву сторону при використанні зсувів $(k+n)$). Ця оцінка є зміщеною й має трохи меншу дисперсію, ніж по формулі (5.2). Різницю між нормуваннями по формулах (5.2) і (5.3) можна наочно бачити на рисунку 5.2.

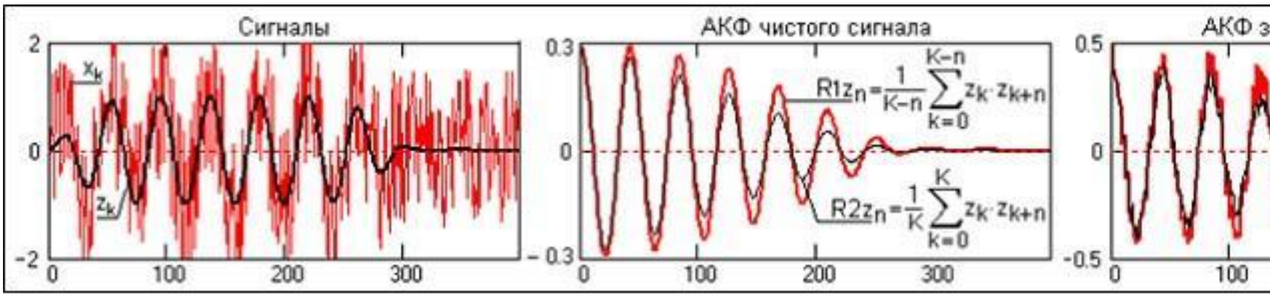


Рисунок 5.2. – Різниця між нормуваннями по формулах (5.2) і (5.3)

Формулу (5.3) можна розглядати, як усереднення суми добутків, тобто як оцінку математичного сподівання:

$$R_s(n) = M\{s_k s_{k+n}\} \cong \overline{s_k s_{k+n}}. \quad (5.4)$$

По аналогічній формулі може бути обчислена й АКФ вихідних сигналів. Для добутку вихідних сигналів $y(k)$ і $y(k+n)$, що утворюють функцію автокореляції вихідних сигналів, можна також записати (без додаткових множників):

$$y(k)y(k+n) = \sum_j \sum_i h(i)h(j)\, x(k-i)x(k+n-j).$$

Якщо взяти математичні сподівання від обох частин цієї рівності, те, з урахуванням співвідношення в правій частині під знаками сум:

$$M\left\{x(k-i)\ x(k+n-j)\right\} = -R_x\left(k-i-k-n+j\right) = R_x\left(n+i-j\right)$$
.

одержимо: $R_y(n) \ = \sum_i \sum_j h(i)h(j)R_x(n+i-j) \equiv R_x(n) \otimes h(n+i) \otimes h(n-j)$.

Таким чином, функція автокореляції вихідного сигналу рівна АКФ вхідного сигналу, згорнутої двічі, у прямому й зворотному напрямку, з імпульсним відгуком фільтра, що зберігає парність АКФ вихідного сигналу. Для центрованих процесів аналогічний висновок дійсний і для коваріаційних функцій.

На рисунку 5.3 наведений приклад нормованих АКФ вхідної і вихідної випадкових послідовностей при фільтрації RC-фільтром, форма імпульсного відгуку якого також наведена на рисунку.

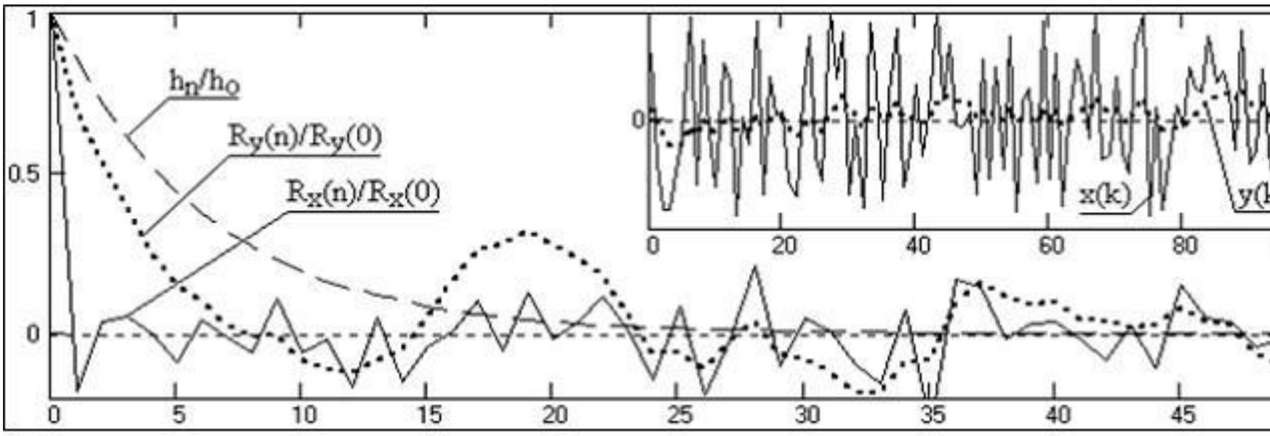


Рисунок 5.3 – Функції кореляційних коефіцієнтів

Зауважимо, що для згортки імпульсних відгуків, роблячи заміну $n-j=m$, ми маємо рівність:

$$h(n+i)\otimes h(n-j)a = h(m+i+j)\otimes h(m) = h(m)\otimes h(m+p) = R_h(m)$$
,

де $R_h(m)$ – функція кореляції імпульсного відгуку фільтра.

Звідси: $R_y(n) \ = \ R_x(n)\otimes R_h(m)$ (5.5')

Це означає появу у випадковому сигналі на виході фільтра певної кореляційної залежності, обумовленою інерційністю фільтра. Ефективний інтервал τ_k кореляції даних у сигналі тем менше, чим вище верхня гранична частота $\omega_в$ його спектра (за рівнем 0.5):

$$\tau_\kappa = p / \omega_e = 1 / 2 f_e$$
.

Оцінка інтервалу кореляції для кінцевих (неперіодичних) функцій, як правило, проводиться безпосередньо по функціях автокореляції $R(n)$:

$$\tau_k = 2\sum_n \left|R(n)/R(0)\right| - 1$$
, (5.6)

де значення n обмежується величиною 3-5 інтервалів спаду центрального піка до величини порядку $0,1 \cdot R(0)$. Без такого обмеження за рахунок підсумовування модуля флуктуацій, що не несуть інформації, значення τ_κ завищується щодо розрахункового по спектральній характеристиці сигналу. Значення τ_κ може визначатися також безпосередньо по координаті перетинання нульової лінії функцією автоковаріації $K(n)$. Далі звичайно починаються статистичні флуктуації значення $K(n)$ близько нульової лінії, викликані обмеженістю вибірки.

Функція $R_x(n)$ випадкових статистично незалежних відліків близька до δ-функції, згортка якої із $R_h(m)$ приведе до формування на виході вихідного сигналу, нормована форма АКФ якого буде прагнути до форми $R_h(m)$.

При досить великій вибірці випадкових відліків вхідного сигналу це означає практично повне повторення функцією $R_y(n)$ форми кореляційної функції імпульсного відгуку, як це можна бачити на рисунку 5.4, який відрізняється від малюнка 5.3 тільки кількістю вибірки $K = 10000$.

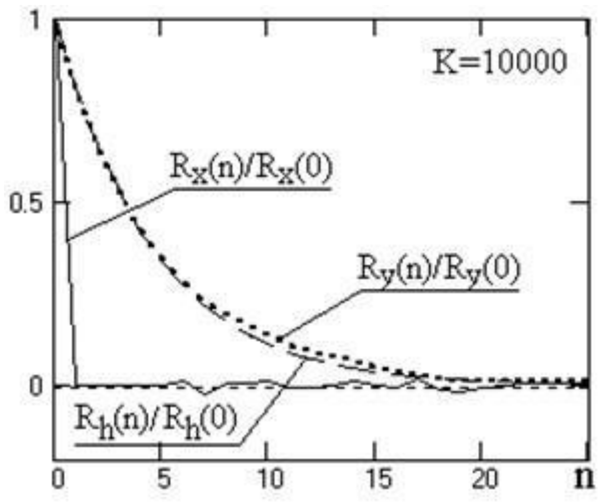


Рисунок 5.4 – Функції кореляційних коефіцієнтів великої вибірки

Відповідно, інтервал кореляції вихідних сигналів для випадкової вхідної послідовності можна визначати безпосередньо по функції (5.6) безпосередньо імпульсного відгуку фільтра.

Для взаємної кореляційної функції (ВКФ) R_{xy} вхідного й вихідного сигналів відповідно маємо:

$$x(k)\otimes y(k+n) \ = \sum_i h(i)\ x(k)\ y(k+n-i) \ .$$

$$R_{xy}(n) \ = \sum_i h(i)\ R_x(n-i) \equiv h(i)\otimes R_x(n-i) \quad (5.7)$$

т.ч. функція взаємної кореляції вхідного й вихідного сигналів рівна згортці АКФ вхідного сигналу з функцією імпульсного відгуку фільтра. Висновок дійсний і для функцій коваріації.

Інша взаємно кореляційна функція R_{yx} може бути отримана зі співвідношення:

$$R_{yx}(n) \ = \ R_{xy}(-n) \equiv h(i)\otimes R_x(n+i) \ . \quad (5.7')$$

Відзначимо, що для статистично незалежних випадкових величин при однобічному імпульсному відгуку ($h(i)=0$ при $i<0$) функція $R_{xy}(n)$ також є однобічною, і рівна 0 при $n<0$, а функція R_{yx} відповідно рівна 0 при $n>0$.

Розділ 17 Спектри потужності випадкових сигналів

17.1 Спектр потужності вихідного сигналу

Якщо на вхід фільтра з імпульсним відгуком $h(k) \Leftrightarrow H(f)$ надходить випадковий стаціонарний ергодичний сигнал $x(k) \Leftrightarrow X_T(f)$, що має на інтервалі Т функцію автокореляції $R_x(n)$ й спектр потужності $W_x(f)$, то на виході фільтра реєструється стаціонарний ергодичний сигнал $y(k) \Leftrightarrow Y_T(f) = X_T(f)H(f)$.

Відповідно, енергетичний спектр вихідного сигналу на тому ж інтервалі:

$$|Y_T(f)|^2 = |X_T(f)|^2 |H(f)|^2$$

. (5.8)

Оцінка спектра потужності (спектральної щільності енергії):

$$W_y(f) \approx (1/T) \; |X_T(f)|^2 |H(f)|^2 = W_x(f) |H(f)|^2$$

. (5.9)

Спектр потужності сигналу на виході фільтра дорівнює спектру потужності вхідного сигналу, помноженому на квадрат модуля частотної характеристики фільтра. З урахуванням парності кореляційних функцій спектр потужності вихідного сигналу також є парною дійсною функцією й не має фазової характеристики процесу.

Спектр потужності сигналу і його функція автокореляції зв'язані перетворенням Фур'є:

$$R_y(n) \Leftrightarrow |Y(\omega)|^2 = W_y(\omega)$$

.

17.2 Середня потужність вихідного сигналу

Середня потужність вихідного сигналу визначається з використанням формули (5.8):

$$W_y = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) \; |H(f)|^2 \, df \equiv R_x(0) \sum_n h^2(n) = W_x \sum_n h^2(n)$$

. (5.10)

Якщо значення потужності вхідного сигналу невідомо, то обчислюється безпосередньо *середній квадрат* значень вихідного сигналу:

$$\overline{y^2(t)} = R_y(0) \equiv \overline{x^2} \sum_n h^2(n) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) \; |H(f)|^2 \, df$$

.

Висновок: середня потужність вихідного сигналу дорівнює середньої потужності вхідного сигналу, помноженої на суму квадратів коефіцієнтів імпульсного відгуку фільтра.

17.3 Дисперсія вихідного сигналу

Для центрованих випадкових сигналів середня потужність рівна дисперсії сигналів. Для нецентрованих вихідних сигналів:

$$\sigma_y{}^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 \equiv (\overline{x^2} - \bar{x}^2)\sum_n h^2(n)$$
. (5.11)

17.4 Взаємний спектр потужності

Взаємний спектр потужності вхідного й вихідного сигналу:

$$W_{xy}(f) \approx (1/T)X_T(f)Y_T(f) \ = \ (1/T)|X_T(f)|^2 H(f) \ = \ W_x(f)H(f)$$
. (5.12)

Здійснюючи перетворення Фур'є лівої й правої частини виразу, отримуємо:

$$R_{xy}(n) \ = R_x(n) \otimes h(n)$$
, (5.13)

що повторює формулу (5.5).

17.5 Посилення шумів

Критерієм якості при використанні будь-якого методу фільтрації інформації можна вважати виконання цільового призначення з мінімальним посиленням шумів (максимальним їхнім придушенням). Позначимо через $\varepsilon(k)$ адитивний шум у вхідному сигналі з математичним сподіванням $M\{\varepsilon(k)\} = 0$ і дисперсією σ^2. Значення $\varepsilon(k)$ статистично незалежні. З урахуванням перешкоди у вхідному сигналі значення сигналу на виході:

$$y(k) \ = \sum_n h(n)[x(k-n) + e(k-n)]$$
.

Математичне сподівання значень вихідного сигналу:

$$M\{y(k)\} = \sum_n h(n)[x(k-n) + M\{\varepsilon(k-n)\}] = S_n h(n) \ x(k-n)$$
.

Обчислимо дисперсію розподілу відліків вихідного сигналу:

$$D\{y(k)\} = M\left\{\left[\sum_n h(n)[x(k-n)+\varepsilon(k-n)] - M\{y(k)\}\right]^2\right\} = M\left\{\left[\sum_n h(n)\varepsilon(k-n)\right]^2\right\} =$$

(5.14)

Звідси випливає, що сума квадратів значень імпульсного відгуку цифрового фільтра являє собою коефіцієнт підсилення шумів, рівномірно розподілених у головному частотному діапазоні фільтра. Це повністю відповідає прямому використанню вираза (5.14) при $W_x(f) = \sigma^2$:

$$\sigma_y{}^2 = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \equiv \sigma^2 \sum_n h^2(n)$$

. (5.14')

Таким чином, коефіцієнт підсилення фільтром дисперсії статистично розподілених шумів при розрахунках по імпульсному відгуку:

$$K_q = \sum_n h^2(n)$$

(5.15)

По дискретній частотній функції фільтра:

$$K_q = [1/(N+1)] \sum_n H_n{}^2$$

. (5.15')

Приклад 5.1

Фільтр, що згладжує $y(k) = 0,2 \sum_{n=-2}^{2} x(k-n)$.

Коефіцієнт підсилення шумів: $5 \cdot (0,2^2) = 0,2$. Дисперсія шумів зменшується в $1/0,2 = 5$ раз.

Виконаєте розрахунки коефіцієнта підсилення шумів для п'ятиточкового фільтра МНК.

Контрольна відповідь: 0.486.

17.6 Функція когерентності

Функція когерентності вхідного й вихідного сигналів фільтра оцінюється по формулі:

$$\gamma_{xy}^2(f) = |W_{xy}(f)|^2 / [W_x(f) \times W_y(f)]$$

. (5.16)

Якщо функції $W_x(f)$ й $W_y(f)$ відмінні від нуля й не містять дельта-функцій, то для всіх частот f значення функції когерентності знаходяться в інтервалі:

$$0 \le \gamma_{xy}^2(f) \le 1$$

.

Для виключення дельта-функції на нульовій частоті (постійна складова сигналу) визначення функції когерентності проводиться по центрованих сигналах. Для фільтрів з постійними параметрами функція когерентності рівна 1, у чому неважко переконатися, якщо у формулу (5.16) підставити вирази W_{xy} й W_y, визначені через W_x. Для зовсім не зв'язаних сигналів функція когерентності дорівнює нулю.

Проміжні між 0 і 1 значення можуть відповідати трьом ситуаціям:

1. У сигналах (або в одному з них) є присутнім зовнішній шум (наприклад, шум квантування при обмеженні по розрядності).

2. Фільтр не є строго лінійним. Це може спостерігатися, наприклад, при певному обмеженні по розрядності обчислень, при накопиченні помилки в рекурсивних системах і т.п.

3. Вихідний сигнал $y(t)$ крім $x(t)$ залежить ще від якихось вхідних або внутрішніх системних процесів.

Величина $1-\gamma_{xy}^2(f)$ задає частку середнього квадрата сигналу $y(t)$ на частоті f, не пов'язану із сигналом $x(t)$.і

Тема 6 Вагові функції

Вступ

Більшість методів аналізу й обробки даних мають у своїй сполуці операцію згортки безлічі даних $s(k)$ з функцією оператора згортки $h(n)$. Як безліч даних $s(k)$, так і оператор $h(n)$, що виконує певне завдання обробки даних, що й реалізує певну частотну передаточну функцію системи (фільтра), можуть бути нескінченно більшими.

Практика цифрової обробки має справу тільки з обмеженими множинами й даними. У загальному випадку, ці обмежені множини "вирізьблюються" з нескінченних множин $s(k)$ і $h(n)$, що рівносильне множенню цих множин на прямокутну функцію з одиничним амплітудним значенням, яку називають природнім часовим вікном або природньою ваговою функцією.

Враховуючи, що добуток функцій відображається в спектральній області згорткою їх фур'є-образів, це може досить суттєво позначитися як на спектральних характеристиках функцій, так і на результатах їх наступних перетворень і обробки. Основне призначення розглянутих у даній темі вагових функцій – зведення до мінімуму небажаних ефектів усікання функцій.

Розділ 18 Явище Гіббса

Найчастіше зі зміною частотних характеристик функцій доводиться зустрічатися при усіканні операторів фільтрів. На прикладі усікання операторів і розглянемо характер змін, що відбуваються.

При розрахунках фільтрів, як правило, задається певна передаточна характеристика $H(\omega)$ фільтра, і по ній проводиться розрахунки оператора фільтра $h(n)$, кількість членів якого може виявитися дуже більшим, у межі - нескінченним. Усікання може розглядатися, як результат множення функції оператора фільтра на селектуюче вагове вікно довжиною $2N+1$. У найпростішому випадку це вікно являє собою П-подібну селектуючу функцію:

$h_n = h(n)\,\Pi_N(n)$, $\Pi_N(n) = 1$ при $|n| \le N$, $\Pi_N(n) = 0$ при $|n| > N$.

Функція $h(n)$ оператора фільтра обумовлює певну частотну передатну характеристику фільтра $H(\omega)$. Повному оператору $h(n)$ відповідає вихідна частотна характеристика $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \exp(-j\omega n)$$
(6.1)

18.1 Сутність явища Гіббса

Усіченій функції h_n в часовому вікні селекції $\Pi_N(n)$ в частотному просторі відповідає спектральна функція, яка деякою мірою повинна відрізнятися від функції $H(\omega)$

Очевидно, що при усіканні ряду Фур'є (6.1), до кінцевого числа членів $\pm N$ ми будемо мати усічений ряд Фур'є:

$$H_N(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \exp(-j\omega n)$$
, (6.2)

при цьому збіжність суми членів, що залишаються, $H_N(\omega)$ ряду до вихідної передаточної $H(\omega)$ функції погіршується, і відбувається відхилення частотної характеристики фільтра від спочатку заданої в тем більшого ступеня, чим менше значення N.

Особливо яскраво це проявляється на крутих перепадах (розривах, перегонах) у передаточних функціях:

- крутість перепадів "розмивається", тому що вона не може бути більше, ніж крутість (у нульовій крапці) останньої збереженої гармоніки ряду (6.2);

- по обидві сторони "розмитих" перепадів з'являються викиди й загасаючі осциляції із частотою, близької до частоти першого відкинутого члена ряду (6.1).

Ці ефекти (рисунок 6.2) при усіканні рядів Фур'є одержали назву явища Гіббса.

Розглянемо явище Гіббса більш докладно на прикладі розкладання в ряд Фур'є частотної функції одиничного стрибка $G(\omega)$, яка є Фур'є-образом певної дискретної часової функції b_n.

Рівняння функції одиничного стрибка:

$$G(\omega) = -0.5, \quad -\pi \le \omega < 0,$$
$$G(\omega) = 0.5, \quad 0 \le \omega \le \pi, \qquad (6.3)$$

Функція (6.3) має розрив величиною 1 у точці $\omega = 0$, і в точках $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, …, у силу дискретності часової функції й періодичності її спектра. Оскільки функція $G(\omega)$ є непарної, її ряд Фур'є не містить косинусних членів, і коефіцієнти ряду визначаються виразом:

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(\omega)\ \sin\ n\omega d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin\ n\omega d\omega.$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n \cdot \pi}, n - непарне, \\ 0, n - парне. \end{cases}$$

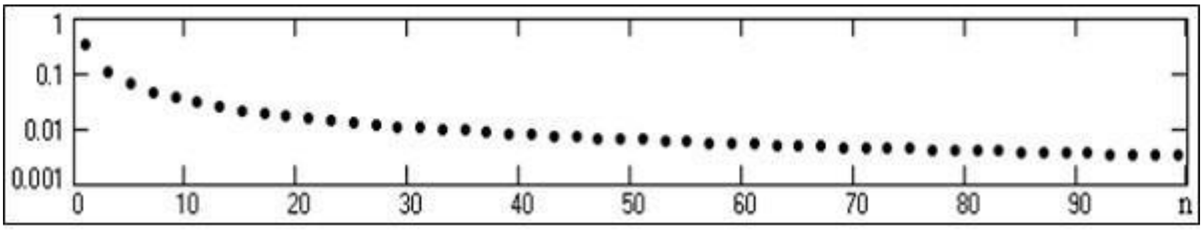


Рисунок 6.1 – Значення коефіцієнтів b_n

Як видно на рисунку 6.1, ряд коефіцієнтів b_n загасає дуже повільно. Відповідно, повільно буде загасати й ряд Фур'є функції $G(\omega)$:

$$G(\omega) = (2/\omega)[\sin\omega + (1/3)\cdot\sin\ 3\omega + (1/5)\cdot\sin\ 5\omega + ...].$$

$$G(\omega) = \sin[(2n+1)\,\omega]/(2n+1). \quad (6.4)$$

Якщо ми будемо обмежувати кількість коефіцієнтів b_n, тобто обмежувати значення N ряду Фур'є функції $G(\omega)$, то підсумовування в (6.4) буде здійснюватися не до ∞, а до значення N. Графіки часткових сум ряду (6.4) у зіставленні з вихідною функцією наведено на рисунку 6.2. Вони наочно показують сутність явища Гіббса.

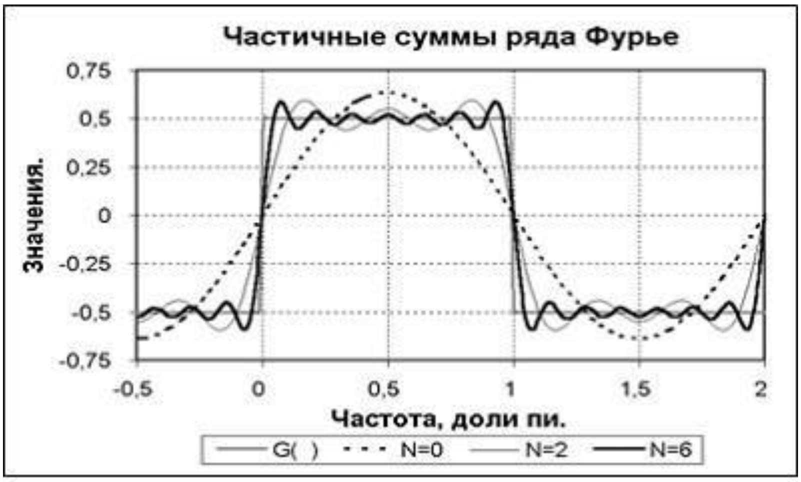


Рисунок 6.2 – Явище Гіббса

При усіканні рядів Фур'є певне викривлення функції, розкладеної в ряд Фур'є, існує завжди. Але при малій частці енергії, що відтинається частини сигналу цей ефект може бути й мало помітний. На перегонах і розривах функцій він проявляється найбільше виразно.

18.2 Параметри ефекту Гіббса

Ряд (6.4) при усіканні можна записати в наступному вигляді:

$$G_N(\omega) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\left[\int_0^{\omega}\cos((2n+1)\omega)\,d\omega\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\omega}\left[\sum_{n=0}^{N}\cos((2n+1)\omega)\right]d\omega$$

.

Сума косинусного ряду рівна $\sin[2(N+1)\omega]/(2\sin\omega)$. Звідси:

$$G_N(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega}\frac{\sin 2(N+1)\omega}{\sin\omega}\,d\omega$$

. (6.5)

Для визначення місця розташування максимумів і мінімумів осциляцій функції (6.5) дорівняємо до нуля її першу похідну (підінтегральну функцію), при цьому:

$$\omega_k = \pm k\pi/\left(2(N+1)\right), k = 1, 2, \ldots$$

Відповідно, амплітудні значення перших (максимальних) осциляцій функції припадає на точки $\omega_1 = \pm\pi/(2(N+1))$, других (протилежних по полярності) - на точки $\omega_2 = \pm\pi/(N+1)$.

$$2\omega_1 = \pi/(N+1) = \Delta\omega$$

Період пульсацій рівний $2\omega_1 = \pi/(N+1) = \Delta\omega$, тобто інтервалу дискретизації спектра при рівній кількості відліків оператора фільтра і його спектра.

Функція пульсацій (при її виділенні) є непарної щодо стрибка. Відповідно, при стрибку функції $G(\omega)$ на довільній частоті головного частотного діапазону значення ω_k є значеннями $\Delta\omega_k$ щодо частоти стрибка. Амплітудні значення функції в точках ω_1 і ω_2 (при підстановках ω_1 і ω_2 верхньою межею в (6.5)) практично не залежать від кількості членів ряду N і рівні:

$$G_N(\omega_1) \approx 0{,}5 + 0{,}09,$$
$$G_N(\omega_2) \approx 0{,}5 - 0{,}05.$$

Амплітуда наступних осциляцій поступово загасає.

Таким чином, для усічених рядів Фур'є граничні значення максимальних викидів по обидві сторони від стрибка й наступних за ними зворотних викидів при одиничній амплітуді розриву функції досягають відповідно 9% і 5% значення амплітуди стрибка. Крім того, сам стрибок функції із власне стрибка перетвориться в перехідну зону, довжина якої між точками максимальних викидів по обидві сторони стрибка рівна $\pi/(N+1)$, а за рівнем вихідних значень функції на стрибку (у цьому випадку від -0.5 до 0.5) порядку $\frac{2}{3}\pi/(N+1)$. Це явище типове для всіх функцій з розривом.

Можна розглянути це явище й з інших позицій. Як відомо, добуток функцій відображається в частотній виставі згорткою їх Фур'є-образів. Звідси:

$$h_n = h(n)\,\Pi_N(n) \Leftrightarrow H(\omega) \otimes \Pi_N(\omega) = H_N(\omega) \quad (6.6)$$

Права частина виразу (6.6) і відображає математичну сутність явища Гіббса. Обмеження масиву функції певною кількістю членів (множенням на П-Вікно, прямокутну селектуючу функцію) відображається згорткою частотної характеристики функції із частотною характеристикою селектуючої функції (яку часто називають функцією, що згортає). Частотна характеристика прямокутної функції добре відома, як функція відліків

$\sin(x)/x, x = \omega(2N+1)/2$, і для П-Імпульсу довжиною $2N+1$ наведено на рисунку 6.3 (для ряду значень N).

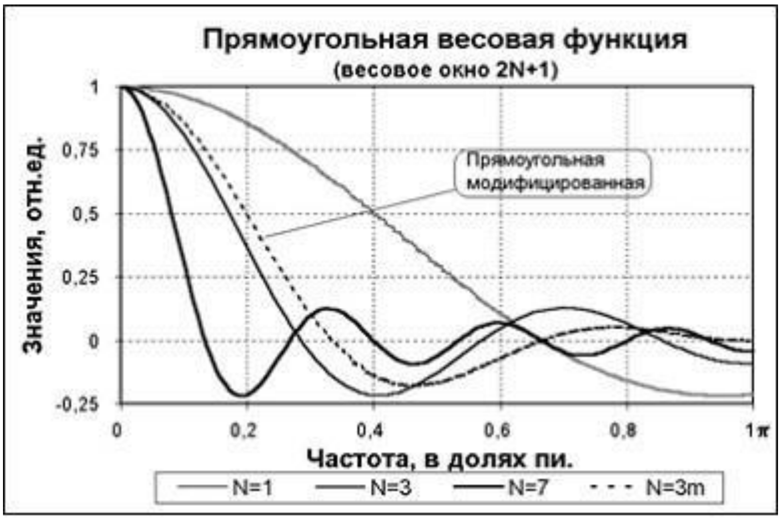


Рисунок 6.3 – Згортаючі (частотні) вагові функції

Згортка цієї частотної функції (Фур'є-Образа селектуючої функції) із частотною характеристикою функцій, що усікаються, і породжує явище Гіббса на різких перегонах частотних характеристик. Чим більше N, тем уже центральний пік спектра прямокутного імпульсу, і, відповідно, менше ширина перехідної зони, яка формується замість стрибків функцій. Амплітуда самих осциляцій (по номеру від центрального піка) має постійне значення й не залежить від N.

18.3 Наслідки для практики

При розрахунках фільтрів і усіканні розмірів їх операторів явище Гіббса є досить небажаним, тому що приводить до викривлення форми передаточних характеристик фільтрів. Як приклад розглянемо явище Гіббса стосовно до фільтра низьких частот.

Спробуємо реалізувати передаточну функцію фільтра наступного вигляду:

$$H(f) = \begin{cases} 1, \text{ при } -0,2 \le f \le 0,2, \\ 0, \text{ при } -0,2 > f > 0,2. \end{cases}$$

у головному частотному діапазоні від -0.5 до 0.5. Функція парна, коефіцієнти ряду Фур'є представлені тільки косинусними членами:

$$a_n = 4\int_0^{0,2} \cos(2\pi fn)\, df = 2\sin(0,4\pi n)/(\pi n)$$

.

Передаточна функція:

$$H(f) = 0,4 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin(0.4\pi n)\cos(2\pi fn)/(\pi n)$$

. (6.7)

Результат усікання ряду Фур'є (6.7) до N = 7 наведено на рисунку 6.4.

Рисунок 6.4 – Передаточні функції ФНЧ

Як видно на рисунку, явище Гіббса суттєво спотворює передаточну функцію фільтра. Однак при реалізації фільтрів обмеження довжини операторів фільтрів є правилом їх конструювання виходячи із чисто практичних міркувань реалізації.

Явище Гіббса має місце при усіканні будь-яких числових масивів. При обробці геофізичних даних операція усікання числових масивів, як одномірних, так і багатомірних, належить до типових. Вирізьблюються із профілів і площ ділянки зйомки з аномальними даними для них більш детальної обробки й інтерпретації.

При аналізі усікаються кореляційні функції, і відповідно звиваються із частотним образом вагового вікна потужності, що обчислюються спектри, та ін. У всіх цих випадках ми можемо зіштовхнутися як з явищем Гіббса, так і з іншими наслідками згортки функцій у частотній області, зокрема із циклічністю згортки, з певним згладжуванням спектрів, що усікаються даних, яке може бути й небажаним (зниження роздільної здатності), і корисним (підвищення стійкості спектрів).

У самих даних, що усікаються, ми не бачимо цих явищ, тому що вони проявляються в зміні їх частотного образа, але при обробці даних, основною метою якої, як правило, і є зміна частотних співвідношень у сигналах, наслідки цих явищ можуть позначитися самим несподіваним способом.

На рисунку 6.5 показаний інший приклад викривлень сигналу при усіканні.

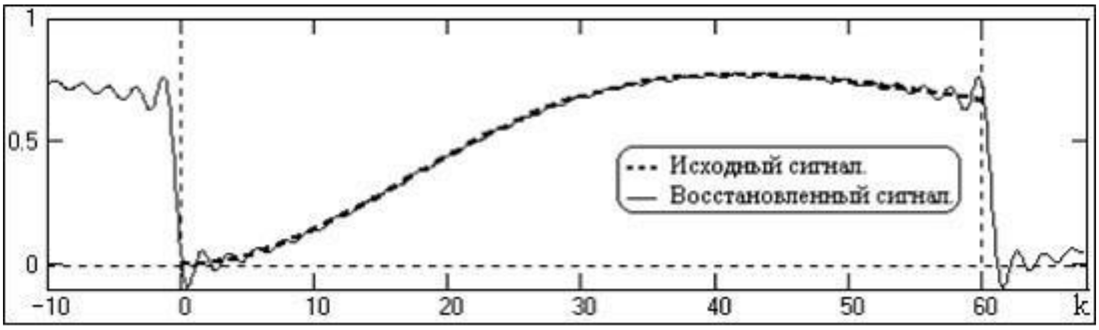


Рисунок 6.5 – Викривлення сигналу при усіканні

Вихідний аналоговий сигнал був вирізаний з масиву даних на інтервалі $k = \{0..60\}$, дискретизований і переведений у цифровій формі в спектральну область для обробки.

Дискретизація сигналу викликала періодизацію його спектра, а дискретизація спектра викликала періодизацію його динамічної вистави.

Але на точках $k = 0$ і $k = 60$ в періодичному повторенні вихідного сигналу при усіканні утворювався стрибок функції з нескінченним частотним спектром, а головний діапазон спектра дискретизованого сигналу обмежений інтервалом його дискретизації ($\omega_N = \pi / \Delta t$).

Отже, спектр сигналу є перекрученим за рахунок накладення спектрів бічних періодів, а при відтворенні аналогового сигналу по спектру головного діапазону він відновлюється з усіченого спектра. Це приводить до появи явища Гіббса на обох кінцях вирізаного сигналу (за рахунок періодизації сигналу), що наочно видно на рисунку 6.5.

Практично це означає, що при частотній обробці вирізаного сигналу буде оброблятися не спектр вихідного сигналу, а спектр, якому відповідає сигнал, відновлюваний по даному спектру з накладеним явищем Гіббса.

Розділ 19 Вагові функції

Природнім методом нейтралізації небажаних ефектів усікання сигналів у часовій області (і будь-якої іншої області аргументів) є зміна вікна селекції сигналу таким чином, щоб частотна характеристика вікна селекції при згортці якнайменше спотворювала спектр сигналу. Що останнє можливо, показує, наприклад, навіть така проста модифікація прямокутної функції, як зменшення у два рази значень її крайніх членів.

Фур'є-образ модифікованої П-функції вже розглядався нами в складі фільтрів, що згладжують, МНК 1-го порядку, відрізняється від звичайної П-функції з тим же розміром вікна виходом у нуль на частоті Найквіста й трохи меншою амплітудою осциляцій при невеликому розширенні головного максимуму.

19.1 Нейтралізація явища Гіббса

Розгляд продовжимо з формули (6.2) при усіканні довільного оператора фільтра $h(n)$ прямокутним селектуючим вікном $\Pi_N(n)$. Період осциляцій суми усіченого ряду Фур'є (6.2) приблизно дорівнює періоду першого відкинутого члена ряду.

З урахуванням цього фактора осциляції частотної характеристики можуть бути суттєво згладжені шляхом усереднення по довжині періоду осциляцій в одиницях частоти, тобто при нормованій згортці з $\Pi_r(\omega)$ - імпульсом, довжина якого дорівнює періоду осциляцій $r = 2\pi/(N+1)$. Ця згортка відобразиться в часовій області множенням коефіцієнтів фільтра $h(n)$ на множники, які є коефіцієнтами перетворення Фур'є частотної П-подібної функції, що $\Pi_r(\omega)$ згладжує :

$$H'_N(\omega) = H_N(\omega) \otimes \Pi_r(\omega) \Leftrightarrow h_n\sigma_N(n) = h(n)\Pi_N(n)\sigma_N(n),$$

$$p(n) = \Pi_N(n)\sigma_N(n) = \sin c(\pi n/(N+1)),\ |n| \le N. \quad (6.8)$$

Ця операція називається згладжування Ланцоша.

Добуток $\Pi_N(n)\sigma_N(n) \equiv \sigma_N(n)$ являє собою нове вагове вікно селекції $p(n)$ замість прямокутного вікна. Функцію звичайно називають часовою ваговою функцією (вікном). Вид і частотна характеристика вагового вікна Ланцоша $\sigma_N(n)$ в зіставленні із прямокутним вікном приведені на рисунку 6.6.

Як видно з рисунку, частотна характеристика вагової функції Ланцоша в порівнянні з П- подібною функцією має майже в 4 рази меншу амплітуду осциляцій, але при цьому ширина головного максимуму збільшилася приблизно на чверть.

Відзначимо, однак, що якщо амплітуда осциляцій (в одиницях амплітуди головного максимуму) визначається обраним типом вагової функції, то ширина головного максимуму, якою визначається ширина перехідної зони (замість стрибка функції), залежить від розмірів вагового вікна й відповідно може змінюватися під поставлені умови (зменшуватися збільшенням розміру $2N+1$ вагового вікна).

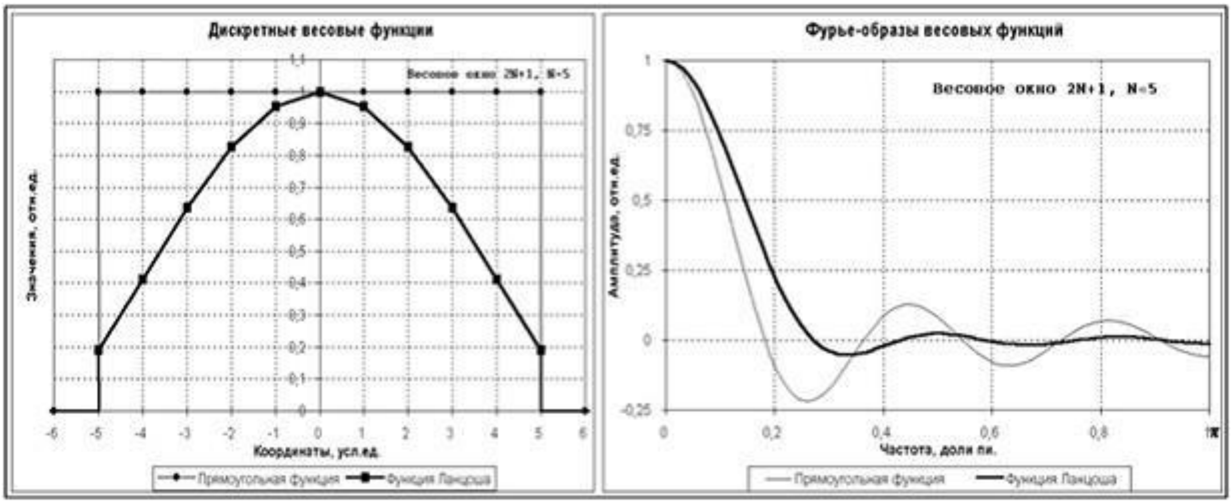


Рисунок 6.6 – Вагова функція Ланцоша

19.2 Основні вагові функції

У цей час відомі десятки різних по ефективності вагових функцій. В ідеальному випадку хотілося б мати вагову, що згортає функцію з мінімальною амплітудою осциляцій, високу й вузьку в головному максимумі.

У таблицях 6.1 і 6.2 наведені формули й основні спектральні характеристики найпоширеніших і часто використовуваних вагових вікон.

Носії вагових функцій, у принципі, є необмеженими й при використанні в якості вагових вікон діють тільки в межах вікна і обнуляються за його межами (як і в (6.8)), що виконується без подальших пояснень.

Для спрощення запису формули приводяться в аналітичній, а не в дискретній формі, з часовим вікном 2τ, симетричним щодо нуля (тобто $0 \pm \tau$).

При перехід до дискретної форми вікно 2τ заміняється вікном $2N+1$ (повна кількість точок дискретизації сигнальної функції, що виділяється), а значення t - номерами відліків n ($t = n\Delta t$).

Слід помітити, що більшість вагових функцій на границях вікна ($n = \pm N$) ухвалюють нульові або близькі до нульових значення, тобто фактичне вікно усікання даних занижується на 2 крапки. Останнє виключається, якщо прийняти $2\tau = (2N+3)\Delta t$.

Таблиця 6.1 – Основні вагові функції

Часове вікно	Вагова функція	Фур'є-образ
Природнє (Π)	$\Pi(t)=\begin{cases}1, & \lvert t\rvert\le\tau;\\ 0, & \lvert t\rvert>\tau.\end{cases}$	$\Pi(\omega)\ =\ 2\tau\sin c[\omega\tau]$
Бартлетта (Δ)	$b(t)\ =\ 1-\lvert t\rvert/\tau$	$\mathrm{B}(\omega)\ =\tau\mathrm{sinc}^2(\omega\tau/2)$.
Хеннінга, Ганна	$p(t)\ =\ 0{,}5[1+\cos(\pi t/\tau)]$	$0{,}5\Pi(\omega)+0{,}25\Pi(\omega+\pi/\tau)+0{,}25\Pi(\omega-\pi/\tau)$
Хеммінга	$p(t)=0{,}54+0{,}46\cos(\pi t/\tau)$	$0{,}54\Pi(\omega)+0{,}23\Pi(\omega+\pi/\tau)+0{,}23\Pi(\omega-\pi/\tau)$
Карре (2-е вікно)	$p(t)=b(t)\sin c(\pi t/\tau)$	$t\cdot B(\omega)\cdot\Pi(\omega),\ \Pi(\omega)=1\ при\ \lvert\omega\rvert<\pi/t$.
Лапласа-Гаусса	$p(t)=\exp(-\beta^2(t/\tau)^2/2)$	$[(\tau/\beta)\exp(-\tau^2\omega^2/(2\beta^2))]\cdot\Pi(\omega)$
Кайзера-Бесселя	$p(t)=\dfrac{J_O[\beta\sqrt{1-(t/\tau)^2}]}{J_O[\beta]}$, $J_o[x]=\sum_{k=1}^{\infty}\left[(x/2)^k/k!\right]^2$	Обчислюється перетворенням Фур'є. $J_o[x]$ - модифікована функція Бесселя нульового порядку

Таблиця 6.2 – Характеристики спектрів вагових функцій

Параметри	Од.вимір.	П-вікно	Бартлетт	Ланцош	Хеннінг	Хеммінг	Карре	Лаплас	Кайзер

Амплітуда:	τ %	2	1	1.18	1	1.08	0.77	0.83	0.82
Головний пік	Гл.п.	0.217	-	0.048	0.027	0.0062	-	0.0016	.00045
	- “ -		0.047	0.020	0.0084	0.0016	-	0.0014	.00028
1-й викид(-)	$\omega\tau/2\pi$	0.128	0.89	0.87	1.00	0.91	1.12	1.12	1.15
2-й викид(+)	$\omega\tau/2\pi$	0.60	1.00	0.82	1.00	1.00	-	1.74	1.52
		0.50	-	1.00	1.19	1.09	-	1.91	1.59
Ширина гол. піка	$\omega\tau/2\pi$	0.72	-	1.29	1.50	1.30	-	2.10	1.74
Положення:	$\omega\tau/2\pi$	1.00	1.44	1.50	1.72	1.41	-	2.34	1.88
	$\omega\tau/2\pi$	1.22							
1-й нуль									
1-й викид									
2-й нуль									
2-й викид									

Порівняльний вигляд вагових функцій наведено на рисунку 6.7.

Рисунок 6.7 – Приклади вагових функцій

Розрахунки функцій проведений з виключенням нульових значень на границях вагового вікна.

Спектральні вікна Бартлетта й Карре не мають негативних викидів і застосовуються, в основному, для усікання кореляційних функцій. Функція Карре не має нулів і являє собою позитивно убутну функцію. Функції Хеннінга й Хеммінга приблизно одного класу, функція Хеммінга є поліпшеним варіантом функції Хеннінга.

Частотні образи функцій Бартлетта й Хеммінга наведено на рисунку 6.8.

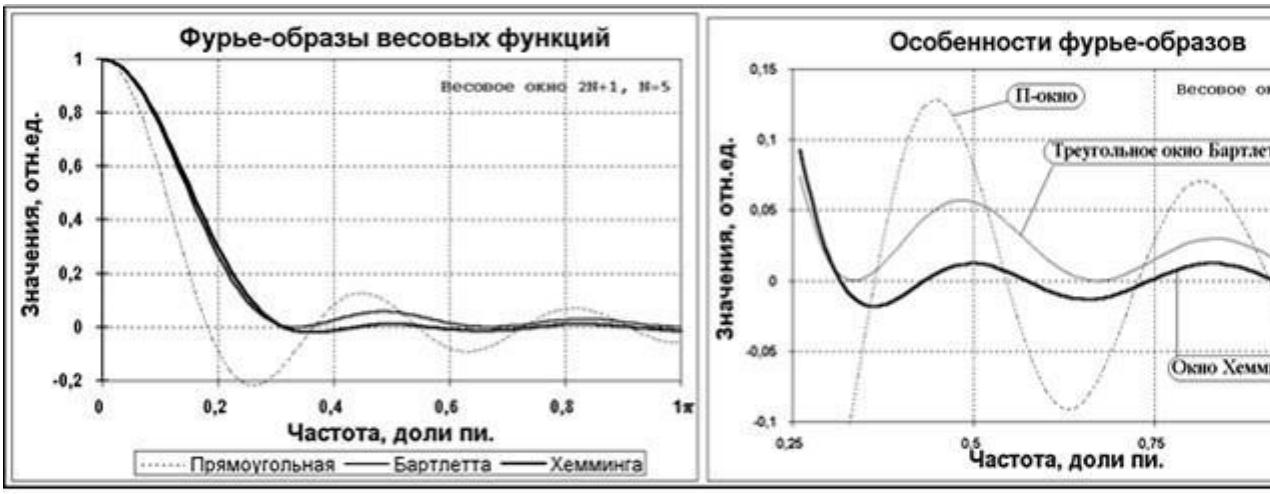


Рисунок 6.8 – Частотні функції вагових вікон

Вагові вікна Лапласа й Кайзера - усічені функції відповідно Гаусса й Бесселя. Ступінь усікання залежить від параметра β. Характеристики функцій, наведені в таблиці 6.2, дійсні при $\beta = 3$ для вікна Лапласа й $\beta = 9$ для вікна Кайзера. При зменшенні значення β крутість головного максимуму функцій, що згладжують, збільшується (ширина піка зменшується), але платою за це є збільшення амплітуди осциляцій.

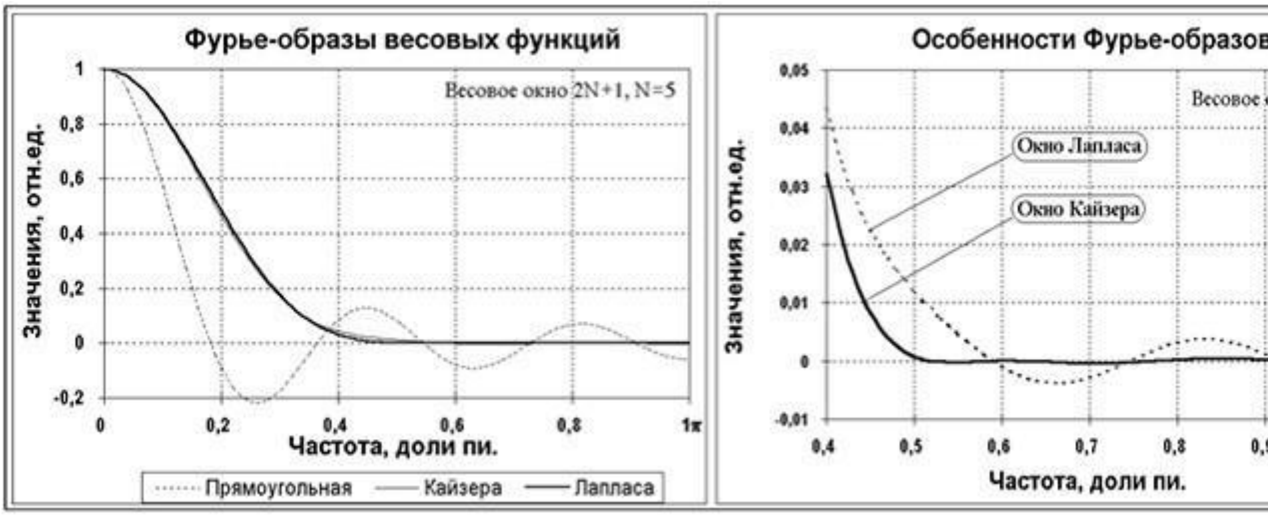


Рисунок 6.9 – Частотні функції вагових вікон.

Функції Лапласа й Кайзера є універсальними функціями. По-істоті, їх можна віднести до числа двохпараметрових: розміром вікна 2τ (числом N) може встановлюватися ширина головного максимуму, а значенням коефіцієнта β - відносна величина осциляцій на частотній характеристиці вагових функцій, причому, аж до осциляцій П-Вікна при $\beta = 0$. Це обумовило їхнє широке використання, особливо при синтезі операторів фільтрів.

Принагідно зауважимо, що досить гладкі частотні характеристики вагових функцій дозволяють використовувати їх у якості, що згладжують низькочастотних НЦФ.

Тема 7 Нерекурсивні частотні цифрові

Вступ

Нерекурсивні фільтри реалізують алгоритм згортки двох функцій:

$$y_k = h_n \otimes x_{k-n}$$

,

де x_k – масив вхідних даних фільтра,

h_n – оператор (ядро, імпульсний відгук) фільтра,

k і n – нумерація числових значень масиву даних і числових значень коефіцієнтів фільтра, $k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,K;\ n = 0,\ 1,\ 2,\ldots,N;\ K \geq N$.

Значення вихідних відліків згортки y_k для будь-якого аргументу k визначаються поточним і "минулими" (до k-n) значеннями вхідних відліків. Такий фільтр називається нерекурсивним цифровим фільтром (НЦФ). Інтервал [0-N] оператора одержав назву "вікна" фільтра. Вікно фільтра становить N+1 відлік, фільтр є однобічним каузальним, тобто причинно обумовленим поточними й "минулими" значеннями вхідного сигналу, і вихідний сигнал не випереджає вхідного. У загальному випадку, каузальний фільтр міняє в спектрі сигналу склад гармонік, їх амплітуди й фази.

Каузальний фільтр може бути реалізований фізично в реальному масштабі часу. Початок фільтрації можливо тільки при завданні певних початкових умов – N значень відліків для точок $x(k-n)\ при\ k < n$. Як правило, у якості початкових умов приймаються нульові значення, тренд сигналу або значення відліку $x(0)$, тобто продовження відліку $x(0)$ назад по аргументу.

При обробці даних на ЕОМ обмеження по каузальності знімається. У програмному розпорядженні фільтра можуть перебувати як "минулі", так і "майбутні" $(k+n,\ до\ k+N')$ значення вхідної послідовності відліків щодо поточної точки обчислень k, при цьому для завершення згортки (аналогічно початку) потрібно N' точок кінцевих умов при $(k+n) > K$.

При $N' = N$ и $h(-n) = h(n)$ фільтр називається двостороннім симетричним фільтром. Симетричні фільтри, на відміну від однобічних, не змінюють фази оброблюваного сигналу.

Розділ 20 Загальні відомості

Основна властивість будь-якого фільтра – його *частотна* (*frequency response*) і *фазова характеристики*. Вони показують, який вплив фільтр виявляє на амплітуду й фазу різних гармонік оброблюваного сигналу.

До найбільш відомих типів нерекурсивних цифрових фільтрів (НЦФ) ставляться частотні фільтри, алгоритм яких для симетричних НЦФ сигналів, що не змінюють фазу, має вигляд:

$$y_k = \sum_{n=-N}^{N} h_n s_{k-n}$$

.

20.1 Типи фільтрів

Залежно від виду частотної характеристики виділяють три основні групи частотних фільтрів:

- ФНЧ - фільтри низьких частот (*low-pass filters*) - пропущення низьких і придушення високих частот у вхідному сигналі,
- ФВЧ - фільтри високих частот (high-pass filters) - пропущення високих і придушення низьких частот,
- СмФ - смугові фільтри, які пропускають (band-pass filters) або пригнічують (band-reject filters) сигнал у певній частотній смузі.

Серед останніх в окрему групу іноді виділяють РФ - режекторні фільтри, розуміючи під ними фільтри із придушенням певної гармоніки у вхідному сигналі, і СФ – селекторні фільтри, зворотні РФ.

Якщо мова йде про придушення певної смуги частот у вхідному сигналі, то такі фільтри називають загороджувальними. Ні теоретичного, ні практичного інтересу до методів їх розрахунків звичайно не проявляється, тому що їхня частотна характеристика звичайно задається інверсією характеристики смугового фільтра $(1-H_n(\omega))$ і яких-небудь додаткових особливостей при своєму проектуванні не має.

Схематичні частотні характеристики фільтрів наведено на рисунку 7.1. Між частотними інтервалами пропущення й придушення сигналу існує зона, яка називається перехідний. Ширина перехідної зони визначає різкість характеристики фільтра. У цій зоні амплітудна характеристика монотонно зменшується (або збільшується) від смуги пропущення до смуги придушення (або навпаки).

Рисунок 7.1 – Типи основних частотних фільтрів

Практика проектування цифрових фільтрів базується, в основному, на синтезі фільтрів низьких частот. Усі інші види фільтрів можуть бути отримані з фільтрів низьких частот відповідним перетворенням.

Так, наприклад, фільтр високих частот $g(n)$ може бути отриманий інверсією фільтра низьких частот $h(n)$ - обчисленням різниці між вихідним сигналом і результатом його фільтрації низькочастотним НЦФ:

$$y(k) = \sum_{n=-N}^{N} s(k) - h(n)s(k-n)$$

.

Звідси, умова інверсії симетричного низькочастотного фільтра у високочастотний:

$$g(0) = 1 - h(0),$$
$$g(n) = -h(n) \; при \; n \neq 0.$$

Приклад обернення й спектри фільтрів наведені на рисунку 7.2 (у правій частині головних діапазонів).

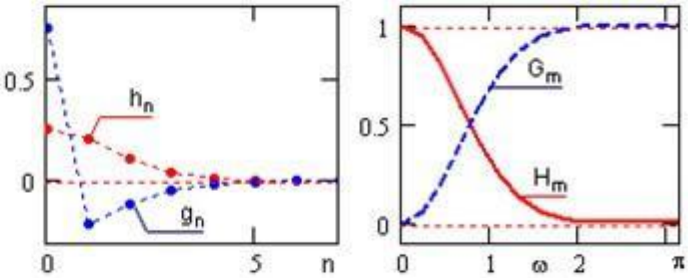


Рисунок 7.2 – Обіг і спектри фільтрів

Застосовується також спосіб одержання фільтрів високих частот з низькочастотних фільтрів шляхом реверсу частоти в передаточній функції низькочастотного фільтра, тобто заміною змінної ω на змінну $\omega' = \pi - \omega$?(при $\Delta t = 1$).

Для симетричних фільтрів, що містять у передаточній функції тільки косинусні члени аргументу ω, у результаті такої операції будемо мати:

$$\cos n(\pi - \omega) = \cos n\pi \cos n\omega = (-1)^n \cos n\omega$$
.

Останнє означає зміну знака всіх непарних гармонік передаточної характеристики фільтра й, відповідно, усіх непарних членів фільтра:

$$g(n) = h(n) \; при \; n = \pm 1, \pm 3, \ldots$$

Приклад частотного реверсу наведений на рисунку 7.3.

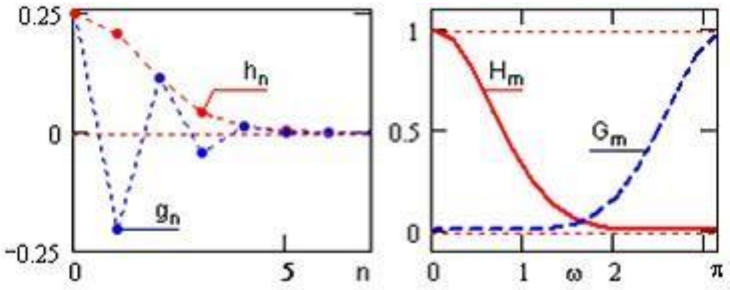


Рисунок 7.3 – Частотний реверс

Фізичну сутність такої операції інверсії спектра легко зрозуміти на постійній складовій сигналу. При зміні на протилежний знака кожного другого відліку постійної величини це постійної значення перетворюється в "пилку", частота якої дорівнює частоті Найквіста головного частотного діапазону (відліки за амплітудними значенням цієї частоти), так само як і навпаки, відліки гармоніки сигналу на частоті Найквіста (знакозмінні в силу зсуву по інтервалах дискретизації на π) перетворюються в постійну складову.

Смуговий фільтр може реалізуватися послідовним застосуванням ФНЧ і ФВЧ із відповідним перекриттям частот пропущення. У математичному поданні це означає послідовну згортку масиву даних з масивами коефіцієнтів $h_н$ - низькочастотного, і $h_в$ - високочастотного фільтрів:

$$v_k = h_н(n) \otimes s(k-n),$$
$$y_k = h_в(n) \otimes v_k = h_н(n) \otimes h_в(n) \otimes s(k-n).$$

Тому що операція згортки комутативна, те замість окремих масивів коефіцієнтів ФНЧ і ФВЧ їх зготкою може бути визначений безпосередньо масив коефіцієнтів смугового фільтра:

$$h_n = h_{\text{н}}(n) \otimes h_{\text{в}}(n)$$

.

Смуговий режекторний фільтр також може бути отриманий методом інверсії смугового фільтра. Одночастотні режекторні фільтри звичайно виконуються на основі простих рекурсивних цифрових фільтрів, більш ефективних для даних цілей.

Часто до фільтрів пред'являються більш складні вимоги. Наприклад, фільтр може мати кілька частотних смуг пропущення з різними коефіцієнтами підсилення, а для смуг непропущення можуть бути задані різні коефіцієнти придушення. Іноді необхідна частотна характеристика фільтра задається взагалі довільною кривою.

20.2 Методика розрахунків НЦФ

Звичайно при фільтрації сигналів задається необхідна частотна характеристика фільтра. Завданням є побудувати фільтр, що відповідає заданим вимогам і провести фільтрацію. Найчастіше буває неможливо побудувати в точності заданий фільтр, і виконується фільтр, близький по характеристиках до заданого.

Існує багато способів побудови фільтрів із заданою частотною характеристикою. Найбільш простий з них – проектування фільтрів з лінійною фазою за допомогою вагових вікон. Цей спосіб є універсальним і дозволяє одержати фільтр із будь-якою заданою частотною характеристикою.

Відзначимо, однак, що за допомогою інших, математично більш строгих і досконалих методів, іноді вдається побудувати фільтр меншої довжини, що задовольняє тим же вимогам до частотної характеристики.

Найбільш простий є методика розрахунків програмних двосторонніх симетричних фільтрів без зміни фази вихідного сигналу щодо вхідного. У самому загальному виді вона включає:

1. Завдання ідеальної амплітудно-частотної характеристики передаточної функції фільтра. Термін ідеальності розуміється тут у тому розумінні, що на характеристиці вказуються смуги пропущення й придушення частот з коефіцієнтами передачі 1 і 0 відповідно без перехідних зон.

2. Розрахунки функції імпульсного відгуку ідеального фільтра (зворотне перетворення Фур'є частотної характеристики фільтра). При наявності стрибків функцій на границях пропущення/придушення імпульсний відгук містить нескінченно велика кількість членів.

3. Обмеження функції відгуку до певного кількості членів, при цьому на передатній характеристиці фільтра виникає явище Гіббса – осциляції частотної характеристики із центрами на перегонах.

4. Для нейтралізації явища Гіббса проводиться вибір вагової функції й розрахунки її коефіцієнтів, на які множаться коефіцієнти функції відгуку фільтра. Результатом даної операції є значення коефіцієнтів оператора фільтра (робочий імпульсний відгук фільтра). По суті, операції 3 і 4 являють собою усікання ряду Фур'є динамічного (часового) представлення передаточної функції фільтра певною ваговою функцією (множення на вагову функцію).

5. З використанням отриманих значень коефіцієнтів оператора фільтра проводиться побудова його частотної характеристики й перевіряється її відповідність поставленому завданню.

При проектуванні симетричних нерекурсивних фільтрів немає необхідності базуватися на розрахунках фільтрів низьких частот з наступним їхнім перетворенням, при необхідності, у фільтри верхніх частот або смугові фільтри. Розрахунки безпосередньо смугового фільтра досить простий, а НЧ- і ВЧ-фільтри є частковим випадком смугового фільтра з однієї верхньої або однієї нижньої граничною частотою.

20.3 Фільтри з лінійною фазовою характеристикою.

Трохи складніше розрахунки каузальних (однобічних) частотних фільтрів, для яких потрібно забезпечити лінійність фазово-частотної характеристики для виключення зміни гармонії комбінації частотних складових сигналу на його виході стосовно входу. Щоб фільтр мав лінійну фазову характеристику необхідно забезпечити виконання умови:

$$\varphi(\omega) = \alpha\omega \qquad (7.1)$$

Воно виконується, якщо імпульсна характеристика фільтра має додатну симетрію:

$$h(n) = h(N-n-1), n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (N-1)/2,\ N - \textit{нечетное}\ (\textit{тип}\ 1);$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (N/2)-1, N - \textit{четное}\ (\textit{тип}\ 2).$$

При цьому фазова характеристика буде визначатися довжиною фільтра:

$$\alpha = (N-1)/2.$$

Частотна характеристика фільтра:

$$H(\omega) = |H(\omega)|\exp(j\varphi(\omega)), \qquad (7.2)$$

де модуль $|H(\omega)|$ задається аналогічно АЧХ симетричних фільтрів.

Слід також ураховувати, що частотну характеристику типу 2 не можна використовувати для проектування фільтрів верхніх частот, тому що вона завжди дорівнює нулю на частоті Найквіста.

Власне методика розрахунків каузальних фільтрів, за винятком використання (7.2) для завдання частотної характеристики, не відрізняється від методики розрахунків симетричних фільтрів, включаючи необхідність використання вагових функцій для нейтралізації явища Гіббса.

Це дозволяє застосовувати чисто практичний метод розрахунків – обчислити й відпрацювати спочатку симетричний фільтр на N-точок (тип 1), а потім перетворити його в каузальний зсувом вправо на $(N-1)/2$ точок в область тільки додатних значень $n \geq 0$.

Розділ 22 Ідеальні частотні фільтри

Ідеальним смуговим фільтром називається фільтр, що має одиничну амплітудно-частотну характеристику в смузі від певної нижньої частоти $\omega_н$ до певної верхньої частоти $\omega_в$, і нульовий коефіцієнт передачі за межами цієї смуги (для цифрових фільтрів - у головному частотному діапазоні).

22.1 Імпульсна реакція фільтра

Імпульсна реакція фільтра (коефіцієнти оператора) перебуває зворотним перетворенням Фур'є заданої передаточної функції $H(\omega)$. У загальному випадку:

$$h(n\Delta t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\exp(j\omega n\Delta t)\, d\omega$$

Для одержання речовинної функції імпульсного відгуку фільтра дійсна частина передаточної функції повинна бути парною, а уявна - непарною. Цифрові фільтри задаються в головному частотному діапазоні, границі якого (частота Найквіста $\pm\omega_N$) визначаються інтервалом дискретизації даних ($\omega_N = \pi / \Delta t$), підметів фільтрації, і відповідно визначають інтервал дискретизації оператора фільтра ($\Delta t = \pi / \omega_N$).

Для фільтрів з нульовим фазовим зсувом уявна частина передаточної функції повинна бути дорівнює нулю, при цьому оператор фільтра визначається косинусним перетворенням Фур'є:

$$h(n\Delta t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\omega_N} H(\omega)\cos(n\pi\omega/\omega_N)\, d\omega, n = 0,\ 1,\ 2,... \qquad (7.3)$$

Для ідеального смугового фільтра $H(\omega)=1$ в смузі частот від $\omega_н$ до $\omega_в$, і інтеграл (7.3) обчислюється в цих межах. Ідеальні фільтри низьких і високих частот, як часткові випадки ідеальних ПФ, інтегруються в діапазоні від 0 до $\omega_в$ для низькочастотного й від $\omega_н$ до ω_N для високочастотного фільтра.

При інтервалі дискретизації даних Δt, умовно прийнятим за 1, головний частотний діапазон передаточних функцій обмежується значенням частоти Найквіста від $-\pi$ до π. Якщо на практиці інтервал дискретизації даних у фізичних одиницях відрізняється від 1, то це позначається тільки на зміні масштабу частотної шкали передаточних функцій.

Приклад 7.1.

$$\Delta t = 0.1\ сек,$$
$$f_N = 1/2\Delta t = 5\ Гц,$$
$$\omega_N = \pi/\Delta t = 10\pi.$$

Приклад 7.2.

$$\Delta x = 10\ метров,$$
$$f_N = 0,05\ м^{-1},$$
$$\omega_N = 0,1\pi.$$

У всіх подальших виразах значення Δt, якщо це спеціально не застережене, будемо приймати рівним 1.

При $H(\omega)=A=1$ в смузі пропускання ($\omega_н$, $\omega_в$), і $H(\omega)=0$ за її межами, для ідеальних симетричних смугових НЦФ із (7.3) із границями інтегрування, відповідно, від $\omega_н$ до $\omega_в$ в загальному вигляді одержуємо:

$$h(n) = (A/\pi)\,[\omega_в \operatorname{sinc}(n\omega_в) - \omega_н \operatorname{sinc}(n\omega_н)], \quad (7.4)$$

$$h_o = (\omega_в - \omega_н)/\pi,$$
$$h(n) = (\sin\ n\omega_в - \sin\ n\omega_н)/(n\pi).$$

де $\mathrm{sinc}(n\omega) = \sin(n\omega)\ /n\omega$ - функція інтегрального синуса (функція відліків), нескінченна по координаті ω.

При інверсії частотної характеристики в загороджувальний фільтр:

$$h_o = (1-(\omega_н - \omega_в)) / \pi,$$
$$h(n) = (\sin\ n\omega_н - \sin\ n\omega_в) / (n\pi).$$

На рисунку 7.4 наведений приклад сигналу однотональної балансової амплітудної модуляції (чистого сигналу – угорі, з накладеними шумами внизу, потужність шумів дорівнює потужності сигналу).

Якщо інформація укладена в частоті й амплітуді сигналу, що модулює, то смуговий фільтр виділення сигналу із шумів, спектр якого для однієї частоти, що модулює, наведений на рисунку 7.5, в ідеальному випадку повинен мати плоску частотну характеристику в границях можливих варіацій частоти, що модулює (від $\omega_н$ до $\omega_в$).

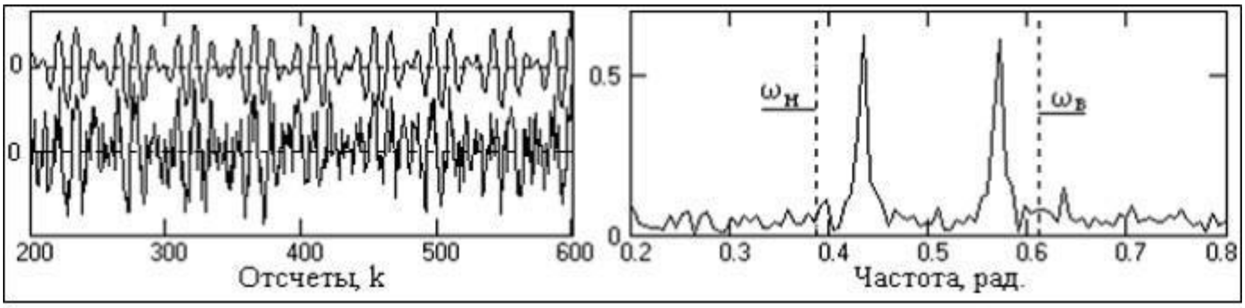


Рисунок 7.4 – Вхідні сигнали Рисунок 7.5 – Спектр сигналу й границі фільтра

Розмір оператора фільтра визначається приблизно з наступних міркувань. Чим більше розмір оператора, тем крутіше буде перехідна зона й менше її розмір, тобто тем ближче буде фактично реалізована передаточна функція фільтра до ідеальної. Звичайно спочатку варто спробувати побудувати фільтр досить великого розміру, оцінити його відповідність заданій частотній характеристиці й надалі спробувати зменшити. Значення N для симетричних НЦФ повинне бути непарним числом.

На рисунку 7.6 наведений оператор смугового фільтра, обчислений по (7.4) для наведених вище умов, з обмеженням по числу коефіцієнтів оператора до $N = 100$.

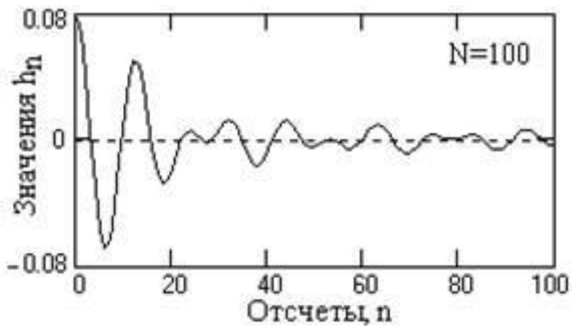


Рисунок 7.6 – Оператор фільтра

Як видно з малюнка, оператор загасає достатньо повільно і явно усічений, що повинне позначитися на формі частотної характеристики фільтра. Усі подальші обчислення будуть проводитися на продовженні даного прикладу.

Розділ 22 Кінцеві наближення ідеальних фільтрів

Оператор ідеального частотного НЦФ, як це випливає з виразу (7.4), являє собою нескінченну загасаючу числову послідовність, що реалізує задану передаточну функцію:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\cos\ n\omega$$

. (7.5)

22.1 Обмеження вікна операторів фільтрів

На практиці нескінченний ряд (7.5) завжди доводиться обмежувати певним числом членів його кінцевого наближення:

$$H'(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} h(n)\cos\ n\omega$$

.

При цьому передаточна функція ускладнюється явищем Гіббса, і з'являється перехідна зона між смугами пропускання й придушення сигналу (рисунку 7.7, пунктирна крива при $N = 100$).

Явище Гіббса формує перші викиди передаточної функції на відстані $\pi / \left(2(N+1)\right)$ від стрибків (розривів першого роду). Якщо ширину перехідної зони Δ_p в першому наближенні прийняти по відстані між першими викидами по обидві сторони від стрибка функції $H(\omega)$, то її значення буде орієнтовно рівно $\pi / (N+1) \ = \Delta_p$.

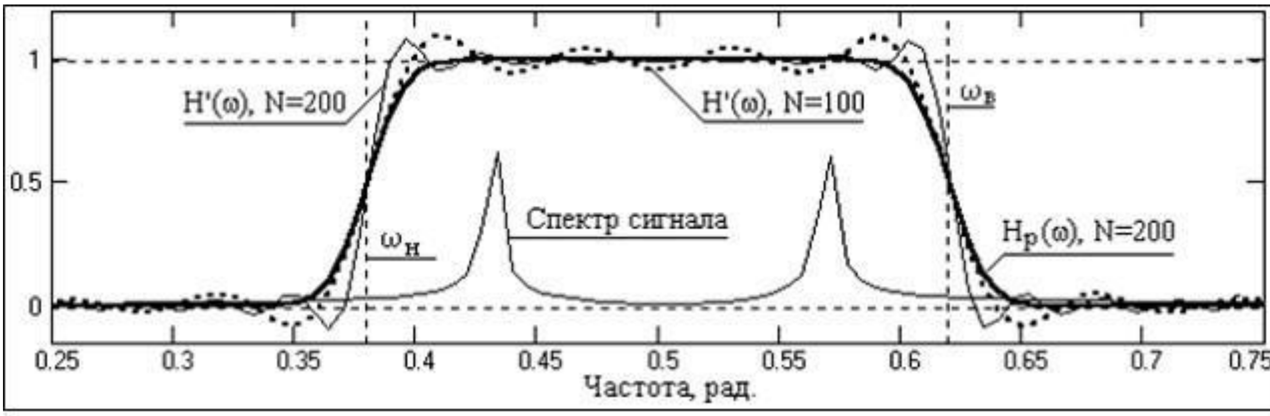


Рисунок 7.7 – Передаточні функції смугового фільтра

22.2 Застосування вагових функцій для нейтралізації явища Гіббса

Якщо рівень пульсацій передаточної функції, обумовлений явищем Гіббса, не задовольняє поставленим задачам фільтрації даних, рекомендується використання, що згладжують вагових функцій.

З урахуванням того, що при застосуванні вагових функцій відбувається розширення перехідних зон приблизно у два рази, значення ширини перехідної зони буде рівним $\Delta_p = 2\pi / N$. Звідси можна визначити мінімальне число членів усіченого ряду по заданому розміру перехідної зони:

$$N = 2\pi / \Delta_p \quad (7.6)$$

Для прикладу на рисунку 7.7 значення N прийняте рівним 200, при цьому крутість перехідної зони збільшилася (тонка крива $H'(\omega),\ N = 200$), створюючи запас на наступне згладжування ваговою функцією.

Вибір вагових функцій доцільно здійснювати по припустимій величині осциляцій посилення сигналу в смузі придушення, тобто за відносним значенням амплітуди першого викиду на передаточних характеристиках вагових функцій.

Для обраної вагової функції (з урахуванням числа її членів по (7.6)) проводиться розрахунки вагових коефіцієнтів p_n, після чого встановлюються остаточні значення оператора фільтра:

$$h_n = p_n h(n) \quad (7.7)$$

Підстановкою коефіцієнтів (7.7) в (7.5) рекомендується зробити побудову отриманої передаточної характеристики фільтра й безпосередньо по ній оцінити придатність фільтра для поставлених задач. Це наочно видно на рисунку 7.7, де для нашого прикладу була застосована вагова функція Гаусса.

Передаточна функція $H_p(\omega)$ має практично таку ж крутість, як і функція $H'(\omega)$ при $N=100$ й практично плоску вершину в інтервалі спектра сигналу. Якість роботи фільтра для сигналу, наведеного на рисунку 7.4, можна бачити на рисунку 7.8.

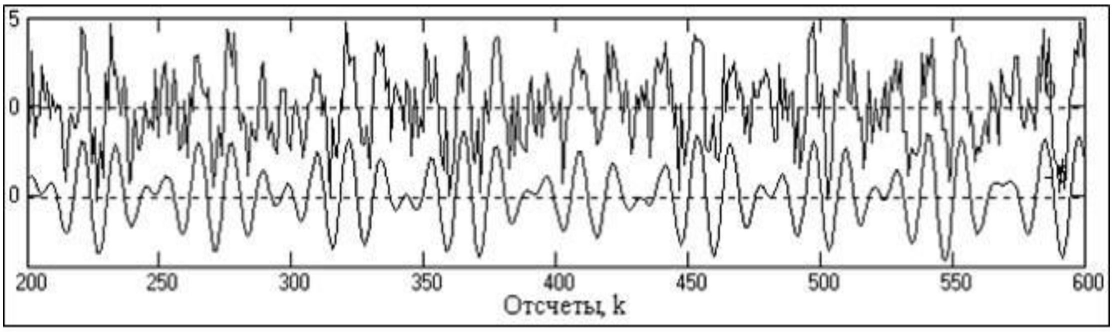


Рисунок 7.8 – Смугова фільтрація (угорі – вхідний сигнал, унизу – вихідної)

При необхідності більш точної оцінки отриманої передаточної функції можна рекомендувати збільшення її частотної роздільної здатності в 2-4 рази перед виконанням перетворення Фур'є, що можна виконати шляхом збільшення розмірів оператора h_n доповненням нулями.

22.3 Основні вагові функції

У таблицях 7.1 і 7.2 наведені формули й основні спектральні характеристики найпоширеніших і часто використовуваних вагових вікон.

Носії вагових функцій, у принципі, є необмеженими й при використанні в якості вагових вікон діють тільки в межах вікна і обнуляються за його межами (як і в (6.8)), що виконується без подальших пояснень.

Для спрощення запису формули приводяться в аналітичній, а не в дискретній формі, з часовим вікном 2τ, симетричним щодо нуля (тобто $0 \pm \tau$).

При перехід до дискретної форми вікно 2τ заміняється вікном $2N+1$ (повна кількість точок дискретизації сигнальної функції, що виділяється), а значення t - номерами відліків n ($t = n\Delta t$).

Слід помітити, що більшість вагових функцій на границях вікна ($n = \pm N$) ухвалюють нульові або близькі до нульових значення, тобто фактичне вікно усікання даних занижується на 2 крапки. Останнє виключається, якщо прийняти $2\tau = (2N+3)\Delta t$.

Таблиця 7.1 – Основні вагові функції

Часове вікно	Вагова функція	Фур'є-образ
Природнє (Π)	$\Pi(t)=\begin{cases}1, & \lvert t\rvert \le \tau;\\ 0, & \lvert t\rvert > \tau.\end{cases}$	$\Pi(\omega) = 2\tau \sin c[\omega\tau]$
Бартлетта (Δ)	$b(t) = 1-\lvert t\rvert/\tau$	$B(\omega) = \tau \operatorname{sinc}^2(\omega\tau/2)$.
Хеннінга, Ганна	$p(t) = 0,5[1+\cos(\pi t/\tau)]$	$0,5\Pi(\omega)+0,25\Pi(\omega+\pi/\tau)+0,25\Pi(\omega-\pi/\tau)$
Хеммінга	$p(t)=0,54+0,46\cos(\pi t/\tau)$	$0,54\Pi(\omega)+0,23\Pi(\omega+\pi/\tau)+0,23\Pi(\omega-\pi/\tau)$
Карре (2-е вікно)	$p(t)=b(t)\sin c(\pi t/\tau)$	$t\cdot B(\omega)\cdot \Pi(\omega),\ \Pi(\omega)=1$ при $\lvert\omega\rvert<\pi/t$.
Лапласа-Гаусса	$p(t)=\exp(-\beta^2(t/\tau)^2/2)$	$[(\tau/\beta)\exp(-\tau^2\omega^2/(2\beta^2))]\cdot\Pi(\omega)$
Кайзера-Бесселя	$p(t)=\dfrac{J_0[\beta\sqrt{1-(t/\tau)^2}]}{J_0[\beta]}$, $J_o[x]=\sum_{k=1}^{\infty}\left[(x/2)^k/k!\right]^2$	Обчислюється перетворенням Фур'є. $J_o[x]$ - модифікована функція Бесселя нульового порядку

Таблиця 7.2 – Характеристики спектрів вагових функцій

Параметри	Од.вимір.	П - вікно	Бартлетт	Ланцош	Хеннінг	Хеммінг	Карре	Лапласс	Кайзер
Амплітуда: Головний пік 1-й викид(-) 2-й викид(+) Ширина гол. піка Положення: 1-й нуль 1-й викид 2-й нуль 2-й викид	τ % Гл.п. - " - $\omega\tau/2\pi$ $\omega\tau/2\pi$ $\omega\tau/2\pi$ $\omega\tau/2\pi$ $\omega\tau/2\pi$	2 0.217 0.128 0.60 0.50 0.72 1.00 1.22	1 - 0.047 0.89 1.00 - - 1.44	1.18 0.048 0.020 0.87 0.82 1.00 1.29 1.50	1 0.027 0.0084 1.00 1.00 1.19 1.50 1.72	1.08 0.0062 0.0016 0.91 1.00 1.09 1.30 1.41	0.77 - - 1.12 - - - -	0.83 0.0016 0.0014 1.12 1.74 1.91 2.10 2.34	0.82 .00045 .00028 1.15 1.52 1.59 1.74 1.88

22.4 Вагова функція Кайзера

Найбільше поширення при розрахунках частотних НЦФ одержала вагова функція Кайзера:

$$p(n) = \frac{J_O[\beta\sqrt{1-(n/N)^2}]}{J_O[\beta]}$$

.

Це пояснюється тим, що параметри функції Кайзера можуть установлюватися безпосередньо по технічних вимогах до передаточних функцій проектованих фільтрів – припустимій ширині перехідної зони Δ_p й значенню коефіцієнта шуму фільтра δ - (максимальним значенням осциляцій передаточної функції в одиницях коефіцієнта передачі в смузі пропущення).

Кайзером установлене, що для заданого значення δ добуток кількості членів оператора НЦФ на ширину перехідної зони є величиною постійної. Воно одержало назву D-фактора:

$$D = N \cdot \Delta_p / p$$

.

З іншого боку, установлені наступні емпіричні співвідношення між D-Фактором і параметром β функції Кайзера:

$$D = \begin{cases} (A - 7.95)/14.36, & при\ A > 21, \\ 0.9222, & при\ A < 21. \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7), & при\ A > 50, \\ 0, & при\ A < 21, \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21), & при\ 21 < A < 50. \end{cases}$$

де: $A = -20 \log \delta$ - загасання в децибелах.

Наведені вирази дозволяють за заданим значенням коефіцієнта шуму δ визначити параметр β функції Кайзера, а через D-Фактор число членів фільтра:

$$N = pD / \Delta_p$$

.

При проектуванні смугових фільтрів перевірка передаточної функції отриманого оператора НЦФ вихідному завданню за значенням коефіцієнта шуму є обов'язковою. Це пояснюється тим, що оскільки смуга пропущення смугового фільтра обмежено двома стрибками, на передаточній характеристиці виникають два центри осциляцій, при цьому накладення осциляцій може як зменшити, так і збільшити амплітуду сумарних осциляцій. Якщо за рахунок накладення відбудеться збільшення амплітуди осциляцій, то розрахунки НЦФ слід повторити зі зменшенням вихідного значення δ.

Приклад розрахунків смугового фільтра.

Здійснити розрахунок СмФ при наступних вихідних параметрах:

$$\omega_н = 0,3\pi, \quad \omega_в = 0,6\pi, \quad \Delta_p = 0,1\pi, \quad \delta = 0,02.$$

1. $A = -20\log\delta$, $A = 34$.

2. $N = \pi(A-7.95)/(14.36\Delta_p)$, $N = 18$.

3. $\beta = 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21)$, $\beta = 2.62$.

4. $h_o = (\omega_в - \omega_к)/\pi$, $h_o = 0.3$.

5. $h(n) = (\sin n\omega_в - \sin n\omega_к)/(n\pi)$, $h(n) = 0.04521, -0.24490, -0.09515, \dots, 0.02721$.

6. $p(n) = \dfrac{J_O[\beta\sqrt{1-(n/N)^2}]}{J_O[\beta]}$, $p_n = 1.00,\ 0.997,\ 0.9882, \dots$.

7. *Оператор фильтра*: $\mathrm{h_n} = \mathrm{p_n h(n)}$, $\mathrm{n} = 0,1,2,\dots,\mathrm{N}$.

$\mathrm{h_{-n}} = \mathrm{h_n}$.

$\mathrm{h_n} = 0.3000, 0.04508, -0.2420, \dots$.

8. *Проверка по формуле*: $H(\omega) = \sum\limits_{n=-N}^{N} h(n)\cos n\omega$, $0 \le \omega \le \pi$.

Для оцінки форми передаточної функції кількість точок спектра в інтервалі $0-\pi$ досить задати рівним $2N$, тобто із кроком $\Delta\omega \le \pi/36$.

Розділ 23 Гладкі частотні фільтри

У деяких випадках (при послідовному з'єднанні фільтрів, при виділенні сигналів на рівні сильних перешкод і т.п.) осциляції на передаточних характеристиках фільтрів є досить небажаними навіть при їхній малій залишковій величині. Так, наприклад, подвійне послідовне застосування фільтрів приводить до того, що помилки в смузі пропущення приблизно подвоюються, а смузі придушення зводяться у квадрат, при цьому довжина вікна еквівалентного фільтра практично подвоюється.

23.1 Принцип синтезу фільтрів

Очевидно, що фільтри із гладкою передаточною характеристикою можна одержати тільки в тому випадку, якщо можливе розкладання передаточної функції в кінцевий ряд Фур'є.

Припустимо, ми маємо симетричний НЦФ із передаточною функцією:

$$H(\omega) = h_o + 2\sum_{n=1}^{N} h_n \cos n\omega$$

. (7.8)

Як відомо, $\cos n\omega$ дорівнює поліному по $\cos\omega$ ступеня n, при цьому вирази (7.8) можна записати у вигляді:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N} g_n (\cos\omega)^n = \sum_{n=0}^{N} g_n x^n$$

, (7.9)

де змінна $x = \cos\omega$ змінюється від 1 до -1 (оскільки ω змінюється від 0 до π).

Перетворення змінної являє собою нелінійне розтягання осі абсцис із поворотом на 180° (по змінній x передаточні функції ФНЧ схожі на ФВЧ, і навпаки) з вираженням функції через степенний поліном. Останнє прикметно тим, що синтез гладких функцій на базі статечних поліномів труднощів не становить.

Так, наприклад, для конструювання ФНЧ у якості вихідної може бути прийнята степенна функція виду:

$$g(x) = (1+x)^z (1-x)^r$$, (7.10)

де z і r - параметри.

Функція (7.10) має нулі порядку z і r у точках відповідно $x=-1$ й $x=1$ (рисунку 7.9), при цьому значення параметрів z і r характеризують ступінь торкання функцією осі абсцис. Чим більше порядок, тем повільніше функція відходить ("відривається") від осі абсцис.

Якщо вирази функції (7.10) проінтегрирувати у межах від -1 до x і нормувати на значення інтеграла від -1 до 1, то буде отримана гладка передаточна характеристика низькочастотного фільтра.

На рисунку 7.9 наведені передаточні функції для двох пар параметрів z і r, обчислені по формулі:

$$H(x) = \int_{-1}^{x} g(x)dx \Big/ \int_{-1}^{1} g(x)dx$$. (7.11)

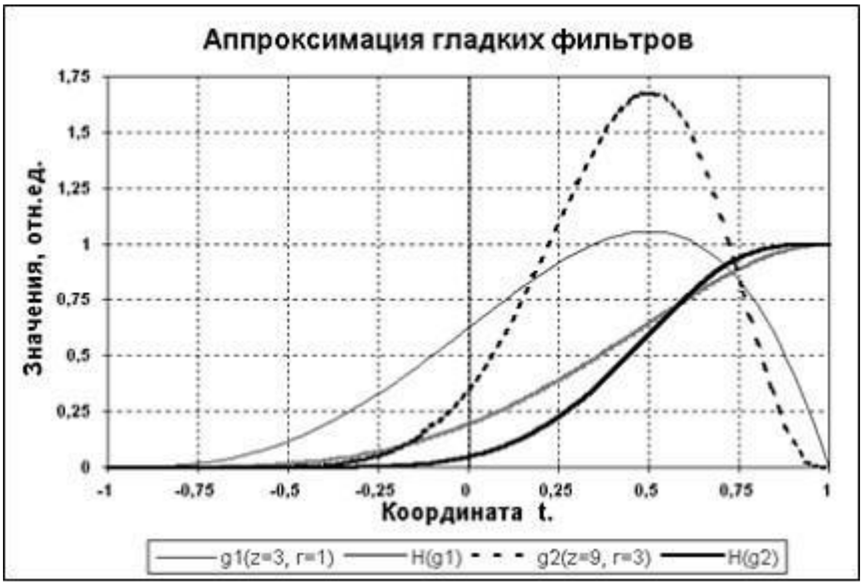


Рисунок 7.9 – Приклади синтезу гладких фільтрів

Функція $H(x)$ має перегин у точці $(z-r)/(z+r)$ й перехідну зону, крутість якої тим більше, чим більше значення z і r. Підстановкою $x=\cos\omega$ здійснюється повернення до частотної змінної ω зі збереженням монотонності функції.

На закінчення, для визначення коефіцієнтів фільтра h_n потрібно здійснити зворотне перетворення від статечної форми (7.9) до ряду Фур'є (7.8). Виконання даної операції досить просто проводиться рекурсивним способом, показаним на рисунку 7.10.

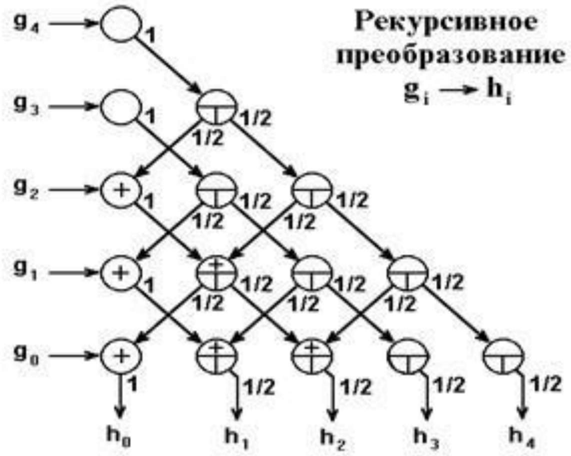


Рисунок 7.10 – Схема повернення до ряду Фур'є

Приклад розрахунків гладкого фільтра.

Здійснити розрахунок ФНЧ із гладкою частотною характеристикою з перегином характеристики в точці $\pi/3$. За вихідну функцію прийняти функцію (7.10).

1. $x=\cos(\pi/3)=0{,}5=(z-r)/(z+r)$. Прийняте: $z=3,\ r=1$.

Вихідний многочлен: $g(x)=(1-x)(1+x)^3=1+2x-2x^3-x^4$.

2. $H(x)=\int_{-1}^{x} g(x)\,dx=C+x+x^2-0{,}5\,x^4-0{,}2\,x^5$.

При $x=-1$, $H(-1)=0$, звідки $C=0{,}3$.

При $x=1$, $H(1)=1,6$.

Звідси: $H(x)=\left(3+10x+10x^2-5x^4-2x^5\right)/16$.

$$g_n=\{3/16,\ 10/16,\ 10/16,\ 0,-5/16,-2/16\}$$

.

3. Застосовуючи рекурсивне перетворення, одержуємо:

$$h_n=\{(98,\ 70,\ 20,-5,-5,-1)/256\}$$

.

Для розрахунків гладких фільтрів високих частот у виразі (7.11) достатньо поміняти місцями межі інтегрування. Гладкі смугові фільтри виходять комбінацією ФНЧ і ФВЧ із перекриттям частот пропущення.

Розділ 24 Диференціюючі цифрові фільтри

24.1 Передаточна функція

З виразу для похідної $d(\exp(j\omega t))/dt\ =j\omega\exp(j\omega t)$ випливає, що при розрахунках фільтра похідною масиву даних необхідно апроксимувати поруч Фур'є передаточну функцію виду $H(\omega)=j\omega$. Оскільки коефіцієнти такого фільтра будуть мати непарну симетрію $(h_{-n}=-h_n)$ й виконується рівність:

$$h_n[\exp(j\omega n)-\exp(-j\omega n)]=2j\,h_n\sin n\omega$$

,

те передаточна характеристика фільтра має вигляд:

$$H(\omega)=2j(h_1\sin\omega+\ h_2\sin2\omega+\ \ldots+\ h_N\sin N\omega)$$

,

тобто є уявною непарною, а сам фільтр є лінійною комбінацією різниць симетрично розташованих відносно s_k значень функції. Рівняння фільтрації:

$$y_n=\sum_{n=1}^{N}h_n\left(s_{k+n}-s_{k-n}\right)$$

.

Якщо диференціюванню підлягає низькочастотний сигнал, а високі частоти в масиві даних представлені перешкодами, то для апроксимації в межах головного частотного діапазону задається (без індексу вдаваності) передаточна функція фільтра вигляду:

$$H(\omega)=\begin{cases}\omega, & \omega \le \omega_{в},\\ 0, & \omega_{в} \le \omega \le \omega_N.\end{cases}$$

Оператор фільтра, що диференціює:

$$h(n)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\omega_{в}} H(\omega)\ \sin(n\pi\omega/\omega_N)\ d\omega,\ n\ =\ 0,1,2,\ldots \qquad (7.12)$$

Приймаючи, як звичайно, $\omega_N=\pi$ ($\Delta t=1$) і розв'язуючи (7.12) при $H(\omega)=\omega$, дістаємо:

$$h_n=\frac{2}{\pi}[\sin(n\omega_{в})/n^2-\omega_{в}\cos(n\omega_{в})/n], \qquad (7.13)$$

$$h_o=0,\ h_{-n}=-h_n.$$

Частотна характеристика:

$$\mathrm{Im}(H(\omega))=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \sin n\omega=\sum_{1}^{\infty} 2h_n \sin n\omega. \qquad (7.14)$$

24.2 Точність диференціювання

На рисунку 7.11 наведений приклад розрахунків коефіцієнтів, що диференціює фільтра на інтервал частот $\{0-0.5\}\pi$ при $\Delta t=1$ ($\omega_{в}=\pi/2$). Оператори фільтрів, що диференціюють, як правило, загасають дуже повільно й, відповідно, досить точна реалізація функції (7.14) достатньо важка.

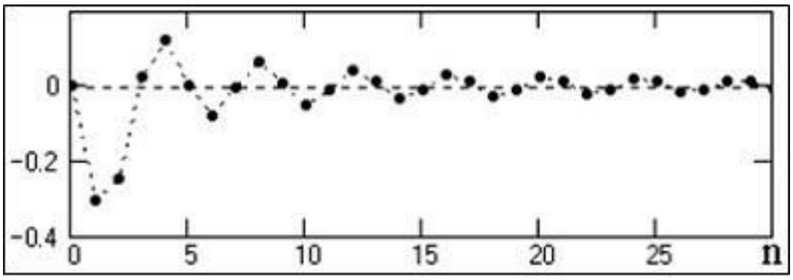


Рисунок 7.11 – Коефіцієнти оператора фільтра

Ряд (7.14) усікається до N членів, і за допомогою вагових функцій проводиться нейтралізація явища Гіббса. Явище Гіббса для фільтрів, що диференціюють, має досить суттєве значення, і може приводити до більших похибок при обробці інформації, якщо не зробити його нейтралізацію.

Приклади обмеження оператора, наведеного на рисунку 7.11, і відповідні передаточні функції $H'(\omega)$, усічених операторів показані на рисунку 7.12.

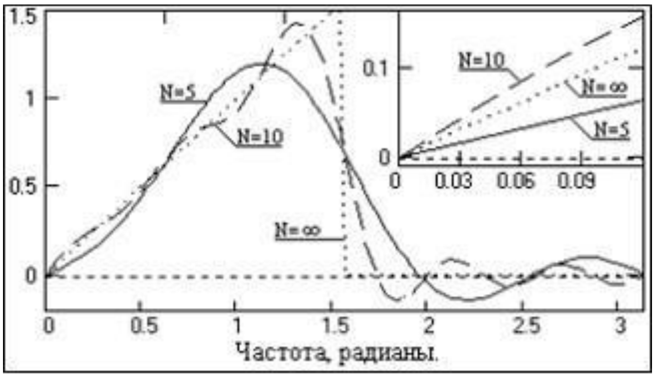


Рисунок 7.12 – Частотні функції фільтрів

Для оцінки можливих похибок диференціювання усіченими операторами здійснимо розрахунок фільтра при $\omega_в = \pi / 2$. По формулах (7.13) визначаємо:

$$h_{0-10} = 0, 0.3183, 0.25, -0.0354, -0.125, 0.0127, 0.0833, -0.0065, -0.0625, 0.0039, 0.05$$.

Зробимо перевірку роботи фільтра на простому масиві даних $s_n = n$, похідна якого постійна й рівна 1. Для масиву з постійної похідної фільтр може бути перевірений у будь-якій точці масиву, у тому числі й у точці $n = 0$, для якої маємо:

$$y = \sum_{n=-N}^{N} h_n s_{o-n} = 2\sum_{n=1}^{N} n h_n$$,

при цьому одержуємо: $y = 0,5512 \text{ при } N = 5,\ y = 1,53 \text{ при } N = 10$.

Така істотна розбіжність із дійсним значенням похідної пояснюється тим, що при $\omega = 0$ тангенс кута нахилу реальних передаточних функцій фільтра, як це видно на рисунку 7.12, досить суттєво відрізняється від тангенса кута нахилу функції $H(\omega) = \omega$, що апроксимується.

На рисунку 7.13 приведені частотні графіки відносної погрішності диференціювання $\sigma = H'_н(\omega)/H_н(\omega)$ з обчисленням значень на нульовій частоті по межах функцій при $N \to \infty$

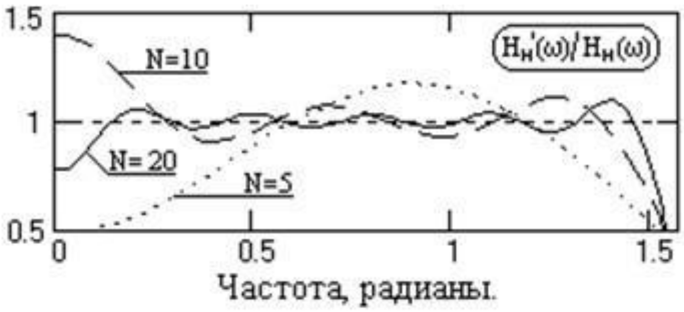


Рисунок 7.13 – Похибка диференціювання

На рисунку 7.14 наведений приклад операції диференціювання гармоніки s із частотою ω_0 оператором з $N=10$ у зіставленні з точним диференціюванням ds/dk.

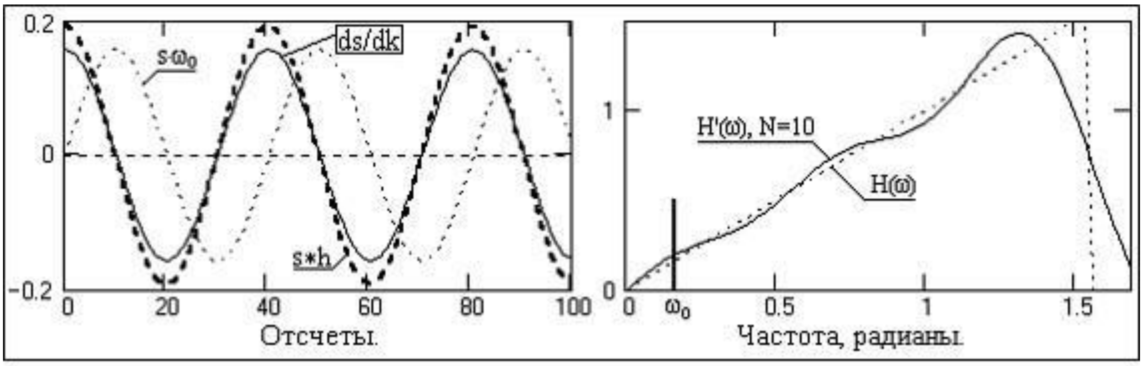


Рисунок 7.14 – Приклад операції диференціювання

24.3 Застосування вагових функцій

Застосуємо для нейтралізації явища Гіббса вагарню функцію Хемминга. Результат нейтралізації для фільтра з $N=10$ наведений на рисунку 7.15. Повторимо перевірочний розрахунки диференціювання на масиві $s_n = n$ й одержимо результат $y = 1,041$, тобто похибка диференціювання зменшується порядок.

Рисунок 7.15 – Диференціювання із застосуванням вагової функції

Аналогічно проводиться розрахунки й смугових фільтрів, що диференціюють, з відповідною зміною меж інтегрування в (7.12) від $\omega_н$ до $\omega_в$. При цьому одержуємо:

$$h_n = (\omega_н \cos n\omega_н - \omega_в \cos n\omega_в)/(n\pi) + (\sin n\omega_в - \sin n\omega_н)/(n2\pi)$$

.

24.4 Фільтри з лінійною груповою затримкою

фільтри, що диференціюють, а рівно й будь-які інші фільтр із уявною частотною характеристикою, наприклад, оператор перетворення Гільберта, можуть бути виконані в каузальному варіанті за умови забезпечення лінійної групової затримки сигналу, яке записується в такий спосіб:

$$\varphi(\omega) = \beta - \alpha\omega \tag{7.15}$$

де β и α - константи.

Воно виконується, якщо імпульсна характеристика фільтра має позитивну симетрію:

$$\mathrm{h}(\mathrm{n}) = -\mathrm{h}(\mathrm{N}-\mathrm{n}-1), \begin{cases} \mathrm{n} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (\mathrm{N}-1)/2, \mathrm{N} - \textit{непарне}\ (\textit{тип}\ 1); \\ \mathrm{n} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (\mathrm{N}/2)-1, \mathrm{N} - \textit{парне}\ (\textit{тип}\ 2). \end{cases}$$

При цьому фазова характеристика буде обумовлюватися довжиною фільтра:

$$\alpha = (N-1)/2,$$
$$\beta = \frac{\pi}{2}.$$

.

Частотна характеристика фільтра:

$$H(\omega) = |H(\omega)| \exp(j\varphi(\omega))$$, (7.16)

де модуль $|H(\omega)|$ задається непарним.

Обидва типи фільтрів вводять у вихідний сигнал зсув фази на 90°. Крім того, частотна характеристика фільтра типу 1 завжди дорівнює нулю на частоті Найквіста, що визначається знакозмінністю лівої й правої частини головного діапазону спектра з урахуванням періодизації спектра дискретних функцій.

Розділ 25 Альтернативні методи розрахунків

Метод прямого розрахунків НЦФ по частотній характеристики зрозумілий і простий для застосування. Недолік методу – відсутність гнучкості. Він не дозволяє проектувати фільтри з різним ступенем нерівномірності частотної характеристики в смугах пропущення й придушення, а ступінь нерівномірності не залежить від кількості членів фільтра й не може змінюватися. Максимальні осциляції частотної характеристики завжди спостерігаються в області смугових границь і зменшуються при видаленні від них, але при близьких границях можуть спостерігатися явища інтерференції осциляцій. Більш гнучкими в проектуванні є альтернативні методи: оптимізаційні,

25.1 Оптимізаційні методи

Оптимізаційні методи дозволяють проектувати ощадливі по розмірах оператори фільтрів з оптимальними (по Чебишеву) осциляціями частотних характеристик. Вони засновані на понятті смуг рівних коливань.

Частотна характеристика оптимального фільтра низьких частот наведена на рисунку 7.16.

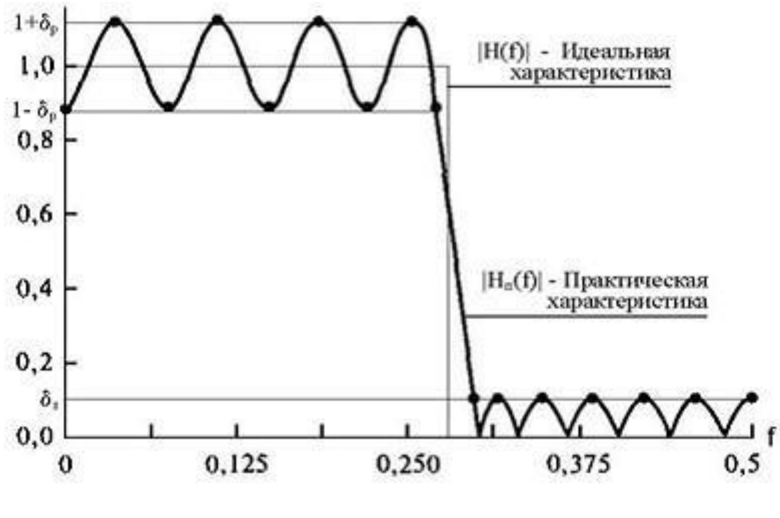


Рисунок 7.16 – Оптимальний фільтр низьких частот

У смузі пропущення реальна характеристика фільтра осцилює з постійними амплітудними коливаннями між значеннями $1-\delta_p$ й $1+\delta_p$.

У смузі придушення осциляції постійної амплітуди знаходяться в інтервалі $0-\delta_s$. Різниця між ідеальною й практичною характеристиками являє собою функцію помилок $E(f)$.

Оптимальний метод дозволяє визначити коефіцієнти фільтра $h(n)$, для яких значення максимальної зваженої помилки мінімізується

$$\min\left[\max\left(E\left(f\right)\right)\right]$$

у смузі пропущення й у смузі придушення, при цьому характеристика фільтра буде мати рівні коливання в межах смуг пропущення й придушення, а кількість екстремумів коливань у фільтрів з лінійною фазовою характеристикою звичайно прямо пов'язане з кількістю коефіцієнтів фільтра $(N+1)/2$.

При розрахунках фільтра ключовим моментом є визначення положення частот екстремумів, яке виконується ітераційним алгоритмом Ремеза, після чого по положеннях екстремумів задається частотна характеристика фільтра і визначаються його коефіцієнти.

25.2 Метод частотної вибірки

Метод частотної вибірки являє собою варіант методу розрахунків фільтра по частотній характеристиці без застосування вагових функцій і може застосовуватися для розрахунків як вибірних-вибіркових-частотно-виборчих фільтрів, так і фільтрів з довільною частотною характеристикою.

В основі методу лежить безпосереднє завдання частотної характеристики фільтра в цифровій формі з наступним добором перехідних зон під необхідні характеристики фільтра по величині припустимих осциляцій у смузі пропущення й придушення. Розрахунки бажане вести в інтерактивному режимі, наприклад, у середовищі Mathcad. Як приклад приведемо розрахунки низькочастотного фільтра.

Припустимо, нам потрібно достатньо простий симетричний низькочастотний фільтр із шириною перехідної зони порядку 0.2 головного частотного діапазону (при $\Delta k=1$ для фільтра, $f_N = 0,5\ Гц$ для спектра й ширина перехідної зони $0,2\ \times 0,5\ = 0,1\ Гц$).

Мінімальний розмір фільтра при ідеальній характеристиці для забезпечення такого переходу $2N+1=2(1+1/0{,}1)=11$ крапок. З урахуванням розширення перехідної зони при зменшенні осциляцій на границі зон приймемо для початку $N=8$.

Частотна характеристика проектованого фільтра (права половина) наведена на рисунку 7.17 із границею роздягнула зон між 3 і 4 відліками спектра.

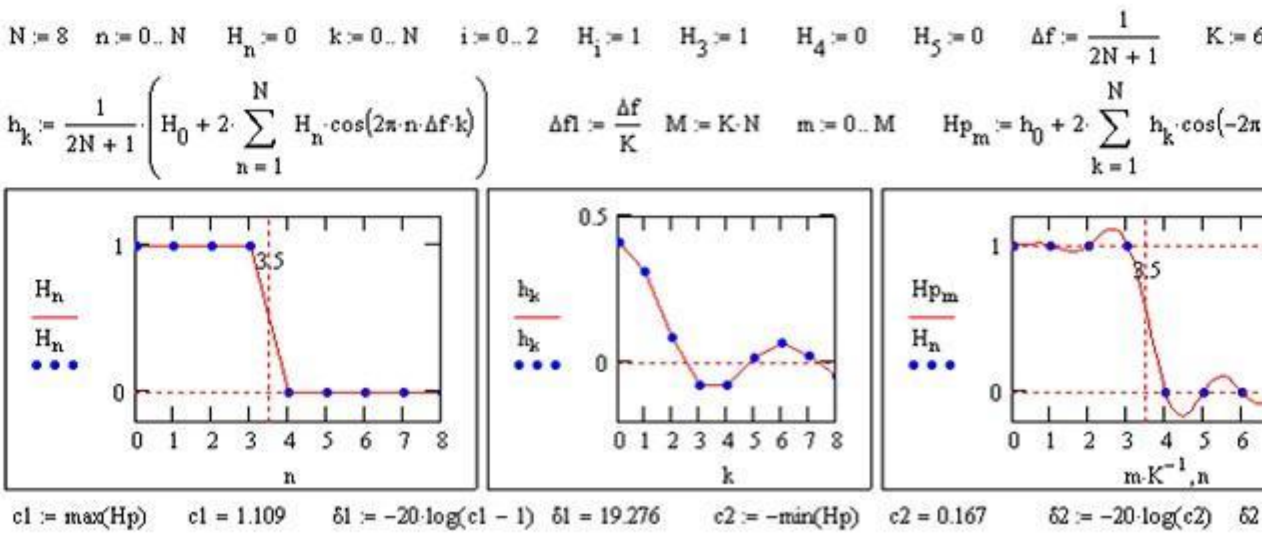


Рисунок 7.17 – Завдання параметрів НЦФ

Розрахунки оператора фільтра проводимо зворотним перетворенням Фур'є, а по отриманим відлікам оператора обчислюємо фактичну частотну характеристику цього оператора зі зменшенням кроку по частоті в 4-6 раз, що дозволяє виявити осциляції й визначити похибку фільтра (по максимумах осциляцій).

На рисунку 7.18. показаний результат підбору частотних значень характеристики фільтра в районі перехідної зони (2 точки), що дозволяє більш ніж в 30 раз знизити осциляції частотної характеристики.

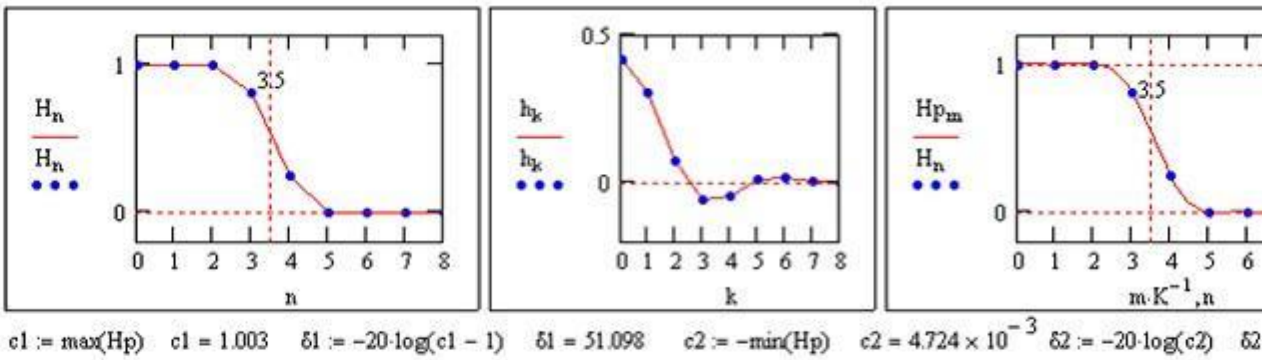
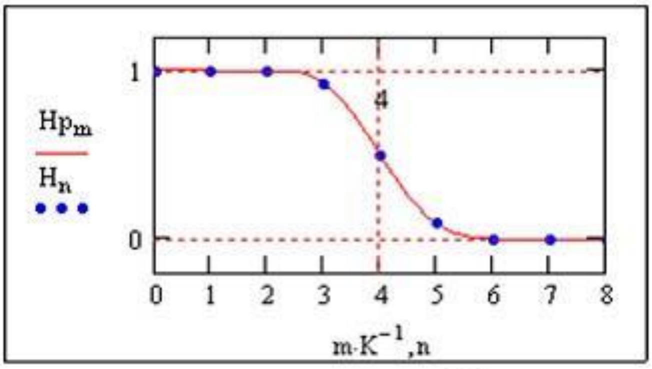


Рисунок 7.18 – Підбір відліків перехідної зони НЦФ

Принагідно зауважимо, що зміна осциляцій характеристики фільтра може проводитися індивідуально для зони пропущення (лівою від границі точкою) і зони придушення (правою точкою) залежно від того, чи вимагається більш висока точність пропущення або придушення частот. Особливо ефективно це при використанні трьох точок підбору з розташуванням центральної точки на границі смуг пропущення й придушення, як це показане на рисунку 7.19.



$c1 = 1.001 \quad \delta 1 = 62.308 \quad c2 = 7.402 \times 10^{-4} \quad \delta 2 = 62.613$

Рисунок 7.19 – НЦФ із точкою підбора на границі

При використанні даного методу може використовуватися й комбінований підхід: завдання на частотній характеристиці надлишкової кількості крапок, налагодження параметрів фільтра по трьом і більше точкам у перехідних зонах, а потім усікання оператора фільтра із застосуванням вагових функцій.

Метод частотних вибірок допускає також рекурсивну реалізацію фільтрів.

Тема 8 Z-перетворення сигналів і системних функцій

Вступ

Цифрова обробка сигналів оперує з дискретними перетвореннями сигналів. Математика дискретних перетворень зародилася в надрах аналогової математики ще в 18 столітті в рамках теорії рядів і їх застосування для інтерполяції й апроксимації функцій, однак прискорений розвиток вона одержала в 20 столітті після появи перших обчислювальних машин. У принципі, у своїх основних положеннях математичний апарат дискретних перетворень подібний перетворень аналогових сигналів і систем.

Однак дискретність даних вимагає врахування цього фактора, і його ігнорування може приводити до суттєвих помилок. Крім того, ряд методів дискретної математики не має аналогів в аналітичній математиці.

Розповсюдженим способом аналізу дискретних цифрових послідовностей є z-перетворення (z-transform). Воно відіграє для дискретних сигналів і систем таку ж роль, як для аналогових – перетворення Лапласа. Велике значення z-перетворення має для розрахунків рекурсивних цифрових систем обробки сигналів, а тому розглядається окремою темою перед початком вивчення рекурсивних цифрових фільтрів.

Розділ 26 Z – Трансформація сигналів

26.1 Визначення z-перетворення

Z- перетворення є узагальненням дискретного перетворення Фур'є. Особливо ефективно воно використовується при аналізі дискретних систем і, зокрема, при проектуванні рекурсивних цифрових фільтрів.

Уперше z-перетворення введене у вживання П.Лапласом в 1779 і повторно "відкрито" В. Гуревичем в 1947 році зі зміною символіки на z^{-k}. У цей час у технічній літературі мають місце обидва види символіки. На практичне використання перетворення це не впливає, тому що зміна знака тільки дзеркально змінює нумерацію членів полінома (відносно z^0), числовий простір яких у загальному випадку від $-\infty$ до $+\infty$.

Надалі в якості основний будемо використовувати символіку додатних ступенів z, даючи пояснення по особливостях негативної символіки, якщо така є.

Довільній неперервній функції $s(t)$, рівномірно дискретизованій і відображеній відліками $s_k = s(k\Delta t)$, так само як і безпосередньо дискретної функції, можна поставити в однозначну відповідність степеневий поліном по z, послідовними коефіцієнтами якого є значення s_k:

$$s_k = s(k\Delta t) \Leftrightarrow TZ[s(k\Delta t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k z^k = S(z)$$

. (8.1)

де $z = \sigma + j\omega = r \cdot \exp(-j\varphi)$ - довільна комплексна змінна.

У показовій формі:

$$z = r \cdot \exp(-j\varphi)$$

,

де

$$r = |z| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2},$$
$$\varphi = \arg(z) = \arg tg(\omega / \sigma).$$

Приклад 8.1.

$$s_k = \{1,\ 2, 0, -1, -2, -1,\ 0, 0\},$$
$$S(z) = 1z^0 + 2z^1 + 0z^2 - 1z^3 - 2z^4 - 1z^5 + 0z^6 + 0z^7 = 1 + 2z - z^3 - 2z^4 - z^5.$$

У каузальних системах значення імпульсного відгуку систем існують при $k \geq 0$ й рівняння (8.1) діє в однобічному варіанті:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$$

.

У загальному випадку, z-перетворення – це степениевий ряд з нескінченною кількістю членів, тому він може сходитися не для всього простору значень z. Область z, у якій z-перетворення сходиться й значення $S(z)$ кінцеві, називають областю збіжності.

Приклад 8.2.

Послідовність (сигнал) кінцевої довжини, непричинна:

$$s_{-k} = \{1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1\}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$
$$S(z) = 1z^0 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + 1z^{-4} = 1 + 2/z + 3/z^2 + 2/z^3 + 1/z^4.$$

.

Очевидно, що $S(z) = \infty$ при $z = 0$.

Область збіжності – усі значення z, за винятком $z=0$.

Приклад 8.3.

Послідовність кінцевої довжини, причинна (як імпульсний відгук каузальної системи):

$$s_{-k}=\{1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1\},\quad k=0,1,2,3,4.$$
$$S(z)=1z^0+2z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3}+1z^{-4}=1+2/z+3/z^2+2/z^3+1/z^4.$$

$S(z)=\infty$ при $z=\infty$.

Область збіжності – усі значення z, за винятком $z=\infty$.

Приклад 8.4.

Послідовність кінцевої довжини, двостороння (як імпульсний відгук симетричного фільтра):

$$s_k=\{1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1\},\quad k=-2,-1,0,1,2.$$
$$S(z)=1z^{-2}+2z^{-1}+3z^0+2z^1+1z^2=1/z^2+2/z+3+2z+z^2.$$

$S(z)=\infty$ при $z=0$ й $z=\infty$.

Область збіжності не включає точки $z=0$ й $z=\infty$

Приклад 8.5.

Послідовність нескінченної довжини, причинна (як імпульсний відгук рекурсивного інтегруючого фільтра):

$$s_k=0\ \ npu\ \ k<0,\quad s=1\ \ npu\ \ k\ge 0.$$
$$S(z)=z^{-0}+z^1+z^2+z^3+\ \ldots=1+z+z^2+z^3+\ \ldots=1/(1-z).$$

.

Ясно, що ряд може задовольняти умові збіжності тільки при $|z|<1$.

Значення z, для якихм $S(z)=\infty$, називаються *полюсами*, а для якихм $S(z)=0$, називаються нулями функції $S(z)$.

Як видно із прикладів, для послідовностей кінцевої довжини z-перетворення сходиться скрізь крім точки $z=\infty$ для, що мають правобічну частину ($k \geq 0$), і точки $z=0$ для, що мають лівосторонню частину ($k<0$), у будь-яких їхніх комбінаціях. Для нескінченних причинних послідовностей перетворення сходиться скрізь усередині кола одиничного радіуса із центром на початку координат.

По заданому або отриманому в результату аналізу якої-небудь системи z-поліному однозначно відновлюється відповідна до цього полінома функція шляхом ідентифікації коефіцієнтів ступенів при z^k з k-відліками функції.

Приклад 8.6.

$$S(z)=1+3z^2+8z^3-4z^6-2z^7=1z^0+0z^1+3z^2+8z^3+0z^4+0z^5-0z^6-2z^7.$$

$$s_k=\{1,0,3,8,0,0,-4,-2\}.$$

Зміст величини z в z-поліномі полягає в тому, що вона є оператором одиничної затримки по координатах функції. Множення z-образа сигналу $s(k)$ на величину z^n означає затримку сигналу (зсув вправо по часовій осі) на n інтервалів: $z^n S(z) \Leftrightarrow s(k-n)$.

Щоб переконатися в цьому, досить у наведеному вище прикладі виконати множення многочлена $S(z)$, наприклад на z^2, виконати зворотне перетворення й одержати новий сигнал $s_k=\{0,0,1,0,3,8,0,0,-4,-2\}$.

Z-образи з додатними ступенями z відповідають каузальним (фізично реалізованим) процесам і системам, які працюють у реальному масштабі часу з поточними й "минулими" значеннями сигналів.

При обробці інформації на ЕОМ каузальність сигналів не належить до обмежень і можливе використання негативних ступенів z, що відповідають відлікам сигналів "уперед". Останнє застосовується, наприклад, при синтезі симетричних операторів фільтрів, що дозволяє робити обробку інформації без внесення в сигнал фазових викривлень.

При використанні символіки z^{-1} "минулим" значенням відповідають значення з негативними ступенями z, "майбутнім" – з додатними.

Основне достоїнство z-перетворень полягає в простоті математичних операцій зі статечними поліномами, що має немаловажне значення при розрахунках цифрових фільтрів і спектральному аналізі.

26.2 Зв'язок з перетвореннями Фур'є й Лапласа

Запишемо дискретний сигнал s_k у вигляді суми вагових імпульсів Кронекера:

$$s_k = s(k\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) d(k\Delta t - n\Delta t)$$

.

Визначимо спектр сигналу по теоремі запізнювання:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \exp(-j\omega k\Delta t)$$

.

Виконаємо заміну змінних, $z = \exp(-j\omega\Delta t)$, і одержимо:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) z^k = S(z)$$

.

Звідси випливає, що дискретне перетворення Фур'є є часткам случаємо z-перетворення при $z = \exp(-j\omega\Delta t)$.

Аналогічною підстановкою $z = \exp(-p)$ може здійснюватися перехід до дискретного перетворення Лапласа. У загальному вигляді:

$$S(\omega) = S(z), \qquad S(p) = S(z),$$
$$z = \exp(-j\omega\Delta t); \qquad z = \exp(-p\Delta t). \tag{8.2}$$

Зворотне перетворення:

$$S(z) = S(\omega), \qquad S(z) = S(p),$$
$$\omega = \ln z / j\Delta t; \qquad p = \ln z / \Delta t. \tag{8.3}$$

При негативній символіці z зв'язок між поданнями здійснюється відповідно підстановками $z^{-1} = \exp(j\omega\Delta t)$ й $z^{-1} = \exp(p)$.

При z- $z^k = \exp(-j\omega k\Delta t)$ перетворення являє собою особливу форму вистави дискретних сигналів, при якій на поліном $S(z)$ можна посилатися як на часову функцію (за значеннями коефіцієнтів $k\Delta t$), так і на функцію частотного спектра сигналу (за значеннями аргументу ω).

26.3 Відображення z-перетворення

Відображення z-перетворення виконують на комплексній z-площині з $\mathrm{Re}\,z$ і $\mathrm{Im}\,z$ по осях координат (рисунок 8.1). Зокрема, спектральній осі частот ω на z-площині відповідає коло радіуса:

$$|z| = |\exp(-j\omega\Delta t)| = \sqrt{\cos^2(\omega\,\Delta t) + \sin^2(\omega\,\Delta t)} = 1$$

.

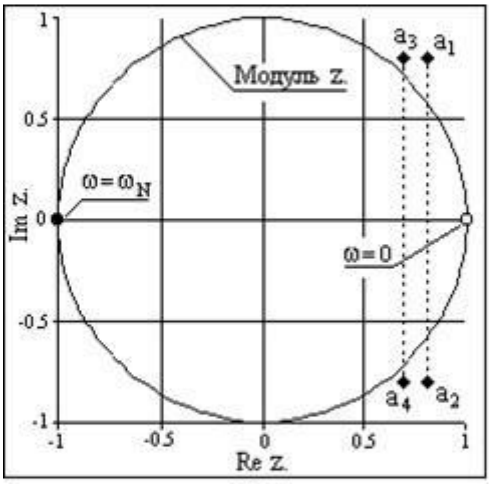


Рисунок 8.1 – Комплексна z-площина

Підстановка значення якої-небудь частоти ω у $z = \exp(-j\omega\Delta t)$ відображається точкою на окружності. Частоті $\omega = 0$ відповідає точка $\mathrm{Re}\,z = 1$ й $\mathrm{Im}\,z = 0$ на правій стороні осі абсцис.

При підвищенні частоти точка зміщається по окружності проти годинникової стрілки, і займає крайнє ліве положення на частоті Найквыста $\omega_N = \pi/\Delta t$ ($\mathrm{Re}\,z = -1$ і $\mathrm{Im}\,z = 0$). Негативні частоти спектра відображаються аналогічно за годинниковою стрілкою на нижньому півколі.

Точки $\pm\omega_N$ збігаються, а при подальшому підвищенні або зниженні частоти значення починають повторюватися в повній відповідності з періодичністю спектра дискретної функції.

Прохід по повній окружності відповідає одному періоду спектра, а будь-яка гармоніка спектра сигналу задається на площині двома точками, симетричними щодо осі абсцис.

Звідси випливає також, що область збіжності стійких каузальних систем на z-площині являє собою коло одиничного радіуса.

Сигнали й системи безперервного часу дуже часто описуються за допомогою перетворення Лапласа.

Якщо $z = \exp(-s\Delta t)$, де $s = \sigma + j\omega$, то

$$z = \exp(-(\sigma + j\omega)\Delta t) = \exp(-\sigma\Delta t)\exp(-j\omega\Delta t)$$

.

Отже, $|z| = \exp(-\sigma\Delta t)$, $\arg(z) = \omega\Delta t = 2\pi f\Delta t = 2\pi f / f_\Delta$, де f_Δ - частота дискретизації, при цьому вісь ω відображається на z-площині одиничною окружністю, права сторона s-площини відображається усередину окружності, а ліва сторона – на зовнішню сторону окружності. При використанні символіки z^{-1} відображення сторін s-площини на z-площині міняється місцями.

Розділ 27 Простір Z-Поліномів

27.1 Область збіжності

Поліном $S(z)$ (8.1) називають z-образом або z-зображенням функції $s(k\Delta t)$.

Перетворення має сенс для області тих значень z, у якій ряд $S(z)$ сходиться, тобто сума ряду являє собою аналітичну функцію змінної z, що не має полюсів і особливих точок:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |s_k|\,|z|^k < \infty$$

.

У загальному випадку множини z, для яких поліноми $S(z)$ сходиться, утворюють на z-площині певні області, показані на рисунку 8.2.

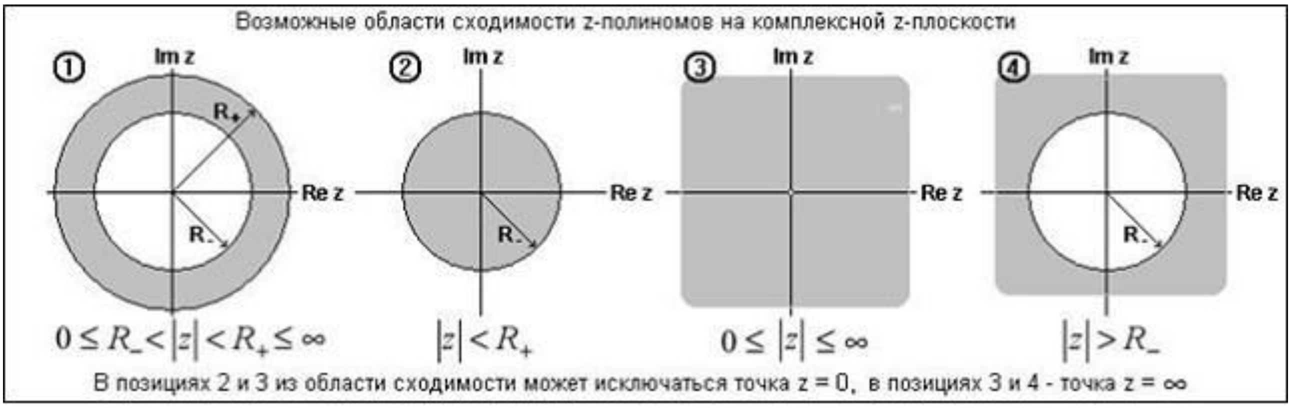


Рисунок 8.2 – Області на z-площині

З наведеного вище зв'язку z-перетворення з перетворенням Фур'є випливає, що якщо функція $s(t)$ має спектральне представлення $S(\omega)$, то одиничне коло $|z| = |\exp(-j\omega)| = 1$ обов'язково повинна входити в область збіжності полінома $S(z)$. І навпаки, якщо область збіжності полінома $S(z)$ містить у собі одиничну коло, то дискретне перетворення Фур'є функції $s(t)$ – прообразу полінома $S(z)$, повинне існувати, а а якщо ні, то – немає. Останнє випливає з того, що z-перетворення, будучи більш загальним випадком перетворення дискретних функцій, може існувати й для функцій, для яких не існує перетворення Фур'є.

Прикладом цього може служити функція одиничного стрибка:

$$u_n = \begin{cases} 1, \; n \ge 0; \\ 0, \; n < 0. \end{cases}$$

Для перетворення Фур'є функції $u(n)$ не виконується умова абсолютної сумуємості (енергія функції нескінченна). Але для z-перетворення маємо:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k||z|^k = \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k < \infty, \quad при \;\; |z| < 1$$

.

27.2 Примеры z-преобразования

Примеры z-преобразования часто встречающихся на практике дискретных сигналов.

27.2.1 Импульсы Кронекера

В общем случае, для импульса Кронекера в произвольной точке числовой оси:

$$\delta(k-n)=\begin{cases}1, & при\ k=n,\\ 0, & при\ k\neq n.\end{cases}$$

$$X_\delta(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k-n)z^k=z^n$$

.

Для импульса Кронекера в нулевой точке соответственно $X_\delta(z)=z^0=1$ $X_\delta(z)$. Ряд сходится на всей z-плоскости.

27.2.2 Функция Хевисайда (единичный скачок, причинная последовательность бесконечной длины, например, импульсный отклик рекурсивного интегрирующего фильтра).

$$x(k)=\begin{cases}0, & при\ k<0,\\ 1, & при\ k\geq 0.\end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k=z^k$$

Ряд сходится при $|z|<1$, при этом его сумма равна:

$$X(z)=1/(1-z)$$

.

Z-преобразование действительно везде внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат.

При использовании символики z^{-1}:

$$X(z)=1/(1-z^{-1})=z/(z-1),\ |z|>1$$

.

На границі області аналітичності функція $X(z)$ має один простий полюс при $z=1$.

27.2.3 Експонентна функція:

$$x(k)=\begin{cases}0, & при\ k<0,\\ a^k, & при\ k\geq 0.\end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\,z^k=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}(az)^k$$
.

Як і в попередньому випадку, ряд сходиться при $|az|<1$, при цьому:

$$X(z)=1/(1-az),\ |z|<1/a$$
.

При використанні символіки z^{-1}:

$$X(z)=z/(z-a),\ |z|>a$$
.

27.2.4 Комплексна експонента:

$$x(k)=\begin{cases}\exp(j\omega k), & k\geq 0;\\ 0, & k<0.\end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\exp(j\omega k)z^k=\sum_{k=0}^{\infty}(z\exp(j\omega))^k=\sum_{k=0}^{\infty}1/(1-z\exp(j\omega)),\quad |z|<1$$
.

27.3 Аналітична форма z-образів

Аналітична форма z-образів існує для z-перетворень, якщо можливе згортання степенного ряду в аналітичний вираз. Вище, у прикладах z-перетворення, уже приводилося приведення до аналітичної форми z-образів функції Хевісайда й експонентної функції. Нижче в таблиці приводиться z-трансформація ряду поширених функцій, які можуть використовуватися для прямого й зворотного перетворення.

Таблиця 8.1 – Z-трансформація ряду поширених функцій

Функція $s(k), k\geq 0$	$S(z)$ z - образ	z^{-1} $S(z)$ – образ

β	$\beta/(1-z),\quad \lvert z\rvert<1$	$\beta z/(z-1),\quad \lvert z\rvert>1$
βk	$\beta z/(1-z)^2,\quad \lvert z\rvert<1$	$\beta z/(z-1)^2,\quad \lvert z\rvert>1$
βk^2	$\beta z(1+z)/(1-z)^3,\quad \lvert z\rvert<$	$\beta z(1+z)/(z-1)^3,\quad \lvert z\rvert>$
$\beta\alpha^k$	$\beta/(1-z\alpha),\quad \lvert z\rvert<1/\alpha$	$\beta z/(z-\alpha),\quad \lvert z\rvert>\alpha$
$\beta k\alpha^k$	$\beta z/(1-z\alpha)^2,\quad \lvert z\rvert<1/\alpha$	$\beta\alpha z/(z-\alpha)^2,\quad \lvert z\rvert>\alpha$
$\cos\alpha k$	$(1-z\cos\alpha)/(1-2z\cos\alpha$ $\lvert z\rvert<1$	$z(z-\cos\alpha)/(z^2-2z\cos$ $\lvert z\rvert>1$
$\sin\alpha k$	$z\sin\alpha/(1-2z\cos\alpha+z^2$ $\lvert z\rvert<1$	$z\sin\alpha/(z^2-2z\cos\alpha+1$ $\lvert z\rvert>1$
$\beta\exp(-\alpha$	$\beta/(1-z\exp(-\alpha)),$ $\lvert z\rvert<1/\exp(-\alpha)$	$\beta z/(z-\exp(-\alpha)),$ $\lvert z\rvert>\exp(-\alpha)$
$\beta k\exp(-$	$\beta z\exp(-\alpha)/(1-z\exp($ $\lvert z\rvert<1/\exp(-\alpha)$	$\beta z\exp(-\alpha)/(z-\exp(-$ $\lvert z\rvert>\exp(-\alpha)$

У таблиці наведені перетворення як для символіки z, так і для символіки z^{-1} (по Гуревичу), яка іноді буває зручною у деяких математичних операціях. Перехід з однієї символіки в іншу достатньо простий і виконується заміною z в одній символіці на $1/z$ в іншій.

Розділ 28 Властивості Z-перетворення

Найважливішою властивістю z-перетворення є властивість його одиничності. Будь-яка послідовність $s(k)$ однозначно визначається z-зображенням в області його збіжності, і навпаки, однозначно відновлюється по z-зображенню.

Без поглиблення в теорію, можна констатувати, що всі властивості ДПФ дійсні й для z-перетворення. Відзначимо деякі з них.

28.1 Лінійність. Затримка

Лінійність: Якщо $s(k)=a\cdot x(k)+b\cdot y(k)$, те $S(z)=aX(z)+bY(z)$. Відповідно, z-перетворення припустиме тільки для аналізу лінійних систем і сигналів, що задовольняють принципу суперпозиції.

Затримка на n тактів: $y(k)=x(k-n)$.

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-n)z^k = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-n)z^{k-n} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(m)z^m = z^n X(z).$$

Відповідно, множення z-образа сигналу на множник z^n викликає зрушення сигналу на n тактів дискретизації.

28.2 Перетворення згортки

При виконанні нерекурсивної цифрової фільтрації однобічними операторами фільтрів:

$$s(k) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)y(k-n),\ k=0,1,2,\ \dots$$

Z-перетворення рівняння згортки:

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} h(n)y(k-n)z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^n y(k-n)z^{k-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\ z^n \sum_{k=0}^{\infty} y(k-n)\ z^{k-n} =$$

Таким чином, згортка дискретних функцій відображається добутком z-образів цих функцій. Аналогічно, для z-перетворення можуть бути доведені всі відомі теореми про властивості z-образів, що цілком природно, тому що при $z = \exp(-j\omega)$ ці властивості повністю еквівалентні властивостям спектрів функцій.

28.3 Розкладання сигналів на блоки послідовної згортки

Z-Перетворення дозволяє робити розкладання сигналів і функцій, наприклад передаточних функцій фільтрів, на короткі складові операції згортки, для чого досить дорівняти z-поліном до нуля, знайти його корені a_i, і переписати поліном у вигляді добутку двочленів:

$$S(z) = a_0(z - a_1)(z - a_2)\ldots,$$

де a_0 - останній відлік сигналу (коефіцієнт при старшому степені z).

Але добутку в z-області відповідає згортка в координатній області, і при зворотному перетворенні двочлени $(z - a_i)$ перетворюються у двохточкові диполі $\{-a_i, 1\}$, а сигнал довжиною N представляється згорткою $(N-1)$ диполів:

$$s_k = a_0\{-a_1, 1\} \otimes \{-a_2, 1\} \otimes \{-a_3, 1\} \otimes \ldots.$$

Приклад 8.7.

$$s_k = \{1.4464, -2.32, 3.37, -3, 1\}.$$
$$S(z) = z^4 - 3z^3 + 3.37z^2 - 2.32z + 1.4464.$$
$$a_0 = 1.$$

Корені полінома $S(z)$:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,8 + 0,8j, \\ a_2 &= 0,8 - 0,8j, \\ a_3 &= 0,7 + 0,8j, \\ a_4 &= 0,7 - 0,8j. \end{aligned}$$

$$S(z) = (z - 0,8 - 0,8j)(z - 0,8 + 0,8j)(z - 0,7 - 0,8j)(z - 0,7 + 0,8j).$$

Корені полінома представлене на z-площині на рисунку 8.1. Корені полінома комплексне й чотири двочлени в координатній області також будуть комплексними.

Але вони є сполученими, і для одержання речовинних функцій слід перемножити сполучені двочлени й одержати біквадратні блоки:

$$S(z)=\left(z^2-1.4z+1.13\right)\left(z^2-1.6z+1.28\right)$$

.

При переході в координатну область: $s_k=\{1.13,-1.4,1\}\otimes\{1.28,-1.6,1\}$

Таким чином, вихідний сигнал розкладено на згортку двох тричленних сигналів (функцій).

28.4 Диференціювання

Якщо маємо $s(k)\leftrightarrow S(z)$, то z-образ функції $ks(k)$ можна знайти, продиференціювавши $S(z)$, що буває корисно для обчислення зворотного z-перетворення функцій $S(z)$ з полюсами високого порядку:

$$ks(k)\leftrightarrow zdX(z)/dz$$

.

Розділ 29 Зворотне Z-перетворення

29.1 Методи перетворення

Зворотне z-перетворення дозволяє відновлювати дискретну функцію по її z-образу. Воно широко використовується, наприклад, при визначенні імпульсних характеристик рекурсивних цифрових фільтрів. У символічній формі:

$$x(k)=TZ^{-1}\left[X(z)\right]$$

.

На практиці $X(z)$ в процесі розрахунків звичайно виражається через відношення двох багаточленів від z:

$$X(z)=\left(b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots+b_Nz^N\right)/\left(a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_Mz^M\right) \quad (8.4)$$

$$X(z) = x(0) + x(1)z + x(2)z^2 + \ \dots$$

(8.4’)

Найпоширеніші методи зворотного перетворення із цієї форми $X(z)$:

- Перетворення інтегруванням по контуру (метод лишків).
- Метод розкладання на елементарні дроби.
- Метод розкладання в статечній ряд.

Метод розкладання в степеневий ряд найбільш простий і придатний для виконання на комп'ютерах, але він не дає розв'язки в аналітичній формі. При заданні великої кількості точок зворотного перетворення потрібно також стежити за можливим наростанням числових помилок внаслідок рекурсії його алгоритму.

Два перші методи дозволяють одержувати результати в аналітичному виді, але вимагають обчислення полюсів функції $X(z)$, що може становити труднощі при високому порядку функції. При високих порядках полюсів буде потрібно також диференціювання відповідних порядків.

29.2 Перетворення інтегруванням по контуру

Перетворення інтегруванням по контуру належить до числа математично строгих методів. Воно виконується інтегруванням по довільному замкненому контуру С, розташованому в області збіжності й навколишньому всі особливі точки (нулі й полюси) z-образа. Інтегрування зручніше виконувати над полюсами, розташованими усередині контуру, що включає центр системи координат, тобто в символіці z^{-1}. У цій символіці ми й будемо розглядати даних параграф. Контурний інтеграл зворотного перетворення:

$$s_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_c S(z) z^{k-1} dz$$

(8.5)

Згідно з теоремою Коші про відрахування, інтеграл (8.5) дорівнює сумі лишків (Res) подінтегральної функції щодо всіх полюсів цієї функції, що лежать усередині контуру інтегрування. Кожне відрахування пов'язаний з певним полюсом p_k:

$$\mathrm{Res}[F(z), p_k] = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - p_k)F(z)] \ \text{при}\ z = p_k$$

. (8.6)

де $F(z) = z^{k-1} S(z)$,

m – порядок полюса в точці p_k.

Для простого полюса:

$$\mathrm{Res}\left[F(z),\, p_k\right] = (z-p_k)F(z) = (z-p_k)z^{k-1}S(z)\ при\ z = p_k$$. (8.6')

Приклад 8.8.

Z-образ функції: $X(z) = z^2/(z-0,5)(z-1)^2$.

$$x(k) = \mathrm{Res}\left[F(z),p_1\right] + \mathrm{Res}\left[F(z),p_2\right].$$
$$F(z) = z^{k-1}X(z) = z^{k+1}/(z-0,5)(z-1)^2.$$
. .

Функція $F(z)$ має простий полюс $p_1 = 0,5$ і полюс другого порядку $p_2 = 1$.

$$\mathrm{Res}[F(z),0.5] = (z-0.5)z^{k-1}/(z-0.5)(z-1)^2 = z^{k+1}/(z-1)^2|_{z=0.5} = 0.5(0.5)^k/(0.5)^2 = 2(0.5)^k$$

.

$$\mathrm{Res}[F(z),1] = [(z-1)^2 z^{k-1}/(z-0.5)(z-1)^2] = [(z-0.5)(k+1)z^k - z^{k+1}]/(z-0.5)^2|_{z=1} = 2(k-1)$$

.

Результат*:* $x(k) = 2[(k-1)+(0.5)^k]$.

29.3 Перетворення розкладанням на дроби

У цьому методі z-образ (8.4) розкладається на раціональні прості дроби з наступним почленним зворотним перетворенням за допомогою таблиці. Найбільше просто це виконується, якщо функція $S(z)$ може бути розкладена по ступенях z у символіці z^{-1}, тобто представити в наступному вигляді:

$$S(z) = s(0) + s(1)z^{-1} + s(2)z^{-2} + \ldots$$

Відповідно, у виразі (8.4) відношення многочленів також повинне бути в символіці z^{-1}. Якщо полюси $S(z)$ першого порядку й $N = M$, то (8.4) можна розкласти на наступну суму:

$$C_1 / \left(1 - p_1 z^{-1}\right) + C_2 / \left(1 - p_2 z^{-2}\right) + \ldots + C_M / \left(1 - p_M z^{-M}\right) = B_0 + C_1 z / (z - p_1) \ + \ C_2 z$$

(8.7)

$B_0 = b_N / a_N$.

де C_k – коефіцієнти елементарних дробів, які є відрахуваннями функції $S(z)$.

Для обчислення коефіцієнтів C_k помножимо ліву й праву сторону виразу (8.7) на $(z - p_k)/z$ й покладемо $z = p_k$, при цьому в правій частині за рахунок множника $z - p_k = 0$ при $z = p_k$ обнуляються всі члени суми крім члена з C_k даного полюса, а в лівій залишається добуток $S(z)(z - p_k)/z$, що й дозволяє обчислити значення C_k:

$$C_k = S(z)(z - p_k)/z\,|_{z = pk} \quad (8.8)$$

Якщо в (8.4) $N < M$, то значення B_0 дорівнює нулю. Якщо функція $S(z)$ в точці $z = p_k$ має полюс m-ного порядку, то коефіцієнт C_k заміняється сумою коефіцієнтів:

$$\sum_{i=1}^{m} D_i / (z - p_k)^i, \quad (8.9)$$

$$D_i = \frac{1}{(m-i)!} \cdot \frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}} [X(z)(z - p_k)^m / z], \text{ при } z = p_k. \quad (8.10)$$

Приклад 8.9.

Повторимо приклад перетворення даним способом z-образа функції

$X(z) = z^2 / (z - 0,5)(z - 1)^2$, використаного в попередньому прикладі.

Функція $F(z)$ має простий полюс $p_1 = 0,5$ і полюс другого порядку $p_2 = 1$.

$$X(z) = Cz/(z-0.5) + D_1 z/(z-1) + D_2 z/(z-1)^2.$$
$$C = z/(z-1)^2 = 0.5/(0.5-1)^2 = 2.$$
$$D_1 = \frac{d}{dz}[(z-1)^2 X(z)/z] = \frac{d}{dz}[z/(z-0.5)]\ |_{z=1} = -2.$$
$$D_2 = (z-1)^2 X(z)/z = z/(z-0.5)\ |_{z=1} = 2.$$
$$X(z) = 2z/(z-0.5) + D_1 z/(z-1) + D_2 z/(z-1)^2.$$

Зворотне перетворення кожного простого дробу виконаємо по таблиці 8.1.

Результат***:*** $x(k) = 2(0.5)^k - 2 + 2k = 2[(k-1) + (0.5)^k]$. Результат аналогічний методу лишків.

Якщо z-зображення має вигляд дрібно-раціональної функції, то розкладання на прості дроби з наступним застосуванням таблиці відповідностей звичайно праці не становить. Так, наприклад:

$$S(z) = \left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}\right)/\left(1 - az^{-1}\right) = b_0/\left(1 - az^{-1}\right) + b_1 z^{-1}/\left(1 - az^{-1}\right) + b_2 z^{-2}/\left(1 - az^{-1}\right).$$

По таблиці відповідності:

$$X(z) = 1/\left(1 - az^{-1}\right) \to x(k) = a^k.$$

Звідси, з урахуванням лінійності перетворення й властивості затримки:

$$x(k) = b_0 a^k + b_1 a^{k-1} + b_2 a^{k-2}.$$

При перетворенні функцій зі знаменниками більш високих порядків попередньо слід знайти полюси функції. Наприклад, для многочлена другого порядку з полюсами $p_1\ u\ p_2$:

$$S(z) = 1/\left(1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}\right) = 1/[\left(1 - p_1 z^{-1}\right)\left(1 - p_2 z^{-1}\right).$$

Представимо $S(z)$ у вигляді суми дробів з невідомими коефіцієнтами $b_1\ u\ b_2$:

$$S(z) = b_1/(1 - p_1 z^{-1}) + b_2/(1 - p_2 z^{-1}) = (b_1 - b_1 p_2 z^{-1} + b_2 - b_2 p_1 z^{-1}) / [(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})$$
.

При рівності знаменників у цих двох виразах повинні бути рівні й чисельники:

$$(b_1 + b_2) - (b_1 p_2 + b_2 p_1) z^{-1} = 1$$
,

а це забезпечується рівністю коефіцієнтів при однакових ступенях z. Звідси одержуємо систему рівнянь:

$$b_1 + b_2 = 1.$$
$$b_1 p_2 + b_2 p_1 = 0.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо значення коефіцієнтів b_1 и b_2, підставляємо коефіцієнти в $S(z)$, виражене у вигляді суми дробів, і по таблиці відповідності переводимо дроби в часові функції.

28.4 Метод степеневих рядів

Вираз (8.4) можна розкласти безпосередньо в статечній ряд (8.4’) шляхом розподілу в стовпчик, для чого чисельник і знаменник функції виражаються попередньо через наростаючий або зменшуваний показник ступеня z. Зворотне z-перетворення статечного ряду очевидно.

Приклад наростаючого степеня z.

$$X(z) = (1 + 2z + z^2)/(1 - z + 0.4z^2)$$
.

$$\begin{array}{l|l}
1 + 2z + z^2 & 1 - z + 0.4z^2 \\
\underline{1 - z + 0.4z^2} & \overline{1 + 3z + 3.6z^2 + 2.4z^3 + 0.96z^4 + \ldots} \text{ Ряд может быть бесконечным.} \\
\quad 3z + 0.6z^2 & \\
\quad \underline{3z - 3z^2 + 1.2z^3} & \\
\qquad 3.6z^2 - 1.2z^3 & \\
\qquad \underline{3.6z^2 - 3.6z^3 + 1.44z^4} & \\
\qquad\quad 2.4z^3 - 1.44z^4 & \\
\qquad\quad \underline{2.4z^3 - 2.4z^4 + 0.96z^5} & \\
\qquad\qquad 0.96z^4 - 0.96z^5 & \\
\qquad\qquad 0.96z^4 - 0.96z^5 + 0.384z^6, \text{ и т.д.} &
\end{array}$$

Зворотне перетворення виконується шляхом ідентифікації коефіцієнтів ступенів при z^k з k-отсчетами функції: $x(k) = \{1,\ 3,\ 3.6,\ 2.4,\ 0.96,\ \ldots\}$.

Приклад зменшуваних номерів степені z.

$$X(z)=\left(1+2z+z^2\right)/(1-z+0.4z^2)\rightarrow$$

(розподіл на z^N чисельника й знаменника

$$\rightarrow\ \left(z^{-2}+2z^{-1}+1\right)/(z^{-2}-z^{-1}+0.4)$$

полінома) .

$$
\begin{array}{l|l}
z^{-2}+2z^{-1}+1 & z^{-2}-z^{-1}+0.4 \\
\underline{z^{-2}-z^{-1}\ \ +0.4} & \overline{1+3z+3.6z^2+2.4z^3+0.96z^4+\ldots}\ \text{Результат тот же.} \\
\quad 3z^{-1}+0.6 & \\
\quad \underline{3z^{-1}-3\ +1.2z} & \\
\qquad 3.6-1.2z & \\
\qquad \underline{3.6-3.6z+1.44z^2} & \\
\qquad\quad 2.4z-1.44z^2 & \\
\qquad\quad \underline{2.4z-2.4z^2+0.96z^3} & \\
\qquad\qquad 0.96z^2-0.96z^3 & \\
\qquad\qquad 0.96z^2-0.96z^3+0.384z^4,\ \text{и т.д.} &
\end{array}
$$

Метод розподілу полінома (8.4) можна виконувати рекурсивно:

$$x(0)=b_0/a_0,$$
$$x(1)=\left(b_1-x(0)a_1\right)/a_0,$$
$$x(2)=\left(b_2-x(1)a_1-x(0)a_2\right)/a_0,$$
$$\ldots$$
$$x(n)=(b_n-\left(x(n-i)\,a_i\right)/a_0,\ n\ =1,2,3,\ \ldots$$

Розділ 30 Застосування Z – перетворення

30.1 Опис дискретних систем

Опис дискретних систем обробки сигналів за допомогою нулів і полюсів - найбільш широка область використання z-перетворення. Степеневий поліном передаточної функції системи виду (8.4) з нулями ni чисельника й полюсами p_j знаменника завжди може бути представлений у вигляді добутку співмножників:

$$H(z)=K\prod_{i=1}^{N}(z-n_i)\,/\,\prod_{j=1}^{M}(z-p_j) \qquad (8.11)$$

де ДО – коефіцієнт передачі (посилення) вхідного сигналу.

Полюси й нулі $H(z)$ можуть бути дійсними й комплексними, при цьому для забезпечення дійсних значень коефіцієнтів $a_i\ u\ b_j$ в (8.4) комплексні коефіцієнти повинні бути представлені комплексно сполученими парами.

30.2 Геометрична оцінка АЧХ і ФЧХ системи

Інформацію, що утримується в $H(z)$, зручно відображати у вигляді положення нулів (кружками) і полюсів (хрестиками) на z-площині. Діаграма нулів і полюсів наочно відображає властивості системи і її стійкість.

Для стійких систем усі полюси повинні перебувати за межами одиничного кола (усередині колі при символіці z^{-1}) або збігатися з нулями на одиничній колі. На положення нулів обмежень не існує.

По відомій діаграмі нулів і полюсів може бути виконана геометрична оцінка частотної характеристики системи.

При $z = \exp(-j\omega\Delta t)$ одинична окружність $|z| = 1$ відображає частотну вісь характеристики головного частотного діапазону від $\omega = 0\ (z = 1)\ \text{до}\ 2\pi(z = -1)$.

Кожній точці $z_s = \exp(-j\omega_s\Delta t)$ може бути поставлений у відповідність вектор $(z_s - n_i)$ на i-нуль, модуль якого $U_i = |(z_s - n_i)|$ відображає відстань від z_s до i-нуля, а аргумент $\varphi_i = \arg(z_s - n_i)$ - фазовий кут з z_s на i-нуль, а рівно й вектор $(z_s - p_j)$ на j-полюс із відповідною відстанню $V_j = (z_s - p_j)$ й фазовим кутом $\varphi_j = \arg(z_s - p_j)$. При цьому амплітудна й фазова характеристики системи можуть бути оцінені по вираженнях при переміщенні точки ω_s по одиничній колі:

$$|H(\omega)| = \prod_{i=1}^{N} U_i \Big/ \prod_{j=1}^{M} V_j ,\quad (8.12)$$

$$\arg(H(\omega)) = \sum_i \varphi_i - \sum_j \varphi_j .\quad (8.13)$$

По (8.12) неважко зробити висновок, що найбільший вплив на зміну АЧХ по частоті виявляють нулі й полюси, розташовані ближче до одиничного кола. При розташуванні нуля безпосередньо на колі гармоніка ω_s в цій крапці повністю обнуляєтся. І, навпаки, при переміщенні ω_s до полюса, близького до одиничного кола, відбувається різке наростання коефіцієнта підсилення системи.

30.3 Обчислення частотної характеристики за допомогою ШПФ

Тому що частотна характеристика дискретної системи – це Фур'є образ її імпульсної характеристики, то для систем, описаних у загальній формі (8.4), спочатку проводиться розкладання $H(z)$ в статечній ряд (8.4'), над коефіцієнтами якого й виконується ШПФ. Гладкість (дозвіл по частоті $\Delta f = 1/(N\Delta t)$) буде визначатися кількістю коефіцієнтів статечного ряду й при необхідності може збільшуватися доповненням ряду нулями.

Альтернативний спосіб – обчислення ШПФ безпосереднє коефіцієнтів b_n чисельника й a_m знаменника виразу (8.4) з наступним алгебраїчним розподілом $B(k)/A(k)$ результатів ШПФ. Кількість коефіцієнтів b_n і a_m в (8.4) звичайно невелике й для одержання досить гладких частотних характеристик їх продовжують нулями до необхідного значення $N = 1/(\Delta f \Delta t)$.

30.4 Аналіз стійкості систем

Аналіз стійкості систем виконується для рекурсивних систем з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ-Систем). Такі системи описуються або безпосередньо у вигляді різницевого рівняння, або передаточною функцією у вигляді z-образа імпульсної характеристики або різницевого рівняння. Загальна умова стійкості імпульсної характеристики системи:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| h(k) \right| < \infty$$

.

Для рекурсивних систем початковий індекс підсумовування дорівнює нулю. Практично це означає, що будь-який обмежений вхідний сигнал у стійкій системі породжує обмежений вихідний сигнал.

У стійкій системі всі полюси передаточної функції $H(z)$ повинні перебувати за границями одиничного кола $z = \exp(-j\omega\Delta t)$ (усередині колі при символіці z^{-1}).

Система з полюсом на одиничній колі також уважається нестійкою (потенційно нестійкою), навіть якщо у вхідному сигналі немає гармоніки із частотою, відповідної до положення даного полюса на колі. Це визначається тим, що відповідно до (8.11) коефіцієнт підсилення системи в точці полюса дорівнює нескінченності й будь-який нескінченно малий сигнал на цій частоті дасть нескінченно великий сигнал на виході.

Природно, що для практичних систем поняття нескінченності не існує й можна намагатися вжити певних заходів для виключення таких критичних частот. Так, наприклад, в інтегруючих системах полюс знаходиться на нульовій частоті й із вхідного сигналу можна виключити постійну складову, але при цьому змінюється й характер інтегрування (тільки динамічні складові вхідного сигналу).

Слід також ураховувати, що у вхідних сигналах звичайно завжди є присутнім певний статистичний шум, спостерігаються перегони, є присутнім шум квантування й т.п. ефекти з безперервним частотним спектром, які можуть приводити до величезних помилок при обробці даних у потенційно нестійких системах. Практично здійсненний спосіб підвищення стійкості систем – компенсувати полюси на колі нулями в цих же точках, але це може приводити до істотної зміни частотної характеристики системи.

Оцінку стійкості рекурсивної системи можна проводити й по вигляду її імпульсної характеристики (обчисленням зворотного z-перетворення або подачею імпульсу Кронекера на вхід (алгоритм) системи). Якщо значення коефіцієнтів збільшуються в міру росту номерів – система нестійка. Якщо вони дуже повільно зменшуються (повільно прагнуть до нуля) – система стійка мінімально, має великий час установлення робочого режиму, за певних умов може давати більші погрішності в оброблюваних даних.

30.5 Зв'язок різницевих рівнянь і передаточних функцій

Стандартний запис різницевого рівняння системи (зв'язки вхідного впливу $x(k)$ й вихідного сигналу $y(k)$ при відомих постійних параметрах нерекурсивної b_n й рекурсивної a_m трансформації сигналів):

$$y(k)=\sum_{n=0}^{N}b_n x(k-n)-\sum_{m=1}^{M}a_m y(k-m)$$

. (8.14)

Від різницевого рівняння з використанням властивості затримки z-перетворення

$$b_n x(k)\leftrightarrow b_n X(z),$$
$$b_n x(k-n)\leftrightarrow b_n z^n X(z),$$

неважко перейти до z-образу різницевого рівняння системи:

$$Y(z)=\sum_{n=0}^{N}b_n X(z)z^n-\sum_{m=1}^{M}a_m Y(z)z^m$$

. (8.15)

Звідси, передаточна функція системи:

$$Y(z)(1+\sum_{m=1}^{M}a_m z^m)=\sum_{n=0}^{N}b_n X(z)z^n$$

.

$$H(z) = Y(z) / X(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n / (1 + \sum_{m=1}^{M} a_m z^m)$$

. (8.16)

І, навпаки, при приведенні виразу (8.4) до виду (8.16) (нормуванням на a_0) можна без подальших перетворень переходити до вираження (8.14).

Приклад 8.10.

Передаточна функція: $H(z) = 2(1-z) / (2+z)$. Визначити алгоритм обчислень.

$H(z) = Y(z) / X(z) = (1-z) / (1+0.5z).$

$Y(z) + 0,5zY(z) = X(z) - zX(z).$

$y(k) + 0,5y(k-1) = x(k) - x(k-1).$

Результат: $y(k) = x(k) - x(k-1) - 0,5y(k-1)$.

Тема 9. Рекурсивні цифрові фільтри

Розділ 31. Принципи рекурсивної фільтрації

31.1 Конструкція рекурсивних цифрових фільтрів

Загальне рівняння цифрової фільтрації:

$$y_k = \sum_{n=0}^{N} b_n x_{k-n} - \sum_{m=1}^{M} a_m y_{k-m}$$

Z - перетворення цього рівняння:

$$y_k = \sum_{n=0}^{N} b_n x_k z^n - \sum_{m=1}^{M} a_m y_k z^m$$

,

або

$$y_k = x_k \sum_{n=0}^{N} b_n z^n - y_k \sum_{m=1}^{M} a_m z^m$$

.я

Покладемо, що:

$$A(z) = \sum_{m=1}^{M} a_m z^m = a_1 z^1 + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m + \ldots + a_M z^M$$

,

$$B(z) = \sum_{n=1}^{N} b_n z^n = b_1 z^1 + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots + b_N z^N$$

,

$$y_k = x_k B(z) - y_k A(z)$$

.

Передаточна функція цифрового фільтру має вигляд:

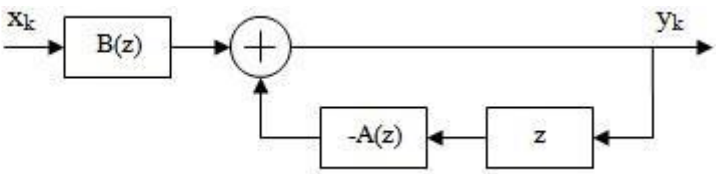
$$H(z) = \frac{y_k}{x_k} = \frac{B(z)}{1 + A(z)}$$

.

Якщо $A(z) \neq 0$, то мова йде про рекурсивну фільтрацію, оскільки в цьому разі маємо зворотній зв'язок з виходу фільтру на його вхід. Тобто значення вихідного сигналу ц даний момент часу залежить від значення вихідного сигналу у попередні моменти часу.

Рекурсивна фільтрація має зміст, лише тоді коли ступінь поліномів $A(z)$ та $B(z)$ набагато менша за ступінь полінома $H(z)$, обчисленого шляхом прямого z-перетворення імпульсної реакції фільтру.

Структурну схему рекурсивного фільтру зображено на рисунку:



Особливості рекурсивних цифрових фільтрів:

– при обчисленні значення поточного відліку y_k використовуються попередні обчислені значення y_{k-m}, $m > 0$, що і визначає принцип рекурсії - фільтрації із зворотним зв'язком;

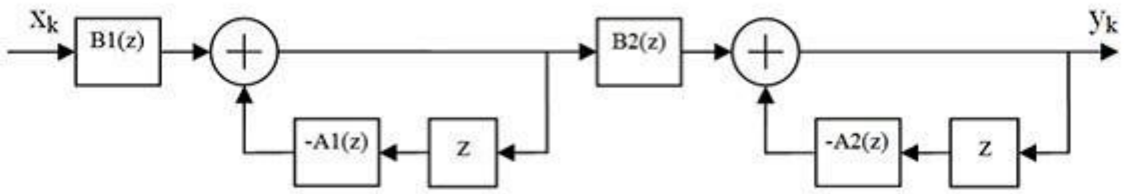
– однобічність і фізична реалізація у реальному часі. (Однак при обробці даних на ЕОМ поліном $B(z)$ може бути реалізований і у двосторонньому варіанті);

– можливість отримання вузьких перехідних зон при конструюванні частотних фільтрів, оскільки функція $H(z)$ фільтру може різко змінюватися при $1+A(z)\to 0$;

– рекурсивна фільтрація вимагає вищої точності обчислень в порівнянні з не рекурсивною, оскільки використання попередніх вихідних відліків для поточних обчислень може призводити до накопичення похибок. Особливо для фільтрів з $H(z)$ де $M > 3$, які чутливі до ефектів кінцевої розрядності. Такі фільтри слід розбивати на ланки другого або першого порядку, і реалізувати їх у каскадній або в паралельній формі.

31.2 Каскадна форма

Каскадну форму реалізації рекурсивного фільтру високого порядку зображено на рисунку:



Для реалізації каскадної форми слід знайти корні поліномів $A(z)$ та $B(z)$ і розкласти $H(z)$ наступним чином:

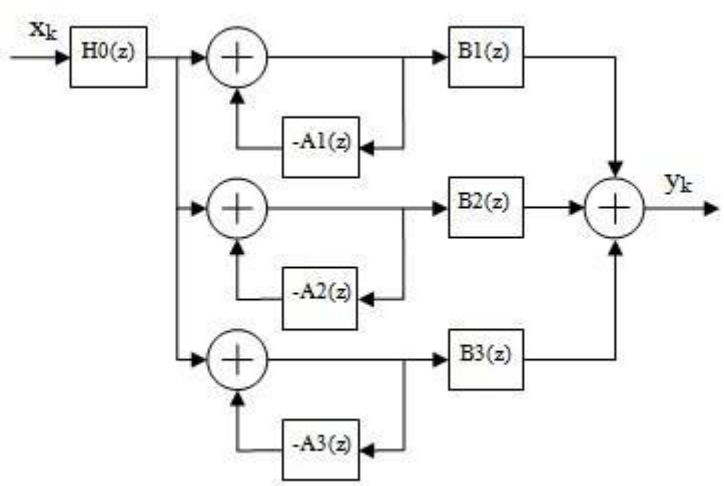
$$H(z) = G\frac{B_1(z)}{A_1(z)}\frac{B_2(z)}{A_2(z)}\cdots\frac{B_N(z)}{A_N(z)} = H_1(z)H_2(z)\ldots H_N(z),$$

де G - масштабний множник. Зазвичай $A_n(z)$ та $B_n(z)$ це поліноми першого або другого порядку.

Порядок слідування та $A_n(z)$ та $B_n(z)$ слід обирати виходячи з наступного міркування: полюси знаменника, близькі до одиничного кола на z-площині (близькі по модулю до 1) формують великі коефіцієнти посилення на відповідних частотах і при обробці сигналів можуть викликати переповнювання розрядної сітки, а отже слід об'єднувати у пари $B_n(z)$ / $A_n(z)$ нулі та полюси, близькі за модулем до 1. Це також дозволить отримати найкраще співвідношення сигнал/шум.

31.3 Паралельна форма

Паралельну форму реалізації рекурсивного фільтру високого порядку зображено на рисунку:



Для реалізації паралельної форми необхідно функцію $H(z)$ розкласти на елементарні дроби:

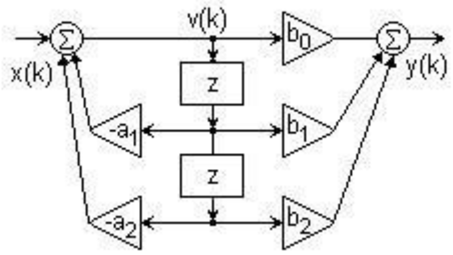
$$H(z) = H_0(z)\sum_{n=0}^{N}\frac{B_n(z)}{1+A_n(z)}$$

Кожна ланка першого або другого порядку такого рекурсивного цифрового фільтру може бути реалізована двома способами: у канонічні формі та у прямій формі.

Перший спосіб реалізації у канонічній формі виконується за рівнянням ланки:

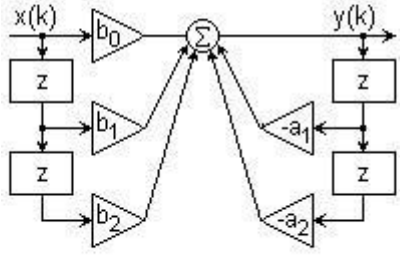
$$v_k = x_k - \sum_{n=1}^{2} a_n v_{k-n} \quad y_k = \sum_{n=0}^{2} b_n v_{k-n}$$

,



Другий спосіб реалізації у прямій формі виконується за рівнянням ланки:

$$y_k = \sum_{n=0}^{2} b_n x_{k-n} - \sum_{n=1}^{2} a_n y_{k-n}$$



При нульових значеннях a_2 та b_2 ланки другого порядку перетворюються у ланки першого порядку.

31.4 Стандартні блоки рекурсивних фільтрів

31.5 Усунення зсуву фази

Оскільки рекурсивні цифрові фільтри викликають зсув фаз (адже їх фазова характеристика залежить від частоти), то для компенсації зсуву фаз на практиці операцію рекурсивної фільтрації проводять двічі – у прямому та зворотному порядку вибірки. Слід врахувати, що АЧХ при цьому буде рівна $|H(\omega)|^2$.

Розділ 32. Розробка рекурсивних цифрових фільтрів

32.1 Етапи розробки цифрових фільтрів

Розробка рекурсивних цифрових фільтрів виконується у чотири етапи:

1. визначення частотної характеристики або передаточної функції фільтру;

2. апроксимація та розрахунок коефіцієнтів a_m та b_n передаточної функції фільтру;

3. вибір структури реалізації фільтру: паралельна або каскадна, ланками першого або другого порядку;

4. програмна або апаратна реалізація фільтру.

Апроксимацію та розрахунок коефіцієнтів a_m та b_n передаточної функції фільтру можна виконати чотирма різними методами:

1. методом розміщення нулів і полюсів на комплексній z-площині

2. методом інваріантного перетворення імпульсної характеристики

3. погодженим z-перетворенням

4. білінійним z-перетворенням

Розглянемо кожен з них окремо.

32.2. Метод розміщення нулів і полюсів на комплексній z-площині

Метод розміщення нулів і полюсів на комплексній z-площині застосовується при розробці простих фільтрів з обмеженою кількістю нулів і полюсів, якщо параметри фільтру не обов'язково задавати точно. Амплітудна характеристики системи може бути оцінена по виразах при переміщенні точки ω_s по одиничному колу $e^{-j\omega_s\Delta t}$:

$$|H(\omega)| = \frac{\prod_{i=1}^{N} U_i}{\prod_{j=1}^{M} V_j}$$

Кожній точці $z_s = e^{-j\omega_s \Delta t}$ може бути поставлений у відповідність:

– вектор $z_s - n_i$ (де n_i - нуль), модуль якого $U_i = |z_s - n_i|$ відображує відстань від z_s до нуля n_i;

– вектор $z_s - p_j$ (де p_j - полюс), модуль якого $V_j = |z_s - p_j|$ відображує відстань від z_s до полюсу p_j

Найбільше на зміну АЧХ за частотою впливають нулі і полюси, розташовані ближче до одиничного кола. При розташуванні нуля безпосередньо на колі гармоніка ω_s у цій точці повністю обнуляється (коефіцієнт передачі фільтру дорівнює нулю). І навпаки, при переміщенні ω_s до полюса, близького до одиничного кола, відбувається різке зростання коефіцієнта посилення фільтру.

Приклад 9.1.

Розрахунок фільтра з наступними параметрами:

– повна режекція сигналу на частотах 0 та 250 Гц (смуговий фільтр)

– смуга пропускання з центром на частоті $f_p = 125$ Гц з шириною смуги по рівню 3 дб $\Delta p = 10$ Гц

– частота дискретизації даних $f_d = 500$ Гц, інтервал дискретизації $\Delta t = 1/f_d = 0.002$, частота Найквіста $f_N = 1/2\Delta t = 250$ Гц.

Нулі передаточної функції розміщуються у точках $n_{1,2} = \begin{cases} e^{-j2\pi 0\Delta t} = 1 \\ e^{-j2\pi 250\Delta t} = -1 \end{cases}$. Кут від початку координат z-площини на полюс p з урахуванням його комплексної спряженості для отримання дійсних коефіцієнтів $\pm 180^\circ \dfrac{f_p}{f_N} = \pm 90^\circ$. Значення радіуса r до полюсу визначає ширину смуги пропускання та може бути оцінене як $r \approx 1 + \dfrac{\Delta p}{f_d}\pi \approx 1.063$.

Передаточна функція:

$$H(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{\left(z - re^{j\pi/2}\right)\left(z - re^{-j\pi/2}\right)} = \frac{z^2-1}{z^2+r^2} = \frac{y_k}{x_k}$$

Рівняння фільтру: $(z^2-1)x_k = (z^2+r^2)y_k$, або $y_k = \dfrac{1}{r^2}x_{k-2} - \dfrac{1}{r^2}x_k - \dfrac{1}{r^2}y_{k-2}$

При використанні символіки z^{-1}, полюс розміщується всередині одиничного кола на тій самій відстані від нього: $r \approx 1 - \dfrac{\Delta p}{f_d}\pi \approx 0.937$. Тоді передаточна функція:

$H(z) = \dfrac{1-z^{-2}}{1+r^2z^{-2}} = \dfrac{y_k}{x_k}$. Рівняння фільтру: $y_k = x_k - x_{k-2} - r^2 y_{k-2}$.

Метод розміщення нулів і полюсів на комплексній z-площині застосовується здебільшого для розрахунку режекторних та селекторних фільтрів.

32.3 Метод інваріантного перетворення імпульсної характеристики

Метод інваріантного перетворення імпульсної характеристики застосовується для отримання з аналогової передаточної функції $H(s)$ за допомогою перетворення Лапласа імпульсної характеристики, яка далі дискретизується та z-перетворюється.

Приклад 9.2.

Нехай є аналогова система з передаточною функцією $H(s)=\frac{C}{s-p}$. Тоді імпульсна характеристика цієї системи буде $h(t)=TL^{-1}[H(s)]=Ce^{pt}\rightarrow Ce^{pn\Delta t}$. Виконаємо z-перетворення та отримаємо передаточну функцію $H(z)$:

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n\Delta t)z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}Ce^{pn\Delta t}z^{n}=\frac{C}{1-ze^{p\Delta t}}$$

При перетворенні фільтрів вищих порядків функції $H(s)$ розкладаються на прості дроби, для кожної з яких знаходяться відповідні $H_i(z)$, а система в цілому реалізується у паралельній формі.

32.4. Узгоджене z-перетворення

Узгоджене z-перетворення застосовується для перетворення аналогових фільтрів у еквівалентні цифрові безпосереднім перекладом всіх полюсів і нулів з s-площини у z-площину:

$$(s-\alpha)\rightarrow ze^{\alpha\Delta t}$$
.

Більшість полюсів і нулів є комплексно спряженими і реалізуються фільтрами другого порядку:

$$(s-\alpha)(s-\alpha^{*})\rightarrow 1-2ze^{\mathrm{Re}(\alpha)\Delta t}\cos(\mathrm{Im}(\alpha)\Delta t)+z^{2}e^{\mathrm{Re}(\alpha)\Delta t}$$

Слід враховувати, що смуга частот аналогових фільтрів від нуля до незкінечності, а цифрових фільтрів – від нуля до частоти Найквіста. При перетворенні відбувається нелінійне стискування нескінченої смуги частот в скінчену з відповідним спотворенням частотних характеристик фільтрів.

32.5 Білінійне z-перетворення

Білінійне z-перетворення є основним методом отримання коефіцієнтів рекурсивних фільтрів з НІХ і використовує наступну заміну:

$s=\gamma(1-z)/(1+z)$, $\gamma=1$ або $2/\Delta t$, при цьому вісь $j\omega$ s-площини відображується в одиничне коло z-площини, права половина s-площини – всередину одиничного кола, а ліва половина з полюсами стійких аналогових фільтрів – зовні одиничного кола. Аналогічна заміна при символіці z^{-1} з відповідною зміною відображення

$$s = \gamma(z-1)/(z+1)$$

Для фільтрів верхніх і нижніх частот порядок фільтру $H(z)$ дорівнює порядку фільтру $H(s)$. Для смугових і загороджувальних фільтрів порядок $H(z)$ удвічі більше порядку $H(s)$. Для збереження частотних характеристик фільтру при нелінійному стискуванні частотної шкали аналогового фільтру (перехід від ∞ до ω_N) попередньо виконується деформація частотної шкали аналогового фільтру.

Розділ 33. Режекторні і селекторні фільтри

Режекторний фільтр пригнічує певну частоту у вхідному сигналі. Він може бути спроектований безпосередньо по z-діаграмі.

33.1 Комплексна z-площина

Найпростіший режекторний фільтр типу НЦФ має один нуль на одиничному колу в z-площині в точці із частотою, яку необхідно придушити. Так, наприклад, якщо із вхідного сигналу потрібно виключити постійну складову (нульова частота), те імпульсна реакція фільтра НЦФ має вигляд:

$$H(z) = 1 - z \qquad (9.1)$$

Нуль функції (9.1) рівний $n1 = 1$.

Як можна бачити на рисунку 9.1, коефіцієнт передачі сигналу $H(\omega)$ на будь-якій частоті ω_i від 0 до $\omega_N = \pi / \Delta t$ - частоти Найквіста, обумовлений виразом (9.1), буде дорівнює довжині вектора V_{n1}, проведеного з нуля функції $H(z)$ - точка $n1$ на дійсній осі, до відповідної частоти ω_i - точки $z(\omega_i)$ на одиничному колу. На частоті $\omega = 0$ довжина цього вектора дорівнює нулю.

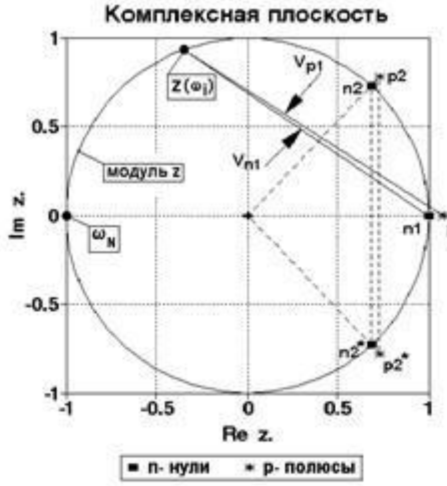


Рисунок 9.1 – Синтез фільтрів

Амплітудно-частотна характеристика фільтра, приведена пунктиром на рисунку 9.2 для передавальної функції (9.1), далека від ідеальної для фільтр-пробки.

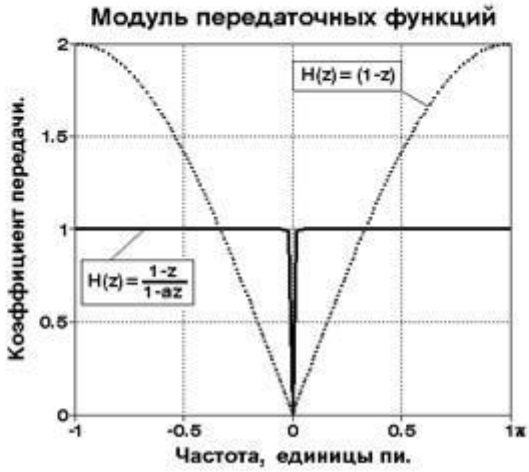


Рисунок 9.2 – АЧХ фільтрів

33.2 Режекторний фільтр постійної складової сигналу

Сконструюємо найпростіший РЦФ, додавши до оператора (9.1) один полюс поза одиничною окружністю на малій відстані від нуля:

$$H_П(z) = G(1-z)/(1-az) \quad z_p = 1/a \quad , \qquad (9.2)$$

Припустимо, що полюс поміщений у точці $p_1 = 1.01$, при цьому, $a = 0,99$. Масштабний коефіцієнт G одержимо нормуванням $H(z)$ до 1 на частоті Найквіста. Для наведених умов $G = 0.995$. Звідси, при $\Delta t = 1$:

$$H_п(z) = 0{,}995(1-z)/(1-0.99z)$$

,

$$y(k) = 0.995\left[x(k) - x(k-1)\right] + 0.99y(k-1)$$

.

Відображення нуля n_1 й полюса p_1 на z-площині й АЧХ фільтра для виключення постійної складової наведені на рисунку 9.1. Коефіцієнт передачі сигналу на довільній частоті ω_i дорівнює відношенню довжин векторів $V_{n1}(z)$ і $V_{p1}(z)$ відповідно з нуля й полюса до точки $z(\omega_i)$ на одиничному колу й близький до одиниці для всіх частот, за винятком нульової:

$$\left|H_П(z)\right| = G\,V_{n1}(z)/V_{p1}(z)$$

.

Фазочастотна характеристика фільтра приведена на рисунку 9.3 і визначається різницею фазових кутів векторів $V_{n1}(z)$ і $V_{p1}(z)$:

$$\varphi_П(\omega) = \varphi_{n1} - \varphi_{p1}$$

.

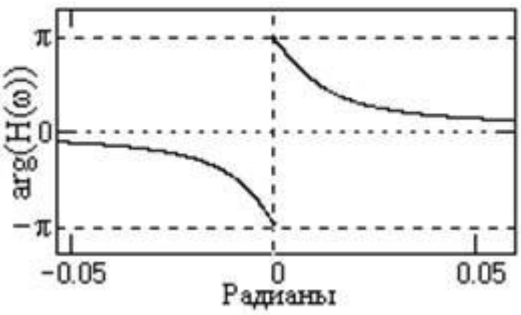


Рисунок 9.3 – Фазочастотна характеристика фільтра

33.3 Режекторний фільтр довільної частоти

При проектуванні на придушення будь-якої іншої частоти ω_v нулі й полюси розташовуються на відповідному радіусі z-площини. Радіальний кут напрямку на нуль і полюс визначаються виразом:

$$\varphi_v = \pm\pi\cdot\omega_v / \omega_N$$

. (9.3)

Наявність двох знаків у виразі (9.3) відображає той факт, що для одержання речовинної функції фільтра нулі й полюси повинні бути комплексно-сполученими парами (їх добуток дає речовинну функцію), тобто:

$$H_v(z) = G(z - z_n)(z - z_n{*}) / \left[(z - z_p)(z - z_p{*})\right]$$
. (9.4)

Нулі фільтра розташовуються на одиничному колу:

$$z_n = \cos\varphi_v + j\ \sin\varphi_v = \mathrm{Re}\ z_n + j\ \mathrm{Im}\ z_n$$
. (9.5)

Полюси - на полярному радіусі R:

$$z_p = R\cos\varphi_v + j\ R\sin\varphi_v = \mathrm{Re}\, z_p + j\,\mathrm{Im}\ z_p$$
. (9.6)

Приклад розташування нулів ($n2\ u\ n2{*}$) і полюсів ($p2\ u\ p2{*}$) наведений на рисунку 9.1. Підставляючи (9.5-9.6) в (9.4), одержуємо:

$$H_v(z) = \frac{G(z^2 - 2z\,\mathrm{Re}\,z_n + 1)}{1 + (z^2 - 2z\,\mathrm{Re}\,z_p)/R^2}$$
, (9.7)

$$G = \left[1 + (1 + 2\mathrm{Re}\,z_p)/R^2\right] / (2 + 2\mathrm{Re}\,z_n)$$
. (9.8)

При приведенні рівняння (9.7) у типову форму:

$$H_v(z) = \frac{G(b_0 + b_1 z + b_2 z^2)}{1 + a_1 z + a_2 z^2}$$
, (9.7')

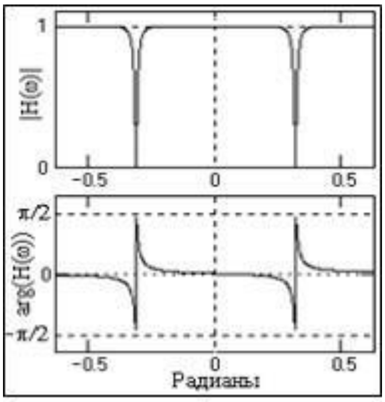
$$b_0 = 1,\ \ b_1 = -2\cdot\mathrm{Re}\ z_n,\ \ b_2 = 1.$$
$$a_1 = -(2\cdot\mathrm{Re}\,z_p)/R^2,\ \ a_2 = 1/R^2.$$
(9.9)

Відповідно, алгоритм обчислень:

$$y(k) = G\cdot[x(k) + b_1\cdot x(k-1) + x(k-2)] - a_1\cdot y(k-1) - a_2\cdot y(k-2)$$
. (9.10)

Приклад 9.3.

Проведемо розрахунки режекторного фільтра на частоту живлення приладів $f_s = 50\ Гц$, яка дуже часто потрапляє в обмірювані дані. Крок дискретизації даних $\Delta t = 0,001\ сек$.



Частота Найквіста: $f_N = 1/2\Delta t = 500\ Гц$.

Радіальний кут на нулі й полюса фільтра в z-площині: $\varphi = \pi \cdot f_s / f_N = 0,1\pi$.

Радіус полюса фільтра приймемо рівним $R = 1,01$.

Значення нуля й полюса:

$$z_n = \cos\varphi + j\sin\varphi = 0,951 + 0,309j,$$
$$z_p = R\cdot\cos\varphi_v + jR\cdot\sin\varphi_v = 0,961 + 0,312j.$$

Значення масштабного множника G по (9.8): $G = 0,99$.

Значення коефіцієнтів передатної функції:

$$b_1 = -2\cdot\mathrm{Re}\, z_n = -1.902,$$
$$a_1 = -\left(2\cdot\mathrm{Re}\ z_p\right)/R^2 = -1,883,$$
$$a_2 = 1/R^2 = 0,98.$$

Частотна передавальна функція фільтра при підстановці коефіцієнтів у рівняння (9.7') і заміні $z = \exp(-j\omega)$:

$$H(\omega) = 0.99[1-1.902\cdot\exp(-j\omega)+\exp(-2j\omega)]/[1-1.883\cdot\exp(-j\omega)+0.98\cdot\exp(-2j\omega)]$$

.

Алгоритм фільтра:

$$y(k) = 0.99[x(k)-1.902x(k-1)+x(k-2)]+1.883y(k-1)-0.98y(k-2)$$

.

Для перевірки обчисленого в прикладі фільтра на рисунку 9.4 наведений модельний вхідний сигнал, що полягає із суми двох рівні по амплітуді гармонік із частотою 50 і 53 Гц, і сигнал на виході фільтра (зміщений нагору). Праворуч на рисунку показані спектри вхідного й вихідного сигналів.

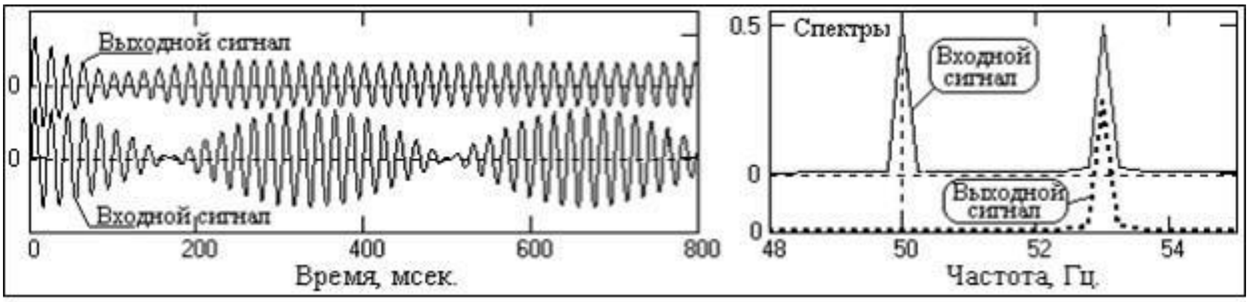


Рисунок 9.4 – Модельний вхідний сигнал

Спектр вихідного сигналу зареєстрований після інтервалу встановлення реакції фільтра, який добре помітний на початковій частині графіка вихідного сигналу. Після встановлення сигнал на виході фільтра практично повністю звільнено від гармоніки 50 Гц.

При $R \to 1$ ширина смуги придушення фільтра стає усе більш вузькою, але при цьому збільшується тривалість імпульсної реакції фільтра й, відповідно, час встановлення фільтра при зміні спектра вхідного сигналу.

У першому наближенні значуща частина імпульсної реакції режекторних фільтрів рівна $\frac{4}{5}/(R-1)$.

Приклад імпульсної реакції для фільтра, обчисленого вище, наведений на рисунку 9.5.

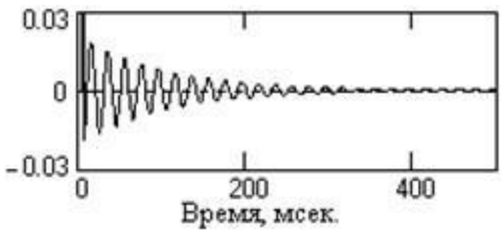


Рисунок 9.5 – Імпульсна реакція для фільтра, обчисленого вище

Відгук фільтра отриманий при подачі на вхід РЦФ імпульсу Кронекера. На графіку не показаний початковий пік відгуку (відлік на нульовій точці), амплітуда якого дорівнює значенню G.

33.4 Селекторний фільтр

Якщо в рівнянні (9.4) вилучити нулі, то одержимо селекторний фільтр, що виділяє сигнали однієї частоти ω_s – частоти селекції, з передавальною функцією:

$$H_s(z) = G / \left[(z - z_p)(z - z_p{}^*) \right] = G1 / (1 + a_1 z + a_2 z^2) \quad . (9.11)$$

Характер передавальної функції (9.11) можна представити безпосередньо по z-площині (рисунку 9.1). При розташуванні полюсів фільтра за межами одиничного кола (наприклад, у точках $p2\ u\ p2^*$) значення коефіцієнта передачі фільтра на довільній частоті ? на одиничному колу буде назад пропорційно величині векторів із цих точок кола на полюси фільтра.

При зміні ω від нуля до $\pm\pi$ (рух по одиничному колу на z-площині по або проти годинникової стрілки) один з векторів (на полюс протилежної півплощини) змінюється в досить невеликих межах (не перевищуючи значення 2), у той час як другий з векторів (на полюс у своїй півплощині) будуть спочатку зменшуватися, досягає мінімуму при розташуванні ω на полярному радіусі полюса (на частоті селекції ω_s), а потім знову починає збільшуватися. Відповідно, значення $H_s(\omega)$ максимальне на частоті селекції $\pm\omega_s$ й при $R \to 1$ може бути дуже високим. Приклад передавальної функції наведений на рисунку 9.6.

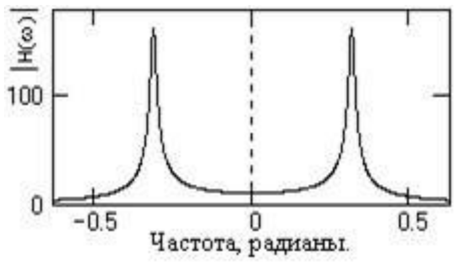


Рисунок 9.6 – Передатна функція

При необхідності фільтр може бути пронормований до 1 на частоті селекції визначенням значення $G1$ за умовою $H_s(\omega)=1$ при $\omega=\omega_s$, тобто:

$$G1 = 1 + a_1 z(\omega_s) + a_2 z(\omega_s)^2$$
.

Фільтр (9.11) у принципі не може мати нульового коефіцієнта передачі на інших частотах головного діапазону. Якщо останнє є обов'язковим, то фільтр виконується методом обігу режекторного фільтра $H_v(z)$:

$$H_s(z) = 1 - H_v(z)$$
.

$$H_s(z) = \frac{c_0 + c_1 z + c_2 z^2}{1 + a_1 z + a_2 z^2}$$
. (9.12)

$$c_0 = 1 - G,$$
$$c_1 = a_1 - Gb_1,$$
$$c_2 = a_2 - G.$$
.

Приклад передавальної функції фільтра наведений на рисунку 9.7.

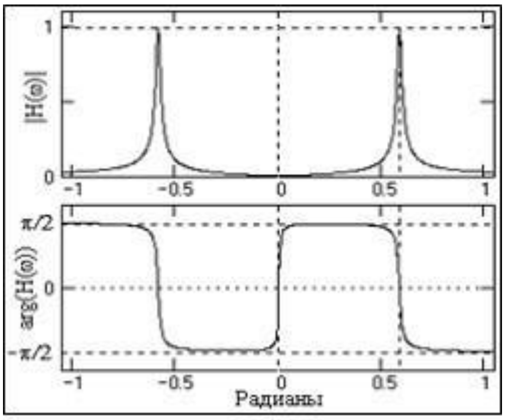


Рисунок 9.7 – Передавальна функція

Приклад застосування фільтра для виділення гармонійного сигналу на рівні шумів, потужність яких більше потужності сигналу, наведений на рисунку 9.8.

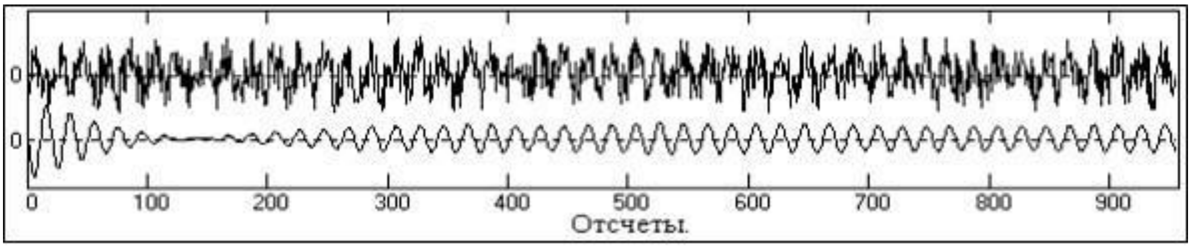


Рисунок 9.8 – Фільтрація сигналу селекторним РЦФ

Розділ 34. Білінійне z-перетворення

34.1 Принцип перетворення

При стандартному z-перетворенні передавальної функції використовується заміна змінної вигляду:

$$z = \exp(-p\Delta t), \quad (9.13)$$

де Δt - крок дискретизації даних,

p – комплексна змінна, $p = \sigma + j\omega$.

Рівняння (9.13) можна записати у вигляді $\ln z = -p\Delta t$ й розкласти $\ln z$ в ряд:

$$\ln\ z = -2\left[(1-z)/(1+z) + (1-z)^3/\left(3(1-z)^3\right) + \ ....\right],\quad z > 0.$$

Перший член цього розкладання і являє собою білінійне z- перетворення:

$$p = (2/\Delta t)(1-z)/(1+z). \quad (9.14)$$

По суті, воно являє собою відображення точок комплексної p-площини в точки комплексної z-площини, і навпаки.

У загальному вигляді:

$$p = \gamma(1-z)/(1+z), \quad (9.15)$$

$$z = (\gamma - p)/(\gamma + p)$$. (9.16)

Значення множника γ не міняє форми перетворення, у зв'язку із чим звичайно ухвалюють $\gamma = 1$.

Підставимо $p = j\omega$ в (9.16) і виразимо z у показовій формі:

$$z = r\exp(j\varphi(\varphi)), \quad r = |z| = 1$$.

$$\varphi(\omega) = 2\ arctg(\omega/\gamma)$$,

Зокрема:

$$\begin{aligned} &\omega = 0, \\ &z = \exp(j0) = 1, \\ &\omega = \pm\infty, \\ &z = \exp(\pm j\pi) = -1. \end{aligned}$$

При зміні $\omega\ от\ -\infty\ до\ +\infty$ фазовий кут $\varphi(\omega)$ монотонно змінюється від $-\pi\ до\ \pi$ (див. рисунку 9.9), тобто уявна вісь p-площини ($p = j\omega,\ -\infty < \omega < \infty$) відображається в одиничну окружність z-площини, права половина s-площини – усередину одиничної окружності, а ліва половина з полюсами стійких аналогових фільтрів – зовні одиничної окружності.

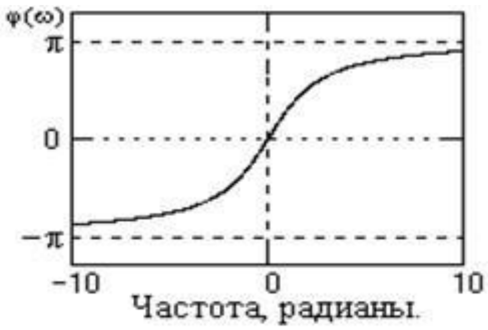


Рисунок 9.9 – Зміна фазового кута

34.2 Деформація частотної шкали

Реальне відображення передавальних функцій фільтрів є безперервним (у силу своєї фізичної сутності) і для спрощення подальших розрахунків звичайно задається в аналітичній формі в комплексній р-площини по частотному аргументу ω $от -\infty$ $до +\infty$.

При білінійному z-перетворенні відбувається нелінійне викривлення шкали частот: повний частотний діапазон від $-\infty$ $до +\infty$ безперервних функцій у р-площини стискується до головного частотного діапазону від $-\pi/\Delta t$ $до$ $\pi/\Delta t$ дискретних функцій в z-площині.

При заданні рівнянь безперервних передавальних функцій у частотній області це повинне супроводжуватися відповідною зворотною деформацією частотної шкали, яка буде скомпенсована при білінійному z-перетворенні.

Підставляючи в (9.14) $z = \exp(-j\omega\Delta t)$ і множачи чисельник і знаменник правої частини отриманого рівняння на $\exp(-j\omega\Delta t/2)$, одержимо:

$$p = (2/\Delta t)[\exp(j\omega\Delta t/2) - \exp(-j\omega\Delta t/2)]/[\exp(j\omega\Delta t/2) + \exp(-j\omega\Delta t/2)], \quad (9.17)$$

$$p = (2/\Delta t)th(j\omega\Delta t/2).$$

Позначимо нову шкалу частот у р-області через індекс $\omega_Д$ (деформована) і, приймаючи $p = j\omega_Д$, з урахуванням тотожності $th(x) = -jtg(jx)$, одержуємо:

$$\omega_Д = (2/\Delta t)tg(\omega\Delta t/2) = \gamma tg(\omega\Delta t/2), \quad -\pi/\Delta t < \omega < \pi/\Delta t. \quad (9.18)$$

Вираз (9.18) дозволяє здійснювати перехід від фактичних частот ω головного частотного діапазону, яким повинен відповідати оператор РЦФ, до деформованих частот $\omega_Д$ комплексної р-площини, на якій можна задавати необхідну форму передавальної функції проектованого фільтра, при цьому апроксимація передавальних функцій, враховуючи область існування ω $от -\infty$ $до +\infty$ може проводитися многочленами й раціональними функціями.

Зв'язок частот наведений на рисунку 9.10 (у початковій частині $\pm\pi$ простору деформованих частот).

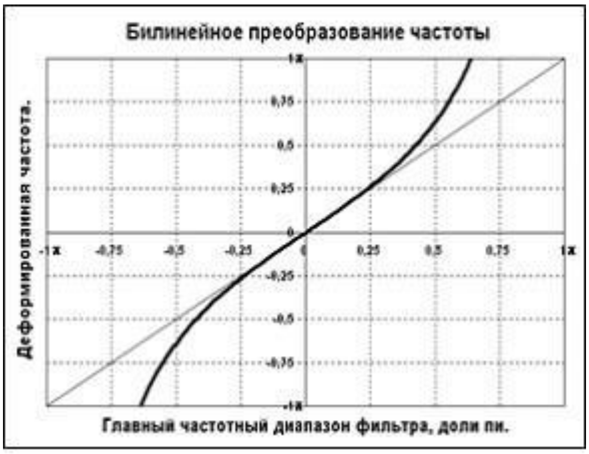


Рисунок 9.10 – Деформація частоти

Розділ 35. Типи рекурсивних частотних фільтрів.

Рекурсивні цифрові фільтри, як і нерекурсивні, не можуть забезпечити реалізацію ідеальної частотної характеристики зі стрибкоподібними переходами від смуги пропущення до смуги придушення.

Тому на етапі розв'язку апроксимаційної завдання необхідно визначити передатну функцію $H(\omega)$ фільтра, яка забезпечує відтворення необхідної амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) з необхідною точністю.

Вимоги до фазочастотної характеристики (ФЧХ) частотних фільтрів, як правило, не задаються, тому що це приводить до різкого ускладнення розв'язку завдання. Спеціальні вимоги до форми ФЧХ звичайно реалізуються після розрахунків фільтрів із заданої АЧХ шляхом контролю отриманої при цьому ФЧХ і розробкою, при необхідності, додаткових коректорів ФЧХ.

Синтез рекурсивних фільтрів, як і НЦФ, виконується на базі фільтрів низьких частот (ФНЧ). Інші типи фільтрів (ФВЧ - високих частот і ПФ - смугові) утворюються на основі ФНЧ шляхом частотного перетворення.

35.1 Завдання апроксимації низькочастотного фільтра

У якості основних вихідних даних для розв'язку апроксимаційних завдань приймаються граничні частоти ω_p - смуги пропущення, і ω_s – початку смуги придушення сигналу. Як правило, задаються також допуски A_p - на максимальне значення нерівномірності в смузі пропущення, і A_s – на максимальне відхилення АЧХ від нуля в смузі придушення (рівень шуму фільтра).

Різниця між граничними частотами ω_p й ω_s буде визначати ширину перехідної зони. Типовий приклад завдання форми АЧХ наведений на рисунку 9.11. У припустимій зоні передавальної функції умовно показана можлива форма АЧХ, що задовольняє заданим умовам.

Рисунок 9.11 – Частотна характеристика ФНЧ

Крім основних частотних параметрів можуть задаватися й вимоги до форми АЧХ (монотонність у смузі пропущення або придушення, характер пульсацій і т.п.), які визначають вибір функції апроксимації.

35.2 Передавальна функція

При розв'язку апроксимаційної задачі амплітудно-частотне характеристика фільтра звичайно задається в дійсній аналітичній формі - виді квадрата передавальної функції, нормованої по амплітуді й граничній частоті передачі:

$$|H(W)|^2 = H(W) \cdot H^*(W) = 1/(1 + A_n(W)), \quad (9.19)$$

де $A_n(W)$ - многочлен n-го порядку,

W - нормована частота (наприклад, $W = \omega / \omega_p$).

Вид многочлена $A_n(W)$ вибирається таким чином, щоб виконувалася умова: $A_n(W) << 1$ при $0 < W < 1$, що забезпечує $|H(W)|^2 \to 1$, і $A_n(W) >> 1$ при $W > 1$, відповідно $|H(W)|^2 \to 0$.

Крутість перехідних зон фільтра встановлюється величиною порядку фільтра (чим більше значення n, тим більше крутість перехідних зон).

По знаменникові правої частини виразу (9.19) досить просто можуть бути визначені комплексні полюси передавальної функції в p-області перетворення Лапласа й відповідним комбінуванням і об'єднанням комплексно-сполучених полюсів отримані передавальні функції у вигляді біквадратних блоків при парному порядку, і з одним лінійним блоком при непарному порядку:

$$H(p) = G\prod_{n=1}^{N/2} B_n(p)$$

, n-парне, (9.20)

$$H(p) = \frac{G}{p-p_o}\prod_{n=1}^{(N-1)/2} B_n(p)$$

, n-непарне, (9.21)

де $B_n(p)$ виражається у формі:

$$B_n(p) = 1/\left[(p-p_n)(p-p_n{}^*)\right] = 1/\left(p^2 - 2\,a_n p + b_n\right)$$

. (9.22)

35.3 Види фільтрів

У цей час існує достатньо велика кількість видів рекурсивних частотних фільтрів і їх модифікацій. Найбільш відомий з них - фільтр Баттеруорта (рисунку 9.12).

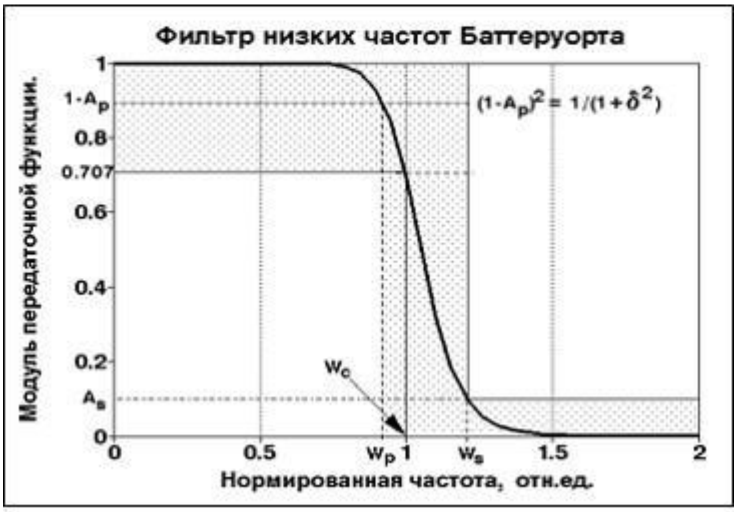


Рисунок 9.12 – АЧХ фільтра Баттеруорта

Він має монотонну гладку АЧХ у всьому частотному діапазоні.

При тому ж порядку многочленів фільтрів (рівній кількості полюсів) більшу крутість забезпечують фільтри Чебишева – прямій і інверсний, однак при цьому в смузі пропущення (для інверсного – у смузі придушення) у фільтрів Чебишева з'являються рівнохвильові пульсації (з однаковою амплітудою пульсацій).

Ще більш круті зрізи характеристик (при рівнохвильових пульсаціях як у смугах пропущення, так і в смузі придушення) реалізуються з використанням еліптичних функцій.

Тема 10. Рекурсивні частотні цифрові фільтри

Вступ

Процес проектування рекурсивного частотного фільтра звичайно полягає в звданні необхідної передавальної характеристики фільтра в частотній області і її апроксимації з певною точністю якою-небудь безперервною передавальною функцією, з наступним z-перетворенням для переходу в z-область. Перші дві операції добре відпрацьовані в теорії аналогової фільтрації сигналів, що дозволяє використовувати для проектування цифрових фільтрів великий довідковий матеріал по аналогових фільтрах. Остання операція є специфічною для цифрових фільтрів.

Для алгебраїчного перетворення безперервної передавальної функції в многочлен по z використовується білінійне перетворення, відоме в теорії комплексних змінних за назвою дробно-лінійного перетворення.

Розділ 36 Низькочастотний фільтр Баттеруорта

36.1 Передавальна функція

Гладкий вид амплітудно-частотної характеристики фільтра Баттеруорта (рисунок 10.1) задають квадратом передавальної функції виду:

$$|H(W)|^2 = H(W)H^*(W) = 1/\left(1+W^{2N}\right)$$

.

де $W = \omega/\omega_c$ - нормована частота,

ω_c - частота зрізу АЧХ фільтра, на якій $|H(W)|^2 = 1/2$ (відповідно $H(\omega) = 0,707$, або 3 дб),

N - порядок фільтра, що визначає крутість зрізу АЧХ.

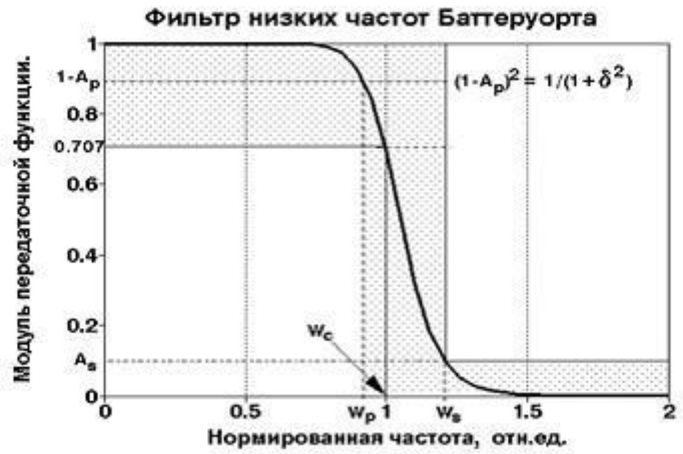


Рисунок 10.1 – АЧХ фільтра Баттеруорта

Функція $|H(W)|^2$ – являє собою енергетичний спектр сигналу (спектральну щільність потужності) і не має фазової характеристики, тобто є парною дійсною, утвореною добутком двох комплексно сполучених функцій $H(W)$ і $H^*(W)$, При $W \to 0$ коефіцієнт передачі фільтра прагне до 1.

Враховуючи, що результати обчислень будуть ставитися до цифрових фільтрів і при z-перетворенні з переходом у головний частотний діапазон відбудеться викривлення частот, до початку розрахунків фактичні значення, що задаються частотних характеристик (значення ω_c, ω_p і ω_s) слід перевести в значення деформованих частот по виразу:

$$\omega_\partial = (2/\Delta t)tg(\omega\Delta t/2), \quad -\pi/\Delta t < \omega < \pi/\Delta t \qquad (10.1)$$

36.2 Крутість зрізу

Нахил частотної характеристики фільтра при переході від області пропускання до області придушення можна характеризувати коефіцієнтом крутості зрізу фільтра K у децибелах на октаву:

$$K = 20\log|H(\omega_2)/H(\omega_1)| \qquad (10.2)$$

де ω_1 й ω_2 - частоти з інтервалом в одну октаву, тобто $\omega_2 = 2\omega_1$.

Тривалість імпульсної реакції фільтра в межах її значущої частини також залежить від крутості зрізу: чим більше крутість, тим більше тривалість імпульсного відгуку фільтра.

36.3Порядок фільтра

Приймаючи $\omega_1 = W_c$, $\omega_2 = W_s$ і підставляючи в (10.2) значення H(W) з наведеними даними, одержимо наближений вираз для визначення порядку фільтра за заданим значенням ДО:

$$N = K/6 \qquad (10.3)$$

Так, для гарантованого ослаблення сигналу в смузі придушення в 100 раз (40 децибел) порядок фільтра N = 7. У середньому, при зміні N на одиницю коефіцієнт придушення сигналу змінюється на 6 децибел.

Вихідні вимоги до передавальної функції фільтра звичайно задаються у вигляді значень ω_p, ω_s і коефіцієнтів нерівномірності (пульсацій) A_p і A_s (рисунок 10.1). Для визначення частоти зрізу ω_c за рівнем 0.707 і порядку фільтра введемо параметр δ, пов'язаний з коефіцієнтом A_p наступним співвідношенням:

$$\left(1-A_p\right)^2 = 1/(1+\delta^2)$$.

$$\delta = \left[1/\left(1-A_p\right)\right]\sqrt{1-(1-A_p)^2} = A_p\sqrt{2/A_p-1}/\left(1-A_p\right)$$. (10.4)

Для обліку деформації частотної шкали в процесі білінійного перетворення при переході надалі до поліномів по Z, виконуємо розрахунки деформованих частот ω_{dp} і ω_{ds} по формулах:

$$\omega_{dp} = 2\ tg(\omega_p \Delta t/2)/\Delta t$$, (10.5)

$$\omega_{ds} = 2\ tg(\omega_s \Delta t/2)/\Delta t$$.

При нормованій частоті $W = \omega/\omega_{dc}$, де ω_{dc} відповідно також деформована частота, на границях перехідної зони виконуються рівності:

$$1/(1+\delta^2) = 1/[1+(\omega_{dp}/\omega_{dc})^{2N}]$$, (10.6)

$$A_s^2 = 1/[1+(\omega_{ds}/\omega_{dc})^{2N}]$$.

Звідси:

$$\delta^2 = (\omega_{dp}/\omega_{dc})^{2N},$$
$$1/A_s^2 - 1 = (\omega_{ds}/\omega_{dc})^{2N}.$$

Розв'язуючи ці два рівняння спільно, знаходимо:

$$N = \ln\ [d/\sqrt{1/A_s^2-1}]\ /\ \ln(\omega_{dp}/\omega_{ds})$$, (10.7)

$\omega_{з} = \omega_{ф} / \delta^{1/N}$

. (10.8)

Приклад розрахунків фільтра низьких частот Баттеруорта.

Починаючи із цього параграфа, будемо супроводжувати розгляд теорії послідовним розрахунками фільтра низьких частот із застосуванням формул, що приводяться.

Для розрахунків приймемо наступні вихідні параметри фільтра:

- Крок дискретизації даних $\Delta t = 0,0005\ сек$.
- Частота Найквіста $f_N = 1/2\Delta t = 1000\ Гц$, $\omega_N = 6,283 \cdot 10^3\ рад$.
- Гранична частота пропускання: $f_p = 300\ Гц$, $\omega_p = 1,885 \cdot 10^3\ рад$.
- Гранична частота придушення: $f_s = 500\ Гц$, $\omega_s = 3,142 \cdot 10^3\ рад$.
- Коефіцієнти нерівномірності: $A_p = A_s = 0,1$.

Розрахунки додаткових параметрів:

1. Значення δ по формулі (10.4): $\delta = 0,484$.

2. Деформовані частоти по формулі (10.5):

$$\omega_{ф} = 2,038 \cdot 10^3\ рад,$$
$$\omega_{з} = 4 \cdot 10^3\ рад.$$

3. Порядок фільтра по формулі (10.7): $N = 4,483$.

Для пояснення порядку розрахунків при парному й непарному порядку фільтра, приймаємо N1=4, N2=5.

4. Частота зрізу по формулі (10.8):

$$\omega_{з}(N1) = 2,443 \cdot 10^3\ рад\ (389\ Гц),$$
$$\omega_{з}(N2) = 2,356 \cdot 10^3\ рад\ (375\ Гц).$$

.

5. По формулі $H(w) = [1/(1+w^{2N})]^{1/2},\ w = \omega / \omega_{dc}$, будуємо графіки передавальних функцій (рисунок 10.2).

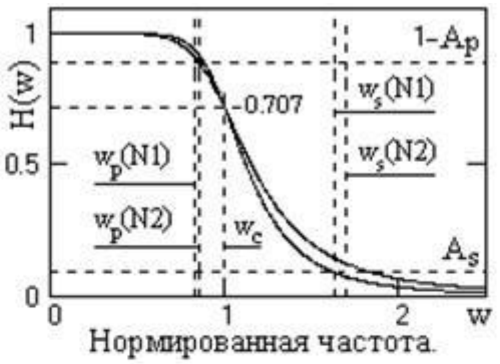


Рисунок 10.2 – Графіки передавальних функцій

36.4 Перетворення Лапласа

Переводимо функцію $|H(W)|^2$ на координатну вісь простору перетворення Лапласа при $p = jW$, для чого досить підставити $W = p/j$:

$$|H(p)|^2 = 1/\left[1+(p/j)^{2N}\right]. \quad (10.9)$$

Полюси функції перебувають у точках нульових значень знаменника:

$$1+(p/j)^{2N} = 0,\ p = j\sqrt[2N]{-1}. \quad (10.10)$$

Звідси випливає, що полюси розташовуються на одиничній окружності в p-площині, а їх місце розташування визначається кореннями рівняння (10.10). У полярних координатах:

$$p_n = j\exp(j\pi(2n-1)/2N), \quad n = 1, 2, \ \dots \ , 2N. \quad (10.11)$$

$$p_n = j\cos[\pi(2n-1)/2N] - \sin[\pi(2k-1)/2N]. \quad (10.11')$$

Продовження прикладу.

6. Обчислюємо значення полюсів фільтра по формулі (10.11). Значення полюсів і їх розташування на p-площині наведені на рисунку 10.3. Розташування першого полюса відзначене. Нумерація полюсів ведеться проти годинникової стрілки.

n	p_n, N=4
1	–0.383 + 0.924j
2	–0.924 + 0.383j
3	–0.924 – 0.383j
4	–0.383 – 0.924j
5	0.383 – 0.924j
6	0.924 – 0.383j
7	0.924 + 0.383j
8	0.383 + 0.924j
9	
10	

n	p_n, N=5
1	-0.309+0.951j
2	-0.809+0.588j
3	-1
4	-0.809-0.588j
5	-0.309-0.951j
6	0.309-0.951j
7	0.809-0.588j
8	1
9	0.809+0.588j
10	0.309+0.951j

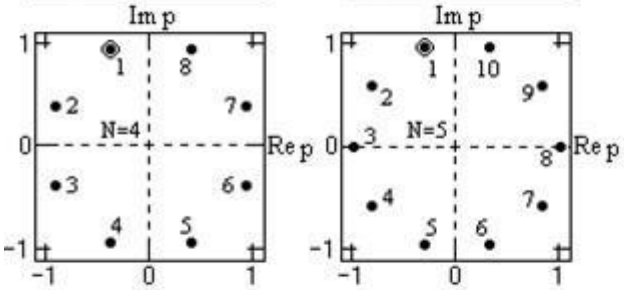


Рисунок 10.3 – Значення й розташування полюсів

Як випливає из формули (10.11) і наочно видно на рисунку 10.2, всі полюси з $n \geq N$ є комплексно сполученими з полюсами $n < N$. Стійку мінімально-фазову передавальну функцію фільтра утворюють полюси лівої половини р-площині:

$$H(p) = G / B(p)$$, (10.12)

де G - масштабний множник,

$B(p)$ - поліном Баттеруорта:

$$B(p) = B_1(p) B_2(p) \ldots B_N(p)$$, (10.13)

$$B_n(p) = p - p_n$$. (10.14)

Практична реалізація фільтра Баттеруорта при парному значенні N проводиться у вигляді послідовної каскадної схеми біквадратними блоками, тобто складеними фільтрами другого порядку. Для цього множники $B(p)$ в (10.13) поєднуються попарно з обох кінців ряду по n (від 1 до N) по комплексно сполучених полюсах, при цьому для кожної пари одержуємо речовинні квадратичні множники:

$$B_m(p) = B_n(p) \cdot B_{N+1-n}(p) = [p + j \ \exp(j\pi(2n-1)/2N)][p + j \ \exp(j\pi(2(...$$
$$= p^2 + 2p \ \sin(\pi(2m-1)/2N) + 1, \quad n = 1, 2, \ ..., \ N/2; \quad m = n.$$

(10.15)

Загальна кількість секцій фільтра $M = N/2$.

При непарному N до членів (10.15) додається один лінійний множник з речовинним полюсом $p_{(N+1)/2} = -1$, приклад розташування якого на р-площині можна бачити на малюнку 10.2 для $N = 5$:

$$B_{(N+1)/2}(p) = p + 1$$
. (10.16)

Машинний час фільтрації на один оператор фільтра першого або другого порядку практично не відрізняються, тому використання операторів першого порядку можна не рекомендувати й при встановленні порядку фільтра по формулі (10.7) округляти розрахункове значення N убік більшого парного числа, що створює певний запас по крутості зрізу частотної характеристики.

Таким чином, передавальна функція ФНЧ Баттеруорта в р-області при парному N:

$$H(p) = G\prod_{m=1}^{M} 1/B_m(p) = G\prod_{m=1}^{M} 1/\left(p^2 + a_m p + 1\right)$$
, (10.17)

$$a_m = 2\sin(\pi(2m-1)/2N), \quad m = 1, 2, \ ... \ , N/2$$
. (10.18)

При непарному N:

$$H(p) = (G/p+1) \prod_{m=1}^{(N-1)/2} 1/\left(p^2 + a_m p + 1\right)$$
, (10.17')

Продовження прикладу.

7. Обчислюємо значення коефіцієнтів a_m по формулі (10.18):

$$N = 4: \quad a_1 = 0{,}765, \ a_2 = 1{,}848$$
•□ .

$$N = 5: \quad a_1 = 0,618, \quad a_2 = 1,618$$

•□ .

36.5 Білінійне перетворення

Для перекладу передавальної функції фільтра в z-область проводиться білінійне перетворення, для чого у вираження (10.17) підставляється параметр p:

$$p = \gamma(1-z)/(1+z)$$

. (10.19)

З урахуванням автоматичного повернення до нормальної шкали частот у головному частотному діапазоні z-перетворення значення коефіцієнта γ :

$$\gamma = 2/(\Delta t \cdot \omega_{ck})$$

. (10.20)

Після переходу в z-область і приведення рівняння передавальної функції в типову форму, для парного N одержуємо передавальну функцію з $M = N/2$ біквадратних блоків:

$$H(z) = G\prod_{m=1}^{M} G_m(1+z)^2/\left(1-b_m z + c_m z^2\right)$$

. (10.21)

$$G_m = 1/(\gamma^2 + a_m\gamma + 1)$$

. (10.22)

$$b_m = 2 \cdot G_m(\gamma^2 - 1)$$

. (10.24)

$$c_m = G_m(\gamma^2 - a_m\gamma + 1)$$

. (10.24)

При непарному N додається один лінійний блок першого порядку, який можна вважати нульовим блоком фільтра ($m = 0$):

$$H(z) = G\frac{(1+z)/(\gamma+1)}{1 - z(\gamma-1)/(\gamma+1)}\prod_{m=1}^{(N-1)/2} G_m(1+z)^2/\left(1-b_m z + c_m z^2\right)$$

, (10.25)

при цьому, природно, у виразі (10.25) використовуються значення коефіцієнтів G_m , b_m і c_m , обчислені по (10.22-10.24) для непарного значення N.

Значення множника G у загальному випадку перебуває нормуванням до 1 коефіцієнта передачі фільтра при $\omega = 0$. Для ФНЧ при використанні вищенаведених формул значення G рівно 1.

При $z = \exp(-j\omega)$ головний діапазон функцій $H(z)$ від $-\pi$ до π.

Для одержання передавальної функції в шкалі фізичних частот досить замість z у вираз (10.21, 10.25) підставити значення $z = \exp(-j\omega\Delta t)$, де Δt – фізичний інтервал дискретизації даних, і перевірити відповідність розрахункової передавальної функції заданим умовам.

Продовження прикладу.

8. Обчислюємо значення коефіцієнтів G_m, b_m і c_m:

$$N = 4: \quad \gamma = 1{,}637,\ G_1 = 0{,}203,\ G_2 = 0{,}149,\ b_1 = 0{,}681,\ b_2 = 0{,}501,\ c_1 = 0{,}492,\ c_2 = 0{,}098.$$

$$N = 5: \quad g = 1{,}698,\ G_1 = 0{,}203,\ G_2 = 0{,}151,\ b_1 = 0{,}763,\ b_2 = 0{,}568,\ c_1 = 0{,}574,\ c_2 = 0{,}171.$$

9. Підставляємо обчислені коефіцієнти у вирази (10.21, 10.25) і обчислюємо значення передавальних функцій при $z = \exp(-j\omega\Delta t)$.

Графіки отриманих функцій наведені на рисунку 10.4.

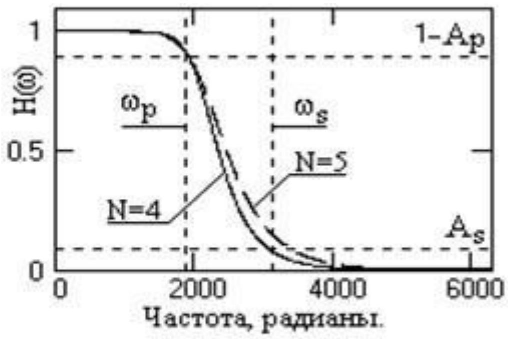


Рисунок 10.4 – Графіки отриманих функцій

У часовій області фільтрація виконується послідовною згорткою вхідного сигналу з операторами комірок фільтра:

$$y_k = x_k \otimes \{h_0(i)\} \otimes h_1(i) \otimes \ldots \otimes h_M(i),\ i = 0{,}1{,}2.$$

Рівняння рекурсивної фільтрації для m-го оператора фільтра:

$$y_k = G_m(x_k + 2x_{k-1} + x_{k-2}) + b_m y_{k-1} - c_m y_{k-2}$$. (10.26)

Рівняння рекурсивної фільтрації для додаткового $h_0(i)$ лінійного оператора фільтра при непарному N:

$$y_0 = (x_k + x_{k-1}) / (\gamma + 1) + y_{k-1} \cdot (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$$. (10.27)

Продовження прикладу.

10. Кожний оператор фільтра має певну передавальну функцію, що можна бачити на рисунку 10.5.

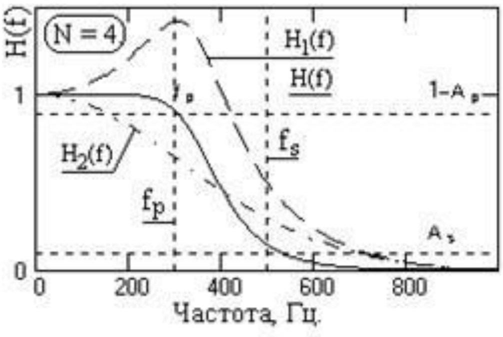


Рисунок 10.5 – Передавальні функції операторів фільтра

Порядок послідовної згортки сигналу з операторами фільтра значення не має, але з урахуванням розрядності комірок пам'яті ланку $H_1(f)$ доцільно реалізувати за $H_2(f)$.

11. Для оцінки тривалості імпульсної реакції фільтра подаємо на вхід фільтра імпульс Кронекера на відліку $k = 3$, і починаємо фільтрацію із другого відліку (що забезпечує початкові умови фільтрації на точках $k = 0$ і $k = 1$). Коефіцієнт підсилення дисперсії шумів (сума квадратів значень імпульсного відгуку) рівний 0.341 при $N = 5$, і 0.278 при $N = 4$.

Розділ 37 Високочастотний фільтр Баттеруорта

37.1 Синтез фільтрів методом частотного перетворення

Високочастотні й смугові фільтри конструюються шляхом частотної трансформації передатних функцій фільтрів низьких частот. Якщо позначити аргумент передатних функцій ФНЧ через $p = jW$, а функцій ФВЧ і СмФ через $s = jw$, то завжди можна знайти таку функцію частотного перетворення $p = F(s)$, яка перетворює один тип фільтрів в іншій. Для перетворення ФНЧ $\rightarrow$ ФВЧ функція частотного перетворення має вигляд:

$$p = 1/s, \quad (10.28)$$

У цьому неважко переконатися порівнянням двох видів перетворення. Як відомо, передавальна функція ФВЧ може бути отримана із ФНЧ різницею між широкосмуговим фільтром ($H(\omega) = 1$) і ФНЧ. Застосовуючи цей метод для функції Баттеруорта, одержуємо:

$$\left|H(w)\right|^2 = 1 - \left|H(W)\right|^2 = 1 - 1/\left(1 + W^{2N}\right) = W^{2N}/\left(1 + W^{2N}\right). \quad (10.29)$$

З іншого боку, при $W = p/j$: $\left|H(p)\right|^2 = 1/\left(1 - p^{2N}\right)$. Виконуючи підстановку (10.28) у цей вираз, одержуємо:

$$\left|H(s)\right|^2 = s^{2N}/\left(s^{2N} - 1\right).$$

Вернемося з останнього виразу до аргументу w з урахуванням прийнятого рівності s=jw:

$$\left|H(s)\right|^2 = (jw)^{2N}/\left((jw)^{2N} - 1\right) = (w)^{2N}/\left(1 + (w)^{2N}\right),$$

що повністю повторює (10.29) при $w = W$.

Підставляючи $p = 1/s$ безпосередньо у вираз $H(p)$ (10.17) для парного значення N, одержуємо:

$$H(s) = G\prod_{m=1}^{N/2} s^2/\left(s^2 + a_m s + 1\right). \quad (10.30)$$

Для непарного N:

$$H(s) = \left[Gs/(s+1)\right]\prod_{m=1}^{N/2} s^2/\left(s^2 + a_m s + 1\right)$$. (10.31)

Після білінійного z-перетворення вирази з підстановкою $s = \gamma(1-z)/(1+z)$, для парного й непарного значень N відповідно:

$$H(z) = G\prod_{m=1}^{N/2} \gamma^2 G_m (1-z)^2/\left(1 - b_m z + c_m z^2\right)$$. (10.32)

$$H(z) = G\frac{\gamma(1-z)/(\gamma+1)}{1-z(\gamma-1)/(\gamma+1)}\prod_{m=1}^{N/2} \gamma^2 G_m (1-z)^2/\left(1 - b_m z + c_m z^2\right)$$. (10.33)

$$G_m = 1/(\gamma^2 + a_m\gamma + 1)$$. (10.34)

$$b_m = 2G_m(\gamma^2 - 1)$$.

$$c_m = G_m(\gamma^2 - a_m\gamma + 1)$$.

Значення коефіцієнтів G_m, b_m, c_m залишаються без зміни (порівняти з (10.22-10.24)). При заданні частотних параметрів ФВЧ у тому ж виді, що й для ФНЧ, формула розрахунків N і ω_{dz} утворюється аналогічно ФНЧ, при цьому в знаменнику виразу (10.7) відношення ω_{dp}/ω_{dz} заміняється на ω_{ds}/ω_{dp}:

$$N = \ln\ [d/\sqrt{1/A_s^2 - 1}]\ /\ln\left(\omega_{ds}/\omega_{dp}\right)$$, (10.35)

а в (10.8) розподіл членів правої частини міняється на множення:

$$\omega_{dz} = \omega_{dp}\cdot\delta^{1/N}$$. (10.36)

Рівняння рекурсивної фільтрації для m-го оператора фільтра:

$$y_k = \gamma^2 G_m\left(x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}\right) + b_m y_{k-1} - c_m y_{k-2}$$. (10.37)

Рівняння рекурсивної фільтрації для додаткового $h_0(i)$ лінійного оператора фільтра при непарному N:

$$y_0 = \gamma(x_k - x_{k-1})/(\gamma+1) \ + y_{k-1}\cdot(\gamma-1)/(\gamma+1)$$. (10.38)

Приклад розрахунків фільтра високих частот Баттеруорта.

Технічне завдання:

- Крок дискретизації даних $\Delta t = 0,0005\ сек$.
- Частота Найквіста $f_N = 1/2\Delta t = 1000\ Гц$, $\omega_N = 6,283 \cdot 10^3\ рад$.
- Гранична частота смуги пропущення: $f_p = 700\ Гц,\ \ \omega_p = 4,398 \cdot 10^3\ рад$.
- Гранична частота смуги придушення: $f_s = 500\ Гц,\ \ \omega_s = 3,142 \cdot 10^3\ рад$.
- Коефіцієнти нерівномірності: $A_p = A_s = 0,1$.

Розрахунки додаткових параметрів:

1. $\delta = A_p\sqrt{2/A_p - 1}\Big/(1 - A_p)$: $\delta = 0,484$.

2. Деформовані частоти по формулі (10.5):

$\omega_{дф} = 7,85 \cdot 10^3\ рад,$
$\omega_{дз} = 4 \cdot 10^3\ рад.$

3. Порядок фільтра по формулі (10.35): $N = 4,483$.

Для розрахунків приймаємо N=4.

4. Частота зрізу фільтра по формулі (10.36):

$\omega_{дз} = 6,549 \cdot 10^3\ рад\ \ (1042\ Гц),$

5. Будуємо графік функції $H(w),\ w = \omega / \omega_{\dot{a}}$, (рисунок 10.6).

Рисунок 10.6 – Графік функції $H(w)$

6. Полюси p_n фільтра повністю повторюють полюси ФНЧ (рисунок 10.3), а, відповідно, повторюються й значення коефіцієнтів a_m.

Інші коефіцієнти:

$$\gamma = 0.611,\ G_1 = 0.543,\ G_2 = 0.4,\ b_1 = -0.681,\ b_2 = -0.501,\ c_1 = 0.492,\ c_2 = 0.098.$$

При порівнянні коефіцієнтів b_m, c_m і коефіцієнтів у чисельнику передавальних функцій ФВЧ із відповідними коефіцієнтами ФНЧ попереднього прикладу можна помітити, що в даному фільтрі відносно ФНЧ відбулася тільки зміна знаків коефіцієнтів при непарних ступенях z.

Це пояснюється тим, що задані в даному прикладі параметри ФВЧ по частоті відповідають частотному реверсу ФНЧ: $\omega' = \pi - \omega$, що приводить до частотного реверсу передатної функції низькочастотного фільтра й перетворенню його у високочастотний фільтр. Цей спосіб обігу ФНЧ також може використовуватися для розрахунків ФВЧ.

7. Імпульсна реакція фільтра, обчислена по (10.37) при подачі на вхід фільтра імпульсу Кронекера наведена на рисунку 10.7.

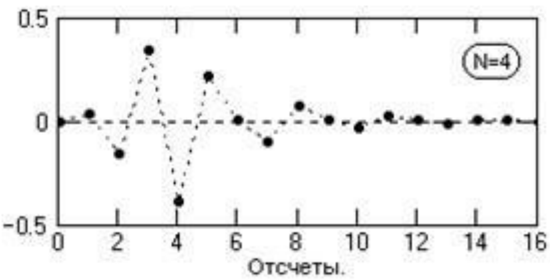


Рисунок 10.7 – Імпульсна реакція фільтра

Розділ 38 Смуговий фільтр Баттеруорта

Як відомо, смуговий фільтр можна одержати безпосередньою комбінацією низькочастотного й високочастотного фільтра при перекритті смуги пропущення фільтрів. Аналогічний ефект досягається й частотним перетворенням ФНЧ, яке в цьому випадку має вигляд:

$$p = s + 1/s$$
. (10.39)

Підставивши в (10.39) значення $p = jW$ й $s = jw$, одержимо:

$$W = \left[w^2 - 1\right]/w$$
,

$$w^2 - Ww - 1 = 0$$
. (10.40)

Корені рівняння (10.40):

$$(w)_{1,2} = W/2 \pm \sqrt{(W/2)^2 + 1}$$
. (10.41)

38.1 Розщеплення спектра

При $W = 0$ маємо $w = \pm 1$, тобто центр смуги пропущення ФНЧ (від $-W_c$ до $+W_c$) розщеплюється на два (як і має бути, для смугових фільтрів) і зміщається в точки $w = \pm 1$.

Підставивши в (10.41) граничну частоту $W_c = 1$ нормованого ФНЧ, визначаємо граничні частоти нормованого смугового фільтра у вигляді пари сполучених частот:

$$\mathrm{w}_1 = \pm 0,618,$$
$$\mathrm{w}_2 = \pm 1,618.$$

Сутність проведеного перетворення наочно видна на рисунку 10.8. Ширина смуги пропущення нормованого СмФ рівна 1.

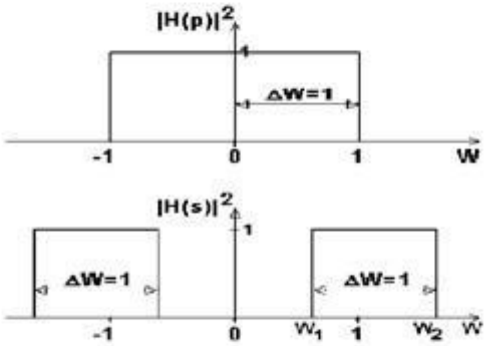


Рисунок 10.8 – Розщеплення смуги

Отримане перетворення можна поширити на смуговий фільтр із ненормованими частотами $\omega_н$ и $\omega_в$.

Введемо поняття геометричної середньої частоти фільтра ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_н \omega_в}. \quad (10.42)$$

Ширина смуги пропущення СмФ зв'язана (рисунок 10.8) із граничною частотою ФНЧ співвідношенням:

$$\Delta\omega = \omega_в - \omega_н = \omega_c = \omega_н.$$

У частках середньої геометричної частоти:

$$W_н = (\omega_в - \omega_н) / \omega_0 = W_c. \quad (10.43)$$

Заміняючи в (10.42-10.43) значення $\omega_в$ на довільну частоту ω й підставляючи в (10.43) значення $\omega_н = \omega \cdot \omega_o^{\ 2}$ з (10.42), одержуємо довільну частоту W:

$$W = (\omega - \omega_н) / \omega_0 = \omega / \omega_0 \text{ -}\omega_н / \omega_0. \quad (10.44)$$

Звідси, у виразенні (10.1.1) замість нормованої частоти $W = \omega / \omega_c$ можна застосувати функцію частоти смугового фільтра $w(\omega)$:

$$w(\omega) = (\omega^2 - \omega_o^2) / [\omega(\omega_в - \omega_н)]$$
,

або, підставляючи (10.42) замість ω_0:

$$w(\omega) = (\omega^2 - \omega_н\omega_в) / [\omega(\omega_в - \omega_н)] \quad (10.45)$$

Тим самим передавальна функція ФНЧ виражається в одиницях, які дозволяють після застосування перетворення (10.39) використовувати для завдання необхідні граничні частоти $\omega_н$ и $\omega_в$ смугового фільтра.

Приклад розрахунків смугового фільтра Баттеруорта.

Технічне завдання:

- Крок дискретизації даних $\Delta t = 0,0005$ *сек*.
- Частота Найквіста $f_N = 1/2\Delta t = 1000$ *Гц*, $\omega_N = 6,283 \cdot 10^3$ *рад*.
- Нижня гранична частота смуги пропущення: $f_н = 340$ *Гц*, $\omega_н = 2,136 \cdot 10^3$ *рад*.
- Верхня гранична частота смуги пропущення: $f_н = 470$ *Гц*, $\omega_н = 2,953 \cdot 10^3$ *рад*.
- Крутість зрізів у децибелах на октаву: $K_p = 45$.

Розрахунки параметрів:

1. Порядок фільтра по формулі (10.3): $N = K_p / 6 = 45/6 = 7,5$.

Для розрахунків приймаємо $N = 8$.

2. Будуємо графік функції $H(\omega) = \sqrt{1/(1 + w(\omega)^{2N})}$ з використанням вираження (10.45).

Передавальна характеристика фільтра наведена на рисунку 10.9.

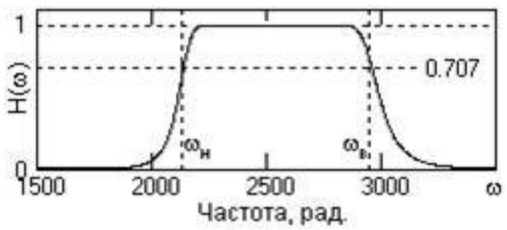


Рисунок 10.9 – Графік функції $H(\omega)$

3. Деформовані частоти по формулі (10.5):

$$\omega_{dн} = 2,366 \cdot 10^3\ рад.\quad \omega_{dв} = 3,64 \cdot 10^3\ рад.\quad \omega_{d0} = 2,934 \cdot 10^3$$.

38.2 Смуговий фільтр на s-площині

З урахуванням деформації частот, приймаємо $p\ = jw = j(\omega^2 - \omega_{dн}\omega_{dв}) / [\omega(\omega_{dв} - \omega_{dн})]$, $s = j\omega$ і заміняємо $\omega = s / j$ у виразі p:

$$p = (s^2 + \omega_{dн}\omega_{dв}) / [s(\omega_{dв} - \omega_{dн})]$$,

$$s^2 - p(\omega_{dв} - \omega_{dн})s + \omega_{dн}\omega_{dв} = 0$$. (10.46)

Корені рівняння (10.46) визначають місце розташування полюсів СмФ:

$$s = s^* = p(w_{dв} - w_{dн}) / 2 \pm \sqrt{[p(\omega_{dв} - \omega_{dн}) / 2]^2 - \omega_{dв}\omega_{dн}}$$. (10.47)

Рівняння (10.47) показує розщеплення кожного p-полюса, обумовлених виразом (10.15), на два комплексно сполучені полюси s-площини, добуток яких буде давати речовинні біквадратні блоки в s-площині. При цьому слід урахувати та обставину, що стійкому рекурсивному фільтру на z-площині повинні відповідати полюси тільки однієї (лівої) половини p- і s - площин.

38.3 Передавальна функція

При застосуванні перетворення (10.39) до передавальної функції в поліноміальній формі (10.1.11), одержуємо:

$$H(p) = G\prod_{m=1}^{N} 1 / (p - p_m) \Leftrightarrow G\prod_{m=1}^{N} s / (s^2 - p_m s + 1) = H(s)$$, (10.48)

Вираз (10.48) не вимагає знаходження полюсів, тому що вони вже відомі й визначаються виразом (10.47). З урахуванням цього функція $H(s)$ може бути записана з об'єднанням у біквадратні блоки комплексно сполучених полюсів з речовинними коефіцієнтами:

$$H(s) = G\prod_{m-1}^{N} s/\left[(s-s_m)(s-s^*{}_m)\right] = G\prod_{m-1}^{N} s/\left(s^2+a_m s+g_m\right)$$

, (10.49)

де значення a_m й g_m можуть бути визначені безпосередньо по полюсих (10.47):

$$a_m = -2\operatorname{Re} s_m,$$
$$g_m = (\operatorname{Re} s_m)^2 + (\operatorname{Im} s_m)^2 = |s_m|^2.$$

(10.50)

Продовження розрахунків.

4. Полюси фільтра на одиничному колі в p-площини:

$$p_n = j\cdot\exp[j\cdot\pi(2n-1)/2N], \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

.

Розташування полюсів наведене на рисунку 10.10.

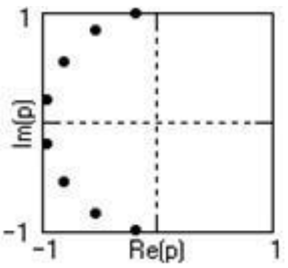


Рисунок 10.10 – Положення полюсів

5. Полюси в лівій половині s-площини, $n = 1, 2, \ldots, 2N$

(наведені на рисунку 10.11):

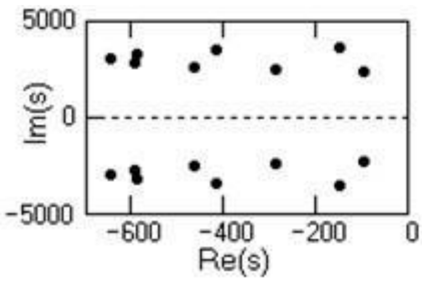


Рисунок 10.11 – Полюси в лівій половині s-площини

$$s_n := p_{int\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{(\omega_{d\text{в}} - \omega_{d\text{н}})}{2} + (-1)^{n-1} \cdot \sqrt{\left[p_{int\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{(\omega_{d\text{в}} - \omega_{d\text{н}})}{2}\right]^2 - \omega_{d\text{в}} \cdot \omega_{d\text{н}}}.$$

6. За отриманими значенням полюсів обчислюємо коефіцієнти a_m й g_m (10.50), $m = n$.

$$a_m = 196.8,\ 300.4,\ 581.2,\ 834.5,\ 930.5,\ 1188,\ 1196,\ 1304.$$

$$g_m = 5.64 \cdot 10^6,\ 1.314 \cdot 10^7,\ 5.997 \cdot 10^6,\ 1.236 \cdot 10^7,\ 6.742 \cdot 10^6,\ 1.1 \cdot 10^7,\ 7.895 \cdot 10^6,\ 9.39 \cdot 10^6.$$

По наведеному прикладу можна помітити, що при використанні ненормованих частот ω, досить істотних по своїй величині, значення s-полюсів і, відповідно, величини коефіцієнтів a_m і g_m мають більші порядки, що небажане для подальших розрахунків і може приводити до появи погрішностей при обмеженні розрядності. Для виключення цього фактора значення полюсів sn рекомендується нормувати на середню геометричну частоту:

$$s_n = s_n / \omega_o.$$

Продовження розрахунків.

6'. Значення коефіцієнтів a_m і g_m (10.50), обчислені за нормованими значенням s_n.

$$a_m = 0.067,\ 0.102,\ 0.198,\ 0.284,\ 0.317,\ 0.405,\ 0.407,\ 0.444.$$

$$g_m = 0.655,\ 1.527,\ 0.697,\ 1.436,\ 0.783,\ 1.277,\ 0.917,\ 1.091.$$

Коефіцієнт γ білінійного перетворення для ненормованих значень і полюсів sn має класичну форму: $\gamma = 2 / \Delta t$. Відповідно, для нормованих значень: $\gamma = 2 / (\Delta t \omega_0)$. Після білінійного z-перетворення виразу (10.49), одержуємо:

$$H(z) = G \prod_{m=1}^{N} G_m (1 - z^2) / (1 - b_m z + c_m z^2)$$. (10.51)

$$G_m = 1 / (\gamma^2 + a_m + g_m \gamma^{-1})$$. (10.52)

$$b_m = 2 \cdot G_m (\gamma - g_m \gamma^{-1})$$. (10.53)

$$c_m = G_m (\gamma - a_m + g_m \gamma^{-1})$$. (10.54)

Продовження розрахунків (по нормованих полюсих s_n).

7. Значення коефіцієнта γ: $\gamma = 1.363$.

8. Значення G_m по (10.52): $G_m = 0.523, 0.387, 0.483, 0.37, 0.444, 0.37, 0.409, 0.384$.

9. Значення b_m по (10.53): $b_m = 0.924, 0.188, 0.823, 0.23, 0.7, 0.315, 0.565, 0.432$.

10. Значення c_m по (10.54): $c_m = 0.93, 0.921, 0.809, 0.789, 0.719, 0.701, 0.666, 0.659$.

11. Загальний нормувальний множник G: $G = 1,264 \cdot 10^{-3}$.

12. Заключна передавальна функція:

$$H(\omega) = G \prod_{m=1}^{N} \frac{G_m \cdot \left[1 - (\exp(-j \cdot \omega \cdot \Delta t))^2\right]}{1 - b_m \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \Delta t) + c_m \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot \Delta t)^2}$$

При побудові графіка даної функції можна переконатися, що вона повністю відповідає рисунку 10.9.

13. Рівняння однієї секції фільтра:

$$y_{m,k} = G_m \cdot \left(y_{m-1,k} - y_{m-1,k-2}\right) + b_m y_{m,k-1} - c_m y_{m,k-2}$$
.

Нормуванням $H(z)$ до 1 на геометричній середній частоті фільтра визначають загальний множник G:

$$G = 1 / H(\exp(-j\Delta t\omega_o))$$
. (10.55)

Якщо застосувати зворотне частотне перетворення $p = s(\omega_в - \omega_н) / (s^2 + \omega_в\omega_н)$, то в результаті буде отриманий смуговий загороджувальний фільтр.

Розділ 39 Фільтри Чебишева

39.1 Фільтри першого роду

Фільтри Чебишева з пульсаціями передавальної функції в смузі пропущення й гладким загасанням у смузі придушення називають фільтрами Чебишева першого роду, на відміну від інверсних фільтрів Чебишева (другого роду). Апроксимаційна формула фільтрів Чебишева першого роду визначається виразом:

$$\left|H(W)\right|^2 = 1 / \ [1 + \delta_N{}^2 T_N{}^2(W)]$$
, (10.56)

де $T_N(W)$ - многочлен Чебишева N-го порядку:

$$T_N(W) = \begin{cases} \cos\left(n\arccos(W)\right), & W \le 1; \\ ch\left(n\ arcch(W)\right), & W > 1. \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$
(10.57)

Критерій наближення Чебишева, який широко використовується не тільки в теорії фільтрів - мінімум максимальної помилки наближення (мінімаксне наближення). Відповідно до цього наближення параметри передавальної функції підбираються таким чином, щоб у смузі передачі АЧХ спостерігалися рівнохвильові пульсації коефіцієнта передачі, які є "платою" за підвищення крутості зрізу фільтра.

Поліноми Чебишева обчислюються по рекурентній формулі:

$$T_n(W) = 2W\ T_{n-1}(W) - T_{n-2}(W), \quad (10.58)$$

$$T_1(W) = W,$$
$$T_0(W) = 1.$$

Для ФНЧ при $W = \omega / \omega_p$ має місце $T_n(1) = 1,\ |H(W)|^2 = 1/(1+\delta^2)$ й значенням δ задається коефіцієнт пульсацій у смузі передачі. При завданні смуги за рівнем A_p значення δ розраховується аналогічно фільтру Баттеруорта.

Відповідно, при завданні A_s на границі смуги придушення, маємо:

$$1/(1+\delta^2 T_N{}^2(\omega_s/\omega_p)) = A_s^2. \quad (10.59)$$

$$N = arcch[\sqrt{1/A_S^2 - 1}/\delta]/arcch(\omega_s/\omega_p). \quad (10.60)$$

Подальші розрахунки ідентичні розрахункам фільтрів Баттеруорта, так само як і частотні перетворення фільтрів ФНЧ у ФВЧ і СмФ.

39.2 Фільтри другого роду

Для фільтрів Чебишева другого роду, із гладкою передатною характеристикою в зоні пропущення й рівнохвильовими пульсаціями в зоні придушення, використовується функція:

$$|H(W)|^2 = 1/[1+\omega^2\left(T_N{}^2(W_s)/T_N{}^2(W_s/W)\right)], \quad (10.61)$$

де $W = \omega/\omega_p$, $W_s = \omega_s/\omega_p$. Умова завдання параметра δ залишається без змін. На границі смуги придушення при $\omega = \omega_s:\ 1+\delta^2 T_N{}^2(\omega_s/\omega_p) = 1/A_s^2$, звідки значення N також визначається аналогічно фільтру першого роду. Подальший порядок розрахунків фільтрів Чебишева другого роду не відрізняється від фільтрів першого роду.

Тема 11 Цифрові фільтри зі скінченною імпульсною характеристикою

Розділ 40 Визначення фільтрів з СІХ

40.1 Порядок розрахунків фільтрів з СІХ

Передавальна функція фізично реалізованого цифрового фільтра з кінцевою імпульсною характеристикою (СІХ-Фільтра) може бути представлена у вигляді

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \qquad (11.1).$$

При заміні у виразі (11.1) $z = e^{j\omega}$ одержимо частотну характеристику СІХ-фільтра у вигляді

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \qquad (11.2),$$

де $A(\omega) = \left| H(e^{j\omega}) \right|$ - **амплітудно-частотна характеристика (АЧХ)** фільтра,

$\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega})$ - фазо-**частотна характеристика (ФЧХ)** фільтра.

Фазова затримка фільтра визначається як

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} \qquad (11.3).$$

Групова затримка фільтра визначається як

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \qquad (11.4).$$

40.2 Властивості фільтрів з СІХ

Відмінною рисою СІХ-Фільтрів є можливість реалізації в них постійних фазової й груповий затримок, тобто лінійної ФЧХ

$$\varphi(\omega) = -\alpha\omega \qquad (11.5),$$

де α - константа. При дотриманні цієї умови сигнал, що проходить через фільтр, не спотворює своєї форми.

Для висновку умов, що забезпечують лінійну ФЧХ запишемо частотну характеристику СІХ-Фільтра з врахуванням (11.5)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{-\alpha\omega}$$

(11.6).

Дорівнюючи дійсні й уявні частини цієї рівності, одержимо

$$\left|H(e^{j\omega})\right| \cos(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n),$$
$$\left|H(e^{j\omega})\right| \sin(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)$$

(11.7).

Розділивши друге рівняння на перше, одержимо

$$\frac{\sin(\alpha\omega)}{\cos(\alpha\omega)} = tg(\alpha\omega) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n)}$$

(11.8).

Остаточно можна записати

$$tg(\alpha\omega) = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n)\cos(\omega n)}$$

(11.9).

Це рівняння має два розв'язки. Перше при $\alpha = 0$ відповідає рівнянню

$$0 = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n)\cos(\omega n)}$$

(11.11).

Це рівняння має єдиний розв'язок, що відповідає довільному h(0) (sin(0)=0), і h=0 при n>0. Цей розв'язок відповідає фільтру, імпульсна характеристика якого має єдиний ненульовий відлік у початковий момент часу. Такий фільтр на представляє практичного інтересу.

Інший розв'язок знайдемо для $\alpha \neq 0$. При цьому перехресно перемноживши чисельники й знаменники в (11.8) одержимо

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n)\sin(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)\cos(\alpha\omega)$$

Звідси маємо

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega(\alpha - n)) = 0$$

(11.12).

Оскільки це рівняння має вигляд ряду Фур'є, тоее його розв'язання, якщо воно існує, є єдиним.

Легко помітити, що розв'язок цього рівняння повинне задовольняти умовам

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

(11.13),

$$h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \le n \le N-1$$

(11.14).

З умови (11.13) випливає, що для кожного порядку фільтра N існує тільки одна фазова затримка α, при якій може досягатися стругаючи лінійність ФЧХ. З умови (11.14) випливає, що імпульсна характеристика фільтра повинна бути симетричною щодо точки $n = \frac{N-1}{2}$ для непарного N, і щодо середньої точки інтервалу $\left[\frac{N-2}{2}; \frac{N}{2}\right]$ (рисунок 11.1).

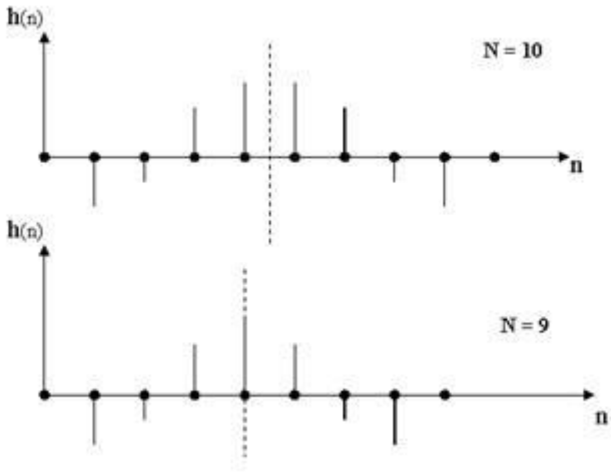


Рисунок 11.1 – Імпульсна характеристика фільтра

Частотну характеристику такого фільтра (для непарного N) можна записати у вигляді

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n)e^{-j\omega n} + h(\frac{N-1}{2})e^{-j\omega (N-1)/2} + \sum_{n=(N+1)/2}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

(11.15).

Робимо в другій сумі заміну m=N-1-n.

Оскільки h(n)=h(N-1-n), то дві суми можна об'єднати

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega (N-1)/2}[\sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n)(e^{j\omega((N-1)/2-n)} + e^{-j\omega((N-1)/2-n)}) + h(\frac{N-1}{2})] =$$

$$= e^{-j\omega (N-1)/2}[\sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n)\cos(\omega((N-1)/2-n)) + h(\frac{N-1}{2})]$$

(11.17).

Підставивши $m = \frac{N-1}{2} - n$, одержимо

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega (N-1)/2}[\sum_{m=0}^{(N-1)/2} 2h(\frac{N-1}{2} - m)\cos(\omega m) + h(\frac{N-1}{2})]$$

(11.18).

Якщо позначити

$$a(0) = h(\frac{N-1}{2}),$$

$$a(m) = 2h(\frac{N-1}{2} - m)$$

(11.19),

те остаточно можна записати

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{m=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos(\omega m)$$

(11.20).

Таким чином, для фільтра з лінійної ФЧХ маємо

$$A(\omega) = \sum_{m=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos(\omega m),$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega = -\alpha\omega$$

(11.21).

Для випадку парного N аналогічно будемо мати

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=N/2}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

(11.22).

Роблячи заміну в другій сумі $m = N-1-n$, одержимо

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{m=0}^{N/2-1} h(N-1-m)e^{-j\omega(N-1-m)} =$$

$$= e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)(e^{j\omega((N-1)/2-n)} + e^{-j\omega((N-1)/2-n)})$$

$$= e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n)\cos(\omega(N/2 - n - \frac{1}{2}))$$

(11.23).

Роблячи заміну $m = \frac{N}{2} - n$, одержимо

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{m=1}^{N/2} 2h(\frac{N}{2} - m)\cos(\omega(m - \frac{1}{2}))$$

(11.24).

Позначивши

$$b(n) = 2h(\frac{N}{2} - n)$$

(11.25),

будемо остаточно мати

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{m=1}^{N/2} b(n)\cos(\omega(m-\frac{1}{2}))$$
(11.26).

Таким чином, для СІХ-Фільтра з лінійної ФЧХ і парним порядком N можна записати

$$A(\omega) = \sum_{m=1}^{N/2} b(n)\cos(\omega(m-\frac{1}{2})),$$
$$\varphi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega = -\alpha\omega$$
(11.27).

Надалі, для простоти будемо розглядати тільки фільтри з непарним порядком.

Розділ 41 Методи розрахунків фільтрів з СІХ

41.1 Метод зважування(Вікна: прямокутне, Хемінга, Кайзера)

При синтезі передавальної функції фільтра вихідними параметрами, як правило, є вимоги до частотної характеристики. Існує багато методик синтезу СІХ-фільтрів. Розглянемо деякі з них.

Оскільки частотна характеристика будь-якого цифрового фільтра є періодичною функцією частоти, те її можна представити у вигляді ряду Фур'є

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$
(11.28),

де коефіцієнти ряду Фур'є рівні

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega$$
(11.29).

Видно, що коефіцієнти ряду Фур'є h збігаються з коефіцієнтами імпульсної характеристики фільтра. Тому, якщо відомо аналітичний опис необхідної частотної характеристики фільтра, то по ньому можна легко визначити коефіцієнти імпульсної характеристики, а по них – передавальну функцію фільтра. Однак на практиці це не реалізоване, оскільки імпульсна характеристика такого фільтра має нескінченну довжину. Крім того, такий фільтр фізично не реалізуємо оскільки імпульсна характеристика починається в $-\infty$, і ніяка кінцева затримка не зробить це фільтр фізично реалізованим.

Одним з можливих методів одержання СІХ-фільтра, що апроксимує задану частотну характеристику полягає в усіканні нескінченного ряду Фур'є й імпульсної характеристики фільтра, приймаючи, що $h(n)=0$ при $|n| > \frac{N-1}{2}$. Тоді

$$H(z) = h(0) + \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \left(h(-n)z^{n} + h(n)z^{-n}\right) \qquad (11.30).$$

Фізична реалізуємість передавальної функції H(z) може бути досягнута шляхом множення H(z) на $z^{-(N-1)/2}$.

$$H(z) = z^{-(N-1)/2} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{a_n}{2}\left(z^{n} + z^{-n}\right) \qquad (11.31),$$

Де

$$a_0 = h(0),$$
$$a_n = 2h(n) \qquad (11.32).$$

При такій модифікації передавальної функції амплітудна характеристика фільтра не змінюється, а групова затримка збільшується на постійну величину $\frac{N-1}{2}$.

Як приклад розрахуємо СІХ-фільтр низьких частот із частотною характеристикою виду

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & при\ |\omega| \le \omega_c \\ 0, & при\ \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases} \qquad (11.33).$$

Відповідно до (11.29) коефіцієнти імпульсної характеристики фільтра описуються виразом

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{n\pi}\sin(\omega_c n) \qquad (11.34).$$

Тепер з (11.31) можна одержати вираз для передавальної функції

$$H(z) = z^{-(N-1)/2} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{a_n}{2}(z^n + z^{-n})$$
(11.35),

де

$$a_0 = h(0),$$
$$a_n = 2h(n)$$
(11.36).

Амплітудні характеристики розрахованого фільтра для різних N представлені на рисунку 11.2.

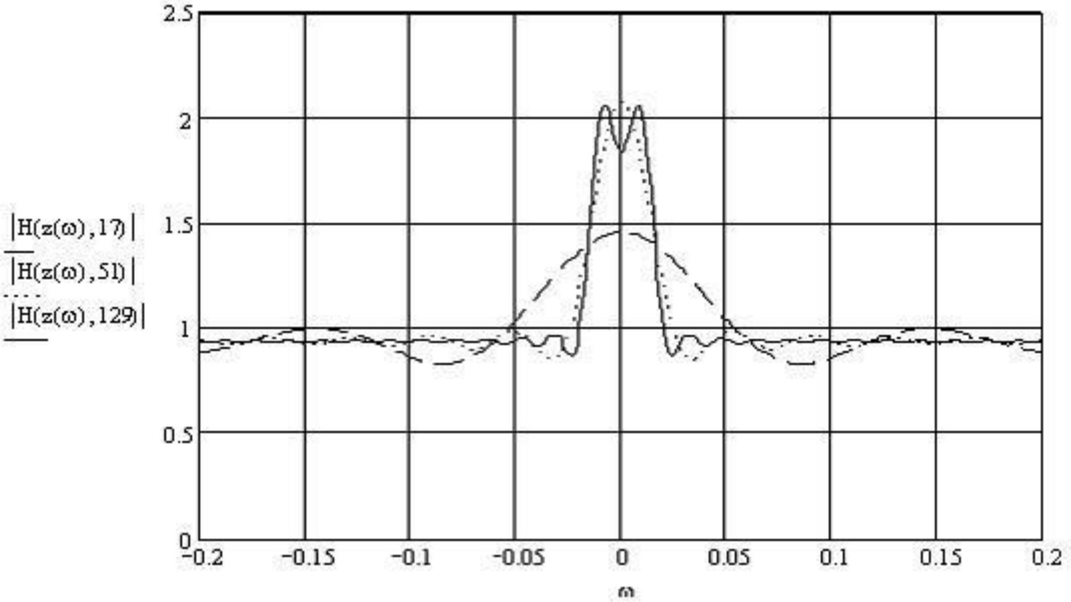


Рисунок 11.2 – Амплітудні характеристики

Пульсації в смугах пропускання й затримування відбуваються внаслідок повільної збіжності ряду Фур'є, яка, у свою чергу, обумовлена наявністю розриву функції $H(e^{j\omega})$ на частоті зрізу смуги пропускання. Ці пульсації відомі як **пульсації Гіббса**.

З рисунку 11.2 видно, що зі збільшенням N частота пульсацій росте, а амплітуда зменшується як на нижніх, так і на верхніх частотах. Однак амплітуда останньої пульсації в смузі пропускання й першої пульсації в смузі затримування залишаються практично незмінними. На практиці такі ефекти часто небажані, що вимагає відшукання шляхів зниження пульсацій Гіббса.

Усічену імпульсну характеристику h можна представити у вигляді добутку необхідної нескінченної імпульсної характеристики й деякої **функції вікна** w довжини n (рисунок 11.3).

$h(n) = h_d(n)w(n)$

(11.37).

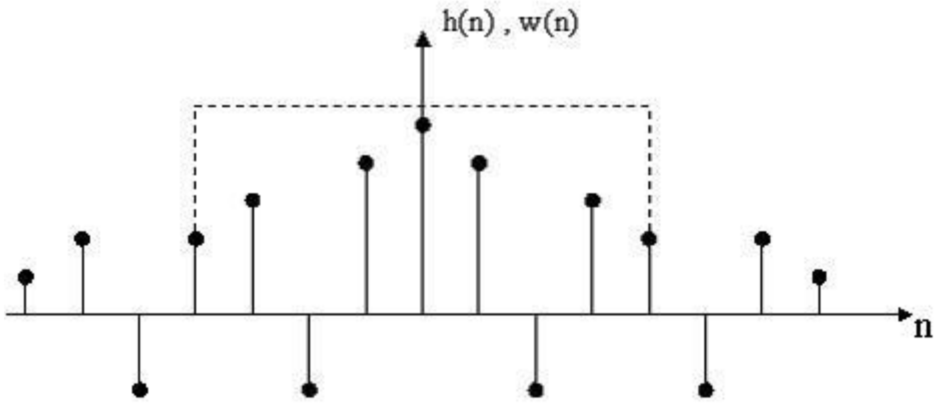


Рисунок 11.3 – Імпульсна характеристика та функція вікна

У розглянутому випадку простого усікання ряду Фур'є використовується **прямокутне вікно**

$$w(n) = \begin{cases} 1, & npu -\frac{N-1}{2} \le n \le \frac{N-1}{2} \\ 0, & npu \; |n| > \frac{N-1}{2} \end{cases}$$

(11.38).

У цьому випадку частотну характеристику фільтра можна представити у вигляді комплексної згортки

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\Omega})W(e^{j(\omega-\Omega)})d\Omega$$

(11.39).

Це значить, що $H(e^{j\omega})$ буде «розмитою» версією необхідної характеристики $H_d(e^{j\omega})$.

Завдання зводиться до відшукання функцій вікон, що дозволяють зменшити пульсації Гіббса при тій же вибірковості фільтра. Для цього необхідно спочатку вивчити властивості функції вікна на прикладі прямокутного вікна.

Спектр функції прямокутного вікна можна записати як

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{-j\omega n} = \frac{e^{j\omega(N-1)/2} - e^{-j\omega(N+1)/2}}{1-e^{-j\omega}} =$$

$$= \frac{e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

(11.40).

Спектр функції прямокутного вікна представлений на рисунку 11.4.

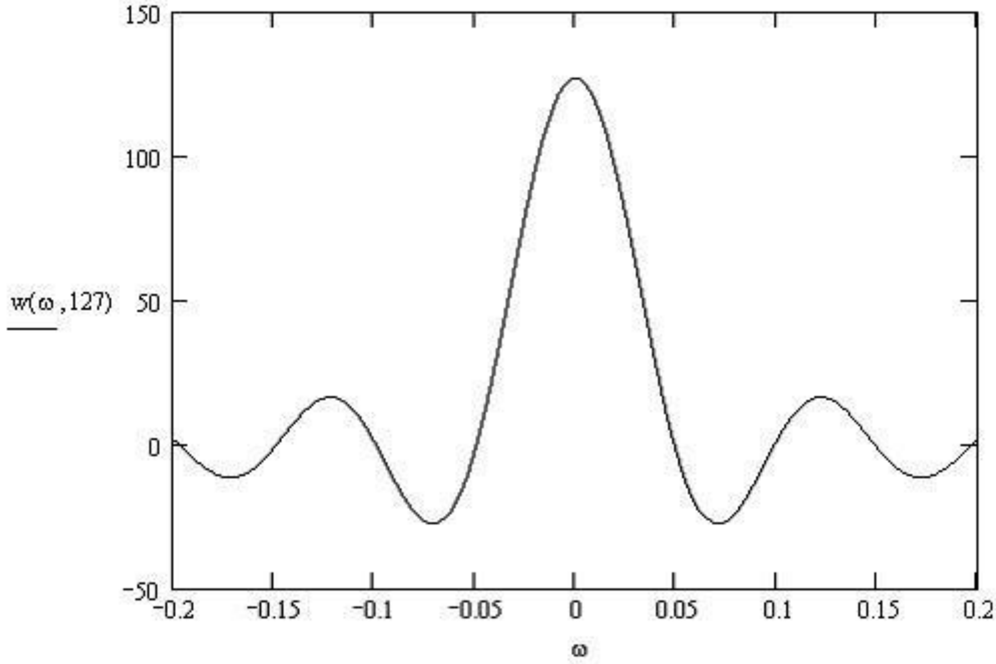


Рисунок 11.4 – Спектр функції прямокутного вікна

Оскільки $W_R(e^{j\omega}) = 0$ при $\omega = \frac{m2\pi}{N}$, те ширина головної пелюстки спектра виявляється рівною $4\pi/N$.

Наявність бічних пелюсток у спектрі функції вікна приводить до збільшення пульсацій Гіббса в АЧХ фільтра. Для одержання малих пульсацій у смузі пропускання й великого загасання в смузі затримування необхідно, щоб площа, обмежена бічними пелюстками, становила малу частку від площі, обмеженої головною пелюсткою.

У свою чергу, ширина головної пелюстки визначає ширину перехідної зони результуючого фільтра. Для високої вибірковості фільтра ширина головної пелюстки повинна бути по можливості малої. Як видне з вищевикладеного, ширина головної пелюстки зменшується зі збільшенням порядку фільтра.

Таким чином, властивості підходящих функцій вікна можна сформулювати в такий спосіб:

- функція вікна повинна бути обмежена в часі;

- спектр функції вікна повинен щонайкраще апроксимувати функцію, обмежену по частоті, тобто мати мінімум енергії за межами основної пелюстки;

- ширина основної пелюстки спектра функції вікна повинна по можливості малої.

Найбільше часто використовують наступні функції вікон:

1. Прямокутне вікно. Розглянуте вище.

2. Вікно Хэммінга (Hamming).

$$w_H(n) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)\cos(\frac{2\pi n}{N-1}), & npu\ |n| \le \frac{N-1}{2} \\ 0, & npu\ |n| > \frac{N-1}{2} \end{cases} \qquad (11.41),$$

де $\alpha = 0.54$.

При $\alpha = 0.5$ це вікно називається вікном Хенна (hanning).

3. Вікно Блекмана (Blackman).

$$w_B(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos(\frac{2\pi n}{N-1}) + 0.08\cos(\frac{4\pi n}{N-1}), & npu\ |n| \le \frac{N-1}{2} \\ 0, & npu\ |n| > \frac{N-1}{2} \end{cases} \qquad (11.42).$$

4. Вікно Бартлета (Bartlett)

$$w_{BR}(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} + 1, & npu\ -\frac{N-1}{2} \le n \le 0 \\ 1 - \frac{2n}{N-1}, & npu\ 0 \le n \le \frac{N-1}{2} \\ 0, & npu\ |n| > \frac{N-1}{2} \end{cases} \qquad (11.43).$$

Показники фільтрів, побудованих із застосуванням зазначених функцій вікон, зведено в таблицю 11.1.

Таблиця 11.1 – Показники фільтрів

Вікно	Ширина головної пелюстки	Коефіцієнт пульсацій, %		
		N=11	N=21	N=31
Прямокутне	$4\pi/N$	2.34	21.89	21.80
Хеннінга	$8\pi/N$	2.62	2.67	2.67
Хеммінга	$8\pi/N$	1.47	0.93	0.82
Блекмана	$12\pi/N$	0.08	0.12	0.12

Коефіцієнт пульсації визначається як відношення максимальної амплітуди бічної пелюстки до амплітуди головної пелюстки в спектрі функції вікна.

Для вибору необхідного порядку фільтра й найбільш підходящої функції вікна при розрахунках реальних фільтрів можна використовувати дані таблиці 11.2.

Таблиця 11.2 – Функції вікна

Вікно	Ширина перехідної смуги	Нерівномірність у смузі пропускання (дб)	Загасання в смузі загородження (дб)
Прямокутне	$0.9/N$	0.7416	21
Хеннинга	$3.1/N$	0.0546	44

Хеммінга	$3.3/N$	0.0194	53
Блекмана	$5.5/N$	0.0017	75

Як видно з таблиці 11.1, існує певна залежність між коефіцієнтом пульсацій і шириною головної пелюстки в спектрі функції вікна. Чим менше коефіцієнт пульсацій, тим більше ширина головної пелюстки, а значить і перехідної зони в АЧХ фільтра.

Для забезпечення малої пульсації в смузі пропускання доводиться вибирати вікно з підходящим коефіцієнтом пульсацій, а необхідну ширину перехідної зони забезпечувати підвищеним порядком фільтра N.

Цю проблему можна розв'язати за допомогою вікна, запропонованого Кайзером (Kaiser). Функція вікна Кайзера має вигляд

$$w_K(n) = \begin{cases} I_0(\beta)\big/ I_0(\alpha), & |n| \le \dfrac{N-1}{2} \\ 0, & |n| > \dfrac{N-1}{2} \end{cases} \qquad (11.44),$$

де α - незалежний параметр, $\beta = \alpha\sqrt{1-(2n/(N-1))^2}$, I_0 – функція Бесселя першого роду нульового порядку, обумовлена виразом

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k\right]^2 \qquad (11.45).$$

Привабливою властивістю вікна Кайзера є можливість плавної зміни коефіцієнта пульсацій від малих значень до більших, при зміні тільки одного параметра α. При цьому як і для інших функцій вікон ширина головної пелюстки може регулюватися порядком фільтра N.

Основними параметрами, що задаються при розробці реального фільтра являються:

- смуга пропускання - ω_p;
- смуга загородження - ω_a;

- максимально припустима пульсація в смузі пропускання – A_p;
- мінімальне загасання в смузі затримування – $A_з$;
- частота дискретизації - ω_s.

Ці параметри ілюструються на рисунку 11.5. При цьому максимальна пульсація в смузі пропускання визначається як

$$A_p = 20\lg\frac{1+\delta}{1-\delta} \qquad (11.46),$$

а мінімальне загасання в смузі затримування як

$$A_a = -20\lg\delta \qquad (11.47).$$

Порівняно проста процедура розрахунків фільтра з вікном Кайзера містить у собі наступні етапи:

1. Визначається імпульсна характеристика фільтра h за умови, частотна характеристика є ідеальною

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & при\ |\omega| \le \omega_c \\ 0, & при\ \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases} \qquad (11.48),$$

де $\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_a}{2}$ (11.49).

2. Вибирається параметр δ як

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \qquad (11.50),$$

де $\delta_1 = 10^{-0.05A_a}$, $\delta_2 = \frac{10^{0.05A_p}-1}{10^{0.05A_p}+1}$ (11.51).

3. Обчислюється дійсне значення A_a й A_p по формулах (11.46), (11.47).

4. Вибирається параметр α як

$$\alpha = \begin{cases} 0, & A_a \le 21 \\ 0.5842(A_a - 21)^{0.4} + 0.07886(A_a - 21), & 21 \le A_a \le 50 \\ 0.1102(A_a - 8.7), & A_a > 50 \end{cases}$$

(11.52).

5. Вибирається параметр D як

$$D = \begin{cases} 0.9222, & A_a \le 21 \\ (A_a - 7.95)\big/14.36, & A_a > 21 \end{cases}$$

(11.53).

6. Вибирається найменше непарне значення порядку фільтра з умови

$$N \ge \frac{\omega_s D}{\omega_a - \omega_p} + 1$$

(11.54),

де ω_s – частота дискретизації.

7. Записується вираз для функції вікна Кайзера з урахуванням знайдених параметрів α і N.

8. Записується вираз для передатної функції фільтра у вигляді

$$H_K(z) = z^{-(N-1)/2} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{a_n}{2}(z^n + z^{-n})$$

(11.55),

де
$$a_0 = w_K(0)h(0),$$
$$a_n = 2w_K(n)h(n)$$
(11.56).

41.2 Метод частотної вибірки

Формули для розрахунків імпульсних характеристик фільтрів різних типів представлено в таблиці 11.3.

Таблиця 11.3 – Формули для розрахунків імпульсних характеристик фільтрів

Тип фільтра	$h(n), n \neq 0$	$h(0)$
Фільтр низьких частот	$\frac{1}{n\pi}\sin(\omega_c n)$	$2f_c$
Фільтр високих частот	$-\frac{1}{n\pi}\sin(\omega_c n)$	$1-2f_c$
Смуговий фільтр	$\frac{1}{n\pi}\sin(\omega_2 n)-\frac{1}{n\pi}\sin(\omega_1 n)$	$2(f_2-f_1)$
Загороджувальний фільтр	$\frac{1}{n\pi}\sin(\omega_1 n)-\frac{1}{n\pi}\sin(\omega_2 n)$	$1-2(f_2-f_1)$

Тут f_c, f_1, f_2 - нормовані частоти країв смуг пропущення або загородження.

Для забезпечення необхідного якості роботи фільтра необхідно не тільки знайти необхідну передавальну функцію, але й оцінити достатню розрядність вхідного й вихідного сигналу, а також коефіцієнтів фільтра.

Оскільки АЧХ фільтра нормуються так, щоб при всіх значеннях частоти модуль передавальної функції фільтра не перевищував одиниці, то з теореми Парсеваля

$$\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) = \frac{T}{\pi}\int_0^{\pi/T}\left|H(e^{j\omega T})\right|^2 d\omega \qquad (11.57)$$

випливає, що

$$\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) < 1 \qquad (11.58),$$

Тобто,

$|h(m)| < 1$

(11.59).

Оскільки відліки імпульсної характеристики фільтра є коефіцієнтами його передавальної функції, то умова (11.59) означає, що коди всіх коефіцієнтів фільтра містять лише дробову частину й знаковий розряд і не містять цілої частини.

Кількість розрядів дробової частини коефіцієнтів фільтра визначається з умови задоволення передавальної функції фільтра із квантованими коефіцієнтами, заданих вимог по наближенню до еталонної передавальної функції з точними значеннями коефіцієнтів.

Абсолютні величини відліків вхідних сигналів фільтра звичайно нормовані так, що

$|x(n)| < 1$

(11.60).

Якщо аналіз проводиться для СІХ-Фільтра з лінійної ФЧХ, то алгоритм обчислення його вихідного сигналу може бути наступним

$$y(n) = \sum_{l=0}^{N-1/2-1} \tilde{b}_l (x(n-l) + x(n-N+1+l)) + \tilde{b}_{N-1/2} x(n - N - 1/2)$$

(11.61),

де $\tilde{b}_l$ - округлені до s_k коефіцієнти фільтра.

Цьому алгоритму відповідає структурна схема фільтра, представлена на рисунку 11.5.

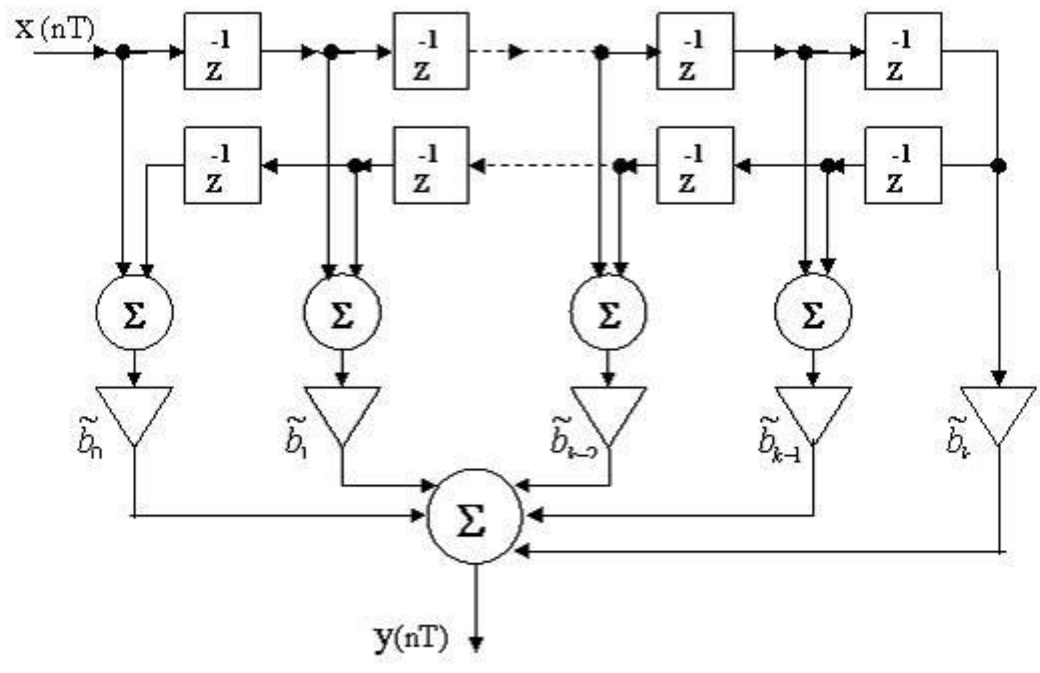


Рисунок 11.5 – Структурна схема фільтра

41.3 Метод проектування з минимаксной похибкою

Існують два способи реалізації цього алгоритму.

У першому випадку всі операції множення виконуються точно й округлення добутків відсутня. У цьому випадку розрядність добутків рівна $s_{in} + s_k$, де s_{in} – розрядність вхідного сигналу, а s_k – розрядність коефіцієнтів фільтра. У цьому випадку структурна схема фільтра, представлена на рисунку 11.5 точно відповідає реальному фільтру.

При другому способі реалізації алгоритму (11.61) кожний результат операції множення округляється, тобто добутки обчислюються з деякою похибкою. У цьому випадку необхідно змінити алгоритм (11.61) так, щоб урахувати погрішність внесену, округленням добутків

$$y(n) = \sum_{l=0}^{N-1/2-1} [\widetilde{b}_l (x(n-l) + x(n-N+1+l)) + \gamma_l(n)] + \\ + \widetilde{b}_{N-1/2} x(n - N - 1/2) + \gamma_{N-1/2}(n)$$

(11.62),

де $\gamma_l(n)$ - величини погрішностей обчислення відповідних добутків.

У цьому випадку на структурній схемі фільтра кожний множник повинен бути доповнений суматором точного добутку і похибки (рисунок 11.6).

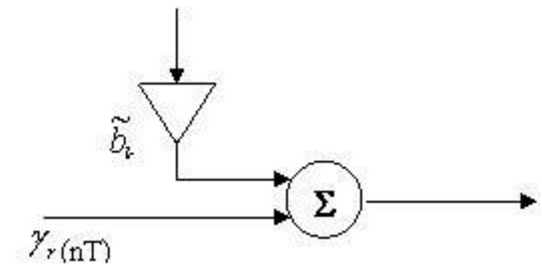


Рисунок 11.5 – Суматор

З (11.60) і (11.61) випливає, що

$$|y(n)| \le \sum_{l=0}^{N-1} |\widetilde{b}_l|$$

(11.63),

звідки випливає, що кількість розрядів для цілої частини коду вихідного сигналу фільтра $s_ц$ може бути визначене як

$$s_ц = \begin{cases} 0, & при \sum_{l=0}^{N-1} \left|\widetilde{b}_l\right| < 1, \\ \mathrm{int}(\log_2 \sum_{l=0}^{N-1} \left|\widetilde{b}_l\right|, & при \sum_{l=0}^{N-1} \left|\widetilde{b}_l\right| \geq 1 \end{cases}$$

(11.64).

нехай задана величина припустимої дисперсії шуму на виході фільтра $\sigma^2{}_{out}$. Як відомо, дисперсія шуму округлення вхідного сигналу $\sigma^2{}_{in}$ пов'язана з розрядністю вхідного сигналу як

$$\sigma^2{}_{in} = \frac{2^{-2s_{in}}}{12}$$

(11.65).

Якщо значення відліків вихідного сигналу фільтра обчислюються по першому способу (з точними значеннями добутків), то дисперсія вихідного шуму визначається як

$$\sigma^2{}_{out} = \sigma^2{}_{in} \sum_{l=0}^{N-1} \widetilde{b}_l{}^2$$

(11.66),

т.е. залежить від дисперсії шуму округлення вхідного сигналу й значень коефіцієнтів фільтра. Звідси можна знайти необхідну кількість розрядів вхідного сигналу як

$$s_{in} = \mathrm{int}(\frac{1}{2}\log_2(\frac{\sum_{l=0}^{N-1} \widetilde{b}_l}{12\sigma^2{}_{out}}))$$

(11.67).

За відомими значенням s_{in} і s_k можна визначити кількість розрядів, необхідне для дробової частини коду вихідного сигналу як

$$s_д = s_{in} + s_ц$$

(11.68).

Якщо значення відліків вихідного сигналу обчислюються по другому способу, коли кожний добуток округляється до $s_д$ розрядів, то дисперсію шуму округлення, створюваного кожним з множників можна виразити через розрядність добутку як

$$\sigma^2{}_m = \frac{2^{-2s_\partial}}{12}$$
(11.69).

З (11.62) випливає, що в цьому випадку дисперсія вихідного шуму фільтра визначається як

$$\sigma^2{}_{out} = \sigma^2{}_{in}\sum_{l=0}^{N-1}\widetilde{b}_l^{\,2} + \frac{N+1}{2}\sigma^2{}_m$$
(11.70).

При цьому потужність власних шумів фільтра повинна бути мала в порівнянні з потужністю шуму округлення вхідного сигналу

$$\sigma^2{}_{in}\sum_{l=0}^{N-1}\widetilde{b}_l^{\,2} >> \frac{N+1}{2}\sigma^2{}_m$$
,

Тобто, $$\frac{N+1}{2}\sigma^2{}_m = K\sigma^2{}_{in}\sum_{l=0}^{N-1}\widetilde{b}_l^{\,2}$$ (11.71),

де K<<1 (можна наприклад прийняти K=0.1). З (11.69)-(11.71) випливають формули для визначення необхідної розрядності вхідного сигналу й кількості розрядів для дробової частини вихідного сигналу

$$s_{in} = \mathrm{int}[\,\frac{1}{2}\log_2((1+K)\frac{\sum_{l=0}^{N-1}\widetilde{b}_l}{12\sigma^2{}_{out}})]$$
(11.72),

$$s_\partial = \mathrm{int}[\,\frac{1}{2}\log_2((\frac{N+1}{K2^{-2s_{in}+1}\sum_{l=0}^{N-1}\widetilde{b}_l})]$$
(11.73).

Необхідне значення дисперсії вихідного шуму фільтра, яка є вихідним параметром для обчислення всіх розрядностей, можна визначити виходячи із заданих значень динамічного діапазону вхідного сигналу фільтра DR_{in} і відношення сигнал-шум на виході фільтра SNR_{out}. Значення динамічного діапазону вхідного сигналу в децибелах визначається як

$$DR = 20\lg\frac{A_{\max}}{A_{\min}}$$
(11.74),

де A_{max} й A_{min} – максимальна й мінімальна амплітуди вхідного сигналу фільтра.

Відношення сигнал-шум на виході фільтра, виражене в децибелах, визначається як

$$SNR_{out} = 10\lg\frac{P_s}{P_n} \quad (11.75),$$

де $$P_s = \frac{A^2_{min}}{2} \quad (11.76)$$

визначає средньоквадратичне значення потужності вихідного синусоїдального сигналу фільтра з амплітудою A_{min}, а

$$P_n = \sigma^2_{out} \quad (11.77)$$

визначає потужність шуму на виході фільтра. З (11.75) і (11.76) при A_{max}=1 одержуємо вираз для дисперсії вихідного шуму фільтра

$$\sigma^2_{out} = \frac{1}{2}10^{-(DR_{out}+SNR_{out})/10} \quad (11.78).$$

Це значення дисперсії вихідного шуму фільтра може бути використане для обчислення розрядностей вхідного й вихідного сигналів фільтра.

Тема 12 Фільтри з нескінченою імпульсною характеристикою.

Розділ 12 Визначення фільтрів з НІХ

12.1 Порядок розрахунку фільтрів з НІХ

У даній главі розглядаються методи розрахунків цифрових фільтрів з нескінченними імпульсними характеристиками (НІХ- фільтрів) за умови, що фільтри є фізично реалізованими і, звичайно, стійкими. Для імпульсних характеристик таких фільтрів h справедливі наступні обмеження:

$$h(n)=0, \quad n<0 \tag{12.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\, h(n) \,| < \infty \tag{12.2}$$

Найбільш загальна форма запису z-перетворення імпульсної характеристики НІХ-фільтрів має вигляд

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}} \tag{12.3}$$

Тут принаймні один з коефіцієнтів a_i відмінний від нуля, причому відразу всі корені знаменника не могли в точності компенсуватися коренями чисельника. Дійсно, розглянемо, наприклад, фільтр із z-перетворенням імпульсної характеристики

$$H(z)=\frac{(1-z)^{-8}}{(1-z^{-1})} \tag{12.4}$$

задовольняючим загальній формулі (12.3). Тому що корінь *z = 1* знаменника компенсується коренем *z* = 1 чисельника, те фактично функція H(z) являє собою поліном від z-1 з кінцевим числом членів, так що послідовність *h*(*n)* буде відповідати СІХ-фільтру.

Фільтр із передавальною функцією виду (12.3) має, загалом кажучи, кінцеве число нулів (*M*) і полюсів *(N).* Нулі *H*(*z*) можуть розташовуватися на всієї z-площині, але полюси H(z) відповідно до умови стійкості фільтра обов'язково повинні розміщатися усередині кола одиничного радіуса. У більшості випадків, особливо при розрахунках цифрових фільтрів по характеристиках аналогових фільтрів, число нулів (M) не перевищує числа полюсів ***(N).*** Системи, що задовольняють цій умові, називаються системами N-***Го*** порядку. При ***M*** > ***N*** порядок системи стає невизначеним. У цьому випадку можна вважати, що передавальна функція H(z) відповідає послідовному з'єднанню системи N-***го*** порядку й СІХ-фільтра (***M*** — N)-го порядку. При розгляді всіх методів розрахунків фільтрів у даній главі припускається, що $M \le N$.

На відміну від СІХ-фільтрів стійкі, фізично реалізовані НІХ-фільтри не мають строго лінійну фазову характеристику (за винятком часткового випадку, коли всі полюси ***H(z)*** розміщаються на одиничному колі). Для НІХ-фільтрів ця умова означає, що кожному полюсу передавальної функції ***H(z),*** розташованому усередині одиничного кола (модулі цих полюсів менше 1), повинен відповідати дзеркально відображений полюс поза одиничним колом, тому такий фільтр буде нестійким. У зв'язку із цим при розрахунках НІХ-фільтрів завжди доводиться розглядати апроксимацію заданих і амплітудної, і фазової характеристик. Існує, щоправда, спеціальний вид НІХ-фільтрів з рівномірною амплітудною характеристикою, у яких при змінах положення нулів і полюсів міняється лише фазова характеристика. Фільтри такого виду називають всепроникними колами. Для того, щоб коло було всепроникним, необхідно, щоб кожному полюсу її передавальної функції ***H(z)*** у точці $z = re^{j\theta}$ відповідав нуль у точці $z = (1/r)e^{j\theta}$, причому для дійсних послідовностей ***h(n)*** і полюси, і нулі повинні мати комплексно сполучені пари. Типове розташування полюсів і нулів для всепроникного фільтра 2-го порядку показано на рис 12.1

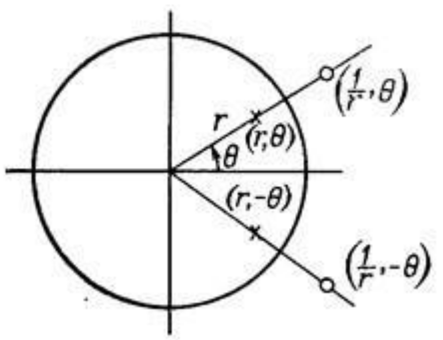


Рисунок 12.1 – Розташування нулів і полюсів всепроникного фільтра 2-го порядку.

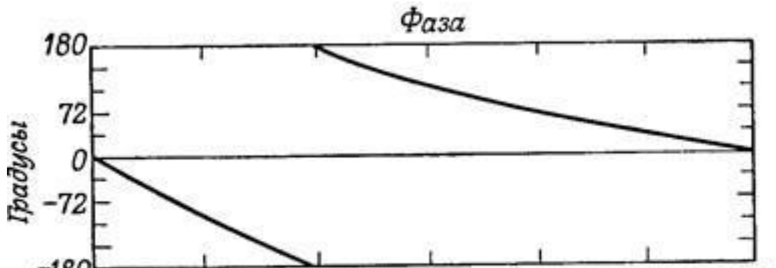


Рисунок 12.2 – Фазова характеристика всепроникного фільтра 2-го порядку

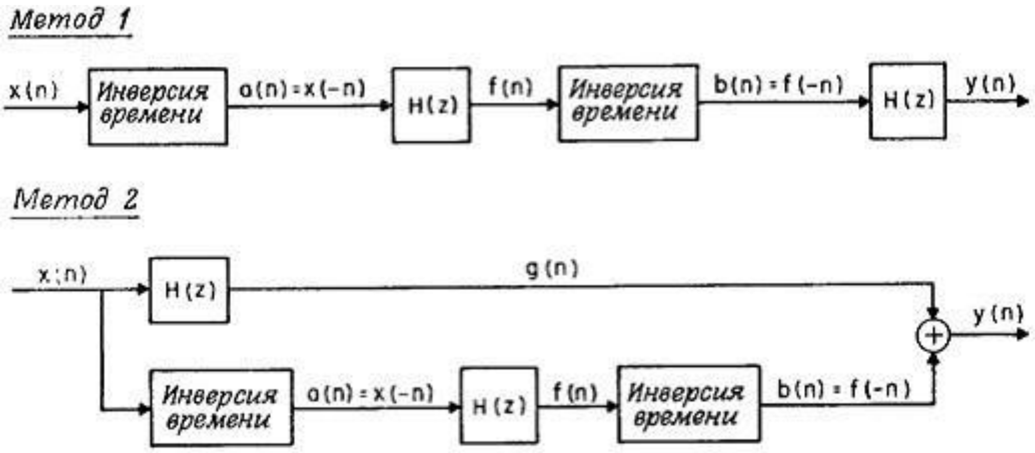


Рисунок 12.3 – Два методи побудови НІХ-фільтрів з нульовою фазовою характеристикою

Передавальна функція цього фільтра рівна

$$H(z)=\frac{\left[z-(1/r)e^{j\theta}\right]\left[z-(1/r)e^{-j\theta}\right]}{(z-re^{j\theta})(z-re^{-j\theta})} \tag{12.5}$$

Її можна перетворити до виду

$$H(z)=\frac{[z^2-(2/r)(\cos\theta)z+(1/r^2)]}{[z^2-2r(\cos\theta)z+r^2]}=\frac{[r^2z^2-2r(\cos\theta)z+1]}{r^2[z^2-2r(\cos\theta)z+r^2]} \tag{12.6}$$

Значення H(z) на одиничному колі дають амплітудну характеристику фільтра, яка задовольняє умові

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=const \tag{12.7}$$

а також фазову характеристику, зображену (для значень, що часто зустрічаються, г = 0, $\theta=36^{o}$) на рис 12.2. Всепроникні фільтри становлять інтерес насамперед тому, що їх послідовне з'єднання можна використовувати для вирівнювання заданої фазової характеристики (або характеристики групової затримки).

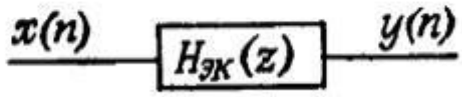


Рисунок 12.4 – До визначення еквівалентного фільтра.

Якщо не враховувати обмеження (4.1), пов'язаного з фізичною реалізуємістю фільтрів, то можна запропонувати два різні методи побудови НІХ-фільтрів з лінійними фазовими характеристиками (рис 12.3). В обох випадках фільтри з передавальною функцією $H(z)$ являють собою фізично реалізовані НІХ-фільтри, а блоки з позначенням «інверсія часу» описуються рівнянням:

$$z(n) = w(-n) \quad (12.8)$$

де $w(n)$ і $z(n)$ — вхідна й вихідна послідовності цих блоків відповідно. Обмеження, при яких можлива побудова таких блоків, будуть сформульовані після того, як буде попередньо показане, що в обох випадках *еквівалентний фільтр* має лінійну (нульову) фазову характеристику. Поняття еквівалентного фільтра ілюструється за допомогою рис 12.4, звідки випливає, що передавальна функція еквівалентного фільтра $H_{эк}(z)$ рівна:

$$H_{эк}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (12.9)$$

Для методу 1 (див. рис 12.3 і 12.4) маємо:

$$A(z) = X(z^{-1}) \quad (12.10а)$$

$$F(z) = H(z)A(z) = H(z)X(z^{-1}) \quad (12.10б)$$

$$B(z) = F(z^{-1}) = H(z^{-1})X(z) \quad (12.10в)$$

$$Y(z) = H(z)B(z) = X(z)H(z)H(z^{-1}) \quad (12.10г)$$

$$H_{эк}(z) = H(z)H(z^{-1}) \quad (12.10д)$$

$$H_{эк}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \quad (12.10е)$$

При виводі цих співвідношень враховувалося, що якщо z-перетворення послідовності $x(n)$ рівно X(z), те для інвертованої в часі послідовності $x(-n)$ воно буде рівно $X(z^{-1})$. З кінцевого результату (4.10е) випливає, що еквівалентний фільтр має нульову фазову характеристику, причому його амплітудна характеристика дорівнює квадрату амплітудної характеристики НІХ-фільтра.

Для методу 2 аналогічно одержимо

$$A(z) = X(z^{-1})$$
(12.11а)

$$F(z) = H(z)A(z) = H(z)X(z^{-1})$$
(12.11б)

$$B(z) = F(z^{-1}) = H(z^{-1})X(z)$$
(12.11в)

$$G(z) = H(z)X(z)$$
(12.11г)

$$Y(z) = B(z) + G(z) = X(z)[H(z) + H(z^{-1})]$$
(12.11д)

$$H_{зк}(z) = H(z) + H(z^{-1})$$
(12.11е)

$$H_{зк}(e^{j\omega}) = 2|H(e^{j\omega})|\cos[\varphi(\omega)]$$
(12.11ж)

де

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$
(12.11з)

І в цьому випадку еквівалентний фільтр має нульову фазову характеристику, однак його амплітудна характеристика дорівнює подвоєному добутку амплітудної характеристики вихідного фільтра на функцію косинуса від фазової характеристики вихідного фільтра. Із цієї причини перевага слід віддати методу 1.

На практиці точна реалізація обох розглянутих методів неможлива через те, що доводиться інвертувати нескінченні часові послідовності, не чекаючи, поки вони закінчаться. Обмеживши, однак, ці послідовності відповідним числом членів, завжди можна забезпечити кожну наперед задану точність апроксимації еквівалентного фільтра. Більш докладно цей підхід розглянутий у тезах Гіббса.

12.2 Властивості фільтрів з НІХ

У процесі розгляду методів розрахунків НІХ-фільтрів нам неодноразово доведеться звертатися до деяких елементарних властивостей їх передавальних функцій. Протягом всього розділу будуть використовуватися три основні функції, що характеризують фільтр: квадрат амплітудної характеристики, фазова характеристика й характеристика групової затримки. Причина, по якій знадобляться всі три функції, полягає в тому, що при розв'язанні задачі апроксимації для НІХ-фільтрів у загальному випадку доводиться розглядати комплексну передавальну функцію від ω. Тому при розробці методів апроксимації потрібно враховувати поведінку і амплітудної,і фазової характеристик. Крім того, оскільки фазова характеристика НІХ-фільтра, як правило, суттєво нелінійна, то для оцінки дисперсійного впливу фільтра на типовий оброблюваний сигнал часто використовується характеристика групової затримки фільтра. У даному розділі даються визначення всіх трьох характеристик фільтра, які будуть потім використані в цій главі.

12.2.1. Квадрат амплітудної характеристики

При розрахунках НІХ-фільтра з використанням апроксимації тільки амплітудної характеристики (тобто без урахування фазової характеристики) зручніше за все оперувати із квадратом амплітудної характеристики, обумовленим у такий спосіб:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = |H(z)H(z^{-1})||_{z=e^{j\omega}} \tag{12.42}$$

Розташуванню полюсів і нулів цієї функції в z-площині властива симетрія із дзеркальним відображенням щодо одиничного кола. Полюси H(z) розташовуються всередині одиничного кола, тому вони повністю визначаються квадратом амплітудної характеристики фільтра. Нулі H(z) можуть займати в z-площині довільне положення (виключення становить важливий випадок, коли всі нулі розташовуються на одиничному колі). Однак найчастіше нулі передатної функції H(z) також вибираються таким чином, щоб відповідні їм нулі квадрата амплітудної характеристики розташовувалися на одиничному колі або усередині неї в z-площині. Фільтри з такими нулями є мінімально-фазовими фільтрами.

12.2.2. Фазова характеристика

Тому що передавальна функція НІХ-фільтра в загальному випадку є комплексною функцією від з, можна розглядати й амплітудну й фазову характеристики фільтра.

Фазова характеристика рівна:

$$\beta(e^{j\omega}) = arctg\left\{\frac{\mathrm{Im}[H(z)]}{\mathrm{Re}[H(z)]}\right\}_{z=e^{j\omega}} \tag{12.13}$$

Інша форма запису фазової характеристики має вигляд:

$$\beta(e^{j\omega}) = \frac{1}{2j}\left\{\frac{H[(z)]}{H[z^{-1}]}\right\}_{z=e^{j\omega}} \tag{12.14}$$

Її можна одержати, представивши H(z) як

$$H(z) = |H(z)|\, e^{j\beta(z)} \tag{12.15}$$

і враховуючи, що

$$H(z^{-1}) = |H(z)|\, e^{-j\beta(z)} \tag{12.16}$$

12.2.3. Характеристика групової затримки

Характеристика групової затримки є мірою середньої затримки у фільтрі у функції частоти й записується в такий спосіб:

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\frac{d\beta(e^{j\omega})}{d\omega} = -jz\frac{d\beta}{dz}\Big|_{z=e^{j\omega}} \tag{12.17}$$

Використовуючи формулу (4.14), функцію $\tau_g(e^{j\omega})$ можна представити у вигляді

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\mathrm{Re}\left[z\frac{dH(z)/dz}{H(z)}\right]_{z=e^{j\omega}} = -\mathrm{Re}\left\{z\frac{d}{dz}[\ln H(z)]\right\}_{z=e^{j\omega}} \tag{12.18}$$

Краща приблизно постійна характеристика групової затримки у всій смузі (або смугах) пропущення фільтра.

Розділ 43 Методи розрахунку фільтрів з НІХ

43.1 Метод відображення диференціалів

Один з найбільш простих методів дискретизації аналогової системи полягає в заміні диференціалів у її диференціальному рівнянні на кінцеві різниці, що дає можливість одержати різницеве рівняння, що апроксимує вихідне диференціальне рівняння. Найпростіша заміна полягає в заміні першого диференціала на пряму або зворотну різницю.

Диференціальне рівняння фільтра має вигляд:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{M} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} \tag{12.19}$$

Диференціальне рівняння (12.19) після дискретизації приймає вигляд:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \Delta_i[y(n)] = \sum_{i=0}^{M} b_i \Delta_i[x(n)] \tag{12.20}$$

де $x(n)$ — послідовність на вході цифрового фільтра,

$y(n)$ — на його виході,

а і-а різниця $\Delta_i[w(n)]$ визначається співвідношенням

$$\Delta_{i+1}[w(n)] = \Delta_1\{\Delta_i[w(n)]\}$$
(12.21)

причому

$$\Delta_1[w(n)] = \begin{cases} \frac{1}{T}[w(n) - w(n-1)], & \textit{зворотня різниця} \\ \frac{1}{T}[w(n+1) - w(n)], & \textit{пряма різниця} \end{cases}$$
(12.22)

Так, при використанні зворотних різниць друга різниця $\Delta_2[w(n)]$ буде рівна

$$\Delta_2[w(n)] = \frac{1}{T}\{\Delta_1[w(n)] - \Delta_1[w(n-1)]\} =$$
$$= \frac{1}{T}\{[w(n) - w(n-1)] - \frac{1}{T}[w(n-1) - w(n-2)]\} =$$
$$= \frac{1}{T^2}[w(n) - 2w(n-1) + w(n-2)]$$
(12.23)

При будь-якому відображенні неперервного простору в дискретний повинні виконуватися наступні вимоги:

1. Вісь $j\Omega$ із s-площини повинна відображатися в одиничне коло на z-площині.

2. Точки з лівої половини s-площини (для них {Re [s] < 0}) після відображення повинні розташовуватися усередині одиничного кола в z-площині (тобто для відображених точок |z|< 1).

Виконання першої вимоги дозволяє зберегти (завдяки властивості рівномірності відображення) селективні властивості аналогової системи, а виконання другого гарантує, що, що виходить в результаті відображення стійкої аналогової системи дискретна система також є стійкою. Розглянемо, наскільки добре заміна диференціалів прямими або зворотними різницями дозволяє задовольнити сформульовані вимоги.

Зворотні різниці. При використанні зворотних різниць проводиться наступна заміна:

$$\frac{dy}{dt} \leftrightarrow \frac{y(n) - y(n-1)}{T}$$
(12.24)

З погляду операторів перетворення вона відповідає співвідношенню:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$ (12.25)

Або

$$z = \frac{1}{1 - sT}$$ (12.26)

При $s = j\Omega$ з формули (4.26) випливає, що

$$z = \frac{1}{1 - j\Omega T} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1 + j\Omega T}{1 - j\Omega T}\right) = \frac{1}{2}(1 + e^{2j\,arctg\,\Omega T})$$ (12.27)

Запишемо дійсну й уявну частини z:

$$\mathrm{Re}[z] = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2arctg\,\Omega T)}{2}$$ (12.28)

$$\mathrm{Im}[z] = \frac{\sin(2arctg\,\Omega T)}{2}$$ (12.29)

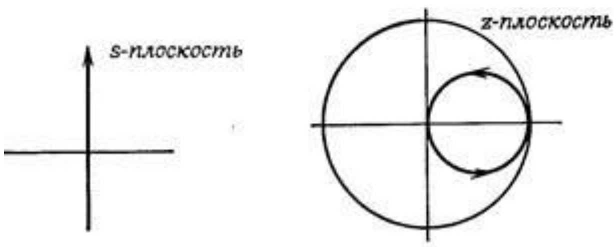


Рисунок 12.5 – Відображення осі $j\Omega$ з s-площини в z-площину для методу зворотних різниць

Таким чином, пряма $s = j\Omega$ (при $-\infty < \Omega < \infty$) відображається на z-площині в окружність, рівняння якої має вигляд

$$\left\{\mathrm{Re}[z] - \frac{1}{2}\right\}^2 + \{\mathrm{Im}[z]\}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$ (12.30)

Центр цієї окружності (рис 12.5) перебуває в точці з координатами Re [z] = 1/2, Im [z] = 0, а її радіус рівний 1/2. Видно, що всі точки осі $j\Omega$ з s-площини після відображення не потрапляють на одиничне коло в z-площині (за винятком області досить малих значень ΩT). Це означає, що перше зі сформульованих вище вимог не задовольняється. Перевіримо, чи виконується друга вимога. Для цього покладемо, що

$$sT = \alpha + j\beta \qquad (12.31)$$

де α й β — дійсні числа, причому α < 0. Тоді співвідношення (12.26) приймає вигляд:

$$z = \frac{1}{1-\alpha-j\beta} \qquad (12.32)$$

звідки

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)^2+\beta^2}} < 1 \qquad (12.33)$$

Таким чином, при використанні зворотних різниць стійкий аналоговий фільтр буде відображатися в стійкий цифровий фільтр, але вибіркові властивості аналогового фільтра не будуть зберігатися.

Прямі різниці. При використанні прямих різниць проводиться наступна заміна:

$$\frac{dy}{dt} \leftrightarrow \frac{y(n+1)-y(n)}{T} \qquad (12.34)$$

Для якої

$$s = \frac{z-1}{T} \qquad (12.35)$$

Або

$$z = 1 + sT \qquad (12.36)$$

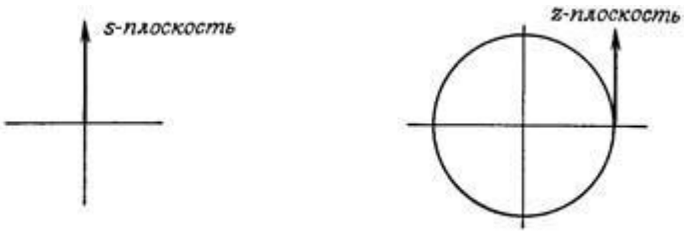


Рисунок 12.6 – Відображення осі $j\Omega$ з s-площини в z-площину для методу прямих різниць

При $s = j\Omega$ маємо:

$$z = 1 + j\Omega T \qquad (12.37)$$

Контури на s-площині і z-площині для розглянутого методу відображення показано на рис 12.6. Видно, що перша вимога, що пред’являється до відображень, не задовольняється. Не задовольняється й друга вимога, тому що якщо

$$sT = \alpha + j\beta \qquad (12.38)$$

то

$$z = 1 + \alpha + j\beta \qquad (12.39)$$

і $|z| > 1$ При $\beta^2 > 1 - (1+\alpha)^2$.

Узагальнені різниці. Більш складна методика дискретизації аналогових фільтрів, заснована на заміні диференціалів різницями, полягає у використанні різниць більш високого порядку для заміни диференціалів більш низького порядку. Покладемо, наприклад, що перша різниця Δ_1 визначається замість (4.23) наступним виразом:

$$\Delta_1[w(n)] = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{L}\alpha_i[w(n+i) - w(n-1)] \qquad (12.40)$$

де L — порядок використовуваних різниць. Тоді співвідношення між операторами відображення, що описує, s-площини в z-площину, буде мати вигляд:

$$s = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{L}\alpha_i(z^{i} - z^{-i}) \qquad (12.41)$$

Доведемо, що воно задовольняє першій вимозі. Для цього покажемо, що при $z = 1 + \alpha + j\beta$ оператор s буде мати вигляд $s = j\beta(\omega)$, так що одинична окружність на z-площині буде результатом відображення осі $j\Omega$ з *s-площини*. Підставивши $z = e^{j\omega T}$ у формулу (12.41), одержимо:

$$s = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{L}\alpha_i(e^{j\omega iT} - e^{-j\omega iT}) = \qquad (12.12)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{L}2j\alpha_i\sin(\omega iT) = j\beta(\omega) \qquad (12.43)$$

Вибравши відповідним чином значення коефіцієнтів α_i, можна добитися того, що функція $\beta(\omega)$ буде апроксимувати практично будь-яку задану непарну функцію від ω, так що вісь $j\Omega$ із s-площини буде монотонно відображатися в одиничне коло на z-площині. Крім того, можна показати, що відображення, описуване оператором (12.41), є конформним, тому точки лівої півплощини *s* будуть розташовуватися після відображення усередині одиничного кола в z-площині, так що обидві вимоги, пропоновані до відображень, будуть задовольнятися. Однак у зв'язку із труднощами у визначенні коефіцієнтів a_i, необхідних для виконання відображення, а також через наявність більш простих методів дискретизації аналогових фільтрів розглянутий метод використання різниць більш високого порядку не знайшов широкого практичного застосування.

Достоїнство методу заміни диференціалів *простими* різницями полягає в тому, що за допомогою простих підстановок типу (12.25) або (12.35) можна від раціональної передавальної функції від *s* безпосередньо перейти до раціональної передавальної функції від z. Однак незалежно від того, використовуються прості прямі або прості зворотні різниці, характеристики аналогового фільтра при цьому не зберігаються, тому для дискретизації аналогових фільтрів звичайно застосовують інші методи.

43.2 Метод перетворення імпульсної характеристики

Другий метод дискретизації аналогових фільтрів називається методом інваріантного перетворення імпульсної характеристики. Відмінною рисою цього методу є те, що в якості імпульсної характеристики цифрового фільтра, що розраховується, використовується дискретизована імпульсна характеристика відповідного аналогового фільтра. У результаті частотна характеристика цифрового фільтра утворюється шляхом накладень частотної характеристики дискретизованого аналогового фільтра.

Для того щоб предемонструвати метод дискретизації аналогового фільтра з використанням інваріантного перетворення його імпульсної характеристики, розкладемо передатну функцію цього фільтра на прості дроби:

$$H(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i}{s+d_i} \qquad (12.44)$$

де

$$c_i=H(s)(s+d_i)\Big|_{s=-d_i} \qquad (12.45)$$

причому кожний коефіцієнт d_i визначає положення i-го полюса, При записі розкладання (12.44) передбачалося, що порядок чисельника M менше порядку знаменника N і що всі полюси (s) прості. Припущення про те, що $M < N$, обов'язково повинне виконуватися для дискретизуемого фільтра, оскільки а якщо ні, то накладення в частотній характеристиці цифрового фільтра стануть неприпустимими. Якщо ж не всі полюси H(s) прості, то результати, які будуть отримані в даному розділі, слід трохи модифікувати.

Імпульсна характеристика $h(t)$ аналогового фільтра з передатною функцією виду (12.44) описується співвідношенням:

$$h(t)=\sum_{i=1}^{N}c_i e^{-d_i t}u_{-1}(t) \qquad (12.46)$$

Дискретизуючи її, одержимо імпульсну характеристику цифрового фільтра:

$$h(nT)=\sum_{i=1}^{N}c_i e^{-d_i nT}u_{-1}(nT) \qquad (12.47)$$

де Т — період дискретизації. Знайдемо її z-перетворення:

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(nT)z^{-n}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}c_i e^{-d_i nT}z^{-n} \qquad (12.48)$$

Змінивши порядок підсумовування й просумуровавши по n, одержимо:

$$H(z)=\sum_{i=1}^{N}c_i\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-d_i T}z^{-1})^n=\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i}{1-e^{-d_i T}z^{-1}} \qquad (12.49)$$

Порівняємо формули (4.49) і (4.44). Видно, що для простих полюсів перехід від $H(s)$ до $H(z)$ здійснюється за допомогою відображення, при якому використовується заміна:

$$\frac{1}{s+d_i} \to \frac{1}{1-z^{-1}e^{-d_iT}} \qquad (12.50)$$

Якщо полюси d_i комплексні, то залишки c_i в (12.44) також будуть комплексними. Функція $h(t)$ дійсна, тому повинні існувати також комплексно сполучені полюс d_i^* і остача c_i^*. Просумуємо ці комплексно сполучені члени в (12.44):

$$\frac{c_i}{s+d_i} \to \frac{c_i^*}{s+d_i^*} = \frac{(c_i+c_i^*)s+c_id_i^*+c_i^*d_i}{s^2+(d_i+d_i^*)s+d_id_i^*} \qquad (12.51)$$

Поклавши $d_i=\sigma_i+j\Omega_i$ й $c_i=g_i+jh_i$, одержимо

$$\frac{c_i}{s+d_i} \to \frac{c_i^*}{s+d_i^*} = \frac{wg_is+2(\sigma_ig_i+\Omega_ih_i)}{s^2+2\sigma_is+(\sigma_i^2+\Omega_i^2} \qquad (12.52)$$

Використання заміни, що відображає (4.50) стосовно до кожного доданка у формулі (4.51) дає

$$\frac{c_i}{1-z^{-1}e^{-d_iT}}+\frac{c_i^*}{1-z^{-1}e^{-d_i^*T}} = \frac{(c_i+c_i^*)-z^{-1}(c_ie^{-d_iT}+c_i^*e^{-d_i^*T})}{1-z^{-1}(e^{-d_iT}+e^{-d_i^*T})+z^{-2}e^{-(d_i+d_i^*)}} = \qquad (12.53)$$

$$= \frac{2g_i-z^{-1}e^{-\sigma_iT}[2gi\cos(\Omega_iT)-2h_i(\sin\Omega iT)]}{1-2z^{-1}e^{-\sigma_iT}\cos(\Omega_iT)+z^{-2e^{-2\sigma T}}} \qquad (12.54)$$

З формул (4.52) і (4.54) одержуємо

$$\frac{s+\sigma+\Omega(h/g)}{s^2+2\sigma s+\sigma^2+\Omega} \to \frac{1-z^{-1}e^{-\sigma T}[\cos(\Omega T)-(h/g)\sin(\Omega T)]}{1-2z^{-1}e^{-\sigma_iT}\cos(\Omega_iT)+z^{-2e^{-2\sigma T}}} \qquad (12.55)$$

(індекс i тут опущений, а чисельники поділені на 2g).

Приведемо два корисні часткові випадки цієї заміни, що відображає, відповідних до аналогових фільтрів з імпульсними характеристиками $h_1(t)=e^{-\sigma t}\cos(\Omega t)\,u_{-1}(t)$ й $h_2(t)=e^{-\sigma t}\sin(\Omega t)\,u_{-1}(t)$:

$$H_1(s) = \frac{s+\sigma}{s^2+2\sigma s+\sigma^2+\Omega^2} \rightarrow \frac{1-z^{-1}e^{-\sigma T}\cos\Omega T}{1-2z^{-1}e^{-\sigma T}\cos\Omega T+z^{-2}e^{-\sigma T}} \qquad (12.56)$$

$$H_2(s) = \frac{\Omega}{s^2+2\sigma s+\sigma^2+\Omega^2} \rightarrow \frac{z^{-1}e^{-\sigma T}\sin\Omega T}{1-2z^{-1}e^{-\sigma T}\cos\Omega T+z^{-2}e^{-2\sigma T}} \qquad (12.57)$$

Вище було відзначено, що частотна характеристика цифрового фільтра, що розраховується методом інваріантного перетворення імпульсної характеристики, утворюється шляхом накладень частот-

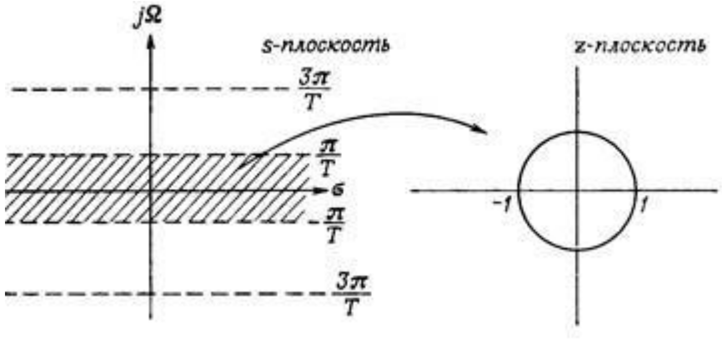


Рисунок 12.7 – Відображення з s-площини в z-площину для методу інваріантного перетворення імпульсної характеристики

ний характеристики дискретизуемого аналогового фільтра. Таким чином, можна записати

$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{l=-\infty}^{\infty} H(j\Omega + jl\Omega_s) \qquad (12.58)$$

де $\Omega = 2\pi / T$ — кутова частота дискретизації цифрового фільтра. На рис 12.7 показане відповідне до інваріантного перетворення імпульсної характеристики відображення з s-площини в z-площину. Кожна горизонтальна смуга шириною $2\pi / T$ з s-площини відображається на z-площину. Тому всі суміжні смуги з s-площини будуть при відображенні накладатися один на одного в z-площині. Звідси випливає, що для того, щоб частотні характеристики вихідного аналогового фільтра, що й розраховується методом інваріантного перетворення імпульсної характеристики цифрового фільтра відповідали один одному, необхідно, щоб смуга пропущення аналогового фільтра перебувала в межах діапазону $-\pi / T \leq \Omega \leq \pi / T$. Для виконання цієї умови необхідно до початку перетворення вводити додатковий фільтр нижніх частот, що гарантує відповідне обмеження смуги пропущення аналогового фільтра.

Для ілюстрації цього методу дискретизуємо аналоговий фільтр із передавальною функцією вигляду:

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$
(12.59)

Безпосереднє використання заміни, що відображає (12.50) дає

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}e^{-T}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-3T}} = \frac{z^{-1}(e^{-T}-e^{-3T})}{1-z^{-1}(e^{-T}+e^{-3T})+e^{-4T}z^{-2}}$$
(12.60)

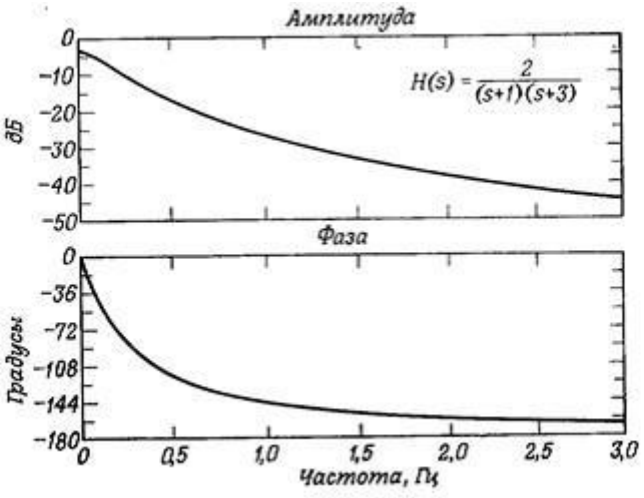


Рисунок 12.8 – Амплітудна й фазова характеристики аналогового фільтра.

Частотна характеристика аналогового фільтра визначається співвідношенням:

$$H(j\Omega) = \frac{2}{(3-\Omega^2)+4j\Omega}$$
(12.61)

На рис 12.8 представлені амплітудна й фазова характеристики цього фільтра. Характеристики відповідного цифрового фільтра для різних значень періоду дискретизації $T = 1/F_s$ зображено на рис 12.9. Ясно, що при зменшенні Т (тобто при збільшенні частоти дискретизації F_s) ефекти накладення можуть виявитися дуже малими й частотні характеристики аналогового й цифрового фільтрів стануть схожими один на одного.

Розділ 44 Порівняння КІХ та НІХ фільтрів

Оскільки існує множина різних методів розрахунків СІХ- і НІХ-фільтрів, практично неможливо, зіставивши ті або інші характеристики одержуваних фільтрів, об'єктивно порівняти обидва типи фільтрів. Якщо ж обмежитися розглядом тільки оптимальних (у мінімаксному змісті) СІХ-фільтрів нижніх частот і еліптичних НІХ-фільтрів з аналогічними частотними характеристиками, то можна зробити деякі кількісні порівняння на основі числа множень, що приходяться на кожний вхідний відлік) при стандартній реалізації кожного з порівнянних фільтрів (тобто при використанні прямої форми для СІХ-фільтра й каскадної форми для НІХ-фільтра).

При реалізації прямої форми СІХ-фільтра з імпульсною характеристикою довжини ***N*** (***N*** непарне) і лінійною фазовою характеристикою на кожний вхідний відлік приходиться $[(N+1)/2]$ множень, тоді як при реалізації каскадної форми еліптичного фільтра n *-того* порядку (всі нулі якого розташовані на одиничному колі) на кожний вхідний відлік) доводиться $[(3n+3)/2]$ множень. (Тут число у квадратних дужках позначає цілу частину цього числа.)

Таким чином, два типи фільтрів з еквівалентними характеристиками (тобто задовольняючі однаковим вимогам до рівня пульсацій у смузі пропущення δ_1 й у смузі непропущення δ_2, а також до значень граничних частот F_p і F_s***)*** можуть бути зіставлені на основі ефективності їх побудови, що враховує, для якого з фільтрів на кожний з вхідних відліків доводиться менше число множень. Обидва типи фільтрів будуть еквівалентні, якщо виконується наступна умова:

$$\left(\frac{3n+3}{2}\right)=\left(\frac{N+1}{2}\right) \qquad (12.62)$$

або

$$\frac{N}{n}\approx 3+\frac{1}{n} \qquad (12.63)$$

На рис 12.9 наведено дві групи кривих залежності відношення N/n від n при різних δ_2 для двох значень F_p і δ_1. мал 12.9, ***а*** відповідає випадку $F_p=0{,}15$ і $\delta_1=0{,}1$ ($\delta_2=0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; 0{,}0001;$) на рис 12.9, ***б*** представлені криві при F_p — 0,35 і δ_1 = 0,00001 (δ_2 приймає ті ж значення). Там же побудовані лінії $N/n = 3$, відповідні до постійної складової в правій частині формули еквівалентності фільтрів (12.63).

Як видно з рис 12.9, а, при деяких значеннях F_p***,*** δ_1 і δ_2 величина відношення N/n знаходиться нижче рівня еквівалентності; у цих випадках СІХ-фільтр виявляється ефективніше еліптичного фільтра. Однак взагалі еліптичний фільтр набагато ефективніше оптимального СІХ-фільтра, причому у випадку, коли еліптичний фільтр має високий порядок, відношення N/n часто може досягати сотень або навіть тисяч.

Встановлено, що СІХ-Фільтр найбільш доцільно використовувати, якщо величина δ_1 більша, δ_2 менша, а перехідна смуга досить широка (тобто перехідне відношення мале). Необхідно також враховувати наступне:

1. При $F_p \geq 0,3$ відношення N/n завжди перевищує $(3+1/n)$ при будь-яких значеннях δ_1, δ_2 і n.

2. При ***n*** > 7 відношення N/n завжди перевищує $(3+1/n)$ при будь-яких значеннях δ_1, δ_2 і F_p.

3. Чим менше F_p, тим більше діапазон значень δ_1, δ_2 і n, при яких N/n менше, чим $(3+1/n)$.

На рис 12.10, ***а*** показана залежність теоретичного значення порядку еліптичного фільтра n (тому n не обов'язково дорівнює цілому числу), що забезпечує задані граничні частоти F_p й F_s при δ_1 = 0,1 і δ_2 = 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001, від величини F_p для набору оптимальних СІХ-фільтрів з N = 21.

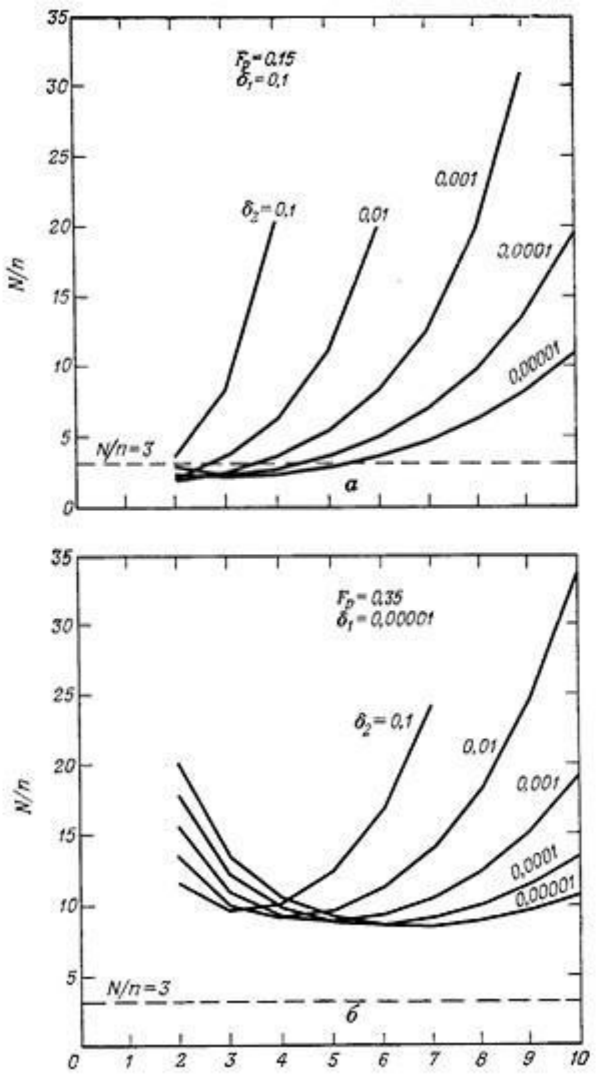


Рисунок 12.9 – Порівняння СІХ-фільтрів і НІХ-фільтрів нижніх частот.

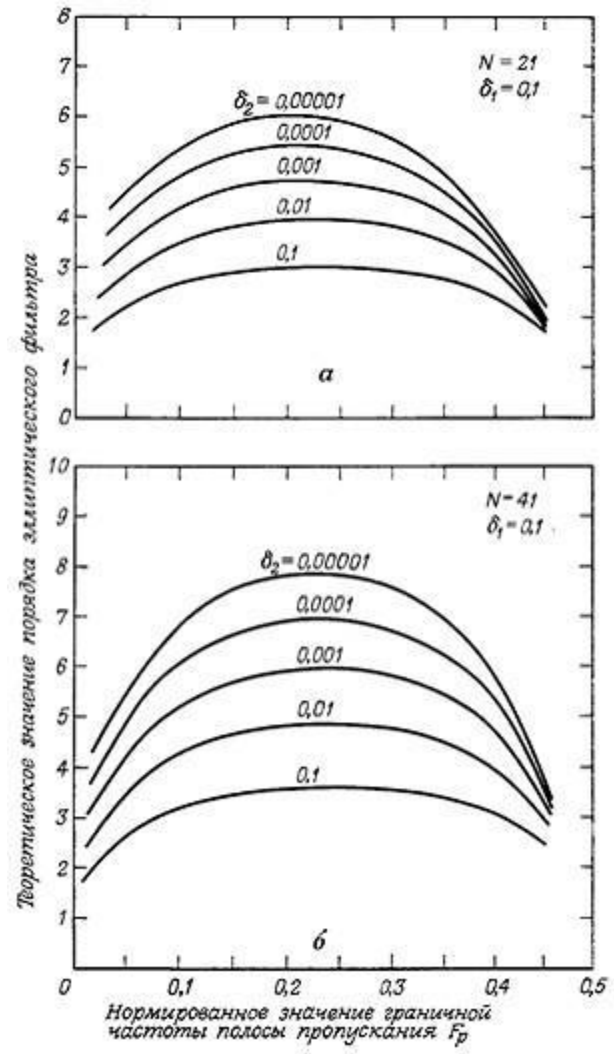


Рисунок 12.10 – Порівняння СІХ-фільтрів і НІХ-фільтрів нижніх частот.

Аналогічні криві, але для N = 41 наведено на рис 12.10. Теоретичне значення порядку, при якому обоє фільтра еквівалентні, становить n = 6,3 для рис 12.10, *а* й n = 13 для рис 12.10. Таким чином, у всіх цих випадках, як і передбачалося в попередньому розділі, еліптичний фільтр виявляється ефективніше еквівалентного йому СІХ-фільтра.

Отже, у тих випадках, коли потрібно забезпечити задану амплітудну характеристику, еліптичні фільтри взагалі виявляються ефективніше оптимальних СІХ-фільтрів. Однак СІХ-фільтри додатково мають досить корисну властивість — їх фазова характеристика строго лінійна, так що характеристика групової затримки таких фільтрів не спотворюється. У той же час характеристика групової затримки еліптичного фільтра має, як правило, досить істотні викривлення (особливо поблизу краю смуги пропускання).

Тема 13 Ефекти кінцевої розрядності чисел у цифрових фільтрах.

Розділ 45 Аналого-цифрове та цифро-аналогове перетворення

Для отримання оцифрованого звуку потрібно зробити 3 операції:

– дискретизацію сигналів у часі (sampling) – поміряти амплітуду звукового сигналу через проміжки години t_∂ (звичайно однакові); при цьому безперервний сигнал замінюється послідовністю його значень;

– квантування отриманих імпульсів по амплітуді (quantizing) – перетворити безперервний інтервал миттєвих значень сигналу в крапках відліку в кінцеве число рівнів квантування, кожне значення безперервного по амплітуді сигналу перетворюється в одне з значень набору амплітуд; тобто амплітуда сигналу до квантування може бути будь-якою в певному інтервалі, після квантування амплітуда приймі одне з декількох попередньо заданих значень;

– кодування квантованих по амплітуді імпульсів – перетворити квантувань імпульс у ціле число зі знаком або без.

Дискретизація й квантування виконуються аналого-цифровим перетворювачем (АЦП). Відтворюється оцифрований сигнал за допомогою цифро-аналогового перетворювача (ЦАП).

Частота дискретизації (sampling rate) f_∂ – величина, зворотна частоті сигналу:

$$f_\partial = \frac{1}{T}$$

.

Вона показує, скільки раз у секунду зчитується значення сигналу, вимірюється в герцах. Виміряна амплітуда сигналу називається відліком (sample).

У відповідності з теоремою відліків (теорема Котельникова), якщо сигнал вимірюється з частотою дискретизації f_∂, те в ньому не повинні міститися компоненти з частотами вище $f_\partial/2$, інакше цифрове подання сигналу не буде адекватно аналоговому.

Інакше кажучи, частота дискретизації винна бути мінімум вдвічі більше максимальної частоти аналогового сигналу fmax

$$f_\partial \geq 2 f_{\max}$$

.

Частота $f_д/2$ – гранична частота, вище якої у вхідному сигналі не винне бути спектральних компонент.

На практиці максимально припустима частота сигналу визначається частотою зрізу ФНЧ. Амплітудна характеристика фільтру за частотою зрізу спадає до нуля не перпендикулярно, а з деяким нахилом. Тому $f_д$ і частота зрізу повинні відрізняться більш ніж вдвічі.

При квантуванні величина, що безупинно змінюється, перетворюється у величину, що змінюється східчасто із заданими розмірами східців. Квантування буває рівномірне й нерівномірне, тобто з однаковими й неоднаковими східцями квантування. Ступінь квантування – різниця між двома сусідніми заданими значеннями квантованої величини.

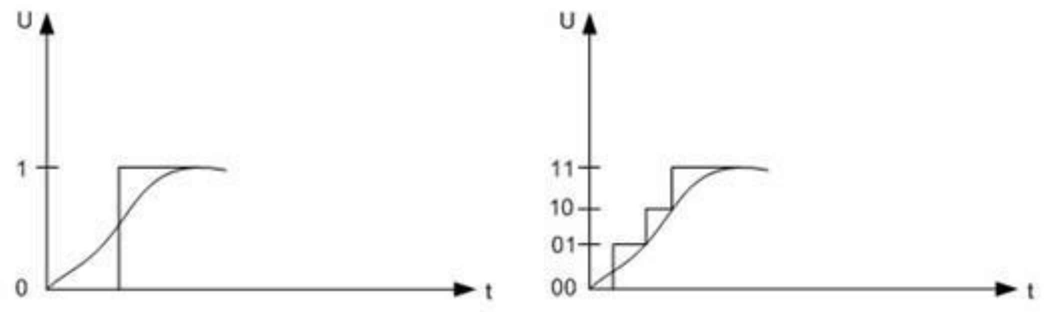


Рисунок 13.1 – Квантування сигналу

Кількість рівнів квантування визначається по формулі $N = 2^n$,

де n — кількість розрядів

N — рівень квантування

Вибір кількості рівнів квантування сигналів проводиться на основі компромісного підходу, що враховує з однієї сторони необхідність досить точного представлення сигналу, що вимагає великої кількості рівнів квантування, а з іншого боку кількість рівнів квантування повинна бути менше, що б розрядність коду була мінімальною.

Розмір ступеню квантування визначається необхідним співвідношенням сигнал/шум для найменшого рівня сигналу. Тобто рівномірне квантування створює надлишкову якість для сигналів більшого рівня. Крім того, великі значення сигналів зустрічаються більш рідко ніж менші.

Для усунення цих недоліків і, відповідно, зменшення числа рівнів квантування застосовують нерівномірне (нелінійне) квантування. Нерівномірну (нелінійну) амплітудну характеристику квантуючого прибудую можна реалізувати 2 методами:

- аналоговим компандуванням (стисканням динамічного діапазону вхідних сигналів перед кодуванням з допомогою компресорів і наступним його розширенням після декодируванням експандерами);

- цифровим компандируванням.

Очевидно, що зі збільшенням частоти дискретизації (oversampling, передискретизація) на ту саму смугу частот припадає вусі менша потужність шуму. Також застосовується передискретизація цифрового сигналу перед ЦА перетворенням. Вона не покращує сигнал, алі дозволяє спростити аналоговий фільтр на виході ЦАП (зменшити порядок і крутість характеристики).

Розділ 46 Системи числення

Система числення — це символічний метод запису чисел, представлення чисел за допомогою письмових знаків.

Система числення:

- дає представлення множини чисел (цілих або матеріальних);
- дає кожному числу унікальне представлення (або, принаймні, стандартне представлення);
- відображає алгебраїчну й арифметичну структуру чисел.

Системи числення розділяють на позиційні й непозиційні. Відмінність позиційних систем числення від непозиційних полягає в тому, що значення цифр у позиційній системі залежить від позиції в числі, а в непозиційній — не залежить. Приклади позиційних систем числення: десяткова система числення, заснована на арабських цифрах; древневавілонська (60-рична); система Майя (20-рична). Приклади непозиційних систем числення — римська, стара й нова грецька, слов'янська.У позиційних системах числення той самий числовий знак (цифра) у записі числа має різні значення залежно від того місця (розряду), де він розташований.

Непозиційні системи числення з'явилися історично першими. У цих системах значення кожного цифрового символу постійно й не залежить від його положення. Найпростішим випадком непозиційної системи є одинична, для якої для позначення чисел використовується єдиний символ, як правило це риска, іноді точка, яких завжди ставиться кількість, відповідно до позначуваного числа:

1 — |

2 — ||

3 — |||, і т.д.

Таким чином, цей єдиний символ має значення одиниці, з якої послідовним додаванням виходить необхідне число:

||||| = 1+1+1+1+1 = 5.

Під позиційною системою числення звичайно розуміється b-ричне система числення, яка визначається цілим числом b > 1, називаною основою системи числення. Ціле число x в b-ричній системі числення представляється у вигляді кінцевої лінійної комбінації ступенів числа b:

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b^k$$

, де a_k — це цілі числа, називані цифрами, що задовольняють нерівності $0 \le a_k \le (b-1)$.

Кожний ступінь b^k у такому записі називається ваговим коефіцієнтом розряду. Старшинство розрядів і відповідних їм цифр визначається значенням показника k (номером розряду). Звичайно для ненульового числа x вимагають, щоб старша цифра a_{n-1} в b-ричному представленні x була також ненульовою.

Якщо не виникає різночитань (наприклад, коли всі цифри представляються у вигляді унікальних письмових знаків), число x записують у вигляді послідовності його b-ричних цифр, що перелічуються по убуванню старшинства розрядів ліворуч праворуч:

$$x = a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0$$

.

В ЕОМ застосовуються дві основні форми представлення чисел: напівлогарифмічна – із плаваючою комою й природна – з фіксованим положенням коми.

При представленні чисел з фіксованою комою положення коми закріплюється в певному місці щодо розрядів числа й зберігається незмінним для всіх чисел, зображуваних у даній розрядній сітці. Звичайно кома фіксується перед старшим розрядом або після молодшого. У першому випадку в розрядній сітці можуть бути представлені тільки числа, які по модулю менше 1, у другому – тільки цілі числа.

Використання представлення чисел з фіксованою комою дозволяє спростити схеми машини, підвищити її швидкодію, але становить певні труднощі при програмуванні. У цей час представлення чисел з фіксованою комою використовується як основне тільки в мікроконтролерах.

В універсальних ЕОМ основним є представлення чисел із плаваючою комою. Широкий діапазон подання чисел із плаваючою комою зручний для наукових і інженерних розрахунків. Для підвищення точності обчислень у багатьох ЕОМ передбачена можливість використання формату подвійної довжини, однак при цьому відбувається збільшення витрат пам'яті на зберігання даних і вповільнюються обчислення.

46.1 З фіксованою комою

Формат для чисел з комою, фіксованою перед старшим розрядом. У цьому форматі можуть бути з точністю до $2^{-(n-1)}$ представлені числа (правильні дроби) у діапазоні

$$2^{-(n-1)} \le |x| \le 1 - 2^{-(n-1)}.$$

Перші ЕОМ були машинами з фіксованою комою, причому кома фіксувалася перед старшим розрядом числа. У цей час, як правило, форму з фіксованою комою застосовують для представлення цілих чисел (кома фіксована після молодшого розряду).

Використовують два варіанти представлення цілих чисел: зі знаком і без знака. В останньому випадку всі розряди розрядної сітки служать для представлення модуля числа. У ЕОМ застосовуються обидва зазначених варіанта подання цілих чисел, причому кожний з варіантів реалізується як у форматі 32-розрядного машинного слова цих машин, так і у форматі 16-розрядного півслова.

При виконанні арифметичних дій над правильними дробами можуть виходити двійкові числа, по абсолютній величині більше або рівні одиниці, що називається переповненням розрядної сітки. Для виключення можливості переповнення доводиться масштабувати величини, що брати участь в обчисленнях.

Достоїнство подання чисел у форматі з фіксованою комою полягає в простоті виконання арифметичних операцій.

Недоліки – у необхідності вибору масштабних коефіцієнтів і в низькій точності представлення з малими значеннями модуля (нулі в старших розрядах модуля приводить до зменшення кількості розрядів, зайнятих значущою частиною модуля числа).

46.2 З плаваючою комою

При використанні плаваючої коми число складається із двох частин: мантиси m, що містить значущі цифри числа, і порядку p, що показує ступінь, у який треба звести основу числа q, щоб отримане при цьому число, помножене на мантису, давало дійсне значення числа, що представляється:

$$N_q = mq^p.$$

Мантиса й порядок представляються у двійковому коді. Звичайне число дається в нормалізованому виді, коли його мантиса є правильним дробом, причому перша значуща цифра (одиниця) випливає безпосередньо після коми: наприклад, $(N)_2 = 0{,}1010 \cdot 2^{10} = 10{,}10$ де $m = 0{,}1010;\ p = 10;\ q = 2$.

Порядок вказує дійсне положення коми в числі. Код у наведеному форматі представляє значення числа в напівлогарифмічній формі: $N = m \cdot 2^p$.

Точність представлення значень залежить від кількості значучих цифр мантиси. Для підвищення точності числа із плаваючою комою представляються в нормалізованій формі, при якій значення модуля мантиси лежить у межах $0,5 \le |m| \le 1$. Ознакою нормалізованого числа служить наявність одиниці в старшому розряді модуля мантиси. У нормалізованій формі можуть бути представлені всі числа з деякого діапазону за винятком нуля.

Нормалізовані двійкові числа із плаваючою комою представляють значення модуля в діапазоні:

$$0,5 \cdot 2^{-P_{\max}} \le |N| \le \left(1 - 2^{m-1}\right) 2^{P_{\max}} \approx 2^{P_{\max}}$$

,

де $P_{\max} = 2^{p-1}$ – максимальне значення модуля порядку.

Так, при p=7 $P_{\max} = 2^{p-1} - 1 = 2^6 - 1 = 63$ і діапазон вистави модулів нормалізованих чисел:

$$|N|_{\min} = 0,5 \cdot 2^{-63} = 2^{-63} \approx 10^{-63 \cdot 0,3} \approx 10^{-19},$$
$$|N|_{\max} = 2^{63} \approx 10^{63 \cdot 0,3} \approx 10^{19}.$$

Таким чином, діапазон чисел:

$$10^{-19} \le |N| \le 10^{19}$$

.

Для розширення діапазону чисел, що представляються, при фіксованій довжині розрядної $(m+p)$ сітки як основи системи числення вибирається $2^4 = 16$.

При цьому число, що представляється в розрядній сітці, набуває значення $N = m \cdot 16^p$. Нормалізована мантиса 16-ричного числа із плаваючою комою має значення, що лежить у діапазоні $\frac{1}{16} \le |m| \le 1$. Ознакою нормалізації такого числа є наявність хоча б однієї одиниці в чотирьох старших розрядах модуля мантиси. Діапазон представлення чисел у цьому випадку суттєво розширюється, перебуваючи при тій же кількості розрядів у межах від 10^{-75} до 10^{75}.

Розділ 47 Похибки викликані кінцевою розрядною сіткою

Джерелом інструментальних похибок цифрових обчислювальних машин являєтся обмежена довжина слова представлення дійсних чисел у машині. У ЦОМ може використовуватися як цілочисельна, так і дробова арифметика, ця відмінність позначається на функціональній схемі перемножуючих пристроїв в арифметичній частині машини.

Дробова арифметика оперує числами по модулю, меншими одиниці. При цьому фізична величина x представляється машинним операндом $\hat{x}$ і задається n-розрядним десятковим кодом, записаному у вигляді:

$$\hat{x} = 0,a_1a_2...a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i 2^{-i} \quad , \quad (13.1)$$

де a_i - розрядні коефіцієнти, що приймають значення 0 або 1.

Обмеженість розміру розрядної сітки процесора приводить до таких похибок:

- квантування констант ПЗП;

- відсічення машинного слова(розрядної сітки).

Істотною відмінністю процесів відсічення й квантування є залежність точності від числа розрядів, що відкидаються.

47.1 Похибка відсічення

Похибка відсічення виникає як результат скорочення довжини інформаційного слова після виконання операції множення, ділення й алгебраїчного підсумовування з урахуванням масштабування змінних.

Застосовують два способи відсічення: простий(відкидання розрядів) і з округленням. У першому випадку точність операції суттєво нижче через не рівне нулю математичне сподівання похибки(похибки зсуву). Однак ця операція широко розповсюджена, тому що має більшу швидкодію й виконується з меншими витратами устаткування.

Якщо в машинному операнді, представленому $(n+m)$ розрядами двійкового коду у вигляді:

$$\hat{x}_{n+m} = 0,b_1b_2..b_na_1a_2...a_m \quad , \quad (13.2)$$

відкидається m молодших розрядів, то в результаті такої операції виходить новий операнд:

$$\hat{x}_n = b_1 b_2 \ldots b_n$$

. (13.3)

Відмінність операндів визначає машинну похибку, обумовлену відсіченням розрядної сітки:

$$\Delta_{n,m} = \hat{x}_n - \hat{x}_{n+m} = 0, \quad b_1 b_2 \ldots b_n - 0, b_1 b_2 \ldots b_n a_1 a_2 \ldots a_m = -0,00\ldots 0 a_1 a_2 \ldots a_m = -2^{-n} \sum_{i=1}^{m} a_i 2^{-i}$$

(13.4)

Математичне очікування і дисперсія похибок відсічення з відкиданням молодших розрядів відповідно рівні:

$$M\left[\Delta_{n,m}\right]_{отбр} = M\left[-2^{-n}\sum_{i=1}^{m} a_i 2^{-i}\right] = -2^{-n}\sum_{i=1}^{m} P\left(a_i\right) 2^{-i}$$

; (13.5)

$$D\left[\Delta_{n,m}\right]_{отбр} = M\left[\Delta^2_{n,m}\right] - M^2\left[\Delta_{n,m}\right] = M\left[\left(-2^{-n}\sum_{i=1}^{m} a_i 2^{-i}\right)^2\right] - M^2\left[-2^{-n}\sum_{i=1}^{m} P\left(a_i\right) 2^{-i}\right]$$

(13.6)

Після перетворення вираз (13.6) приводимо до виду:

$$D\left[\Delta_{n,m}\right]_{отбр} = -2^{-2n}\left[\sum_{i=1}^{m} P\left(a_i\right) P\left(a_i\right) 2^{-2i} + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}\left[P\left(a_i, a_j\right) - P\left(a_i, a_j\right)\right] 2^{-(i+j)}\right]$$

(13.7)

Для одержання кінцевого виразу потрібне знання кореляційної матриці ймовірностей розрядних коефіцієнтів(ймовірностей прийняття значень 0 або 1),яка залежить від їх закону розподілу. Останні, у свою чергу, визначаються тими операціями, які були зроблені над операндами перед відсіченням розрядної сітки. Наприклад, при усіканні розрядної сітки вихідних машинних чисел значення розрядних коефіцієнтів равноймовірні, а після підсумовування двох вихідних слів значення ймовірності розрядних коефіцієнтів розподілені за трикутним законом(розподіл Сімпсона). При підсумовуванні великого числа доданків(не менше чотирьох) закон розподілу ймовірностей розрядних коефіцієнтів наближається до нормального.

Приймаючи ймовірності значень розрядних коефіцієнтів рівними $P\left(a_i\right) = P\left(a_j\right) = \frac{1}{2}, \quad P\left(a_i, a_j\right) = P\left(a_i\right) P\left(a_j\right) = \frac{1}{4}$, одержуємо числові характеристики похибок відсічення розрядної сітки відкиданням молодших розрядів:

$$M\left[\Delta_{n,m}\right]_{отбр} = -2^{-n-1}\left(1-2^{-m}\right)$$

, (13.8)

$$D\left[\Delta_{n,m}\right]_{отбр} = \frac{1}{12}2^{-2n}\left(1-2^{-2m}\right)$$

. (13.9)

47.2 Похибка округлення

При усіканні розрядної сітки шляхом округлення попраавки на остачу формується додаванням у старший з розрядів, що відкидаються, 1. При цьому округлення можна записати у вигляді:

$$\hat{x}_n = 0,b_1b_2\dots\left(b_n + a_1\right)$$

(13.10)

Якщо у вихідному числі (13.2) $a_1 = 1$, то має місце перенос одиниці в n-й розряд округленого числа, а при $a_1 = 0$ перенос відсутній.

Похибка округлення:

$$\Delta_{n,m} = \hat{x}_n - \hat{x}_{n+m} = 0,b_1b_2\dots\left(b_n + a_1\right) - 0,b_1b_2\dots b_na_1a_2\dots a_m = 2^{-n}\left(a_1 - 0,a_1a_2\dots a_m\right) = -2^{-n}\left(a_1 - \frac{a_1}{2} - 0,0a_2\dots a_m\right)$$

(13.11)

Математичне очікування й дисперсія похибки округлення (13.11) аналогічних наведеним вище перетворень описуються виразом:

$$M\left[\Delta_{n,m}\right]_{окр} = M\left[2^{-(n+1)}\sum_{i=1}^{m}\left[a_1 - \sum_{i=1}^{m-1}a_{i+1}2^{-i}\right]\right] = 2^{-(m+1)}\left[P\left(a_1\right) - \sum_{i=1}^{m-1}P\left(a_{i+1}\right)2^{-i}\right]$$

(13.12)

$$D\left[\Delta_{n,m}\right]_{окр} = M\left[\Delta^2_{n,m}\right] - M^2\left[\Delta_{n,m}\right] = 2^{-2(n+1)}\left[\sum_{i=1}^{m}P^2\left(a_i\right) - \sum_{i=1}^{m-1}P^2\left(a_{i+1}\right)2^{-2i} + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}\left[P\left(a_{i+1},a_j\right) - P\left(a_{i+1},a\right.\right.\right.$$

(13.13)

При рівній імовірності значень розрядних коефіцієнтів вирази для числових характеристик похибок округлення приймають вигляд:

$$M\left[\Delta_{n,m}\right]_{окр} = -2^{-(n+m+1)}$$

, (13.14)

$$D\left[\Delta_{n,m}\right]_{окр} = \frac{1}{12}2^{-2n}\left(1-2^{-2m}\right)$$

. (13.15)

Очевидно, що при $m >> 1$ математичне очікування похибки округлення практично дорівнює нулю(відсічення округленням майже не супроводжується систематичною погрішністю).

Дисперсія похибки відсічення в обох випадках може бути оцінена як дисперсія величини з рівномірним розподілом на інтервалі шириною 2^{-n}:

$$D\left[\Delta_{n,m}\right] = \frac{1}{12}2^{-2n}$$

. (13.16)

47.3 Похибка квантування

Вихідний сигнал $y(m\Delta t)$ являє собою цифрову згортку вхідного сигналу $x(k\Delta t)$ й імпульсної характеристики $g(n\Delta t)$:

$$y_m = y(m\Delta t) = \sum_{k=0}^{m} x(k\Delta t)\, g\left((m-k)\Delta t\right) = \sum_{k=0}^{m} x_k g_{m-k}$$

(13.17)

Похибки квантування аналогового вхідного сигналу перед його надходженням в обчислювальну машину можна представити незалежними відліками випадкових змінних. Якщо виключити з розгляду всі інші похибки, то дисперсію шуму квантування можна оцінити за допомогою теорії лінійних систем. Оскільки сигнал і шум квантування статистично незалежні, то оцінювати шуми цифрової обробки можна, не звертаючи уваги на значення сигналу. Припустимо, що вхідний шум квантування $\Delta_k = \Delta(k\Delta t)$ починається при $k = 0$, а вихідний сигнал $y_m = y(m\Delta t)$ дорівнює нулю до надходження вхідного сигналу, а також, що відліки шуму не корельовані й мають дисперсію похибки квантування $D\left(\Delta_q\right) = \frac{q_x^2}{12}$, де $q_x = 2^{-n_x}$ - щабель квантування. Тоді похибка цифрової фільтрації в дискретні мометі складе:

$$\Delta(m\Delta t) = \Delta_m = \sum_{k=0}^{m} \Delta_k g_{m-k}$$

(13.18)

Таким чином, у будь-який момент часу $t = m\Delta t$ буде рівна:

$$D\left(\Delta_q\right) = \frac{q_x^2}{12}\sum_{k=0}^{m} g_k^2$$

(13.19)

Дисперсія вихідного шуму в загальному випадку залежить від часу, оскільки є функцією числа ітерацій. Оскьльки квадрат вагової функції позитивний, то дисперсія зростає зі збільшенням числа ітерацій, починаючи з деякого початкового мінімального значення.в остаточному підсумку вона досягає значення, що встановилося:

$$D\left(\Delta_q\right) = \frac{q_x^2}{12}\sum_{k=0}^{\infty} g_k^2$$

(13.20)

значення, що встановилося, дисперсії вихідного шуму може бути знайдене по відомій передавальній функції цифрового $H(z)$ фільтра . Згідно з інтегральною теоремою Коші результуюча дисперсія рівна:

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k^2 = \frac{q_x^2}{12}\int_0^{\infty} H(z)H\left(\frac{1}{z}\right)z^{-1}dz$$

(13.21)

Максимальна похибка квантування n_x-розрядного АЦП рівна $\Delta_{qm} = \frac{q_x}{2}$. Максимальна похибка на виході суматора цифрового фільтра складе:

$$\Delta_m = \Delta_{qm}\sum_{k=0}^{\infty}\left|g_k\right|$$

(13.22)

Якщо в АЦП здійснюється перетворення вхідного сигналу з округленням до найближчого нижнього рівня квантування, то похибка квантування містить систематичну похибка, рівну половині щабля квантування, представлену в машинних одиницях $\Delta_{qm} = \frac{q_x}{2}$. Тоді систематична складова похибки цифрової обробки буде рівна:

$$\Delta_{mq} = \frac{q_x}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left|g_k\right|$$

(13.23)

Тема 14 Спектральний аналіз і перетворення Фур'є

48.1 Безперервні перетворення фур'є й лапласа

48.1.1 Інтеграл Фур'є

Спектри неперіодичних сигналів кінцевої тривалості (фінітних), зареєстрованих на інтервалі T, можуть бути отримані з рівнянь для рядів Фур'є як граничні значення функцій підсумовування при розширенні періоду T нескінченно.

Задамо періодичну послідовність імпульсів і розкладемо імпульс на одному періоді T у ряд Фур'є (формула 4.1.2). Не міняючи положення імпульсу на інтервалі T, збільшимо його значення у два рази ($T' = 2T$, продовжуємо інтервал нулями). При цьому вираз (4.1.2) для обчислення спектра залишається без зміни, але крок по частоті зменшуються в 2 рази ($\Delta\omega' = 2\pi T' = \pi / T$) і, відповідно, розраховується в 2 рази більша кількість гармонік. Нові гармоніки розташовуються в інтервалах між гармоніками для періоду T, при цьому за рахунок множника $1/T'$ значення всіх гармонік для періоду T' в 2 рази менше, чим для гармонік періоду T. Приклад зміни спектра при збільшенні періоду T у 2 рази наведений на рисунку 14.1.

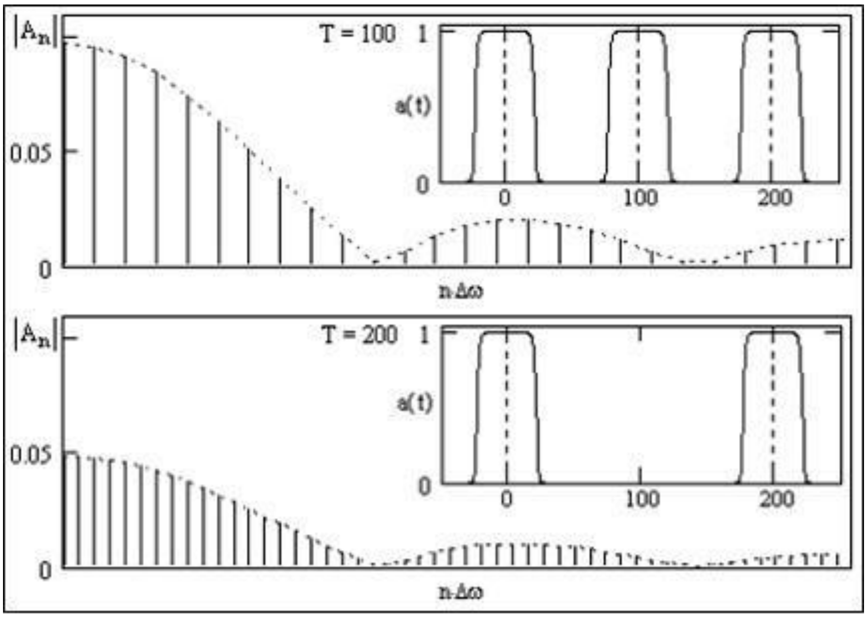


Рисунок 14.1 – Зміна спектра при збільшенні періоду T у 2 рази

Процес можна продовжити подальшим послідовним збільшенням періоду, при цьому спектр буде наближатися до безперервної функції. У межі, при $T \to \infty$, відстань між гармоніками зменшується до $\Delta\omega \to d\omega$, дискретні частоти $n\Delta\omega$ перетворюються в безперервні поточні значення, а підсумовування амплітудних значень заміняться інтегруванням. При цьому фазовий і амплітудний спектр стають безперервними, а самі значення спектра стають нескінченно малими ($1/T = d\omega/2\pi \to 0$). Для виключення останнього рівняння для спектра нормуємо на $d\omega/2\pi$:

$$S'(\omega) = \frac{d\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp(-j\omega t)dt \quad \to \quad S'(\omega)\frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp(-j\omega t)dt = S(\omega)$$

,

де $S(\omega)$ зі значень спектра $S'(\omega)$ перетворюється в щільність розподілу значень спектра, і повертаємо нормування при відновленні сигналу по спектру:

$$s(t) = \frac{d\omega}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega)\ \exp(jn\Delta\omega t) \quad \to \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

.

Таким чином, інтегральне перетворення Фур'є здобуває наступний вид:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

, (14.1)

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp(-j\omega t)dt$$

. (14.2)

Формулу (14.2) звичайно називають формулою прямого перетворення Фур'є, а формулу (14.1) – зворотного перетворення Фур'є. Цими виразами встановлюється взаємно однозначний зв'язок сигналу і його спектра в послідовній смузі малих (що прямують до нуля) смугах частот. Цю величину називають спектральною щільністю сигналу. Спектральні функції містять рівно стільки інформації, скільки й вихідний сигнал.

При перетворенні сигналу в простір гармонійних частот і назад, формули прямого й зворотного перетворень Фур'є тотожні за винятком знака аргументів експоненти:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\exp(j2\pi ft)df$$

, (14.1')

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp(-j2\pi ft)dt$$

. (14.2')

На рисунку 14.2 наведений приклад суціль[illegible] безперервного сигналу $s(t)$, енергія якого зосереджена на кінцевому інтервалі $T=(0,25)$.

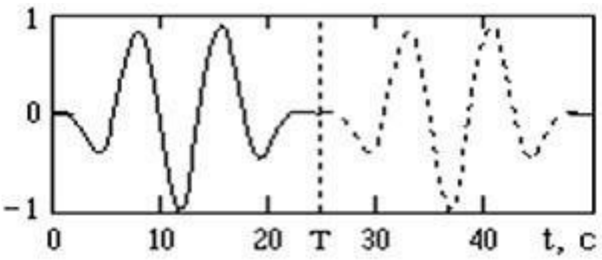


Рисунок 14.2 – Суцільна крива безперервного сигналу

Якщо нас не цікавить форма даного сигналу за межами інтервалу Т, то спектр сигналу у вигляді ряду Фур'є можна визначити по формулі (4.1.2). При зворотному перетворенні Фур'є по формулі (14.1), тобто при відновленні сигналу по його спектру, в інтервалі Т буде відновлений вихідний сигнал $s(t)$. Але якщо інтервал для відновлення буде заданий більше інтервалу Т, наприклад рівним 0-2Т, то за межами цього інтервалу почнеться періодичне повторення вихідного сигналу, як це показане пунктиром на рисунку 14.2.

Якщо такий процес небажаний і за межами інтервалу Т повинні бути збережені нульові значення сигналу, то необхідно використовувати інтегральне перетворення Фур'є (14.1, 14.2). При цьому слід ураховувати особливості інтегрального перетворення.

Спектральна функція $S(\omega)$ являє собою комплексну спектральну щільність сигналу, безперервну на частотному інтервалі від $-\infty$ до ∞. Якщо $s(t)$ – дійсна функція, то спектр цієї функції є сполучене симетричним щодо нульової частоти

$$S(-\omega)=S^*(\omega)$$

і містить парну дійсну й непарну уявну частину:

$$S(\omega)=A(\omega)-jB(\omega)$$
, (14.3)

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos(\omega t)dt$$
, (14.4)

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin(\omega t)dt$$

. (14.5)

Як і у випадку рядів Фур'є, дійсні парні функції мають дійсний парний спектр, представлений тільки спектральною функцією $A(\omega)$, а дійсні непарні – непарний і тільки уявний спектр, представлений спектральною функцією B(?).

Приклад спектральної функції $S(f)$ для сигналу $s(t)$ на рисунку 14.2 наведений на рисунку 14.3. Як правило, графічне відображення спектральних функцій виконується у вигляді модуля й аргументу спектральної функції (амплітудного й фазового спектра), наведених на рисунку 14.4.

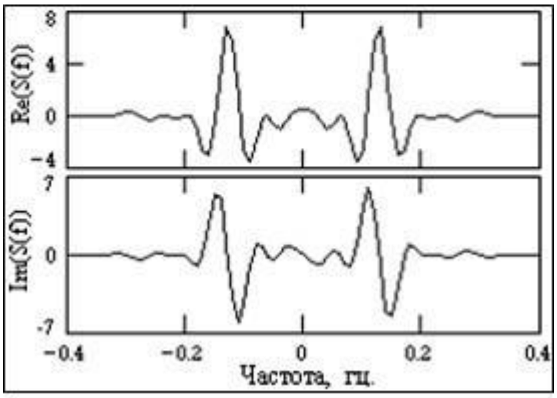


Рисунок 14.3 – Спектральна функція

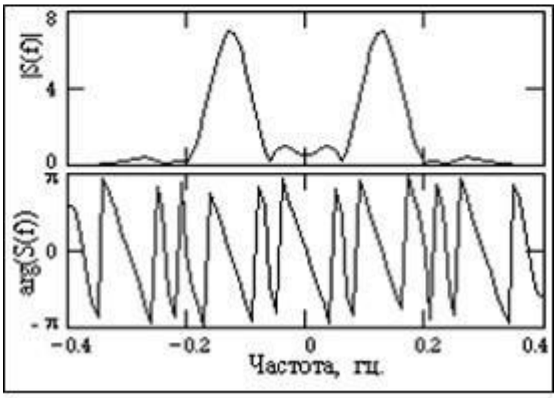


Рисунок 14.4 – Модуль і аргумент спектральної функції

Таке представлення аналогічне (4.1.3') для АЧХ і ФЧХ сигналів:

$$R(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$$

, (14.6)

$\varphi(\omega) = arctg(-B(\omega) / A(\omega))$, (14.7)

але відносно функції модуля також має сенс спектральної щільності модуля.

Сполучена симетричність спектральної функції дозволяє у формулах (14.1)-(14.2) міняти місцями знаки аргументів в експонентах, при цьому змінюється тільки знак уявної частини й аргументу спектра.

Ще раз підкреслимо відмінність між спектрами й спектральними функціями сигналів. При практичному використанні формули (14.2) для обчислення спектральних функцій кінцевих сигналів, заданих на певному інтервалі Т, межі інтегрування встановлюються по границях інтервалу Т. Немає необхідності виконувати інтегрування в нескінченних межах, якщо за межами інтервалу Т нульові значення сигналу.

Однак при порівнянні формули (14.2) з виразом (4.1.2) можна бачити, що значення інтеграла (14.2) не нормуються на величину інтервалу Т. Звідси випливає, що числові відліки значень модуля функції $S(\omega)$ для певних значень ω_i не є амплітудними значеннями відповідних гармонійних коливань із частотою ω_i. Значення $S(\omega)$ в порівнянні зі значеннями функції $S(n\Delta\omega)$ по (4.1.2) завищені на множник Т. Це можна пояснити тим, що зворотне перетворення Фур'є по (14.1) являє собою пряме підсумовування гармонік з відповідними амплітудами коливань, у той час як інтегрування по (14.1) являє собою граничне підсумовування значень $S(\omega)\cdot d\omega$, де $d\omega = 2\pi / T$ (або, у звичайному частотному представленні, $df = 1/T$) при $T \to \infty$.

Що стосується спектра фазових кутів, то значення по (14.7) і по (4.1.3') при $n\Delta\omega = \omega_i$ повністю збігаються, тому що їхнє обчислення проводиться по відношенню уявної й дійсної частини спектра, наявність (або відсутність) постійного множника в яких не міняє значення відносини.

48.1.2 Тригонометрична форма

Тригонометрична форма інтеграла Фур'є (при об'єднанні комплексно сполучених частин спектральних функцій):

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\sin(\omega t)]d\omega$$. (14.8)

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega)\cos(\omega t - \varphi(\omega))d\omega$$. (14.8')

Пряме й зворотне перетворення Фур'є подібні. Будь-яка теорема, доведена для прямого перетворення Фур'є, справедлива й для зворотного перетворення, і навпаки. Це безпосередньо випливає з виразів прямого й зворотного перетворення Фур'є, які різняться тільки знаком в експоненті. Особливо наочно $t = 0$унок 14.5) і $B(\omega) = 0$для парних сигналів

(заданих функціями, симетричними відносно), для яких і, відповідно, фазовий спектр дорівнює нулю:

$$s(t) = 2\int_0^\infty S(f)\cos(j2\pi ft)df,$$

$$S(f) = 2\int_0^\infty s(t)\cos(j2\pi ft)dt.$$

У математичному аналізі для спрощення записів використовують символічну форму позначення перетворення Фур'є:

$$s(t) \Leftrightarrow S(f), \quad s(t) \Leftrightarrow S(\omega)$$

,

де, у загальному випадку, як фур'є-образ функції, так і вона сама можуть бути комплексними.

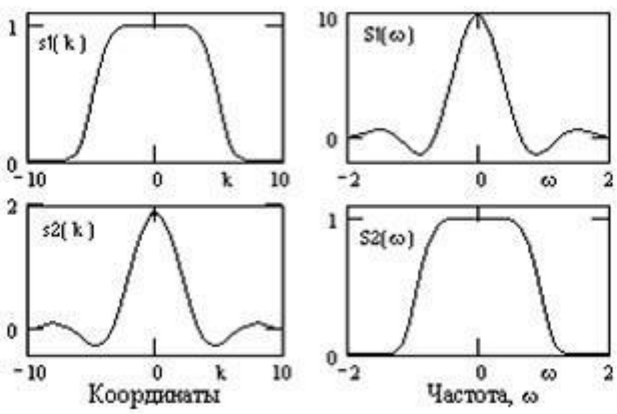


Рисунок 14.5

Для фізичних сигналів і їх досить коректних математичних моделей перетворення Фур'є, як правило, завжди існує. Із чисто математичних позицій сигналу $s(t)$ можна зіставити спектральну щільність $S(\omega)$, якщо існує інтеграл:

$$\int_0^\infty |s(t)|dt < \infty$$

(14.9)

48.1.3 Корисні співвідношення

Для дійсного сигналу $s(t)$ має місце

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\exp(j\omega t)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S(\omega)|\exp(j(\omega t+\varphi))d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|S(\omega)|\cos(\omega t+\varphi(\omega))d\omega$$

При $\omega=0$ $S(0)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)dt$ – площа сигналу.

При $t=0$ $s(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)d\omega$.

48.1.4 Узагальнений ряд Фур'є

Тригонометричні функції не є єдино можливими функціями розкладання сигналів. У загальному випадку розкладання сигналу $s(t)$ на інтервалі (a,b) в ряд виду $\sum_{k=0}^{N}c_k\varphi_k(t)$ може бути виконане по довільних функціях $\varphi_k(t)$. При завданні мінімальної похибки наближення

$$\Delta s=\int_{a}^{b}\left[s(t)-\sum_{k=0}^{N}c_k\varphi_k(t)\right]^2dt$$

коефіцієнти c_k можуть бути знайдені із системи лінійних рівнянь:

$$\frac{\partial\Delta s}{\partial c_k}=\int_{a}^{b}\frac{\partial}{\partial c_k}\left[s(t)-\sum_{k=0}^{N}c_k\varphi_k(t)\right]^2dt=0,\ \ k=0,1,2,\ldots N$$

.

При лінійній незалежності функцій $\varphi_k(t)$ дана система рівнянь має єдиний розв'язок. Якщо всі функції $\varphi_k(t)$ взаємно ортогональні й відповідним нормуванням забезпечена їхня ортонормованність

$$\int_{a}^{b}\varphi_m(t)\varphi_n(t)dt=\begin{cases}1, & n=m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

то процес знаходження коефіцієнтів c_k виявляється найбільш простим:

$$c_k = \int_a^b s(t)\varphi_k(t)\,dt = 0$$

,

і для прийнятого значення N похибка наближення Δs є мінімальною. Якщо при $N \to \infty$ має місце $\Delta s \to 0$, система функцій $\varphi_k(t)$ називається базисною системою координат простору сигналів $L^2[a,b]$. При цьому має місце рівність:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(t)$$

.

Розкладання по ортонормованній системі базисних функцій називається *узагальненим рядом Фур'є*, а набір коефіцієнтів c_k являє собою спектр функції $s(t)$ у відповідному базисі. Залежно від специфіки розв'язуваних завдань застосовуються різні системи базисних функцій. Зокрема, використовуються розкладання по поліномах Лежандра, Чебишева, Лагерра, Ерміта, функціям Хаара й Уолша й т.п.

48.2 Дискретне перетворення Фур'є

Дискретне перетворення Фур'є може бути отримане безпосередньо з інтегрального перетворення дискретизацій аргументів ($t_k = k\Delta t,\ f_n = n\Delta f$):

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp(-j2\pi ft)dt, \qquad S(f_n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t_k)\exp(-j2\pi f_n k\Delta t)dt$$

(14.10)

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\exp(j2\pi ft)df, \qquad s(t_k) = \Delta f\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(f_n)\exp(j2\pi\Delta fkt_k)dt$$

, (14.11)

Нагадаємо, що дискретизація функції за часом приводить до періодизації її спектра, а дискретизація спектра по частоті - до періодизації функції.

Не слід також забувати, що значення (14.10) числового ряду $S(f_n)$ являється дискретизацією безперервної функції $S'(f)$ спектра дискретної функції $s(t_k)$, так само як і значення (14.11) числового ряду $s(t_k)$ є дискретизацією безперервної функції $s'(t)$, і при відновленні цих безперервних функцій $S'(f)$ і $s'(t)$ по їхнім дискретним відлікам відповідність $S'(f) = S(f)$ і $s'(t) = s(t)$ гарантована тільки при виконанні теореми Котельникова-Шеннона.

Для дискретних перетворень $s'(t)$ $s(k\Delta t) \Leftrightarrow S(n\Delta f)$, і функція, і її спектр дискретні й періодичні, а числові масиви їх представлення відповідають завданню на головних періодах $T = N\Delta t$ (від 0 до T або від $-T/2$ до $T/2$), і $2f_N = N\Delta f$ (від $-f_N$ до f_N), де N – кількість відліків, при цьому:

$$\Delta f = 1/T = 1/(N\Delta t),$$
$$\Delta t = 1/2f_N = 1/(N\Delta f),$$
$$\Delta t\Delta f = 1/N,$$
$$N = 2Tf_N. \quad (14.13)$$

Співвідношення (14.13) являється умовами інформаційної рівноцінності динамічної й частотної форм представлення дискретних сигналів. Іншими словами: число відліків функції і її спектра повинні бути однаковими. Але кожний відлік комплексного спектра представляється двома дійсними числами й, відповідно, число відліків комплексного спектра в 2 рази більше відліків функції? Це так.

Однак представлення спектра в комплексній формі - не більш ніж зручне математичне представлення спектральної функції, реальні відліки якої утворюються додаванням двох сполучені комплексних відліків, а повна інформація про спектр функції в комплексній формі укладена тільки в одній його половині - відліках дійсної й уявної частини комплексних чисел у частотному інтервалі від 0 до f_N, тому що інформація другої половини діапазону від 0 до $-f_N$ являється сполученою з першою половиною й ніякої додаткової інформації не несе.

При дискретному представленні сигналів аргумент tk звичайно проставляється номерами відліків k (за замовчуванням $\Delta t = 1, k = 0, 1, \ldots N-1$), а перетворення Фур'є виконуються по аргументу n (номер кроку по частоті) на головних періодах.

При значеннях N, кратних 2:

$$S(f_n) \equiv S_n = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \exp(-j2\pi kn/N), \quad n = -N/2, \ldots, 0, \ldots, N/2 \quad (14.14)$$

$$s(t_k) \equiv s_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} S_n \exp(j2\pi kn/n), \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

. (14.15)

Головний період спектра в (14.14) для циклічних частот від -0.5 до 0.5, для кутових частот від $-\pi$ до π. При непарному значенні N границі головного періоду по частоті (значення $\pm f_N$) перебувають на половину кроку по частоті за відліками $\pm(N/2)$ й, відповідно, верхня межа підсумовування в (14.15) установлюється рівною $N/2$.

В обчислювальних операціях на ЕОМ для виключення негативних частотних аргументів (негативних значень номерів n) і використання ідентичних алгоритмів прямого й зворотного перетворення Фур'є головний період спектра звичайно приймається в інтервалі від 0 до $2f_N (0 \le n \le N)$, а підсумовування в (14.15) проводиться відповідно від 0 до $N-1$. При цьому слід ураховувати, що комплексно сполученим відлікам $S_n{}^*$ інтервалу (-N,0) двостороннього спектра в інтервалі $0-2f_N$ відповідають відліки S_{N+1-n} (тобто сполученими відліками в інтервалі $0-2f_N$ є відліки S_n й S_{N+1-n}).

Приклад 14.1.

На інтервалі $T=[0,99], N=100$, заданий дискретний сигнал $s(k)=\sum_{i=3}^{8}\delta(k-i)$ - прямокутний імпульс із одиничними значеннями на точках k від 3 до 8. Форма сигналу й модуль його спектра в головному частотному діапазоні (обчислення по формулі $S(n)=\sum_k s(k)\exp(-j2\pi kn/100)$ із кроком по частоті $\Delta\omega = 2\pi/100$, наведені на рисунку 14.6.

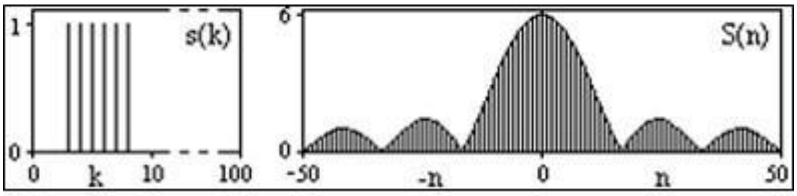


Рисунок 14.6 – Дискретний сигнал і модуль його спектра

На рисунку 14.7 наведена, що обгинає значення іншої форми представлення головного діапазону спектра.

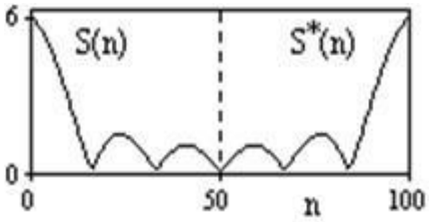


Рисунок 14.7 – Модуль спектра

Незалежно від форми представлення спектр періодичний, у чому неважко переконатися, якщо обчислити значення спектра для більшого інтервалу аргументу n зі збереженням того ж кроку по частоті, як це показане на рисунку 14.8 для, що обгинає значень спектра.

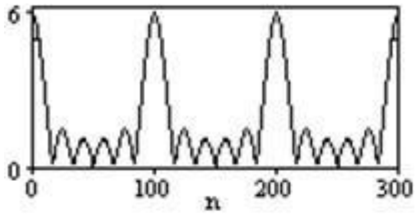


Рисунок 14.8 – Модуль спектра

На рисунку 14.9. показане зворотне перетворення Фур'є для дискретного спектра, виконане по формулі $s'(k)=(1/100)\sum_n S(n)\exp(j2\pi kn/100)$, яке показує періодизацію вихідної функції $s(k)$, але головний період $k=\{0,99\}$ цієї функції повністю збігається з вихідним сигналом $s(k)$.

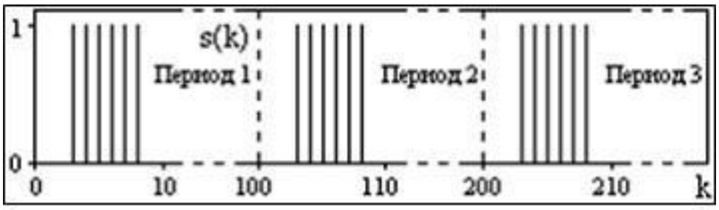


Рисунок 14.9 – Зворотне перетворення Фур'є

Перетворення (14.9-14.15) називають дискретними перетвореннями Фур'є (ДПФ). Для ДПФ, у принципі, слушні всі властивості інтегральних перетворень Фур'є, однак при цьому слід ураховувати періодичність дискретних функцій і спектрів. Добутку спектрів двох дискретних функцій (при виконанні яких-небудь операцій при обробці сигналів у частотній виставі, як, наприклад, фільтрації сигналів безпосередньо в частотній формі) буде відповідати згортка періодизованих функцій у тимчасовій виставі (і навпаки). Така згортка називається циклічною (див. розділ 8.4) і її результати на кінцевих ділянках інформаційних інтервалів можуть суттєво відрізнятися від згортки фінітних дискретних функцій (лінійної згортки).

З виразів ДПФ можна бачити, що для обчислення кож N^2 гармоніки потрібно N

операцій комплексного множення й додавання й відповідно операцій на повне виконання ДПФ. При більших об'ємах масивів даних це може приводити до істотних тимчасових витрат. Прискорення обчислень досягається при використанні швидкого перетворення Фур'є.

48.3 Швидке перетворення Фур'є

Швидке перетворення Фур'є (ШПФ, fast Fourier transform - FFT). Він базується на тому, що при обчисленнях серед множників (синусів і косинусів) є багато періодично повторюваних значень (у силу періодичності функцій). Алгоритм ШПФ групує доданки з однаковими множниками в пірамідальний алгоритм, значно скорочуючи число множень за рахунок виключення повторних обчислень. У результаті швидкодія ШПФ залежно від N може в сотні раз перевершувати швидкодія стандартного алгоритму. При цьому слід підкреслити, що алгоритм ШПФ навіть точніше стандартного, тому що скорочуючи число операцій, він приводить до менших помилок округлення.

Припустимо, що масив чисел s_k містить $N = 2^r$ відліків (r - ціле). Розділимо вихідний масив на два перші проміжні масиви з парними й непарними відліками:

$$s_k{}' = s_{2k},\ s_k{}'' = s_{2k+1},\ 0 \le k \le N/(2-1)$$

.

Виконаємо ДПФ кожного масиву з урахуванням того, що крок функцій рівний 2 (при $\Delta t = 1$), а період проміжних спектрів буде відповідно рівний $N/2$:

$$s_k{}' \Rightarrow S_n',\ s_k{}'' \Rightarrow S_n'',\ 0 \le n \le N/(2-1)$$

.

Для одержання однієї половини шуканого спектра S_n складемо отримані спектри з урахуванням теореми запізнювання, тому що відліки функції s_k'' зрушені відносно s_k' на один крок дискретизації:

$$S_n = S_n{}' + S_n{}'' \cdot \exp(-j2\pi n / N)$$

. (14.16)

Друга половина спектра, комплексно сполучена з першою, з урахуванням періоду повторення N/2 проміжних спектрів визначається виразом:

$$S_{n+N/2} = S_n' + S_n'' \cdot \exp(-j2\pi(n + N/2)/N) = S_n' - S_n'' \cdot \exp(-j2\pi n / N)$$

. (14.17)

Не $N^2 / 4$ бачити, що для обчислення повного спектра в цьому випадку буде

потрібно операцій для обчислення проміжних спектрів плюс ще N операцій комплексного множення й додавання, що створює відчутний ефект у порівнянні із ДПФ.

Але розподіл масивів на дві частини може бути застосоване й до перших проміжних масивів, і до других, і т.д. доти, поки в масивах не залишиться по одному відліку, фур'є - перетворення яких дорівнює самому відліку. Тим самим, алгоритм перетворення перетворюється в пірамідальний алгоритм перестановок з

$\exp(-j2\pi n / N)$

додаванням/вирахуванням і з одиничним множенням на значення відповідного рівня піраміди.

Перший алгоритм ШПФ на даному принципі (з безлічі модифікацій, що існують у цей час) був розроблений Лантухи-тьюкі в 1965 р. і дозволив підвищити швидкість обчислень в N/r раз у порівнянні із ДПФ. Чим більше N, тим більше ефект ШПФ. Так, при

$N / r \approx 100$

N = 1024 маємо r = 10 і відповідно . Що стосується умови по кількості точок

$N = 2^r$ $N_k \le 2^r$

, то воно розглядається у варіанті , де r - мінімальне ціле.

$N_k < 2^r$ 2^r

Масиви з доповнюється до нулями, що не змінює форму спектра.

$\Delta\omega$ $\Delta\omega = 2\pi / 2^r < 2\pi / N$

Змінюється тільки крок за поданням спектра ( ), який трохи надлишковий по адекватному представленню сигналу в частотній області. У цей час існують і алгоритми ШПФ із іншими підставами і їх комбінаціями, при яких не потрібно

2^r

доповнення сигналів нулями до .

Зауважимо, що відповідно до (14.17) відліки, сполучені із правою половиною

$(0, \pi)$ $(-\pi, 0)$

головного частотного діапазону , ставляться не до діапазону , а до діапазону

$(\pi, 2\pi)$

, що, враховуючи періодичність спектра дискретних даних, значення не має, тобто

$(0, 2\pi)$

вихідний частотний діапазон ШПФ рівний .

Загальна кількість відліків комплексного спектра в цьому умовно головному діапазоні дорівнює кількості точок вихідного сигналу (з урахуванням нульових точок при

$N = 2^r$

доповненні сигналу до). Алгоритм швидкого зворотного перетворення (ЗШПФ) тождественен алгоритму прямого ШПФ.

Алгоритми прямого й зворотного ШПФ широко використовуються в сучасному програмному забезпеченні для аналізу й обробки цифрових даних. Приклад виконання ШПФ наведений на рисунку 14.10.

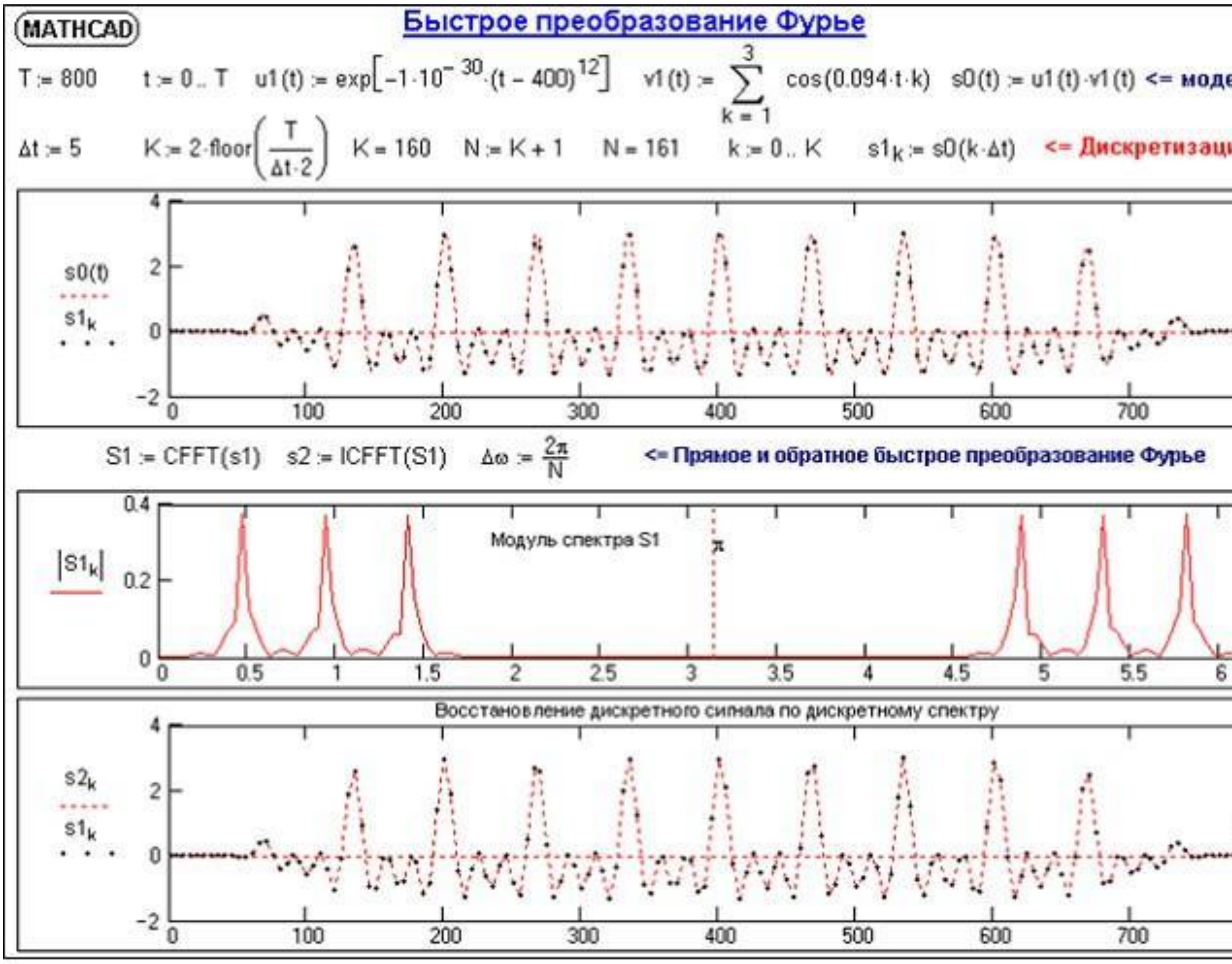


Рисунок 14.10 – Приклад ШПФ

Розділ 49 Короткочасне(віконне) перетворення Фур'є

49.1 Загальний принцип

При короткочасному (віконному) перетворенні Фур'є (ОПФ) повний часовий інтервал сигналу, особливо при великій його тривалості, розділяється на короткі підінтервали – тимчасові вікна, і перетворення проводиться послідовно для кожного підінтервала окремо. Тим самим здійснюється перехід до частотно-тимчасового (частотно-координатному) представленню сигналів, що якоюсь мірою дозволяє виділяти й аналізувати на тимчасовій осі особливості нестаціонарних сигналів і тимчасові зміни їх спектрального складу. За замовчуванням припускається, що в межах кожного тимчасового вікна сигнал є стаціонарним.

Віконне перетворення виконується відповідно до виразу:

$$S(\omega, b_k) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\ w(t-b_k) \exp(-j\omega t)\ dt$$

. (14.18)

Функція w(t-b) являє собою функцію вікна зсуву перетворення по координаті t, де $b_k = k\Delta b$ом b задаються фіксовані значення зсуву. При зсуві вікон з рівномірним кроком

.

У якості вікна перетворення може використовуватися як найпростіше прямокутне вікно ($w(t)=1$ у межах вікна й 0 за його границями), так і спеціальні вагові вікна (Бартлетта, Гаусса, Кайзера та ін.) малі викривлення, що забезпечують, спектра за рахунок нейтралізації явища Гиббса на границях віконних відрізків сигналів.

При цьому для кожного положення вікна на тимчасовій осі сигналу обчислюється свій комплексний спектр. Ефективна ширина віконної функції, як правило, зберігається постійної по всьому інтервалу сигналу.

49.2 Приклад віконного перетворення

Приклад віконного перетворення для нестаціонарного сигналу на великому рівні шуму наведений на рисунку 14.11. По спектру сигналу в цілому можна судити про наявність у його сполуці гармонійних коливань на трьох частотах. Віконне перетворення не тільки підтверджує даний висновок, але й показує конкретну локальність коливань по інтервалу сигналу й співвідношення між амплітудами цих коливань.

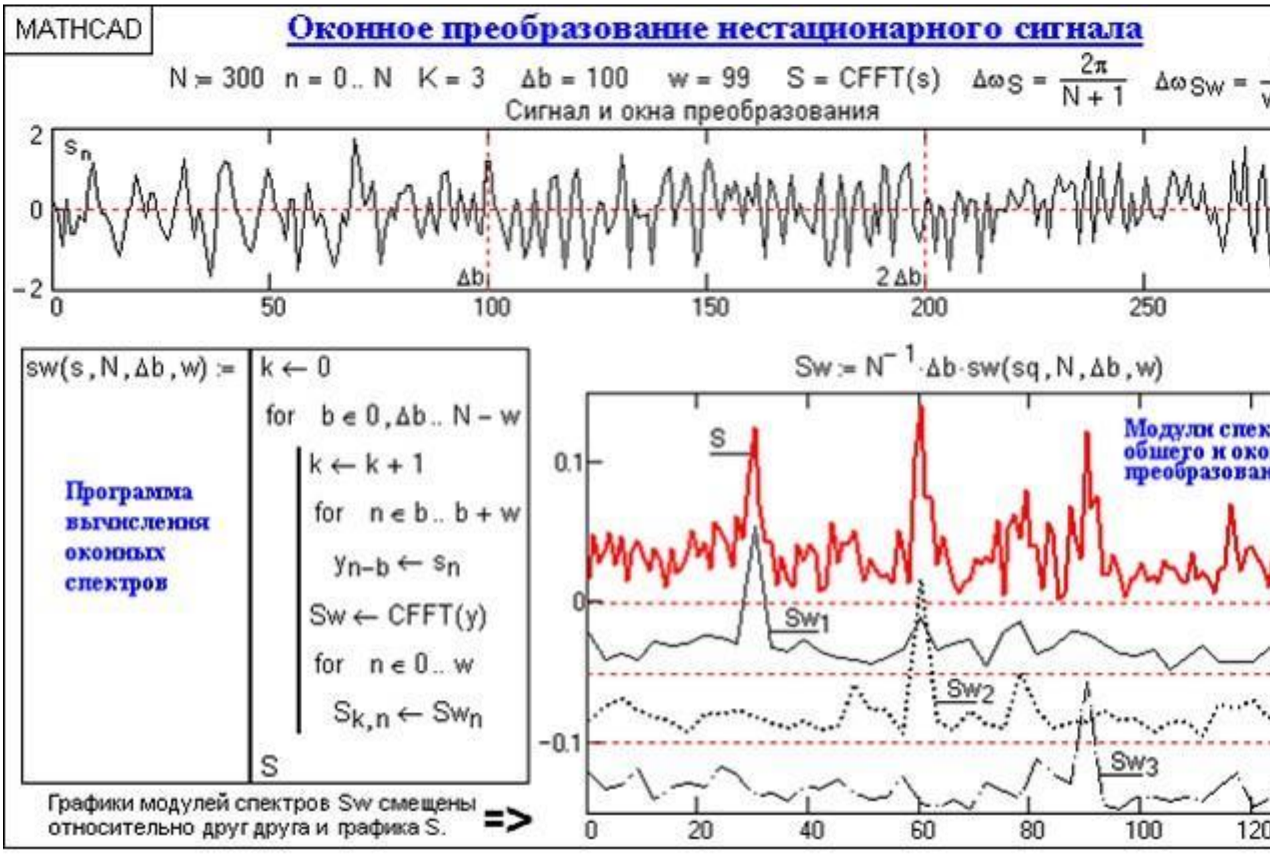


Рисунок 14.11 – Віконне перетворення для нестаціонарного сигналу

При $\Delta\omega = 2\pi / b$ онної функції, рівної b, частотна роздільна здатність визначається

значенням . При необхідній велич $b = 2\pi / \Delta\omega$ ого розділення відповідно

ширина віконної функції повинна бути рівна . Для віконного перетворення $N = 300$ обмеження є принципови $\Delta b = 100$ для рисунку 14.11 при розмірі масиву даних

і ширині віконної фу $N / \Delta b = 3$ частотна роздільна здатність результатів

$Sw(n\Delta\omega_{Sw})$ ня зменшується в разу в порівнянні з вихід $S(n\Delta\omega_S)$ ими, і графіки

по коо $\Delta\omega_{Sw} = 3\Delta\omega_S$ наочного зіставл $n = 0, 3, 6, \ \ldots \ , N$ побудовані із

кроком по частоті , тобто по точках .

49.3 Частотно-часове віконне перетворення Фур'є (ОПФ)

Функція віконного перетворення (14.18) може бути переведена у варіант із незалежними змінними й за часом, і по частоті:

$$S(t,\omega) = \int_{\tau} s(t-\tau) w(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad . (14.19)$$

Координатна роздільна здатність віконного перетворення визначається шириною віконної функції й, у силу принципу невизначеності Гейзенберга, обернено пропорційна частотної роздільної здатності. Гарна роздільна здатність за часом має на увазі невелике вікно часу, якому відповідає погана частотна роздільна здатність і навпаки. Оптимальним уважається ОПФ із гауссовим вікном, яке одержало назву перетворення Габора (Gabor). Приклад перетворення наведений на рисунку 14.12 (у дискретному варіанті обчислень).

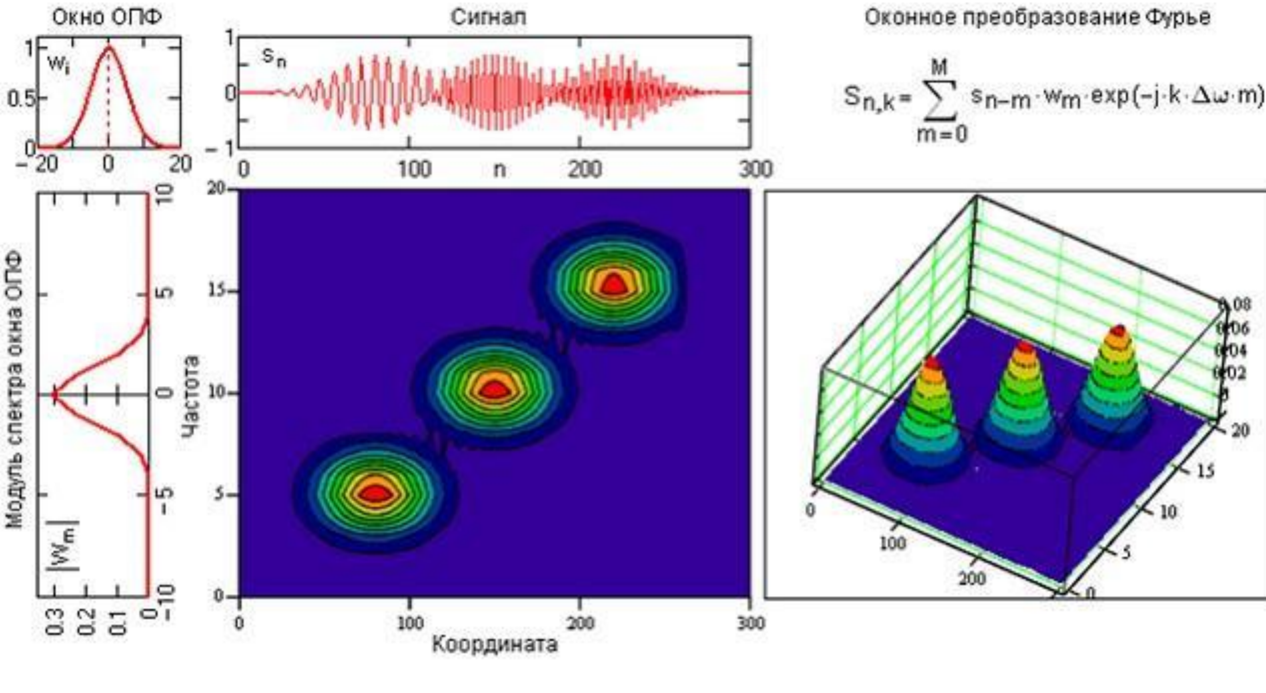


Рисунок 14.12 – Перетворення Габора

На рисунку 14.13 наведений приклад обчислення й представлення (модуля правої частини головного діапазону сп $sq(n)$) результатів спектрограми при дискретному завданні

зашумленого вхідного сигналу . Сигнал являє собою суму трьох послідовних радіоімпульсів з w_i ними частотами без пауз, з відношенням сигнал/шум, близьки $b \cong 34$.

Віконна функція $M = 50$ а в однобічному варіанті з ефективною шириною вікна й

повним розміром .

$\Delta\omega = 0{,}1$

Установлений для результатів крок по частоті трохи вище фактичної

$2\pi / M = 0{,}126$

роздільної здатності . Для забезпечення роботи віконної функції по всьому інтервалу сигналу задавалися початкові й кінцеві умови обчислень (продовження на М точок обох кінців сигналу нульовими значеннями).

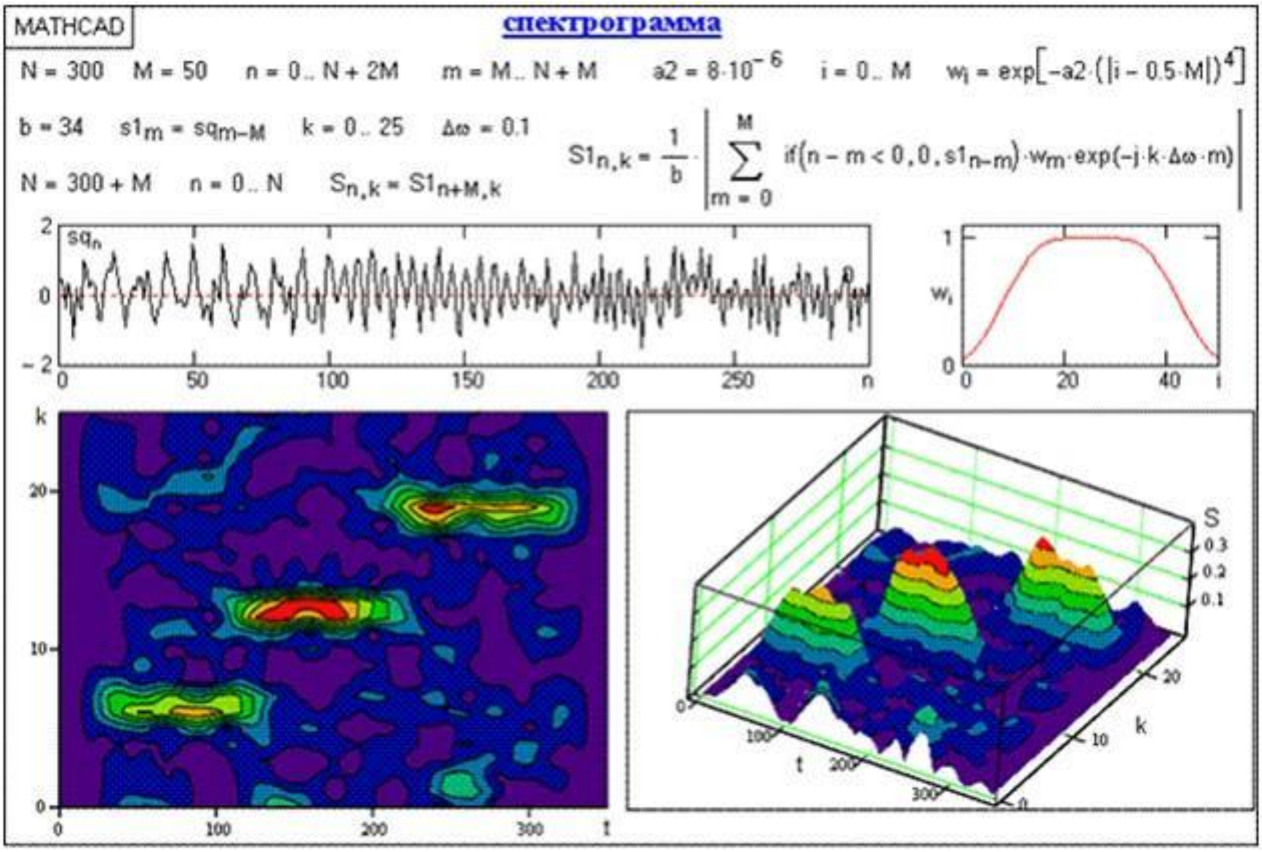


Рисунок 14.13 – Результати спектрограми при дискретному завданні зашумленого вхідного сигналу

Як видно з наведених прикладів, віконне перетворення дозволяє виділити інформативні особливості сигналу й за часом, і по частоті. Роздільна здатність локалізації по координатах і по частоті визначається принципом невизначеності Гейзенберга. У силу цього принципу неможливо одержати довільно точне частотно-часове представлення сигналу.

На рисунку 14.14 наведений приклад результатів спектрограми при дискретному завданні зашумленого вхідного сигналу, що складається з 4-х непересічних інтервалів, у кожному з яких сума двох гармонік різної частоти. У якості вікна застосована гауссова функція різної ширини. Вузьке вікно забезпечує кращий тимчасовий дозвіл і чітку фіксацію границь інтервалів, але широкі піки частот у межах інтервалів.

Широке вікно напроти – чітке відзначає частоти інтервалів, але з перекриттям границь тимчасових інтервалів. При розв'язку практичних завдань доводиться вибирати вікно для аналізу всього сигналу, тоді як різні його ділянки можуть вимагати застосування різних вікон. Якщо сигнал складається з далеко віддалених один від одного частотних компонентів, то можна пожертвувати спектральним вирішенням на користь тимчасового, і навпаки.

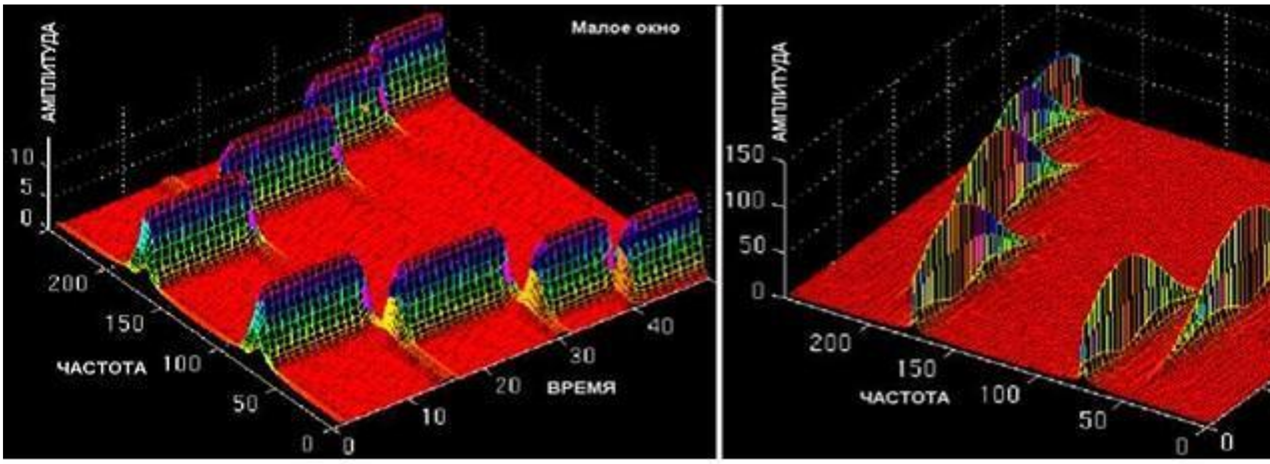


Рисунок 14.14 – Результати спектрограми при дискретному завданні зашумленого вхідного сигналу

Розділ 50 Теорема Вінера-Хінчіна

Розглянемо сигнал $q(t)$, що представляє собою одну реалізацію випадкового стаціонарного ергодичного процесу тривалістю Т. Для сигналу $q(t)$ може бути визначений спектр $Q(\omega)$. Якщо зрушити на τ реалізацію процесу, то одержимо спектр $Q(\omega)\exp(j\omega t)$. Для дійсних сигналів $Q(\omega) = Q^*(\omega)$ рівність Парсеваля по енергії взаємодії двох сигналів:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, Y^*(f)\, df \tag{14.20}$$

може бути записане в наступній формі:

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(t)q(t+\tau)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega)Q^*(\omega)\ \exp(j\omega\tau)\,d\omega$$

. (14.21)

Поділимо обидві частини даного рівності на T і перейдемо до межі при $T \to \infty$, при цьому в його лівій частині ми побачимо вираз для функції кореляції, а в правій частині - перетворення Фур'є спектра потужності сигналу:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T} q(t)q(t+\tau)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty} |Q(\omega)|^2 \exp(j\omega t)d\omega$$

, (14.22)

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)\ \exp(j\omega\tau)\,d\omega$$

. (14.23)

Звідси випливає, що кореляційна функція випадкового стаціонарного ергодичного процесу являє собою зворотне перетворення Фур'є його спектра потужності. Відповідно, для спектра потужності випадкового процесу маємо пряме перетворення Фур'є:

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\ \exp(-j\omega\tau)\,d\tau$$

. (14.24)

У цьому полягає суть теореми Вінера-Хінчіна. Функції $W(\omega)$ і $R(\tau)$ є дійсними й парними, а відповідно в тригонометричній формі:

$$R(\tau) = 2\int_{0}^{\infty} W(f)\cos(2\pi f\tau)df,$$

$$W(f) = 2\int_{0}^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau.$$

Тема 23. Основи вейвлет-перетворення сигналів

Вступ

Вейвлет – перетворення сигналів є узагальненням спектрального аналізу, типовий представник якого – класичне перетворення Фур'є. Термін "вейвлет" (wavelet) у перекладі з англійського означає "маленька (коротка) хвиля". Вейвлети - це узагальнена назва сімейств математичних функцій певної форми, які локальні в часі й по частоті, і в яких усі функції виходять із однієї базової (, що породжує) за допомогою її зсувів і розтягань по осі часу. Вейвлет-перетворення розглядають аналізовані тимчасові функції в термінах коливань, локалізованих за часом і частоті. Як правило, вейвлет-перетворення (WT) підрозділяють на дискретне (DWT) і неперервне (CWT).

DWT використовується для перетворень і кодування сигналів, CWT - для аналізу сигналів. Вейвлет-перетворення в цей час приймаються на озброєння для величезного числа різноманітних застосувань, нерідко заміняючи звичайне перетворення Фур'є. Це спостерігається в багатьох областях, включаючи молекулярну динаміку, квантову механіку, астрофізику, геофізику, оптику, комп'ютерну графіку й обробку зображень, аналіз ДНК, дослідження білків, дослідження клімату, загальну обробку сигналів і розпізнавання мови.

Вейвлетний аналіз являє собою особливий тип лінійного перетворення сигналів і відображуваних цими сигналами фізичних даних про процеси й фізичних властивостях природних середовищ і об'єктів. Базис власних функцій, по якому проводиться вейвлетне розкладання сигналів, має багатьма специфічними властивостями й можливостями. Вейвлетні функції базису дозволяють сконцентрувати увагу на тих або інших локальних особливостях аналізованих процесів, які не можуть бути виявлені за допомогою традиційних перетворень Фур'є й Лапласа. До таких процесів у геофізиці належать поля різних фізичних параметрів природних середовищ. У першу чергу це стосується полів температури, тиску, профілів сейсмічних трас і інших фізичних величин. Принципове значення має можливість вейвлетів аналізувати нестаціонарні сигнали зі зміною компонентного змісту в часі або в просторі.

Вейвлети мають вигляд коротких хвильових пакетів з нульовим інтегральним значенням, локалізованих по осі аргументів (незалежних змінних), інваріантних до зсуву й лінійних до операції масштабування (стиснення/розтягання). По локалізації в часовому і частотному представленні вейвлети займають проміжне положення між гармонійними (синусоїдальними) функціями, локалізованими по частоті, і функцією Дірака, локалізованої в часі.

Теорія вейвлетів не є фундаментальною фізичною теорією, але вона дає зручний і ефективний інструмент для розв'язання багатьох практичних задач. Основна область застосування вейвлетних перетворень – аналіз і обробка сигналів і функцій, нестаціонарних у часі або неоднорідних у просторі, коли результати аналізу повинні містити не тільки загальну частотну характеристику сигналу (розподіл енергії сигналу по частотних складових), але й відомості про певні локальні координати, на яких проявляють себе ті або інші групи частотних складових, або на яких відбуваються швидкі зміни частотних складових сигналу.

У порівнянні з розкладанням сигналів на ряди Фур'є, вейвлети здатні з набагато більш високою точністю представляти локальні особливості сигналів, аж до розривів 1-го роду (стрибків). На відміну від перетворень Фур'є, вейвлет-перетворення одномірних сигналів забезпечує двовимірну розгортку, при цьому частота і координата розглядаються як незалежні змінні, що дає можливість аналізу сигналів відразу у двох просторах.

Одна з головних і особливо плідних ідей вейвлетного представлення сигналів на різних рівнях декомпозиції (розкладання) полягає в поділі функцій наближення до сигналу на дві групи: апроксимуючу - грубу, з досить повільною часовою динамікою змін, що й деталізує - з локальною й швидкою динамікою змін на фоні плавної динаміки, з наступним їхнім дробленням і деталізацією на інших рівнях декомпозиції сигналів. Це можливо як у часовій, так і в частотній областях представлення сигналів вейвлетами.

Розділ 89 Джерела Вейвлет - перетворення

89.1 Історична довідка

Історія спектрального аналізу сходить до І. Бернуллі, Ейлеру й Фур'є, який уперше побудував теорію розкладання функцій у тригонометричні ряди. Однак це розкладання довгий час застосовувалося як математичний прийом й не зв'язувалося з якими-небудь фізичними поняттями. Спектральні представлення застосовувалися й розбудовувалися лише порівняно вузьким колом фізиків-теоретиків. Однак, починаючи з 20-х років минулого століття, у зв'язку з бурхливим розвитком радіотехніки й акустики, спектральні розкладання набули фізичний сенсу й практичне застосування.

Основним засобом аналізу реальних фізичних процесів став гармонійний аналіз, а математичною основою аналізу - перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є розкладає довільний процес на елементарні гармонійні коливання з різними частотами, а всі необхідні властивості й формули виражаються за допомогою однієї базисної функції $\exp(j\omega t)$ або двох дійсних функцій $\sin(\omega t)$ і $\cos(\omega t)$. Гармонійні коливання мають широке поширення в природі, і тому зміст перетворення Фур'є інтуїтивно зрозумілий незалежно від математичної аналітики.

Перетворення Фур'є має рядом чудових властивостей. Областю визначення перетворення є простір L^2 інтегрувальних із квадратом функцій, і багато реальні фізичні процеси, спостережувані в природі, можна вважати функціями часу, що належать цьому простору. Для застосування перетворення розроблені ефективні обчислювальні процедури типу швидкого перетворення Фур'є (ШПФ). Ці процедури входять до складу всіх пакетів прикладних математичних програм і реалізовані апаратно в різних процесорах обробки сигналів.

Було також установлене, що функції можна розкласти не тільки по синусах і косинусам, але й по інших ортогональних базисних системах, наприклад, поліномам Лежандра й Чебишева, функціям Лагерра й Ермита. Однак практичне застосування вони одержали тільки в останні десятиліття XX століття завдяки розвитку обчислювальної техніки й методів синтезу цифрових лінійних систем обробки даних. Проте, безпосередньо для цілей спектрального аналізу подібні ортогональні функції не знайшли широкого застосування через труднощі інтерпретації одержуваних результатів. По тим же причинам не одержали розвитку в спектральному аналізі функції типу " прямокутної хвилі" Хаара, Радемахера, Уолша, Крестенсена.

Теоретичні дослідження ортогональних базисних систем загального вигляду призвели до створення теорії узагальненого спектрального аналізу, яка дозволила оцінити межі практичного застосування класичного спектрального аналізу Фур'є, і створила методи й критерії синтезу базисних систем для розв'язку конкретних практичних задач. Ілюстрацією цьому є теорія базисних функцій типу вейвлет, що активно розбудовується з початку 80-х років минулого сторіччя.

Завдяки прозорості фізичної інтерпретації результатів аналізу, подібного з "частотним" підходом у перетворенні Фур'є, ортогональний базис вейвлетів став популярним і ефективним засобом аналізу нестаціонарних сигналів і зображень в акустику, сейсміці, медицині й інших областях.

Вейвлет-Аналіз є різновидом спектрального аналізу, у якому роль простих коливань відіграють функції особливого роду, називані вейвлетами. Базисна функція вейвлет – це деяке "коротке" коливання, але не тільки. Поняття частоти класичного спектрального аналізу тут замінене масштабом, і, щоб перекрити "короткими хвилями" усю часову вісь, введений зсуву функцій у часі.

Таким чином, базис вейвлетів – це функції типу $\psi((t-b)/a)$, де b - зсув, a – масштаб. Крім того, щоб бути вейвлетом, функція $\psi(t)$ повинна мати нульову площу і, ще краще, рівними нулю перший, другий та інші моменти. Фур'є-перетворення таких функцій дорівнює нулю при $\omega = 0$ й має вигляд смугового фільтра. При різних значеннях 'a' це буде набір смугових фільтрів. Сімейства вейвлетів у часовій або частотній області використовуються для подання сигналів і функцій у вигляді суперпозицій вейвлетів на різних масштабних рівнях декомпозиції (розкладання) сигналів.

Перша згадка про подібні функції (які вейвлетами не називалися) з'явилася в роботах Хаара (Haar) ще на початку минулого століття. Вейвлет Хаара - це коротке (на інтервалі $[0,1]$) прямокутне коливання (рисунок 23.1).

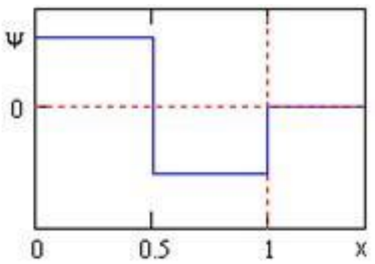


Рисунок 23.1 – Вейвлет Хаара

Однак він цікавий більше теоретично, тому що не є безупинно диференціюємою функцією й має довгі "хвости" у частотній області. В 30-е роки фізик Paul Levy, досліджуючи броунівсьйки рух, виявив, що базис Хаара краще, чим базис Фур'є, підходить для вивчення деяких деталей броунівського руху, тим самим уперше підтвердивши ефективність вейвлетів.

Сам термін "вейвлет", як поняття, ввели у своїй статті J. Morlet і A. Grossman, опублікованій в 1984 р. Вони займалися дослідженнями сейсмічних сигналів за допомогою базису, який назвали вейвлетом. Ця робота дала початок розвитку вейвлетів протягом наступних десяти років цілому ряду авторів. Вагомий внесок у теорію вейвлетів внесли Гуппілауд, Гроссман і Морлет основи, що сформулювали, CWT, Жан Олаф-Стромберг з ранніми роботами з дискретними вэйвлетами, Інгрід Добеші, що розробила ортогональні вейвлети (1988), Наталі Делпрат, що створила час-частотну інтерпретацію CWT (1991), Ньюланд, що розробив гармонійне вейвлет-перетворення, і багато інші. Математична формалізація, дана роботами Mallat і Meyer, привела до створення теоретичних основ вейвлет-аналізу, названого мультироздільним (кратномасштабним) аналізом.

У цей час спеціальні пакети розширень по вейвлетам уже присутні в основних системах комп'ютерної математики (Matlab, Mathematica, Mathcad, і ін.), а вейвлет-перетворення й вейвлетний аналіз використовуються в багатьох галузях науки й техніки для всіляких задач: для розпізнавання образів, чисельного моделювання динаміки складних нелінійних процесів, аналізу апаратної інформації й зображень у медицині, космічній техніці, астрономії, геофізиці, для ефективного стиснення сигналів і передачі інформації з каналів з обмеженою пропускною здатністю й т.п. Багато дослідників називають вейвлет-аналіз "математичним мікроскопом" для точного вивчення внутрішнього складу й структур неоднорідних сигналів і функцій.

Не слід розглядати вейвлет-методи обробки й аналізу сигналів у якості нової універсальної технології для розв'язку будь-яких задач. Можливості вейвлетів, безсумнівно, ще не розкриті повністю. Однак це не означає, що їх розвиток приведе до повної заміни традиційних засобів обробки й аналізу інформації, добре відпрацьованих і перевірених часом. Але воно може суттєво розширити інструментальну базу інформаційних технологій обробки даних.

89.2 Перетворення Фур'є (ПФ)

В основі спектрального аналізу сигналів лежить інтегральне перетворення й ряди Фур'є. Нагадаємо деякі математичні визначення.

У просторі функцій, заданих на кінцевому інтервалі $(0,T)$, норма, як найбільш загальна числова характеристика довільної функції $s(t)$, по визначенню обчислюється як корінь квадратний зі скалярного добутку функції. У загальному випадку, для комплексних функцій, квадрат норми (енергія сигналу) відповідає виразу:

$$\left\|s(t)\right\|^2 = \left\langle s(t),\ s(t)\right\rangle = \int_0^T s(t)\ s^*(t)\,dt$$

, (23.1)

де $s^*(t)$ – функція, комплексно сполучена с. $s(t)$

Якщо норма функції має кінцеве значення (інтеграл сходиться), то говорять, що функція належить простору функцій $L^2[R],\ R=[0,T]$, інтегрувальних із квадратом (простір Гільберта), і має кінцеву енергію. У просторі Гільберта на основі сукупності ортогональних функцій з нульовим скалярним добутком

$$\langle v(t), w(t)\rangle = \int_0^T v(t)\ w^*(t)\ dt = 0$$

завжди може бути створена система ортонормованих "осей" (базис простору), при цьому будь-який сигнал, що належить цьому простору, може бути представлений у вигляді вагової суми проекцій сигналу на ці "осі" – базисних векторів. Значення проекцій визначаються скалярними добутками сигналу з відповідними функціями базисних "осей".

Базис простору може бути утворений кожний ортогональною системою функцій. Найбільше застосування в спектральному аналізі одержала система комплексних експонентних функцій. Проекції сигналу на даний базис визначаються виразом:

$$S_n = (1/T)\int_0^T s(t)\exp(-jn\Delta\omega t)dt,\ n\in(-\infty,\ \infty)$$

, (23.2)

де $\Delta\omega = 2\pi/T$ – частотний аргумент векторів. При відомих вираженнях базисних функцій сигнал $s(t)$ однозначно визначається сукупністю коефіцієнтів S_n і може бути абсолютно точно відновлений (реконструйований) по цих коефіцієнтах:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \exp(jn\Delta\omega t)$$

. (23.3)

Рівняння (23.2) і (23.3) називають прямим і зворотним перетворенням Фур'є сигналу $s(t)$. Таким чином, будь-яка функція Гільбертова простору може бути представлена у вигляді комплексного ряду Фур'є (23.3), який називають спектральною виставою сигналу або його Фур'є-образом.

На практиці ряд Фур'є обмежується певною кількістю членів N. Обмеження числа членів ряду значенням N означає апроксимацію нескінченномірного сигналу N – мірною системою базисних функцій спектра сигналу з певною погрішністю залежно від фактичного спектра сигналу. Ряд Фур'є рівномірно сходиться до $s(t)$ по нормі (23.1):

$$\lim_{N\Rightarrow\infty} \| s(t) - \sum_{n=-N}^{N} S_n \exp(jn\Delta\omega t) \| = 0$$

. (23.4)

Таким чином, ряд Фур'є - це розкладання сигналу $s(t)$ по базису простору $L^2(0,T)$ ортонормованих гармонійних функцій $\exp(jn\Delta\omega t)$ зі зміною частоти, кратним частоті першої гармоніки $\omega_1 = \Delta\omega$.

Звідси випливає, що ортонормований базис простору $L^2(0,T)$ побудований з однієї функції $v(t) = \exp(j\Delta\omega t) = \cos(\Delta\omega t) + j\cdot\sin(\Delta\omega t)$ за допомогою масштабного перетворення незалежної змінної так, що $v_n(t) = v(nt)$.

Для коефіцієнтів ряду Фур'є справедлива рівність Парсеваля збереження енергії сигналу в різних представленнях:

$$\left(1/T\right)\int_0^T |s(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n|^2 . \quad (23.5)$$

Розкладання в ряд Фур'є довільної функції $y(t)$ коректно, якщо функція $y(t)$ належить цьому ж простору $L^2(0,T)$, тобто квадратично інтегрувальна з кінцевою енергією:

$$\int_0^T |y(t)|^2\, dt < \infty,\ t \in (0,T), \quad (23.6)$$

при цьому вона може бути періодично розширена й визначена на всій часовій осі простору $R(-\infty,\infty)$ так, що

$$y(t) = y(t-T),\ t \in R,$$

за умови збереження скінченності енергії в просторі $R(-\infty,\infty)$.

З позицій аналізу довільних сигналів і функцій у частотній області й точного відновлення після перетворень можна відзначити ряд недоліків розкладання сигналів у ряди Фур'є, які призвели до появи віконного перетворення Фур'є й стимулювали розвиток вейвлетного перетворення. Основні з них:

- Обмежена інформативність аналізу нестаціонарних сигналів і практично повна відсутність можливостей аналізу їх особливостей (сингулярностей), тому що в частотній області відбувається «розмазування» особливостей сигналів (розривів, сходів, піків і т.п.) по всьому частотному діапазону спектра.

• Гармонійні базисні функції розкладання не здатні в принципі відображати перепади сигналів з нескінченною крутістю типу прямокутних імпульсів, тому що для цього потрібно нескінченно велика кількість членів ряду. При обмеженні числа членів ряду Фур'є на околицях стрибків і розривів відновленого сигналу виникають осциляції (явище Гіббса).

• Перетворення Фур'є відображає глобальні відомості про частоти досліджуваного сигналу й не дає уявлення про локальні властивості сигналу при швидких часових змінах його спектрального складу. Так, наприклад, перетворення Фур'є не розрізняє сигнал із сумою двох синусоїд (стаціонарний сигнал), від сигналу із двома послідовно наступними синусоїдами з тими ж частотами (нестаціонарний сигнал), тому що спектральні коефіцієнти (23.2) обчислюються інтегруванням по всьому інтервалу завдання сигналу. Перетворення Фур'є в принципі не має можливості аналізувати частотні характеристики сигналу в довільні моменти часу.

89.3 Віконне перетворення Фур'є

Частковим виходом із цієї ситуації є віконне перетворення Фур'є з віконною функцією, що рухається по сигналу, що має компактний носій. Часовий інтервал сигналу при великій його тривалості розділяється на підинтервали, і перетворення Фур'є виконується послідовно для кожного підинтервала окремо.

Тим самим здійснюється перехід до частотно-тимчасового (частотно-координатному) виставі сигналів, при цьому в межах кожного підинтервала сигнал "вважається" стаціонарним. Результатом віконного перетворення є сімейство спектрів, яким відображається зміна спектра сигналу по інтервалах зсуву вікна перетворення.

Це якоюсь мірою дозволяє виділяти на координатній осі й аналізувати особливості нестаціонарних сигналів. Розмір носія віконної функції $w(t)$ звичайно встановлюється порівнянним з інтервалом стаціонарності сигналу. По суті, таким перетворенням один нелокалізований базис розбивається на певну кількість базисів, локалізованих у межах функції $w(t)$, що дозволяє представляти результат перетворення у вигляді функції двох змінних - частоти й часового положення вікна. При цьому розмір стаціонарності сигналу необхідно знати апріорі.

Віконне перетворення виконується відповідно до виразу:

$$S(w, b_k) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) w^*(t - b_k) \exp(-j\omega t)\, dt \quad . (23.7)$$

Функція $w^*(t-b_k)$ являє собою функцію (у загальному випадку – комплексну) вікна зрушення перетворення по координаті t, де параметром b задаються фіксовані значення зсуву. При зсуві вікон з рівномірним кроком значення b_k приймаються рівними $b_k = k\Delta b$.

У якості вікна перетворення може використовуватися як найпростіше прямокутне вікно ($w(t)=1$ у межах вікна й 0 за його границями), так і спеціальні вагові вікна (Бартлетта, Гаусса, Кайзера та ін.) малі викривлення спектра за рахунок граничних умов вирізки віконних відрізків сигналів і нейтралізуючі явище Гіббса. При цьому для кожного положення вікна на часовій осі сигналу обчислюється свій комплексний спектр. Ефективна ширина віконної функції зберігається постійної по всьому інтервалу сигналу.

89.4 Приклад віконного перетворення

Приклад віконного перетворення для нестаціонарного сигналу на великому рівні шуму наведений на рисунку 23.2.

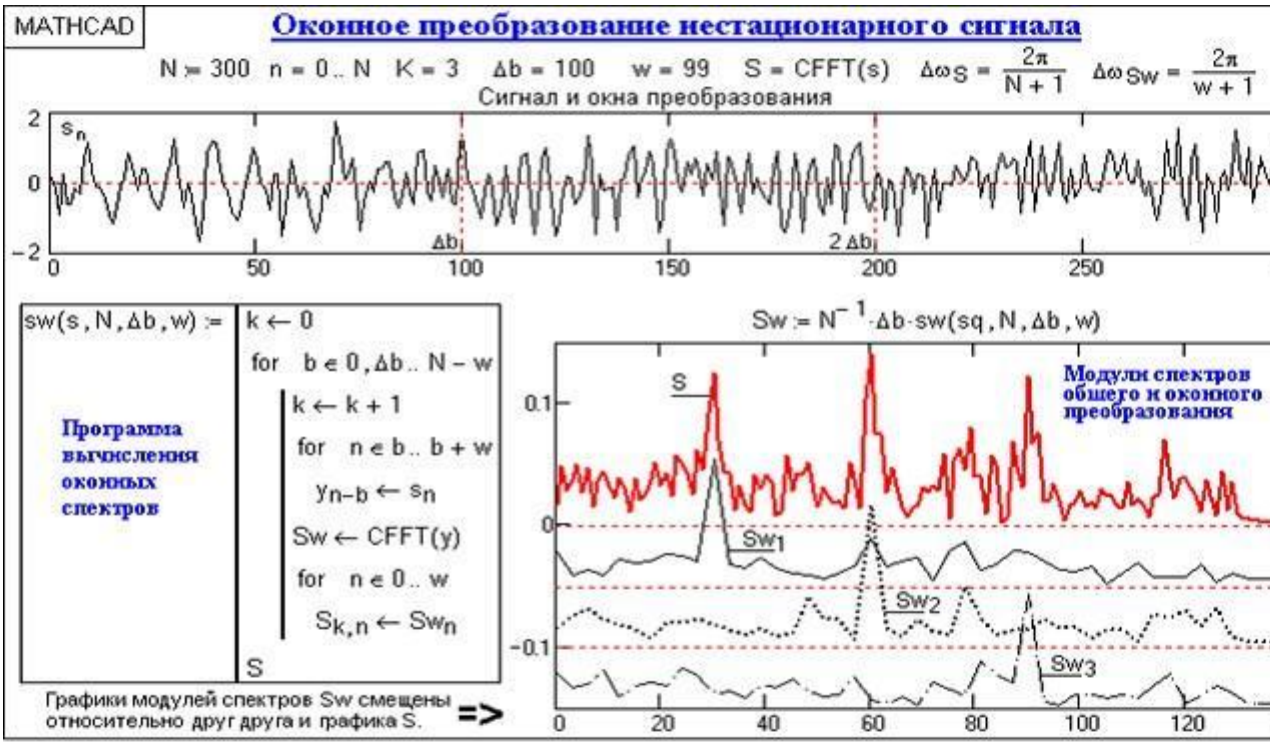


Рисунок 23.2 – Віконне перетворення

По спектру сигналу в цілому можна судити про наявність у його складі гармонійних коливань на трьох частотах. Віконне перетворення не тільки підтверджує даний висновок, але й показує конкретну локальність коливань по інтервалу сигналу й співвідношення між амплітудами цих коливань.

Координатна роздільна здатність віконного перетворення визначається шириною віконної функції й обернено пропорційна частотної роздільної здатності. При ширині віконної функції, рівній b, частотна розв'язна здатність визначається значенням

$\Delta\omega = 2\pi / b$. При необхідній величині частотного розділення $\Delta\omega$ відповідно ширина віконної функції повинна бути рівна $b = 2\pi / \Delta\omega$. Для віконного перетворення Фур'є ці обмеження є принциповими.

Так, для рисунка 23.2 при розмірі масиву даних $N = 300$ і ширині віконної функції $\Delta b = 100$ частотна роздільна здатність результатів перетворення зменшується в $N / \Delta b = 3$ разу в порівнянні з вихідними даними, і графіки $Sw(n\Delta\omega_{Sw})$ по координаті n для наочного зіставлення із графіком $S(n\Delta\omega_S)$ побудовані із кроком по частоті $\Delta\omega_{Sw} = 3\Delta\omega_S$, тобто по точках n = 0, 3, 6, …, N.

89.5 Частотно-часове віконне перетворення

Частотно-часове віконне перетворення застосовується для аналізу нестаціонарних сигналів, якщо їх частотний склад змінюється в часі. Функція віконного перетворення (23.7) може бути переведена в тривимірний варіант із незалежними змінними і за часом, і по частоті:

$$S(t, \omega) = \int_{\tau} s(t-\tau)\,\omega(\tau)\exp(-j\omega\tau)\,d\tau . \quad (23.8)$$

На рисунку 23.3 наведений приклад обчислення й представлення (модуль правої частини головного діапазону спектра) результатів тривимірної спектрограми при дискретному завданні вхідного сигналу $sq(n)$.

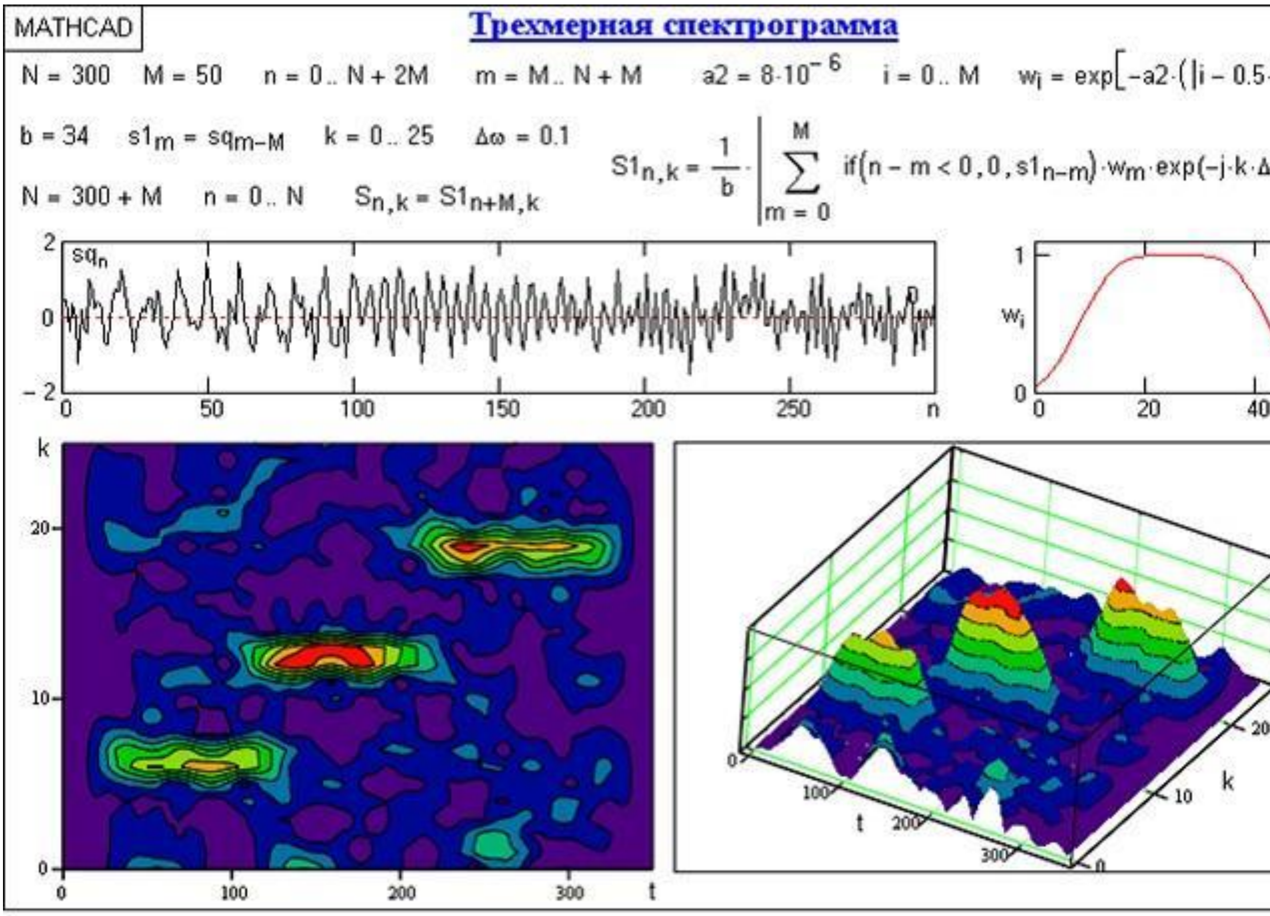


Рисунок 23.3 – Результатів тривимірної спектрограми при дискретному завданні вхідного сигналу

Сигнал являє собою суму трьох послідовних радіоімпульсів з різними частотами без пауз, з відношенням сигнал/шум, близьким до 1. Віконна функція w_i задана в однобічному варіанті з ефективною шириною вікна $b \cong 34$ й повним розміром $M = 50$.

Встановлений для результатів крок по частоті $\Delta\omega = 0{,}1$ трохи вище фактичної роздільної здатності $2\pi / M = 0{,}126$. Для забезпечення роботи віконної функції по всьому інтервалу сигналу задавалися початкові й кінцеві умови обчислень (продовження обох кінців сигналу нульовими значеннями на M точок).

Як видно за результатами обчислень, віконне перетворення дозволяє інформативні особливості сигналу й за часом, і по частоті. Роздільна здатність локалізації визначається принципом невизначеності Гейзенберга, який говорить, що неможливо одержати довільно точне частотно-часова представлення сигналу, тобто не можна визначити для якогось моменту часу, які спектральні компоненти присутні в сигналі. Чим вужче вікно, тем краще часове розділення, але гірше частотне, і навпаки. Крім того, чим вужче вікно, тим більш справедливими стають наші припущення про стаціонарність сигналу в межах вікна.

На рисунку 23.4 наведений приклад частотно-часового віконного перетворення сигналу, що полягає з 4-х непересічних інтервалів, у кожному з яких сума двох гармонік різної частоти, гауссовою віконною функцією різної ширини.

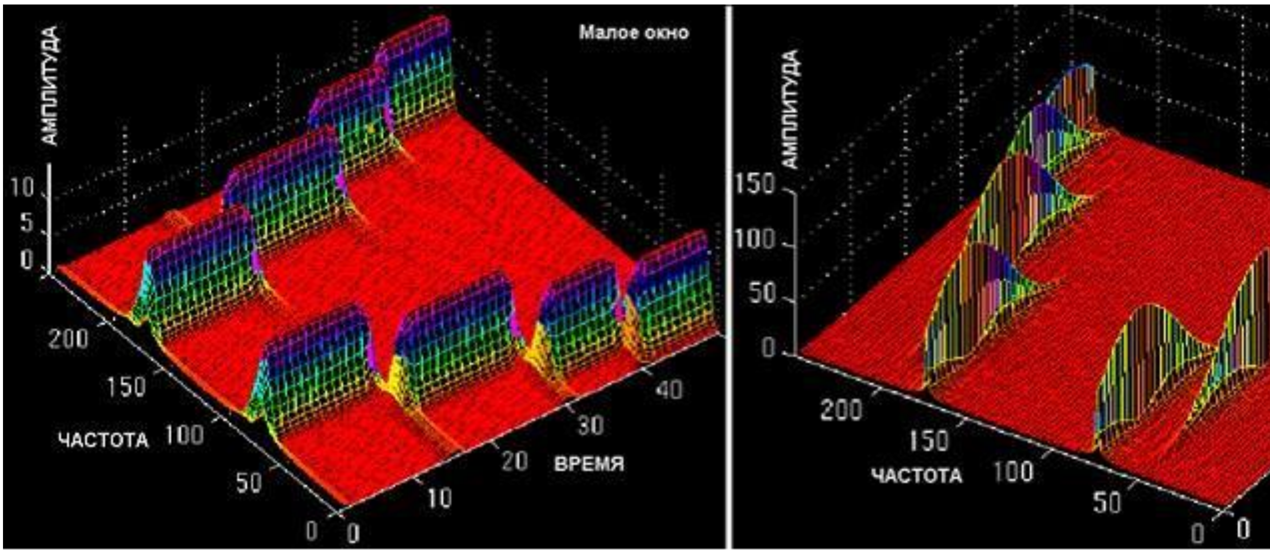


Рисунок 23.4 – Частотно-часового віконного перетворення сигналу

Вузьке вікно забезпечує кращий часове розділення і чітку фіксацію границь інтервалів, але широкі піки частот у межах інтервалів. Широке вікно напроти – чітке відзначає частоти інтервалів, але з перекриттям границь часових інтервалів. При розв'язанні практичних задач доводиться вибирати вікно для аналізу всього сигналу, тоді як різні його ділянки можуть вимагати застосування різних вікон. Якщо сигнал складається з далеко віддалених друг від друга частотних компонентів, то можна пожертвувати спектральним розподілом на користь часового, і навпаки.

89.6 Функції віконного спектрального аналізу

Функції віконного спектрального аналізу в Mathcad перебувають у пакеті Signal Processing. Вони дозволяють розбивати сигнал на піддіапазони (з перекриттям або без перекриття) і виконувати наступні операції:

- cspectrum(x,n,r[,w]) – розрахунки крос-спектра сигналу x;
- pspectrum(x,n,r[,w]) – розрахунки розподілу спектральної потужності сигналу;
- coherence(x,y,n,r[,w]) – розрахунки когерентності сигналів x и в;
- snr(x,y,n,r[,w]) – розрахунки відносини сигнал/шум для векторів x и в.

Тут: x и в – речовинні або комплексні масиви даних (вектори), n – число піддіапазонів розбивки вхідного сигналу x (від 1 до N – розміру масиву), до – фактор перекриття піддіапазонів (від 0 до 1), w - код вікна (1- прямокутне, 2- трапеція, 3- трикутне, 4- вікно Хеннінга, 5- вікно Хеммінга, 6- вікно Блекмана).

89.7 Принцип вейвлет-перетворення

Гармонійні базисні функції перетворення Фур'є гранично локалізовані в частотній області (до імпульсних функцій Дірака при $T \to \infty$) і не локалізовані в часовій (визначені у всьому часовому інтервалі від $-\infty$ *до* ∞). Їхньою протилежністю є імпульсні базисні функції типу імпульсів Кронекера, які гранично локалізовані в часовій області і "розмиті" по всьому частотному діапазону. Вейвлети по локалізації в цих двох виставах можна розглядати як функції, що займають проміжне положення між гармонійними й імпульсними функціями. Вони повинні бути локалізованими як у часовій, так і в частотній області представлення. Однак при проектуванні таких функцій ми неминуче зіштовхнемося з принципом невизначеності, що зв'язують ефективні значення тривалості функцій і ширини їх спектра. Чим точніше ми будемо здійснювати локалізацію часового положення функції, тем ширше буде ставати її спектр, і навпаки, що наочно видно на рисунку 23.5.

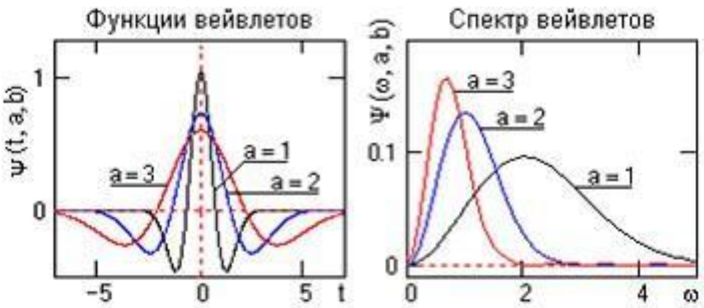


Рисунок 23.5

Відмінною рисою вейвлет-аналізу є те, що в ньому можна використовувати сімейства функцій, що реалізують різні варіанти співвідношення невизначеності. Відповідно, дослідник має можливість гнучкого вибору між ними й застосування тих вейвлетних функцій, які найбільше ефективно вирішують поставлені задачі.

Вейвлетний базис простору $L^2(R)$, $R(-\infty,\infty)$, доцільно конструювати з фінітних функцій, що належать цьому ж простору, які повинні прагнути до нуля на нескінченності. Чим швидше ці функції прагнуть до нуля, тем зручніше використовувати їх як базис перетворення при аналізі реальних сигналів.

Припустимо, що такою функцією є psi – функція $\psi(t)$, рівна нулю за межами деякого кінцевого інтервалу й нульове середнє значення по інтервалу завдання. Останнє необхідно для завдання певної локалізації спектра вейвлета в частотній області. На основі цієї функції сконструюємо базис у просторі $L^2(R)$ за допомогою масштабних перетворень незалежної змінної.

Функція зміни частотної незалежної змінної в спектральному представленні сигналів відображається в часовому представленні розтяганням/стисненням сигналу. Для вейвлетного базису це можна виконати функцією типу

$\psi(t) => \psi(a^m t),\ a = const,\ m = 0,1,\ \dots\ ,M$, тобто шляхом лінійної операції розтягання/стиснення функції, що забезпечує самоподоба, на різних масштабах представлення.

Однак скінченність (локальність) функції $\psi(t)$ на часовій осі вимагає додаткової незалежної змінної послідовних переносів (зсувів) функції $\psi(t)$ уздовж осі (параметра локалізації), типу $\psi(t) => \psi(t+k)$, для перекриття всієї числової осі простору $R(-\infty,\infty)$.

С урахуванням обох умов одночасно структура базисної функції може бути прийнята наступна:

$$\psi(t) => \psi(a^m t + k). \quad (23.9)$$

Для спрощення подальших викладень значення змінних m і k приймемо цілочисельними. При приведенні функції (23.9) до одиничної норми, одержуємо:

$$\psi_{mk}(t) = a^{m/2}\psi(a^m t + k). \quad (23.10)$$

Якщо для сімейства функцій $\psi_{mk}(t)$ виконується умова ортогональності:

$$\left\langle \psi_{nk}(t), \psi_{lm}(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{nk}(t) \cdot \psi^*_{lm}(t)\ dt = \delta_{nl} \cdot \delta_{km}, \quad (23.11)$$

те сімейство $\psi_{mk}(t)$ може використовуватися в якості ортонормованого базису простору $L^2(R)$. Звідси випливає, що довільна функція цього простору може бути представлена у вигляді ряду (розкладання по базису $\psi_{mk}(t)$):

$$s(t) = \sum_{m,k=-\infty}^{\infty} S_{mk}\psi_{mk}(t), \quad (23.12)$$

де коефіцієнти подання сигналу – проекції сигналу на новий ортогональний базис функцій, як і в перетворенні Фур'є, визначаються скалярним добутком

$$S_{mk} = \langle s(t), \psi_{mk}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi_{mk}(t)dt$$

, (23.13)

при цьому ряд рівномірно сходитися, тобто

$$\lim_{M,K \Rightarrow \infty} || s(t) - \sum_{m=-M}^{M} \sum_{k=-K}^{K} S_{mk}\psi_{mk}(t), ||= 0$$

.

При виконанні цих умов базисна функція перетворення $\psi(t)$ називається ортогональним вейвлетом.

Найпростішим прикладом ортогональної системи функцій такого типу є функції Хаара. Базисна функція Хаара визначається співвідношенням

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1/2, \\ -1, & 1/2 < t < 1, \\ 0, & t < 0,\ t > 1. \end{cases}$$

(23.14)

Легко перевірити, що при $a = 2,\ m = 0, 1, 2,\ ...,\ k = 0, 1, 2,\ ...$ дві будь-які функції, отримані за допомогою цього базисного вейвлета шляхом масштабних перетворень і переносів, мають одиничну норму й ортогональні.

На рисунку 23.6 наведені приклади функцій для перших трьох значень m і b при різних їхніх комбінаціях, де ортогональність функцій видна наочно.

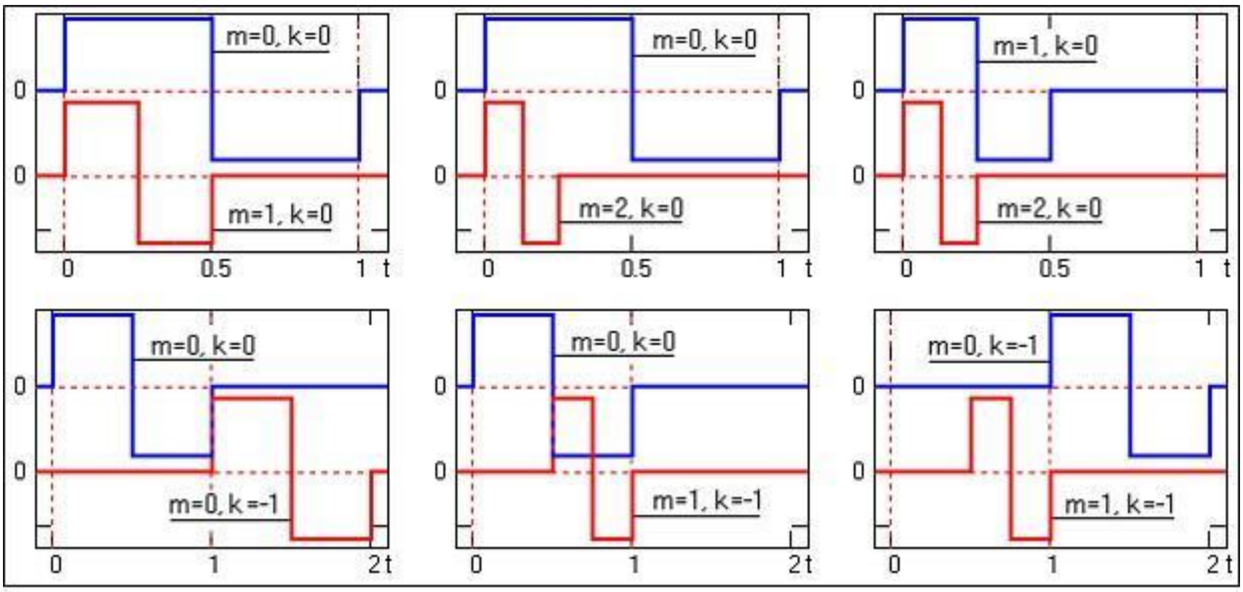


Рисунок 23.6 – Функції Хаара

89.9 Вейвлетний спектр

Вейвлетний спектр, на відміну від перетворення Фур'є, є двовимірним і визначає двовимірну поверхню в просторі змінних m і k. При графічній виставі параметр розтягання/стиснення спектра m відкладається по осі абсцис, параметр локалізації k по осі ординат – осі незалежної змінної сигналу.

Математикові процесу вейвлетного розкладання сигналу в спрощеній формі розглянемо на прикладі розкладання сигналу $s(t)$ вейвлетом Хаара із трьома послідовними по масштабу m вейвлетными функціями з параметром a=2, при цьому сам сигнал $s(t)$ утворюємо підсумовуванням цих же вейвлетних функцій з однаковою амплітудою з різним зсувом від нуля, як це показане на рисунку 23.7.

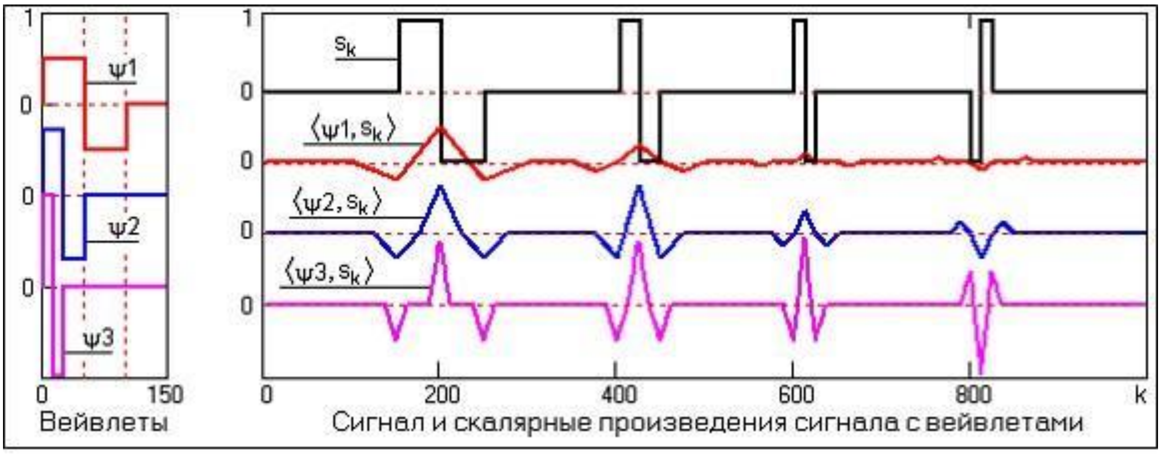


Рисунок 23.7 – Скалярні добутки сигналу з вейвлетами

Для обраного початкового значення масштабного коефіцієнта стиску m визначається функція вейвлета (функція $\psi 1(t)$ на рисунку 23.7), і обчислюється скалярний добуток сигналу з вейвлетом $\langle \psi 1(t),\, s(t+k) \rangle$ з аргументом по зсуву k. Для кращої наочності результати обчислення скалярних добутків на рисунку 23.7 побудовані по центрах вейвлетних функцій (тобто по аргументу k від нуля зі зсувом на половину довжини вейвлетной функції). Як і слід було сподіватися, максимальні значення скалярного добутку відзначаються в сигналі там, де локалізована ця ж вейвлетна функція.

Після побудови першого масштабного рядка розкладання, міняється масштаб вейвлетной функції ($\psi 2$ на рисунку 23.7) і виконується обчислення другого масштабного рядка спектра, і т.д.

Як видно на рисунку 23.7, чим точніше локальна особливість сигналу збігається з відповідною функцією вейвлета, тем ефективніше виділення цієї особливості на відповідному масштабному рядку вейвлетного спектра. Неважко бачити також, що для сильно стислого вейвлета Хаара характерною добре виділюваною локальною особливістю є стрибок сигналу, причому виділяється не тільки стрибок функції, але й напрямок стрибка.

На рисунку 23.8 наведений приклад графічного відображення вейвлетної поверхні реального фізичного процесу . Вид поверхні визначає зміни в часі спектральних компонентів різного масштабу й називається часовим-частотно-тимчасовим спектром. Поверхня зображується на малюнках, як правило, у вигляді ізоліній або умовними квітами. Для розширення діапазону масштабів може застосовуватися логарифмічна шкала.

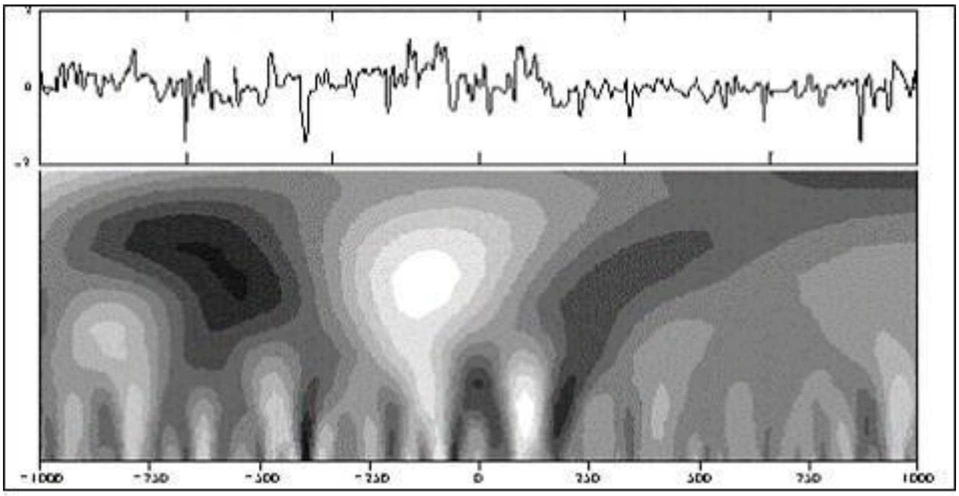


Рисунок 23.8 – Приклад вейвлетного перетворення

Розділ 90 Основи вейвлет - перетворення

В основі вейвлет-перетворень, у загальному випадку, лежить використання двох неперервних, взаємозалежних і інтегрувальних по незалежній змінної функцій:

- Вейвлет-функції $\psi(t)$, як psi-функції часу з нульовим значенням інтеграла й частотним фур'є-образом $\Psi(\omega)$. Цією функцією, яку звичайно й називають вейвлетом, виділяються деталі сигналу і його локальні особливості. У якості функцій, що аналізують вейвлети, звичайно вибираються функції, добре локалізовані й у часовій, і в частотній області. Приклад часового й частотного образа функції наведений на рисунку 23.9.

- Масштабуючої функції $\varphi(t)$, як часової скейлінг-функції phi з одиничним значенням інтеграла, за допомогою якої виконується грубе наближення (апроксимація) сигналу.

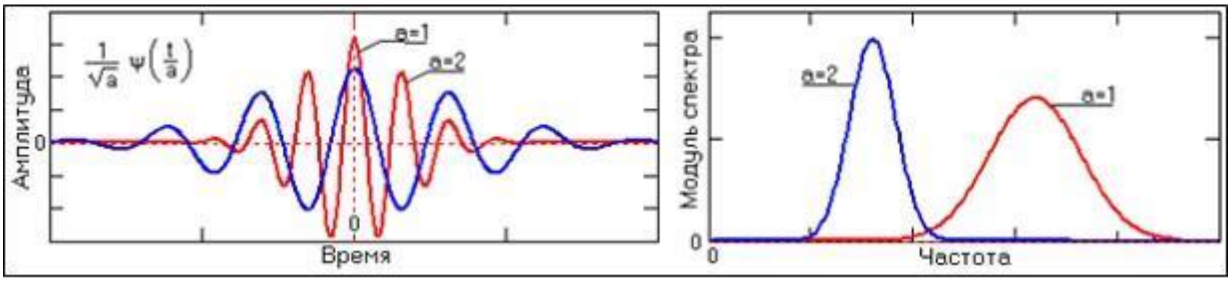


Рисунок 23.9 – Вейвлетні функції у двох масштабах

Phi-Функції властиві не всім, а, як правило, тільки ортогональним вейвлетам. Вони необхідні для перетворення нецентрованих і досить протяжних сигналів при роздільному аналізі низькочастотних і високочастотних складових. Роль і використання phi-функції розглянемо трохи пізніше.

90.1 Неперервне вейвлет-перетворення

Неперервне вейвлет-перетворення (НВП, CWT- Continious Wavelet Transform). Припустимо, що ми маємо функції $s(t)$ з кінцевою енергією (нормою) у просторі $L^2(R)$, визначені по всій дійсній осі $R(-\infty,\infty)$. Для фінітних сигналів з кінцевою енергією середні значення сигналів, як і будь-яких інших функцій із простору $L^2(R)$, повинні прагнути до нуля на $\pm\infty$

Безперервним вейвлет-перетворенням (або вейвлетным образом) функції $s(t)\in L^2(R)$ називають функцію двох змінних:

$$C(a,b)=\langle s(t),\psi(a,b,t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi(a,b,t)\,dt,\ a,\ b\in R, a\neq 0 \quad (23.15)$$

де вейвлети $\psi(a,b,t)\equiv\psi_{ab}(t)$ – масштабовані й зрушені копії, що породжує вейвлети $\psi(t)\in L^2(R)$, сукупність яких створює новий базис простору $L^2(R)$.

функціями, що породжують, можуть бути всілякі функції з компактним носієм - обмежені за часом і місцем розташування на часовій осі, що й мають спектральний образ, деякою мірою локалізований на частотній осі. Як і для рядів Фур'є, базис простору $L^2(R)$ доцільно конструювати з однієї функції, що породжує, норма якої повинна бути рівна 1.

Для перекриття локальною функцією вейвлета всієї тимчасової осі простору використовується операція зрушення (зсуву по часовій осі): $\psi(b,t)=\psi(t-b)$, де значення b для НВП також є величиною безперервної.

Для перекриття всього частотного діапазону простору $L^2(R)$ використовується операція часового масштабування вейвлета з безперервною зміною незалежної змінної: $\psi(a,t)=|a|^{-1/2}\psi(t/a)$.

На рисунку 23.9. видно, що якщо часовий образ вейвлета буде розширюватися (зміною значення параметра 'a'), те його "середня частота" буде знижуватися, а частотний образ (частотна локалізація) переміщатися на більш низькі частоти.

Таким чином, шляхом зсуву по незалежній змінній $(t-b)$ вейвлет має можливість переміщатися по всій числовій осі довільного сигналу, а шляхом зміни масштабної змінної 'a' (у фіксованій точці $(t-b)$ часової осі) "переглядати" частотний спектр сигналу по певному інтервалу околиць цієї точки.

З використанням цих операцій вейвлетний базис функціонального простору утворюється шляхом масштабних перетворень і зсувів, що породжує вейвлет? $\psi(t)$:

$$\psi(a,b,t)=|a|^{-1/2}\,\psi[(t-b)/a],\ a,\ b\in R,\ a\neq 0,\ \psi(t)\in L^2(R). \quad (23.16)$$

Неважко переконатися, що норми вейвлетів $\psi(a,b,t)$ дорівнюють нормі $\psi(t)$, що забезпечує нормувальний множник $|a|^{-1/2}$. При нормуванні до 1, що породжує вейвлет $\psi(t)$ все сімейство вейвлетів також буде нормованим. Якщо при цьому виконується вимога ортогональности функцій, то функції $\psi(a,b,t)$ будуть являти собою ортонормований базис простору $L^2(R)$.

90.2 Поняття масштабу ВП

Поняття масштабу ВП має аналогію з масштабом географічних карт. Більші значення масштабу відповідають глобальному уявленню сигналу, а низькі значення масштабу дозволяють розрізнити деталі. У термінах частоти низькі частоти відповідають глобальній інформації про сигнал (розподілена на всій його довжині), а високі частоти -

детальної інформації й особливостям, які мають малу довжину, тобто масштаб вейвлета, як одиниця шкали частотно-тимчасової вистави сигналів, обернений до частоти.

Масштабування, як математична операція, розширює або стискає сигнал. Більші значення масштабів відповідають розширенням сигналу, а малі значення - стислим версіям. У визначенні вейвлета коефіцієнт масштабу a стоїть в знаменнику. Відповідно, $a > 1$ розширює сигнал, $a < 1$ стискає його.

90.3 Процедура перетворення

Процедура перетворення стартує з масштабу $a = 1$ й триває при значеннях, що збільшуються, а, тобто аналіз починається з високих частот і проводиться убік низьких частот. Перше значення 'а' відповідає найбільш стиснутому вейвлету.

При збільшенні значення 'а' вейвлет розширюється. Вейвлет поміщається в початок сигналу ($t = 0$), перемножується із сигналом, інтегрується на інтервалі свого завдання й нормалізується на $1/\sqrt{a}$.

При заданні парних або непарних функцій вейвлетів результат обчислення $C(a,b)$ поміщається в точку ($a = 1,\ b = 0$) масштабно-часового спектра перетворення. Зсув b може розглядатися як час із моменту $t = 0$, при цьому координатна вісь b, по суті, повторює часову вісь сигналу. Для повного включення в обробку всіх точок вхідного сигналу потрібне завдання початкових (і кінцевих) умов перетворення (певних значень вхідного сигналу при $t < 0$ й $t > t_{max}$ на півширину вікна вейвлета).

При однобічному заданні вейвлетів результат ставиться, як правило, до часового положення середньої точки вікна вейвлета.

Потім вейвлет масштабу $a = 1$ зсувається вправо на значення b і процедура повторюється. Одержуємо значення, що відповідає $t = b$ в рядку $a = 1$ на частотно-часовому плані. Процедура повторюється доти, поки вейвлет не досягнеться кінця сигналу. У такий спосіб одержуємо рядок точок на масштабно-часовому плані для масштабу $a = 1$.

Для обчислення наступного масштабного рядка значення *a* збільшується на деяке значення. При НПВ в аналітичній формі $\Delta b \to 0$ й $\Delta a \to 0$. При виконанні перетворення в комп'ютері обчислюється апроксимація зі збільшенням обох параметрів з певним кроком. Тим самим ми здійснюємо дискретизацію масштабно-часової площини.

Початкове значення масштабного коефіцієнта може бути й менше 1. У принципі, для деталізації найвищих частот сигналу мінімальний розмір вікна вейвлета не повинен перевищувати період самої високочастотної гармоніки.

Якщо в сигналі присутні спектральні компоненти, відповідні до поточного значення a, то інтеграл добутку вейвлета із сигналом в інтервалі, де цей спектральний компонент присутній, дає відносно велике значення. А якщо ні, то - добуток малий або дорівнює нулю, тому що середнє значення вейвлетної функції дорівнює нулю. Зі збільшенням масштабу (ширини вікна) вейвлета перетворення виділяє усе більш низькі частоти.

На рисунку 23.10 наведений приклад модельного сигналу й спектра його неперервного вейвлет-перетворення.

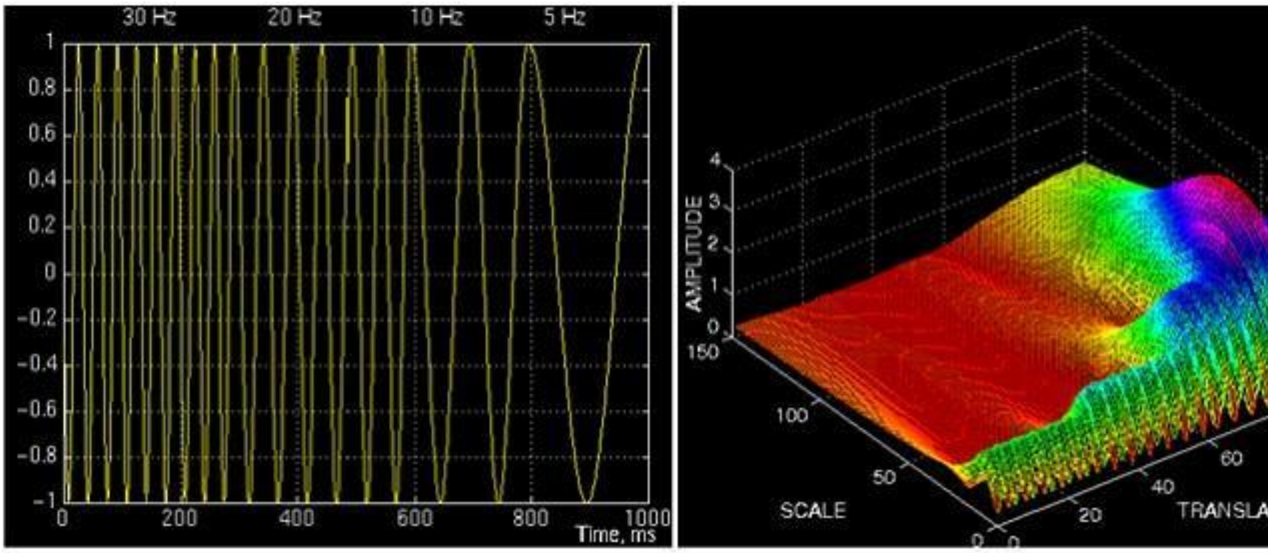


Рисунок 23.10 – Модельний сигнал і спектр його неперервного вейвлет-перетворення

У загальному випадку, значення параметрів 'a' і 'b' в (23.16) є неперервними, і множина базисних функцій є надлишковим. У силу цього неперервне перетворення сигналів містить дуже великий обсяг інформації. Сигналу, певному на R, відповідає вейвлетний спектр на $R \times R$. З позицій збереження обсягу інформації при перетвореннях сигналів випливає, що вейвлетний спектр НПВ має величезну надмірність.

90.4 Зворотне перетворення

Тому що форма базисних функцій $\psi(a,b,t)$ зафіксована, те вся інформація про сигнал в (23.15) переноситься на значення функції $C(a,b)$. Точність зворотного інтегрального вейвлет-перетворення залежить від вибору базисного вейвлета й способу побудови базису, тобто від значень базисних параметрів a, b. Строго теоретично вейвлет може вважатися базисною функцією $L^2(R)$ тільки у випадку його ортонормованості.

Для практичних цілей неперервного перетворення часто буває цілком достатня стійкість і "приблизність" ортогональності системи розкладання функцій. Під стійкістю розуміється досить точна реконструкція довільних сигналів. Для ортонормованих вейвлетів зворотне вейвлет-перетворення записується за допомогою того ж базису, що й пряме:

$$s(t)=(1/C_\psi)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1/a^2\right)C(a,b)\psi(a,b,t)\,dadb$$

. (23.17)

де C_ψ - коефіцієнт, що нормалізує:

$$C_\psi=\int_{-\infty}^{\infty}(|\Psi(\omega)|^2/\omega)\ d\omega<\infty$$

. (23.18)

Умова скінченності C_ψ обмежує клас функцій, які можна використовувати в якості вейвлетів. Зокрема, при $\omega=0$, для забезпечення збіжності інтеграла (23.18) у нулі, значення $\Psi(\omega)$ повинне бути дорівнює нулю. Це забезпечує умова компактності фур'є-образа вейвлета в спектральній області з локалізацією навколо деякої частоти ω_0 – середній частоті вейвлетной функції.

Отже, функція $\psi(t)$ повинна мати нульове середнє значення по області його визначення (інтеграл функції по аргументу повинен бути нульовим):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,dt=0$$

.

Однак це означає, що не для всіх сигналів можлива їхня точна реконструкція вейвлетом $\psi(t)$, тому що при нульовому першому моменті вейвлета коефіцієнт передачі постійної складової сигналу в перетворенні (23.17) дорівнює нулю. Умови точної реконструкції сигналів будуть розглянута при описі кратномасштабного аналізу.

Крім того, навіть при виконанні умови (23.18) далеко не всі типи вейвлетів можуть гарантувати реконструкцію сигналів, як таку. Однак і такі вейвлети можуть бути корисні для аналізу особливостей сигналів, як додаткового методу до інших методів аналізу й обробки даних. У загальному випадку, при відсутності строгої ортогональності вейвлетної функції (23.15), для зворотного перетворення застосовується вираз:

$$s(t)=(1/C_\psi)\int_R\left(1/a^2\right)C(a,b)\psi^{\#}(a,b,t)\,dadb$$

($1/a^2$), (23.17')

де індексом $\psi^{\#}(a,b,t)$ позначений ортогональний "двійник" базису $\psi(a,b,t)$, про який буде викладено нижче.

Таким чином, неперервне вейвлет- перетворення являє собою розкладання сигналу по всіх можливих зсувах і стисненням/розтяганням деякої локалізованої фінітної функції - вейвлета. При цьому змінна 'a' визначає масштаб вейвлета й еквівалентна частоті в перетвореннях Фур'є, а змінна 'b' – зсув вейвлета по сигналу від початкової точки в області його визначення, шкала якого повністю повторює часову шкалу аналізованого сигналу. Звідси випливає, що вейвлетний аналіз є частотно-просторовим аналізом сигналів.

Як приклад розглянемо вейвлет-перетворення чистого гармонійного сигналу $s(t)$, наведеного на рисунку 23.11. На цьому ж рисунку нижче наведені вейвлети $\psi_a(t)$ симетричного типу різних масштабів.

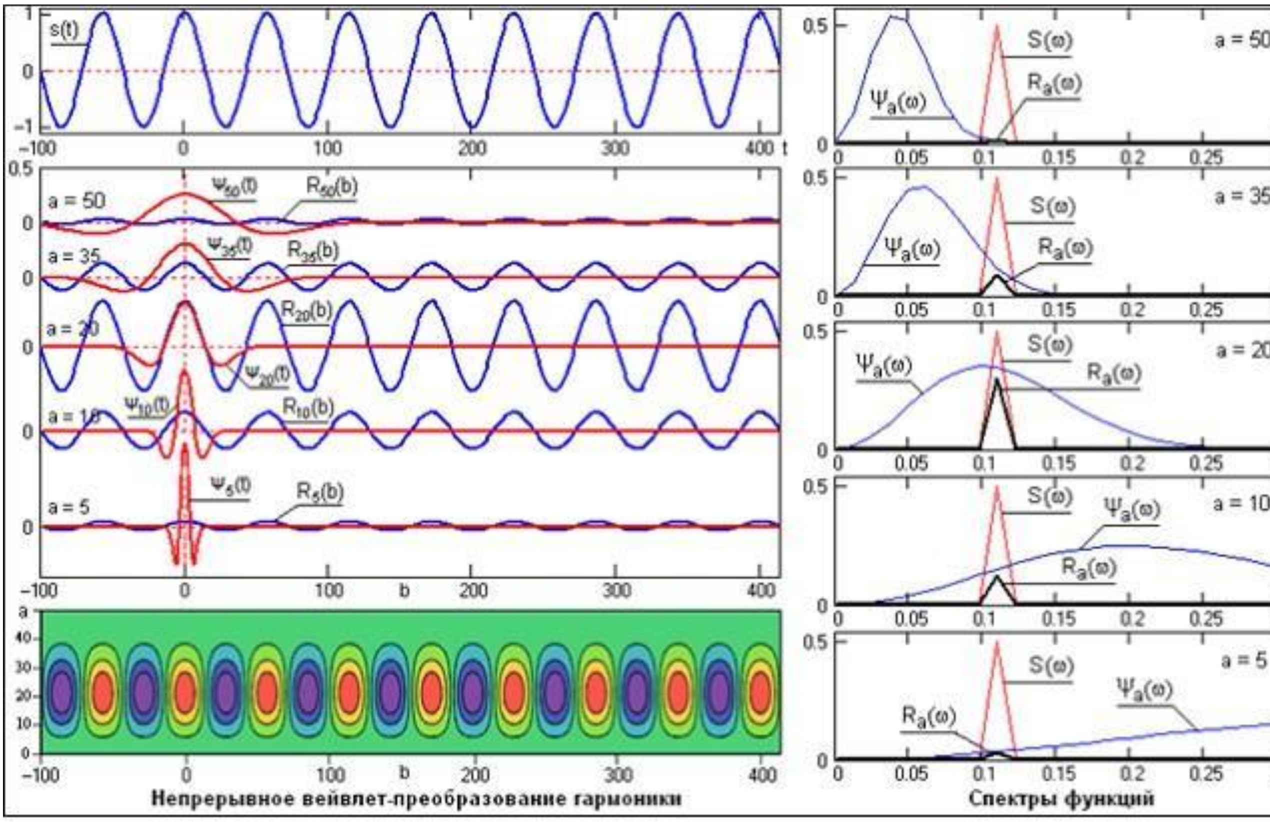


Рисунок 23.11 – Вейвлети симетричного типу

Скалярний добуток (23.15) "перегляду" сигналу вейвлетом певного масштабу 'a' може бути записаний в наступній формі:

$$C_a(b) = \langle s(t), \psi_a(t+b) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi_a(t+b)\,dt \quad . (23.19)$$

Але вираз (23.19) еквівалентний взаємній кореляційній функції $R_a(b)$ сигналів $s(t)$ і $\psi_a(t)$. Якщо сигнал $s(t)$ являє собою гармоніку, а другий сигнал симетричний, заданий на компактному носії й має нульове середнє значення, те, як відомо, форма взаємної кореляційної функції таких сигналів також є центрованим гармонійним сигналом. У частотній області скалярний добуток двох функцій відображається твором Фур'є-образів цих функцій, які наведені на рисунку в правому стовпці спектрів.

Масштаби спектрів $\psi_a(\omega)$ і $R_a(\omega)$ для наочності зіставлення нормовані до спектра $s(t)$. Максимальна амплітуда гармоніки $R_a(b)$ буде спостерігатися при збігу середньої частоти локалізації вейвлета $\psi_a(t)$ певного масштабу 'a' у частотній області із частотою сигналу $s(t)$, що й можна бачити на рисунку 23.11 для функції $R_a(b)$ при масштабі вейвлета $a = 20$. Результуючий вейвлетний спектр неперервного вейвлет-перетворення гармоніки наведений на лівому нижньому графіку й показує точне положення на часовій осі 'b' максимумів і мінімумів гармонійного сигналу.

90.5 Дискретне вейвлет-перетворення

У принципі, при обробці даних на ПК може виконуватися дискретизована версія неперервного вейвлет-перетворення із завданням дискретних значень параметрів (a, b) вейвлетів з довільним кроком Δa і Δb, але вона вимагає великої кількості обчислень. Крім того, у результаті виходить надлишкова кількість коефіцієнтів, що набагато перевершує число отсчетов вихідного сигналу, яке не потрібно для реконструкції сигналів.

Дискретне вейвлет-перетворення (ДВП) забезпечує досить інформації, як для аналізу сигналу, так і для його синтезу, будучи разом з тим ощадливим по числу операцій і по необхідній пам'яті. ДВП оперує з дискретними значеннями параметрів *a* й *b*, які задаються, як правило, у вигляді статечних функцій:

$$a = a_o^{-m},\ b = k \cdot a_o^{-m},\ \ a_o > 1,\ \ m, k \in I$$
,

де I – простір цілих чисел $\{-\infty, \infty\}$,

m – параметр масштабу,

k – параметр зсуву.

Базис простору $L^2(R)$ в дискретному представленні:

$$\psi_{mk}(t)=|a_o|^{m/2}\psi\left(a_o{}^m t-k\right),\ m,k\in I,\ \psi(t)\in L^2(R)$$
. (23.20)

Вейвлет-коефіцієнти прямого перетворення:

$$C_{mk}=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)\psi_{mk}(t)\ dt$$
. (23.21)

У загальному випадку, значення 'a' може бути довільним, але звичайно ухвалюється рівним 2, при цьому перетворення називається *діадним вейвлет-перетворенням*. Для діадного перетворення розроблений швидкий алгоритм обчислень, аналогічний швидкому перетворенню Фур'є, що визначило його широке використання при аналізі дискретних функцій і масивів цифрових даних.

Зворотне дискретне перетворення для неперервних сигналів при нормованому ортогональному вейвлетному базисі простору:

$$s(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{mk}\psi_{mk}(t)$$
. (23.22)

Число практично використаних вейвлетів по масштабному коефіцієнту m задає рівень *декомпозиції* сигналу, при цьому за нульовий рівень ($m=0$) звичайно приймається рівень максимального часового розділення сигналу, тобто сам сигнал, а наступні рівні ($m<0$) утворюють спадаюче *вейвлет-дерево*. У програмному забезпеченні обчислень для виключення використання негативної нумерації по m знак 'мінус' звичайно переноситься безпосередньо в (23.20), тобто використовується наступне представлення базисних функцій:

$$\psi_{mk}(t)=|a_o|^{-m/2}\psi\left(a_o{}^{-m}t-k\right),\ m,k\in I,\ \psi(t)\in L^2(R)$$
. (23.20')

Стійкість дискретного базису визначається в такий спосіб.

Функція $\psi(t)\in L^2(R)$ називається R-Функцією, якщо базис на її основі по (23.20) є базисом Рісса (Riesz). Для базису Рісса існують значення A и B, $0<A\le B<\infty$, для яких виконується співвідношення:

$$A\|C_{mk}\|^2\le\left\|\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{mk}\psi_{mk}(t)\right\|\le B\|C_{mk}\|^2$$
,

якщо енергія ряду C_{mk} кінцева. При цьому для будь-який R-Функції існує базис $\psi^{\#}{}_{mk}(t)$, який ортогональний базису $\psi_{mk}(t)$. Його називають ортогональним "двійником" базису $\psi_{mk}(t)$, таким, що

$$\psi_{mk}(t), \psi^{\#}{}_{nl}(t) = \delta_{mn} \cdot \delta_{kl}$$

.

Якщо $A = B = 1$ й $a_0 = 2$, то сімейство базисних функцій $\{\psi_{mk}(t)\}$ є ортонормованим базисом і можливо повне відновлення вихідного сигналу, при цьому $\psi_{mk}(t) \equiv \psi^{\#}{}_{mk}(t)$ й для реконструкції сигналів використовується формула (23.22).

Якщо $\psi(t)$ не ортогональний вейвлет, але має "двійника", то на базі "двійника" обчислюється сімейство $\psi^{\#}{}_{mk}(t)$, яке й використовується при зворотному перетворенні замість $\psi_{mk}(t)$, при цьому точне відновлення вихідного сигналу не гарантоване, але воно буде близько до нього в середньоквадратичному змісті.

Як і для неперервного вейвлет-перетворення, зворотне дискретне перетворення (23.22) не може виконати відновлення нецентрованих сигналів у силу нульового першого моменту вейвлетних функцій і, відповідно, центрування значення вейвлет-коефіцієнтів C_{mk} при прямому вейвлет-перетворенні. Тому при обробці числових масивів даних дискретні вейвлети використовуються, як правило, у парі з пов'язаними з ними дискретними скейлінг-функциями.

Скейлінг-функції мають із вейвлетами загальну область задання й певне співвідношення між значеннями (формою), але перший момент скейлінг-функцій по області визначення рівний 1. Якщо вейвлети розглядати, як аналоги смугових фільтрів сигналу, в основному, високочастотних при виділенні локальних особливостей у сигналі, то скейлінг-функції вейвлетів являє собою аналоги низькочастотних фільтрів, якими із сигналу виділяються в окремий масив складов, не пройшли вейвлетную фільтрацію.

Так, наприклад, що породжує скейлінг-функція вейвлета Хаара (23.14) задається наступним виразом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & t < 0,\ t > 1. \end{cases}$$

При позначенні скейлінг-функцій індексом $\varphi_{mk}(t)$ аналітика скейлінг-функцій повторює вирази (23.20-23.21) і утворює додатковий базис простору $L^2(R)$. Сума вейвлет-коефіцієнтів і скейлінг-коефіцієнтів розкладання сигналів відповідно дає можливість виконувати точну реконструкцію сигналів, при цьому замість (23.22) використовується наступний вираз зворотного вейвлет-перетворення:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Ca_k \varphi_k(t) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Cd_{mk} \psi_{mk}(t)$$

, (23.23)

де Ca_k – скейлінг-коефіцієнти, які звичайно називають коефіцієнтами апроксимації сигналу,

Cd_{mk} – вейвлет-коефіцієнти або коефіцієнти деталізації.

Більш докладне використання скейлінг-функцій буде розглянуто в темі вейвлетного кратномасштабного аналізу.

90.6 Частотно-часова локалізація вейвлет-аналізу

Реальні сигнали, як правило, кінцеві й належать простору $L^2(R)$. Частотний спектр сигналів обернено пропорційний їхній тривалості. Відповідно, досить точний низькочастотний аналіз сигналів повинен проводитися на більших інтервалах його завдання, а високочастотний – на малі. Якщо частотний склад сигналу перетерплює істотні зміни на інтервалі його задання, то перетворення Фур'є дає тільки усереднені дані частотного складу сигналу з постійним частотним розділенням. Певна частотно-часова локалізація аналізу створюється застосуванням віконного перетворення Фур'є, що дає сімейства частотних спектрів, локалізованих у часі, але в межах постійної ширини вікна віконної функції, а, отже, також з постійним значенням і частотного, і часового розділення.

На відміну від віконного перетворення Фур'є, вейвлет-перетворення, при аналогічних дискретних значеннях зсувів b, дає сімейства спектрів масштабних коефіцієнтів *a* стиснення-розтягання

$$C(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) |a|^{-1/2} \psi_o[(t-b)/a] dt$$

.

Якщо вважати, що кожний вейвлет має певну "ширину" свого часового вікна, якому відповідає певна "середня" частота спектрального образа вейвлета, зворотна його масштабному коефіцієнту *a*, то сімейства масштабних коефіцієнтів вейвлет-перетворення можна вважати аналогічними сімействам частотних спектрів віконного перетворення Фур'є, але з одним принциповою відмінністю.

Масштабні коефіцієнти змінюють "ширину" вейвлетів і, відповідно, "середню" частоту їх фур'є-образів, а, отже, кожній частоті відповідає своя тривалість часового вікна аналізу, і навпаки. Так малі значення параметра *a*, що характеризують швидкі складові в сигналах, відповідають високим частотам, а більші значення (відповідні до повільних змін сигналу) – низьким частотам.

Таким чином, за рахунок зміни масштабу вейвлети здатні виявляти відмінності на різних частотах, а за рахунок зсуву (параметр *b*) проаналізувати властивості сигналу в різних точках на всьому досліджуваному часовому інтервалі. Якоюсь мірою можна говорити про те, що багаторозмірне часове вікно вейвлет-перетворення адаптоване для оптимального виявлення й низькочастотних, і високочастотних характеристики сигналів.

Для довільної віконної функції $z(t) \in L^2(R)$ її центр і радіус визначаються формулами:

$$t_o = \frac{1}{\|z(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t \, |z(t)|^2 \, dt$$

,

$$\Delta z = \frac{1}{\|z(t)\|} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 \, |z(t)|^2 \, dt}$$

Якщо по цих функціях визначити центри й радіуси вейвлетів і їх фур'є-образів, то часова локалізація відбувається із центрами вікон $b + at_0$ шириною $win_t = 2a\Delta_{\psi(t)}$, а частотна – із центрами ω_o / a, і із шириною вікна $win_\omega = 2\Delta_{\psi(t)}/a$. При цьому значення відношення центральної частоти до ширини вікна не залежить від місця розташування центральної частоти.

Частотно-тимчасове вікно $win_t \cdot win_\omega = 4\Delta_{\psi(t)}\Delta_{\psi(t)}$ звужується при високій центральній частоті, і розширюється при низькій. Схематичне зображення частотно-часових вікон перетворення наведене на рисунку 23.12.

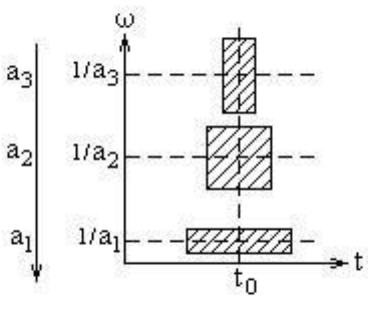


Рисунок 23.12 – Схематичне зображення частотно-часових вікон

Таким чином, на високих частотах краще розділення за часом, а на низьких - по частоті. Для високочастотного компонента сигналу ми можемо точніше вказати її часову позицію, а для низькочастотної - її значення частоти.

Зміна частотно-часового вікна вейвлета визначає кут впливу значень функції в довільних точках t_i на значення коефіцієнтів $C(a,b)$. І навпаки, кут впливу із точки $C(a_i,b_i)$ на вісь t визначає інтервал значень функції, які беруть участь в обчисленні даного коефіцієнта $C(a_i,b_i)$ – область достовірності.

Схематично це показане на рисунку 23.13.

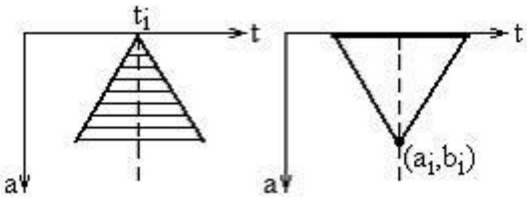


Рисунок 23.13

По куту впливу наочно видно, що високочастотна (дрібномасштабна) інформація обчислюється на основі малих інтервалів сигналів, а низькочастотна – на основі більших. Оскільки аналізовані сигнали завжди кінцеві, то при обчисленні коефіцієнтів на границях завдання сигналу область достовірності виходить за межі сигналу, і для зменшення погрішності обчислень сигнал доповнюється завданням початкових і кінцевих умов (середнім значенням, передбачуваним часових ходом і т.п.).

90.7 Образна представлення перетворення

Уявимо собі довгу і вузьку скляну скриню, довільно заповнений кулями трьох різних діаметрів: 5, 10 і 15 см. Глянемо на скриню збоку, і лінію висоти насипки будемо вважати значенням сигналу залежно від відстані від одного з торців скрині (умовно – нульового).

Поберемо перший "вейвлет" – ідеальне диференціальне сито з діаметром отворів $d=5$ см, через яке проходять тільки п’ятисантиметрові кулі (аналог значення a_0). Пересуваючись уздовж скрині, "просіємо" через це сито кулі в скрині, не перемішуючи їх по відстані від нульового торця скрині й розміщаючи кулі, що відсіваються, у такій же скрині, зберігаючи відстань від початку скрині.

Перемінимо масштаб "вейвлета" і повторимо цю операцію ситом з діаметром отворів 10, а потім 15 див. Якщо всі три скрині розташувати поряд, ми одержимо двовимірну "поверхню" насипки відсіяних куль, яка наочно покаже розподіл куль у скрині й по розмірах, і по їхній концентрації в різних ділянках скрині.

Дана модель розкладання є досить грубою, але інтуїтивно зрозуміло, що зворотне складання куль у скриню зі збереженням їх місця розташування з певною точністю відновить висоту насипки. Замініть кулі короткими фрагментами електронних сигналів довільної, але однієї й тієї форми в межах діаметра куль, наприклад такими, як $\psi(t)$ на рисунку23.9, складете всі значення сигналів за поточними значенням t, і Ви одержите складний сумарний сигнал. Використовуючи пряме вейвлет-перетворення з вейвлетами цих же складових, Ви можете розкласти сумарний сигнал (і будь-який інший довільний сигнал) на складові в масштабно-часовій площині. Замініть масштабну вісь ширини вейвлетів на зворотну їй частотну вісь, і Ви представите результати в частотно-часовій площині.

Помітимо тільки, що точність, показність і інформативність результатів аналізу багато в чому будуть залежати як від форми й особливостей аналізованого сигналу, так і від форми обраних вами вейвлетів і параметрів масштабування й зрушення. Це визначається тим, що диференціальне сито в прикладі з кулями – ідеальна операція поділу, у той час як при вейвлет-перетворенні "ідентифікація" складових виконується по скалярному добуткові сигналу й функції вейвлета.

Скалярний добуток у принципі не може давати однозначної відповіді типу " так-ні", а тільки "наносить" на масштабно-тимчасову площину певні значення величини скалярного добутку. З одного боку, вибір типу вейвлета вносить певну суб'єктивність дослідника в методику дослідження сигналів, але, з іншого боку, дає дослідникові нові можливості й свободу в пошуці найбільш ефективних і оптимальних методів обробки сигналів і добування з них необхідної інформації.

90.8 Переваги і недоліки вейвлетних перетворень

- Вейвлетні перетворення мають практично всі переваги перетворень Фур'є.
- Вейвлетні базиси можуть бути добре локалізованими як по частоті, так і за часом. При виділенні в сигналах добре локалізованих різномасштабних процесів можна розглядати тільки ті масштабні рівні розкладання, які становлять інтерес.
- Вейвлетні базиси, на відміну від перетворення Фур'є, мають досить багато різноманітних базових функцій, властивості яких орієнтовані на розв'язок різних задач. Базисні вейвлети можуть мати й кінцеві, і нескінченні носії, реалізовані функціями різної гладкості.
- Недоліком вейвлетних перетворень є їхня відносна складність.

90.9 Практичне використання

Практичне використання вейвлет-перетворень зв'язане, в основному, з дискретними вейвлетами як в силу повсюдного використання цифрових методів обробки даних, так і в силу ряду відмінностей дискретного й неперервного вейвлет-перетворень.

Неперервні вейвлети дають трохи більш наочне представлення результатів аналізу у вигляді поверхонь вейвлет-коефіцієнтів по неперервних змінних. На рисунку 23.14 аналізований сигнал складається із двох модульованих гауссіанів.

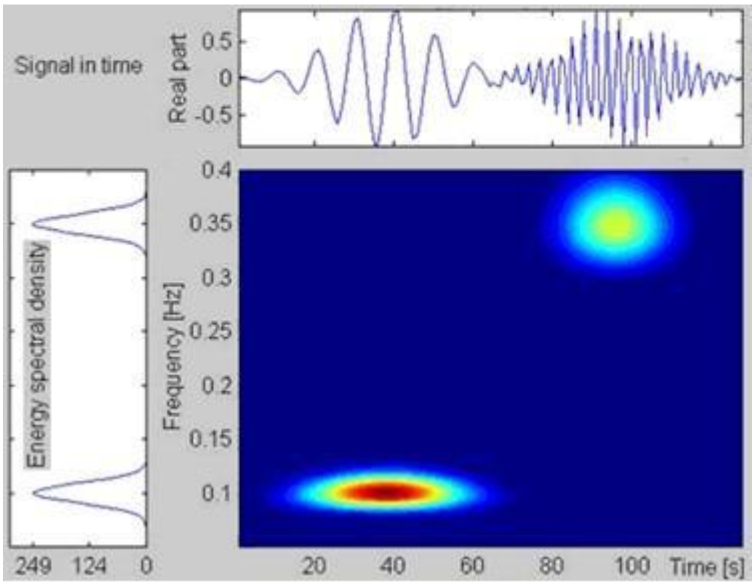


Рисунок 23.14 – Аналізований сигнал, що складається із двох модульованих гауссіанів

Перетворення вейвлетом Морлета чітко показує їхню просторову й частотну локалізацію, у той час як спектр Фур'є дає тільки частотну локалізацію.

Однак базиси на основі неперервних вейвлетів, як правило, не є строго ортонормованими, оскільки елементи базису нескінченно диференціюємі і експоненціально спадають на нескінченності. У дискретних вейвлетів ці проблеми легко знімаються, що забезпечує більш точну реконструкцію сигналів.

Вибір конкретного виду й типу вейвлетів багато в чому залежить від аналізованих сигналів і задач аналізу, при цьому чималу роль відіграє інтуїція й досвід дослідника. Для одержання оптимальних алгоритмів перетворення розроблені певні критерії, але їх ще не можна вважати остаточними, тому що вони є внутрішніми стосовно самих алгоритмів перетворення й, як правило, не враховують зовнішніх критеріїв, пов'язаних із сигналами й цілями їх перетворень. Звідси випливає, що при практичному використанні вейвлетів необхідно приділяти достатньої увагу перевірці їх працездатності й ефективності для поставлених цілей у порівнянні з відомими методами обробки й аналізу.

Тема 26 Чірплет перетворення

Розділ 100 Інтегральні перетворення

У витоках класичної теорії обробки сигналів лежить теорія операційного числення на основі інтегральних перетворень:

$$F(p) = \int_{b}^{a} f(t)\psi(t,p)dt$$

,

де $f(t)$ - перетворювана функція, $\psi(t,p)$ - ядро (базис) інтегрального перетворення, від якого залежить вид перетворення та характер задач, які за допомогою нього вирішуються. Найбільш узагальненим є перетворення Лапласа ($\psi(t,p) = e^{-pt}$, $a = -\infty$, $b = \infty$) оскільки з ним можна зв'язати перетворення, які отримали найбільше практичне впровадження. Перетворення Лапласа пов'язує клас функцій дійсної змінної t з функцією-зображенням комплексної змінної $p = s + j\sigma$. Тобто зображення по Лапласу є спектральна функція експоненційно-згасаючої гармонічної функції з коефіцієнтом загасання s, та частотою коливань σ. Звідси слідує зв'язок з гармонічним аналізом за Фур'є ($s = 0$, $\sigma = \omega$) - перетворення сигналів у частотну область та подальший аналіз отриманих спектрів. Застосування інтегрального перетворення Фур'є є дуже наочною демонстрацією головних періодичних властивостей сигналу, які описуються всього двома дійсними функціями $\sin \omega t$ та $\cos \omega t$, або однією комплексною $e^{j\omega t}$. Перетворення Фур'є дає блискучі результати для стаціонарних сигналів, а його реалізація не потребує великих витрат. З розвитком технологій і ускладненням вирішуваних задач почали даватися взнаки обмеження застосування перетворення Фур'є, зокрема для сигналів, які втрачають глобальну стаціонарність. Тут на допомогу приходять вікна та алгоритми розбиття сигналів у часі на стаціонарні відрізки, за допомогою яких будуються спектруми (STFT – short-time Fourier Transform). Отже тепер результат перетворення Фур'є стає функцією не тільки частоти, але й часу і вигляду та розміру вікна. Для такого багатовимірного перетворення часто застосовують термін „часо-частотно-масштабне" перетворення (від англ. TFS – time-friquency-scale), а класичне перетворення Фур'є називають одновимірним.

У 1946 році угорсько-анлійський фізик Денеш Габор, який пізніше став лауреатом Нобелівської премії за працю з голографії, вперше запропонував в якості базису для перетворення Фур'є використовувати двовимірну функцію, параметрами якої є не тільки частота, а й час. Отже базисна функція набула властивостей вікна, що одразу спрощувало застосування перетворення Фур'є для аналізу нестаціонарних сигналів. В якості такого базису в перетворенні Габора виступало гармонійне коливання модульоване по амплітуді функцією Гауса, яка рухалась вздовж осі часу.

На початку 1980-х років французькі фізики Морле та Гросман встановили, що застосування у перетворенні Габора базису у вигляді солітоноподібної, не обов'язково періодичної функції значно розширює можливості цього перетворення не лише для аналізу властивостей сигналів, а й для опису динаміки складних нелінійних процесів з широкими діапазонами частот. Так з'явилось перетворення вейвлет (wavelet - з анлійської мови дослівно перекладається як „маленька хвиля" – добре локалізована у часовій та частотній області функція). Вейвлет перетворенням присвячено багато праць та воно набуло широкого застосування починаючи вже з початку 1990-х років.

Приблизно в цей самий період часу виходить праця Стіва Мана, який пропонує застосовувати у якості базової функції вейвлети з кутовою модуляцією – чірплети, - що дозволяє аналізувати просторові властивості процесу, який породжує вимірювальний сигнал.

В теорії обробки сигналів перетворення чірплет є розкладом вхідного сигналу по базисним функціям, що мають назву чірплети. Терміни чірплет (chirplet - з анлійської мови дослівно перекладається як „цвірінькання" – маленькі сигнали, частота яких зростає або зменшується з плином часу) та „перетворення чірплет" зявилися поріняно недавно. Вперше їх увів професор Торонтського університету Стів Ман у 1991 році в праці „Перетворення чірплет: узагальнення перетворення Габора". Нажаль на той час через складність реалізації та обмеженість ресурсів ЕОМ перетворення чірплет не знайшло такого широкого розповсюдження як поріднене з ним вейвлет перетворення. Чірплет залишався альтернативою для вирішення задач, де користь від його застосування значно перевищувала витрати. На сьогодні, в умовах швидкого зростання можливостей ЕОМ чірплети стали надзвичайно актуальними для вирішення задач аналізу сигналів радарів, біомедичних дослідженнях, при обробці зображень та класифікації образів, для усунення ефекту Доплера, у рефлектометрії, метеорології, геології та ще багатьох галузях людської діяльності. Однак вони ще не достатньо широко відомі колу дослідників, які займаються аналізом експериментальних даних.

Далі буде розглянуто основні положення теорії чіплетів, як узагальнення перетворень Лапласа, Фур'є, Габора та вейвлет. Наведено основні визначення, властивості та можливості чірплет перетворення, окреслено основні ознаки та властивості функцій з яких формується базис чірплет перетворення.

100.1 Перетворення Лапласа

Почнемо з перетворення Лапласа та $t-p$ - локалізації.Нехай є кусочно-неперервна функція $f(t) \in L^2(R)$. Перетворення Лапласа цієї функції має вигляд :

$$L[f(t)](p) = L(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

,

де $L(p)$ - зображення по Лапласу функції-оригіналу $f(t)$, тобто $f(t) \rightarrow L(p)$.

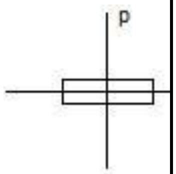
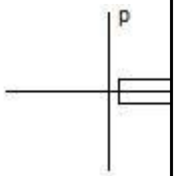
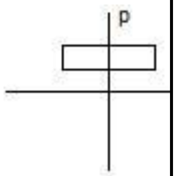
Зворотне перетворення має вигляд :

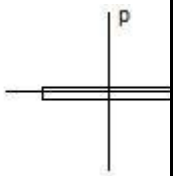
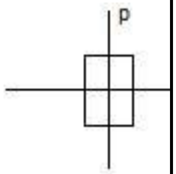
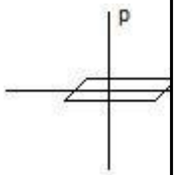
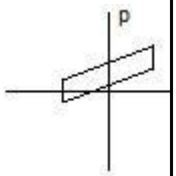
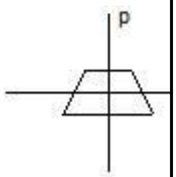
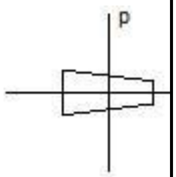
$$L^{-1}[f(t)](p) = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{s-j\infty}^{s+j\infty} \frac{L(p)}{p} e^{pt} dp$$

.

Перетворення Лапласа можна адаптувати до властивостей аналізованої функції в t або p області, виконуючи перетворення подібності (зсув, масштабування та ін.) базису $\psi(t,p)$ на площині (t,p). На цьому принципі побудовано інтегральні перетворення, які широко використовуються в теорії обробки сигналів (Фур’є, Габора, вейвлет, чірплет). У таблиці 2.1 наведено результати восьми перетворень подібності та показано локалізацію функції $f(t)$ і її зображення $L(p)$ на площині (t,p).

Таблиця 26.1 – Перетворення подібності та локалізація функції $f(t)$ і її зображення $L(p)$ на площині (t,p)

№	**Базис**	**Функція**	**Зображення**	**Локалізація в області $(t;p)$**
0	$\psi(t,p)=e$	$f(t)$	$L(p)$	
1	$\psi(t-\tau,p$	$f(t-\tau)$	$e^{\tau p}L(p)$	
2	$\psi(t,p-\rho$	$e^{\rho t}f(t)$	$L(p-\rho)$	

3	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\psi\left(\frac{t}{\alpha}\right.$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$	$\sqrt{\alpha}L(\alpha p)$	
4	$\frac{1}{\sqrt{\beta}}\psi\left(t,\right.$	$\sqrt{\beta}f(\beta t)$	$\frac{1}{\sqrt{\beta}}L\left(\frac{p}{\beta}\right)$	
5	$\psi(t-\iota p,$	$e^{\iota t^2} * f(t)$	$e^{\iota p^2}L(p)$	
6	$\psi(p, p-$	$e^{\iota t^2} f(t)$	$e^{\iota p^2} * L(p)$	
7	$\frac{1}{C}\psi(t(p),$	$\frac{1}{C}\langle L(p)\mid\psi(t($	$\frac{1}{C}\langle f(t)\mid\overline{\psi(t(p}$	
8	$\frac{1}{c}\psi(t, p(t)$	$\frac{1}{c}\langle L(p)\mid\psi(t, p$	$\frac{1}{c}\langle f(t)\mid\overline{\psi(t, p}$	

100.2 Перетворення Фур'є

Почнемо з перетворення Фур'є, нехай є кусочно-неперервна функція $f(t)\in L^2(0,2\pi)$, яка може бути періодично розширена і визначена на $R(-\infty,\infty)$ таким чином, що $f(t) = f(t - 2\pi)$, $t \in (0,2\pi)$. Будь-яку таку функцію можна подати у вигляді інтегралу Фур’є :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\psi(t,\omega)d\omega$$

,

де $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi(t,\omega)}dt$ - перетворення Фур’є функції $f(t)$,

$\psi(t,\omega) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$ - ортонормований базис простору $L^2(0,2\pi)$,

побудований шляхом масштабного перетворення по частоті $\omega \in R$ функції $e^{jt} = \cos(t) + j\sin(t)$ (рис.26.1).

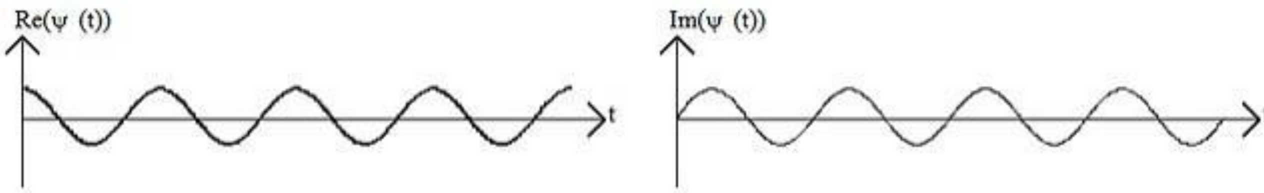


Рисунок 26.1 – Базисна функція перетворення Фур’є для $\omega = const$

Перетворення Фур’є дає інформацію про вміст кожної частоти ω в аналізованому сигналі, але оскільки інтегрування проводиться по всій нескінченій числовій осі, то немає можливості виявити момент часу коли саме має місце та чи інша частота. Для прикладу наведемо результати перетворення Фур’є двох сигналів (рис.26.2):

$f_1(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$ (26.24) та $f_2(t) = \begin{cases} \sin(\omega_1 t), & t[-\infty, a); \\ \sin(\omega_2 t), & [a, \infty). \end{cases}$ (26.1)

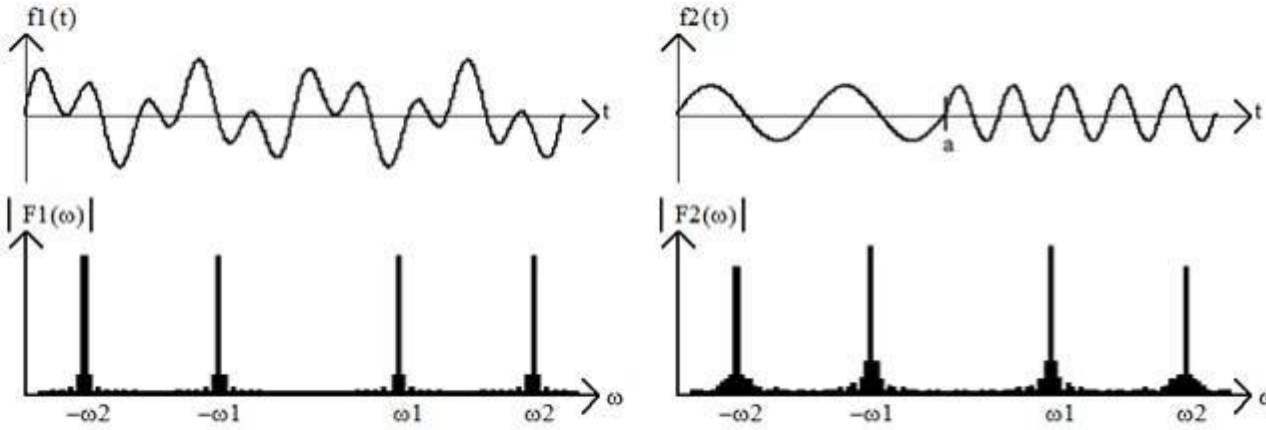


Рисунок 26.2 – Сигнали $f_1(t)$ та $f_2(t)$ і їх перетворення Фур’є

Отже бачимо, що для аналізу нестаціонарних сигналів перетворення Фур’є можна ефективно застосувати лише у випадку коли цікавою є інформація про загальний частотний склад сигналу, а не про час існування окремих частотних складових.

100.3 Перетворення Габора

Для усунення вказаних вище недоліків у 1946 році Габор ввів до класичного перетворення Фур’є функцію Гауса, яка виконує роль часового вікна, що рухається вздовж осі часу:

$$g(t,b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}e^{\frac{-(t-b)^2}{2a^2}},$$

де a - фіксований параметр, b - параметр зсуву вікна вздовж осі часу.

Тобто базисом перетворення Габора стає модульована функція Гауса з двома параметрами: частота ω та зсув у часі b (рис.26.3):

$$\psi(t,\omega,b)=e^{j\omega t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}e^{\frac{-(t-b)^2}{2a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}e^{\frac{j2a^2\omega t-(t-b)^2}{2a^2}}.$$

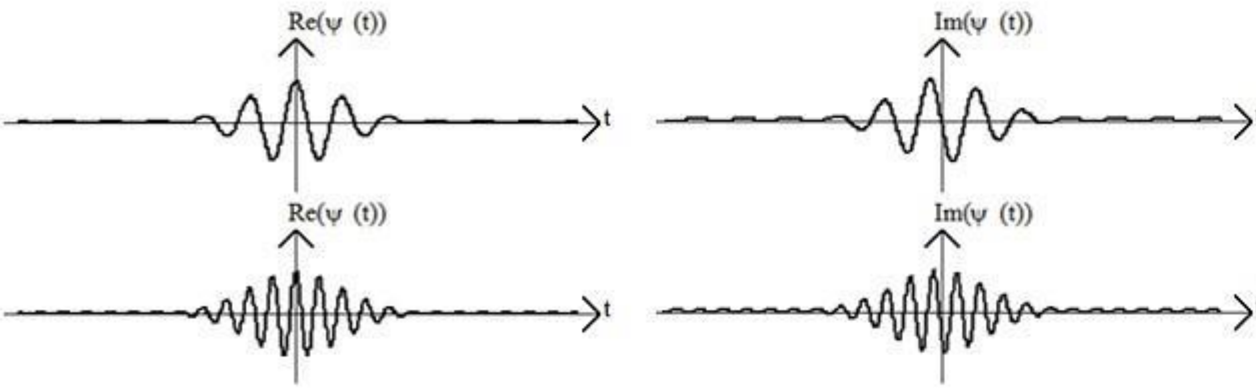


Рисунок 26.3 – Базисна функція перетворення Габора для двох різних значень a при $\omega = const$, $b = 0$

Отже, перетворення Габора функції $f(t) \in L^2(0,2\pi)$ ставить у відповідність функцію двох змінних – частоти та зсуву у часі, і має вигляд:

$$G(\omega,b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi(t,\omega,b)}dt$$

.

Для прикладу наведемо результати перетворення Габора вже знайомих нам сигналів $f_1(t)$ та $f_2(t)$ для випадку коли $\omega_1 << \omega_2$ (рис.26.4).

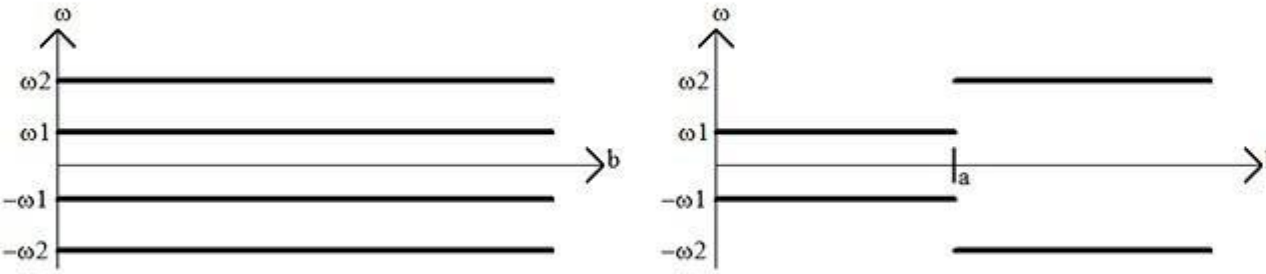


Рисунок 26.4 – Перетворення Габора сигналів $f_1(t)$ та $f_2(t)$.

При використанні перетворення Габора виникає проблема вибору значення фіксованого параметру a (ширини вікна), через те що базис перетворення Габору, як видно з рис.26.3 не має властивості самоподібності. Тобто, розклад функції по такому базису є розкладом по модульованим фрагментам гармонічного сигналу. Довжина фрагментів для всіх частот однакова, що дає різну кількість осциляцій для різних гармонік. Виходить, що надто широке вікно дає можливість проаналізувати низькочастотні складових сигналу, але воно згладжує цікаві особливості високочастотних складових сигналу. І навпаки, вузьке вікно дає можливість вивчити високочастотні складові, але не дозволяє виявити низькочастотні. З тією самою проблемою стикається узагальнення перетворення Габора у вигляді віконного перетворення Фур'є, оскільки відповідно до принципу невизначеності Гейзенберга неможливо одночасно отримати точне подання сигналу у часовій та частотній областях, тобто визначити до якого моменту часу в сигналі присутні конкретні частотні складові. Єдине, що можна знати, це часові інтервали на протязі яких в сигналі мають місце конкретні частотні смуги.

100.4 Перетворення вейвлет

Нехай тепер для розкладу кусочно-неперервної функції $f(t) \in L^2(R)$ базисом простору $L^2(R)$ оберемо функцію, що має властивість самоподібності та локальне середнє значення якої на нескінченності прямує до нуля. Такими функціями є вейвлети – добре локалізовані солітоноподібні „маленькі хвилі”. Розклад виконується по сімейству вейвлетів $\psi(t,a,b)$, утворених шляхом зсуву b вздовж часової осі та масштабування a базисного вейвлету $\psi(t)$:

$$\psi(t,a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Для прикладу розглянемо вейвлетний базис на зразок базису перетворення Габора з модульованої функції Гауса (рис.26.5):

$$\psi(t,a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} e^{j\left(\frac{t-b}{a}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{\frac{-(t-b)^2}{2a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi|a|a}} e^{\frac{j2a(t-b)-(t-b)^2}{2a^2}}.$$

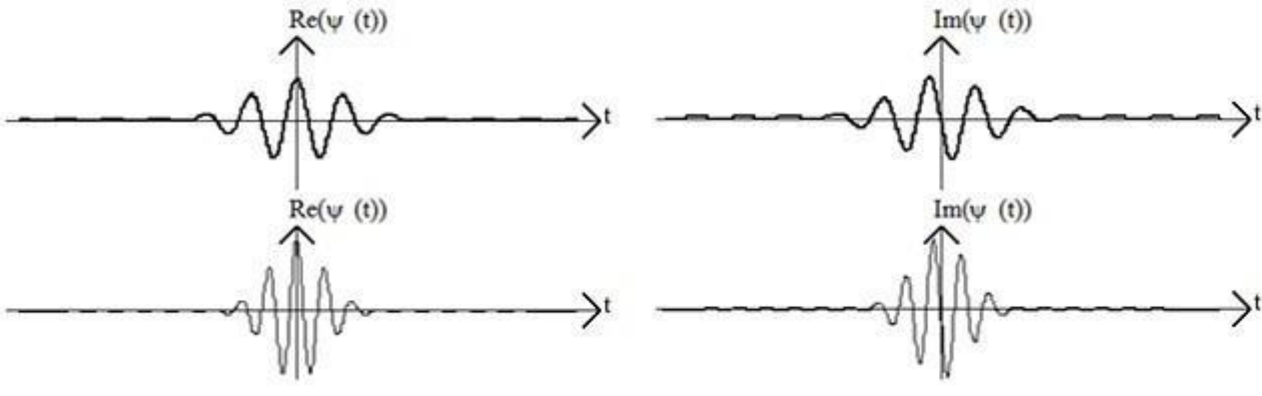


Рисунок 26.5 – Базисна функція перетворення вейвлет для двох різних значень a для $b = 0$

Отже, перетворення вейвлет ставить у відповідність функції часу $f(t)$ функцію двох змінних зсуву у часі b і ширини вікна a:

$$W(a,b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{\psi(t,a,b)}dt$$

На рис.26.6 наведено результати перетворення вейвлет сигналів $f_1(t)$ та $f_2(t)$.

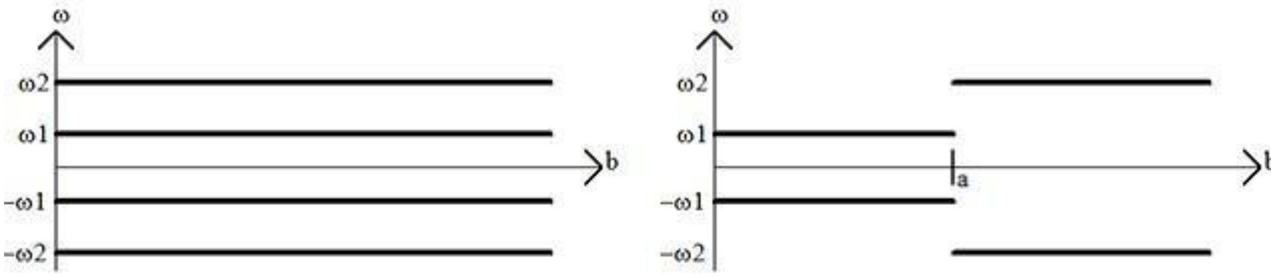


Рисунок 26.6 – Перетворення вейвлет сигналів $f_1(t)$ та $f_2(t)$

Як видно, на відміну від базисів вище розглянутих перетворень Фур’є та Габора, вейвлет є рухомим часо-частотним вікном, і що головне має властивість самоподібності, тобто всі вейвлети сімейства мають ту саму кількість осциляцій що і базисний вейвлет. Такий підхід дає можливість отримувати інформацію як з високочастотних так і низькочастотних складових на різних масштабах часу, але не дозволяє повною мірою прослідкувати динаміку досліджуваного фізичного процесу у частотній області. Тобто втрачається інформація про характер та швидкість змін частотних складових, що особливо важливо при дослідженні об’єктів на наявність зародження змін у їхньому стані та при розв’язанні задач прогнозування.

Розділ 101 Базисні функції чірплет-перетворення

101.1 Визначення чірплету

Як видно з таблиці 26.1 (рядки 7 та 8) погляд на склад сигналу у перспективі як у частотній так і у часовій області можна отримати обравши для розкладу кусочно-неперервної функції $f(t)\in L^2(R)$ вейвлетний базис з кутовою модуляцією, тобто – чірплет.

Чірплетом називається базис виду $\psi(t,\omega(t))$, де , у найпростішому випадку, $\omega(t)=at+b$.

Це так званий лінійний чірплет, оскільки частота лінійно залежить від часу. Таким чином приходимо до базису виду :

$$\psi(t,\omega(t)) = e^{j(at+b)t}$$

.

Бачимо, що в момент часу $t=0$ частота буде рівною b і зростатиме вона тим швидше, чим більшим буде коефіцієнт нахилу a (рис. 26.7).

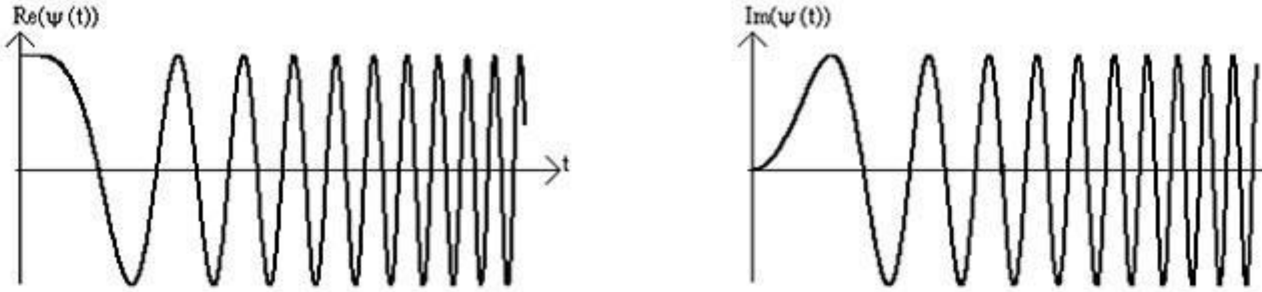


Рисунок 26.7 – Базис чірплет перетворення нескінченний у протяжності

Оскільки ми розглядаємо простір $L^2(R)$ функцій $f(t)$, визначених на всій дійсній осі $R(-\infty,\infty)$, і таких що мають скінченну енергію (норму)

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

,

як і в випадку з вейвлет перетвореннями , чірплети повинні прямувати до нуля на $\pm\infty$ і повинні бути добре локалізованими. Для досягнення цієї мети скористаємося вікном Гауса(рис. 26.8,26.9,26.10):

$$\psi(t,\omega(t)) = e^{j(at+b)t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(t-b)^2}{2a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}c} e^{\frac{j2a^2(at+b)t-(t-b)^2}{2a^2}} = \psi(t,a,b)$$

,

де $c=\sqrt{2}\sigma$ - параметр розширення.

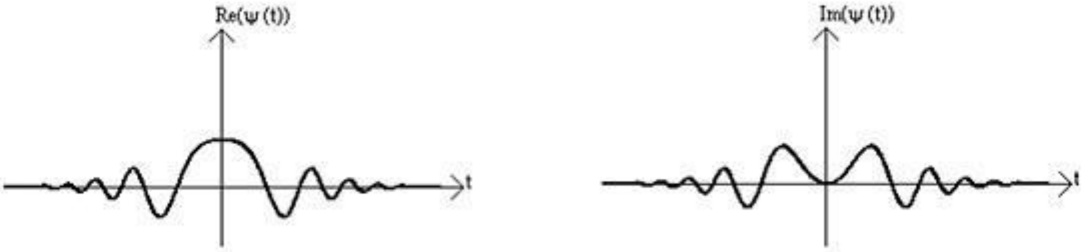


Рисунок 26.8 – Базисна функція перетворення чірплет для $a = a_1,\ b = 0,\ c = c_1$

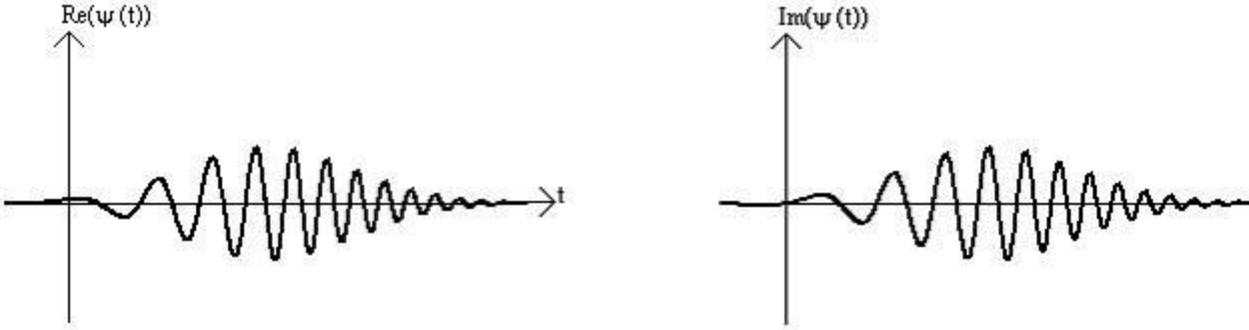


Рисунок 26.9 – Базисна функція перетворення чірплет для $a = a_2 < a_1,\ b = b_1,\ c > c_1$

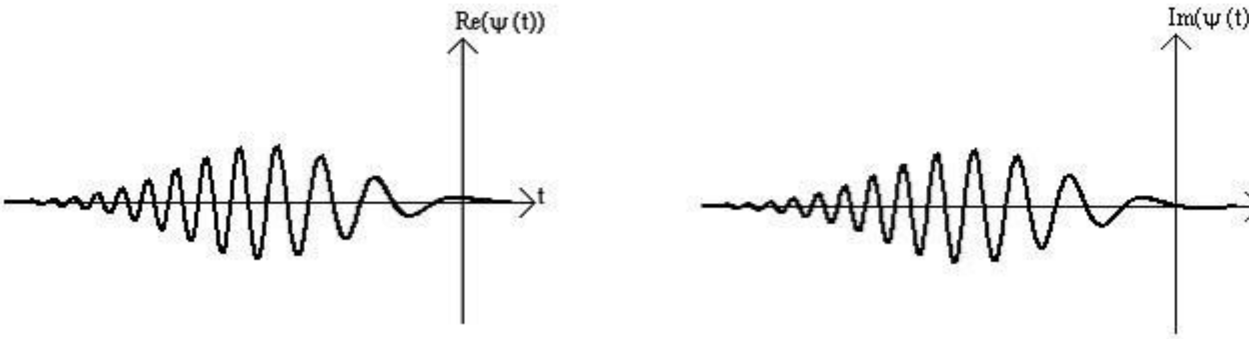


Рисунок 26.10 – Базисна функція перетворення чірплет для $a = a_2 < a_1,\ b = -b_1,\ c > c_1$

Вище приведені рисунки представлені в одному масштабі по осі y, тому бачимо, що від параметра розширення c обернено пропорційно залежить амплітуда чірплету. b - частотний центр, або ж зсув у часі, який може бути розташований на початку координат ($b = 0$), зміщений вправо ($b > 0$), або вліво ($b < 0$). Зі зміною параметра a прямо пропорційно змінюється швидкість зміни частоти чірплету і ширина вікна.

Вище був розглянутий лінійний чірплет, але окрім нього існує ще багато базисів, основними з яких є :

- $q-$ чірплети (квадратичні чірплети) – у формі

$$\psi(t,\omega(t)) = e^{j(at^2+bt+c)t}.$$

$q-$ чірплети представляють собою зважений ЛЧМ-сигнал, звідси і його назва (квадратична зміна фази значить лінійну зміну частоти, рис.26.11).

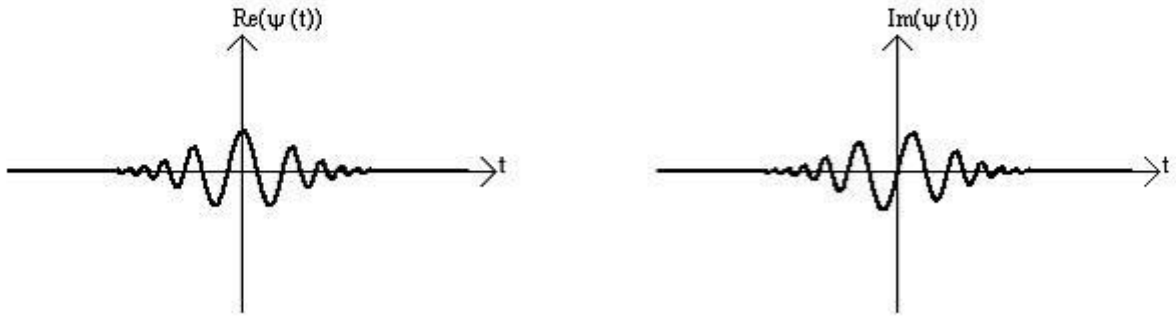


Рисунок 26.11 – Базис $q-$ чірплета

- $w-$ чірплети, або варблети (від англ. warble – пташиний спів). Незважений варблет в частотно –часовій області площини виглядає як синусоїда або схожа на неї крива. Прикладом такого сигналу може бути сирена машини швидкої допомоги з частотою звуку що періодично змінюється. Таким чином, варблет – зважений сигнал з періодичним частотно-часовим зображенням. $w-$ чірплети використовуються щоб проаналізувати сигнал частоти що коливається, тобто такої, яка періодично підвищується і падає. Прикладом такого сигналу є будь-який плаваючий об’єкт. Сімейство чірплетів цього типу визначена наступним виразом (рис. 26.12):

$$\psi(t,\omega(t)) = Ae^{j(\beta \sin(2\pi f_m t+p)/f_m + 2\pi f_c t)},$$

де f_c - центральна (несуча) частота, p - деяке значення яке змінюється в межах від 0 до 2π, f_m - моделююча частота.

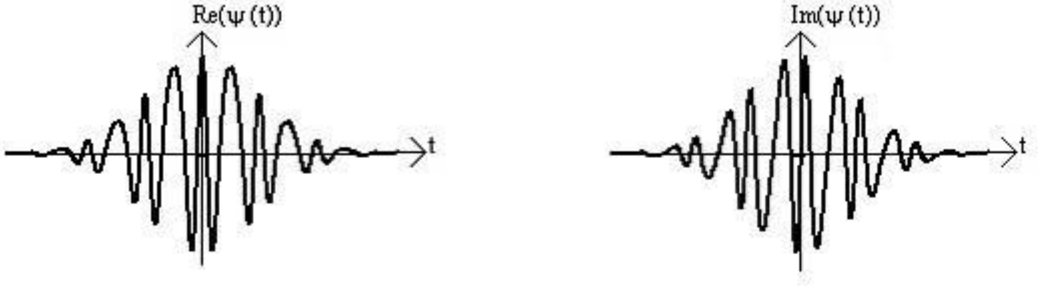


Рисунок 26.12 – Базис $w-$ чірплета

- $d-$ чірплети, або чірплети Допплера. Цей тип імітує Допплерівський зсув частоти, такий, наприклад, як звук гудка потяга, що проходить мимо. Дане сімейство чірплетів засновано на базисах виду (рис. 26.13)

$$\psi(t,\omega(t)) = e^{\frac{j(at+b)t}{b-at}}$$

.

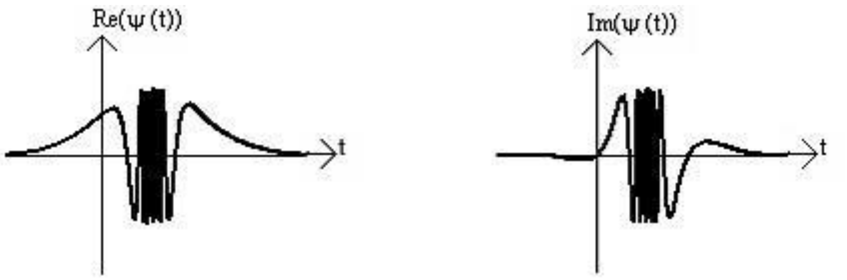


Рисунок 26.13 – Базис $d-$ чірплета

- $p-$ чірплети, у яких масштаб змінюється проективно. Якщо вейвлет-перетворення засновано на вейвлетах що мають форму $g(ax+b)$,то чірплети $p-$типу виражаються як $g((ax+b)/(cx+1))$, де $a-$ масштаб, $b-$ зсув а c - “чірп-рейт” (нахил частоти) (рис. 26.14).

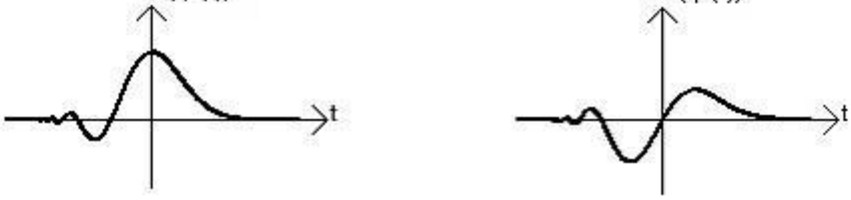


Рисунок 26.14 – Базис $p-$ чірплета

101.2 Властивості чірплету

Для практичного застосування важливо знати ознаки, котрими обов'язково повинна володіти функція, щоб бути чірплетом. Наведемо ці ознаки.

1) Локалізація

Чірплет перетворення, так само як і вейвлет перетворення, на відміну від перетворення Фур'є використовує локалізовану базисну функцію. Чірплет повинен бути добре локалізований і в часовому просторі і по частоті.

2) Нульове середнє

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t, \omega(t))dt = 0$$

.

Часто в практичних задачах виявляється необхідним, щоб не лише нульовий, але і всі перші m моментів були рівними нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t, \omega(t))dt = 0$$

.

Такий чірплет називається чірплетом $m-$ го порядку. Чірплет що має велико число нульових моментів дозволяє ігнорувати найбільш регулярні поліноміальні складові сигналу і аналізувати дрібномасштабні флуктуації і особливості високого порядку.

3) Обмеженість

$$\int \left|\psi(t, \omega(t))\right|^2 dt < \infty$$

.

4) Автомодельність базису

Характерною ознакою базису чірплет перетворення є його самоподібність. Усі чірплети даного сімейства $\psi_{abc}(t, \omega(t))$ мають те ж саме число осциляцій, що і базисний чірплет $\psi(t, \omega(t))$, оскільки отримані з нього за шляхом масштабних перетворень і зсувів.

Отже, перетворення чірплет ставить у відповідність функції часу $f(t)$ функцію двох змінних: зсуву у часі b і ширини вікна a :

$$C(a,b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi(t,a,b)}dt$$

. (26.2)

Розділ 102 Властивості чірплет-перетворення

Наведемо основні елементарні властивості чірплет–перетворення функції $f(t)$.

Будемо використовувати позначення $C(f)=C(a,b)$.

1) Лінійність

$$C[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha C[f_1]+\beta C[f_2]=\alpha C_1(a,b)+\beta C_2(a,b).$$

Звідси слідує, що чірплет-перетворення векторної функції є вектор з компонентами, що являють собою чірплет-перетворення кожної із компонент вектора що аналізується по окремості.

2) Інваріантність відносно зсуву

$$C[f(t-b_0)]=C(a,b-b_0)$$

.

Із цієї властивості слідує комутативність диференціювання, а саме $\partial_t C[f]=C[\partial_t f]$

(де $\partial_t=\partial/\partial t$). Разом з першою властивістю це означає можливість перестановки і для похідних векторного аналізу.

3) Інваріантність відносно розтягування (стиснення)

$$C\left[f\left(\frac{t}{a_0}\right)\right]=\frac{1}{a_0}C\left(\frac{a}{a_0},\frac{b}{a_0}\right)$$

.

Ця властивість дозволяє визначати наявність і характер особливостей аналізованої функції.

4) Диференціювання

$$C[\partial_t^m f]=(-1)^m\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\partial_t^m\left[(\psi_{abc}^*(t))\right]dt$$

.

Таким чином, щоб проігнорувати, наприклад, крупно масштабні поліноміальні складові і проаналізувати особливості високого порядку або дрібномасштабні варіації функції f, не має різниці що диференціювати необхідну кількість разів, чи саму функцію, чи аналізуючий чірплет.

Стів Ман і Саймон Хаукін, котрі вперше ввели термін чірплет, першими займалися і дослідженнями на основі чірплет перетворення. Дослідники помітили, що кожен з чірплетів, по суті, моделює фізику руху плаваючого об’єкту. Так вони застосували нове перетворення до практичної проблеми в морському радарі: проблеми виявлення плаваючих об’єктів, таких як невеликі шматки айсберга, що представляють суттєву загрозу для суден. Отримані результати виявилися значно кращими, ніж ті що отримані за допомогою інших методів. Також перетворення забезпечує хороший аналіз фактичних звуків, таких як наприклад пташине цвірінькання та поліцейські сирени, і багатьох інших, таких що мають чірплетоподібну нестаціонарність.