

УДК 629.113

## АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ШВИДКІСНОГО СПЕЦІАЛІЗОВАНОГО ВАГОНА НА ЦИЛІНДРИЧНИХ ПРОГУМОВАНИХ КОЛЕСАХ

Н.Л. Белевцова, доц., к.т.н., В.Г. Вербицький, проф., д.ф.-м.н.,

А.М. Єфименко, асп.,

Державний економіко-технологічний університет транспорту, м. Київ

*Анотація.* Проведено аналіз стійкості прямолінійного руху плоскої моделі швидкісного спеціалізованого вагона на циліндричних прогумованих колесах. На основі критерію Рауса-Гурвіца отримано межі області стійкості у площині двох параметрів моделі: параметра приведеної жорсткості первинного ресорного підвішування й повздовжньої швидкості руху.

*Ключові слова:* швидкісний вагон, циліндричні колеса, ресорне підвішування, сили псевдоковзання, курсова стійкість руху.

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СКОРОСТНОГО СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОГО ВАГОНА НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРОРЕЗИНЕННЫХ КОЛЕСАХ

Н.Л. Белевцова, доц., к.т.н., В.Г. Вербицкий, проф., д.ф.-м.н.,

А.Н. Ефименко, асп., Государственный экономико-технологический университет  
транспорта, г. Киев

*Аннотация.* Проведен анализ устойчивости прямолинейного движения плоской модели скоростного специализированного вагона на цилиндрических прорезиненных колесах. На основе критерия Рауса-Гурвица получены границы области устойчивости в плоскости двух параметров модели: параметра приведенной жесткости первичного рессорного подвешивания и продольной скорости движения.

*Ключевые слова:* скоростной вагон, цилиндрические колеса, рессорное подвешивание, силы псевдоскольжения, курсовая устойчивость движения.

## ANALYSIS OF STABILITY OF THE HIGH-SPEED SPECIALIZED CAR WITH CYLINDRICAL RUBBERIZED WHEELS

N. Belevtsova, Assoc. Prof., Cand. Sc. (Eng.), V. Verbitskii, Prof., D. Sc. (Phys.-Math.),

A. Yefimenko, postgraduate,

State Engineering and Economics University of Transport, Kyiv

*Abstract.* Analysis of stability of the rectilinear movement of the flat model of the high-speed specialized car with cylindrical rubberized wheels is carried out. On the basis of Routh-Hurwitz criterion there were determined the boundaries of the stability area in the plane of two parameters of the model: the parameter of the given rigidity of the primary spring suspension and longitudinal speed of the movement.

*Key words:* high-speed car, cylindrical wheels, spring suspension, pseudo-sliding forces, course stability.

### Вступ

Мегаліси вже давно зазнають транспортних проблем. Громадський транспорт у сере-

дньому рухається зі швидкістю, меншою ніж 30 км/год. Причина – вуличні затори. Основне транспортне навантаження у великих містах бере на себе метрополітен. Та лишається

проблема спальних мікрорайонів, які не охоплені метрополітенем. Альтернативою наземному та підземному транспорту може бути монорейковий транспорт.

Формально монорейкова дорога – це транспортна система, в якій вагони переміщуються по балці (монорейці), установленій на окремих опорах або естакаді. Головна мета винайденого транспорту – об'єднати відносну компактність канатних доріг із надійністю метрополітену.

### Аналіз публікацій

У роботі буде розглянуто принципову можливість реалізації такого виду транспорту на базі класичної схеми рейкового візка на прогумованих циліндричних колесах (рис. 1).

Вважається, що колесо циліндричне, прогумоване та котиться по горизонтальній опорній поверхні (напрямному коридору) – це повинно наближати модель взаємодії колеса з опорною поверхнею до традиційної моделі відведення І. Рокара [1, 2]. Дійсно, модель силової взаємодії за Картером [3, 4], у випадку колісної пари з циліндричною поверхнею кочення, еквівалентна гіпотезі відведення І. Рокара; останнє дає можливість дійти попередніх висновків щодо курсової стійкості системи (властивість системи поновлювати, наприклад, прямолінійний рух уздовж осі шляху при виникненні малих початкових збурень). Зрозуміло, що для цього була б необхідна асимптотична стійкість по всіх коор-

динатах моделі, а не лише по фазових швидкостях, що характерно для транспорту на циліндричних колесах, для якого ці координати є циклічними – не входять до рівнянь збуреного руху, а відповідна система лінійного наближення має відповідну кількість нульових коренів характеристичного рівняння [3]. Тому некерована модель такого екіпажа могла б лише спрямляти траєкторію свого руху, одночасно віддаляючись від осьової лінії дороги.

Тому суттєвим конструктивним елементом системи є додаткові горизонтальні пружні елементи, які функціонально виконують як стабілізуючу роль, так і роль керувального (напрямного) модуля на криволінійних ділянках дороги.

### Мета і постановка завдання

Метою роботи є дослідження стійкості прямолінійного руху плоскої моделі швидкісного спеціалізованого вагона на циліндричних прогумованих колесах та вибір раціональних значень параметрів моделі, зокрема приведеної жорсткості первинного ресорного підвішування.

### Аналіз стійкості прямолінійного руху моделі візка з циліндричними колесами

Розглянемо плоску модель візка, що складається з рами та пружно пов'язаних з нею двох колісних пар.

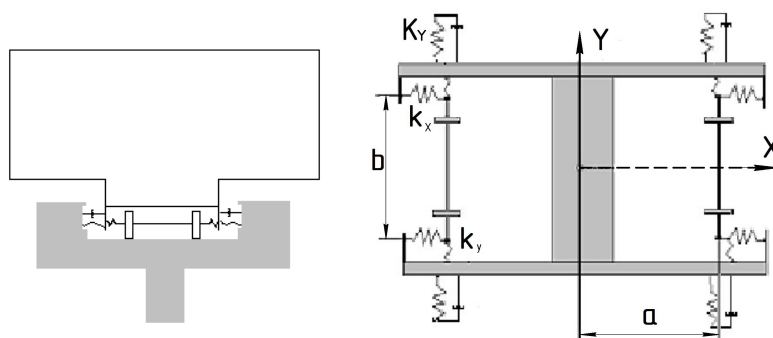


Рис. 1. Схема швидкісного спеціалізованого вагона:  $a$  – половина бази візка;  $b$  – відстань між осями пружин буксового підвішування;  $k_y, k_x$  – подовжня й поперечна жорсткості буксового підвішування відповідно

Колісна пара розглядається як механічна система із двома ступенями свободи:  $y_i$  – бічний зсув центра мас  $i$ -ї колісної пари відносно осі шляху (інерційна система відліку  $XYZ$

рухається з постійною швидкістю  $V$  уздовж прямої, що збігається з віссю шляху). Рівняння руху традиційної плоскої моделі двовісного візка (без зовнішніх горизонтальних пружних елементів – напрямних)

$$\begin{cases}
 M \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} Y \right) - 2k_y Y_2 - 2k_y Y_1 + 4k_y Y = 0; \\
 J \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi \right) - 2b^2 k_x \Psi_1 + (4b^2 k_x + 4a^2 k_y) \Psi + 2ak_y Y_2 - 2b^2 k_x \Psi_2 - 2ak_y Y_1 = 0; \\
 m_1 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} Y_1 \right) - 2ak_y \Psi + 2k_y Y_1 - 2k_y Y - Q_{Y_1} = 0; \\
 J_1 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_1 \right) + 2b^2 k_x \Psi_1 - 2b^2 k_x \Psi - Q_{\Psi_1} = 0; \\
 m_1 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} Y_2 \right) + 2ak_y \Psi + 2k_y Y_2 - 2k_y Y - Q_{Y_2} = 0; \\
 J_1 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_2 \right) - 2b^2 k_x \Psi + 2b^2 k_x \Psi_2 - Q_{\Psi_2} = 0,
 \end{cases} \quad (1)$$

де  $Y$  та  $Y_1, Y_2$  – бокове зміщення екіпажа та колісних пар відносно поздовжньої осі відповідно;  $\Psi$  та  $\Psi_1, \Psi_2$  – курсовий кут екіпажа та колісних пар відповідно.

Перші два рівняння системи (1) відповідають рамі візка; останні дві пари рівнянь описують плоский рух колісних пар на прогумованих колесах. Бічні проекції сил псевдоковзання позначені через  $Q_{Y_i}$ , а наведений момент псевдоковзання  $Q_{\Psi_i}$  включає стабілізуючий момент (другий доданок), який є функцією відносного поперечного псевдоковзання.

$$Q_{Y_i} = -2k_1 \left( \frac{\dot{Y}_i}{V} - \Psi_i \right); \quad (2)$$

$$Q_{\Psi_i} = -2k_1 d^2 \frac{\dot{\Psi}_i}{V} + 2\mu_1 \left( \frac{\dot{Y}_i}{V} - \Psi_i \right). \quad (3)$$

Можна констатувати повну аналогію між визначенням сил взаємодії колісної пари з опорною поверхнею та взаємодією еластичного колеса з дорожнім покриттям [5].

Сила крипу як функція відносного псевдоковзання визначається формулою

$$F_i = k_i \varepsilon_i \left[ 1 + \left( \frac{k_i \varepsilon_i}{k_f P_i} \right)^2 \right]^{-1/2}; \quad (4)$$

$$k_i = 235P_i - 2,4P_i^2 + 0,01P_i^3; \quad (i = 1, 2)$$

де  $P_i$  – вертикальні реакції в точках контакту колеса з рейкою в [кН] (будемо вважати рівними на лівому та правому колесах);  $k_i$  – коефіцієнт псевдоковзання;  $k_f$  – коефіцієнт тертя;  $\varepsilon_i = (\varepsilon_{ix}^2 + \varepsilon_{iy}^2)^{1/2}$  – відносне проковзування.

Поздовжня й поперечна складові відносного псевдоковзання визначаються таким чином

$$\varepsilon_{ix} = (-1)^i \frac{d\dot{\Psi}}{V}, \quad \varepsilon_{iy} = \frac{\dot{Y}}{V} - \Psi. \quad (5)$$

Тоді для поздовжньої та поперечної складових сил псевдоковзання маємо

$$X_i = -F_i \frac{\varepsilon_{xi}}{\varepsilon_i}, \quad Y_i = -F_i \frac{\varepsilon_{yi}}{\varepsilon_i}. \quad (6)$$

Коефіцієнти жорсткості  $k_x, k_y$  пружних елементів оберемо так, щоб підсистеми, які відповідають фазовим змінним  $Y_i, X_i$ , мали співпадаючі власні частоти

$$\frac{2k_y}{m_1} = \frac{2k_x b^2}{J_1} = \tau. \quad (7)$$

Незбуреному руху колісної пари відповідають нульові значення всіх фазових змінних. Визначення умов стійкості моделі візка (зокрема критичної швидкості) може бути проведено на основі критерію Рауса-Гурвіца.

За деякої (критичної) швидкості модель візка втрачає стійкість – починається процес необмеженого росту поперечних коливань елементів підвіски (колісних пар) та самої рами візка. Коливальна (флатерна) нестійкість пов'язана з появою пари суто уявних коренів характеристичного рівняння (пара комплексно-спряжених коренів перетинає уявну вісь). На основі критерію Рауса-Гурвіца можна отримати межі області стійкості у площині двох довільних параметрів моделі (буде побудовано межі у площині параметра приведеної жорсткості первинного ресорного підвішування  $\tau$  й повздовжньої швидкості руху  $V$ ) – область, в якій всі визначники Гурвіца додатні, відповідає області стійкості; область, в якій хоча б один із визначників від'ємний, є областю нестійкості.

З аналізу умов стійкості традиційної схеми візка з циліндричними колесами випливає, як і очікувалось, нестійкість по боковому зміщенню  $Y$  та куту рискання  $\Psi$  екіпажа.

Тому для подальшого аналізу областей стійкості у просторі параметрів системи були додані «зовнішні» поперечні пружні елементи (в першому та другому рівняннях – по одному доданку  $4K_Y Y$ ,  $4a^2 K_Y \Psi$  відповідно),

без яких асимптотична стійкість візка по координатах  $Y, \Psi$  неможлива.

Для чисельного дослідження границь стійкості моделі візка у площині параметрів  $(\tau, V)$  були взяті такі числові значення решти параметрів:

$$a = 1,042 \text{ м}, b = 0,586 \text{ м};$$

$m_1 = 1190$  кг та  $M = 3072$  кг – маса колісної пари та рами візка відповідно;

$$J_1 = 408 \text{ кгм}^2 \text{ та } J = 1622 \text{ кгм}^2 - \text{централь-}$$

ний вертикальний момент інерції колісної пари та рами візка відповідно;

$$r_0 = 0,356 \text{ м} - \text{радіус циліндричного колеса};$$

$K_v = 19700 \text{ Н/м}$  – поперечна жорсткість;

$d = 0,756$  м – половина колії;

$P = 13,63$  кН – реакція опорної поверхні, що припадає на одне колесо;

$k_1 = 2782,506 \text{ Н}$  – коефіцієнт крипу;

$\mu_1 = 231,875$  Нм – коефіцієнт стабілізуючого моменту.

Знайдемо матрицю коефіцієнтів системи лінійного наближення в загальному вигляді через відповідний Якобіан: `jacobian`

$$\begin{pmatrix} [V, e_1, \Omega, e_2, V_1, e_3, \Omega_1, e_4, V_2, e_5, \Omega_2, e_6]; \\ [V_1, Y_1, \Psi_1, \Omega_1, v_1, y_1, \Psi_1, \omega_1, v_2, y_2, \Psi_2, \omega_2] \end{pmatrix}$$

$$J_{00} := \left[ \begin{bmatrix} 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ -\frac{4(ky + Ky)}{MI}, 0, 0, 0, \frac{2ky}{MI}, 0, 0, 0, \frac{2ky}{MI}, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, -\frac{4(b^2 kx + a^2 ky + a^2 Ky)}{JI}, 0, \frac{2aky}{JI}, 0, \frac{2b^2 kx}{JI}, 0, -\frac{2aky}{JI}, 0, \frac{2b^2 kx}{JI}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ \frac{2ky}{ml}, 0, \frac{2aky}{ml}, 0, -\frac{2ky}{ml}, -\frac{2kl}{Vml}, \frac{2kl}{ml}, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, \frac{2b^2 kx}{JI}, 0, 0, \frac{2\mu l}{VJI}, -\frac{2(b^2 kx + \mu l)}{JI}, -\frac{2d^2 kl}{VJI}, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0 \\ \frac{2ky}{ml}, 0, -\frac{2aky}{ml}, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{2ky}{ml}, -\frac{2kl}{Vml}, \frac{2kl}{ml}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 \\ 0, 0, \frac{2b^2 kx}{JI}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{2\mu l}{VJI}, -\frac{2(b^2 kx + \mu l)}{JI}, -\frac{2d^2 kl}{VJI} \end{bmatrix} \right].$$

Після підстановки числових значень параметрів отримаємо матрицю

$$A = \begin{bmatrix} 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ -0,774\tau - 25,651, 0, 0, 0, 0, 387\tau, 0, 0, 0, 0, 387\tau, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, -2,096\tau - 52,748, 0, 0, 764\tau, 0, 0, 251\tau, 0, -0,764\tau, 0, 0, 251\tau, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \\ \tau, 0, 1,042\tau, 0, -1, \tau, -\frac{4,676}{V}, 4,676, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, \tau, 0, 0, \frac{1,136}{V}, -\tau - 1,136, -\frac{7,795}{V}, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0 \\ \tau, 0, -1,042\tau, 0, 0, 0, 0, 0, -\tau, -\frac{4,676}{V}, 4,676, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 \\ 0, 0, \tau, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1,136}{V}, -\tau - 1,136, -\frac{7,795}{V} \end{bmatrix}$$

Межі області стійкості у площині параметрів  $\tau = 5000 - 60000$ ,  $V = 0 - 140$  відповідають дев'ятому та десятому визначникам Гурвіца

(останні визначники в розглянутій області параметрів залишаються чітко додатними).

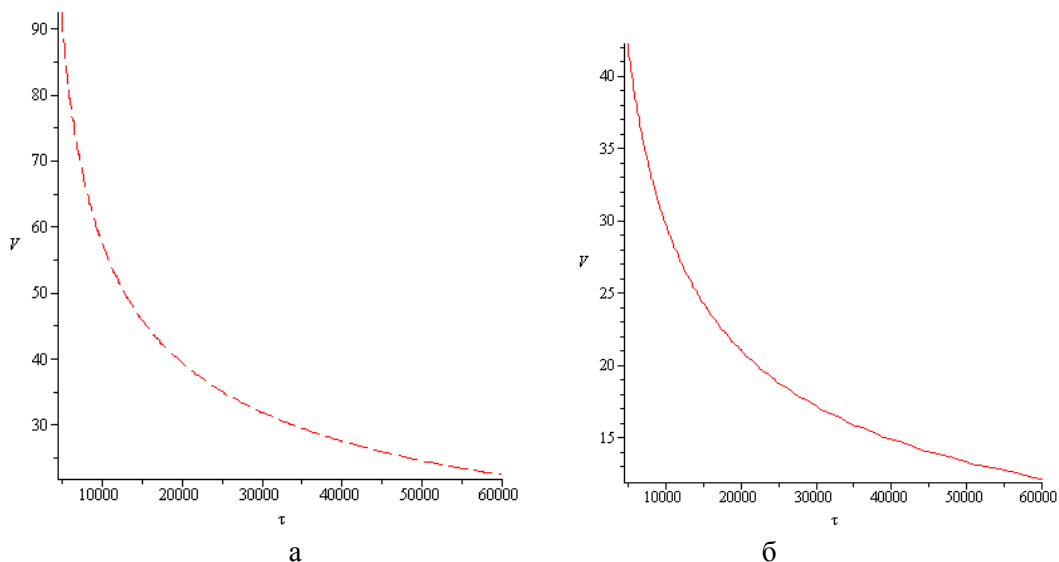


Рис. 2. Границі у площині параметрів  $(\tau, V)$ , що відповідають зміні знака визначника Гурвіца: а – дев'ятий визначник Гурвіца; б – десятий визначник Гурвіца

Межа області стійкості лежить нижче суцільної кривої (рис. 2, б) (в діапазоні  $5000 < \tau < 60000$  визначається десятим визначником Гурвіца).

Подані нижче значення визначників Гурвіца для двох точок площини параметрів підтверджують факт втрати стійкості візком за швидкості  $V = 29,8$  м/с (параметр ресорного підвішування  $\tau = 10000$  м/с<sup>2</sup>):

$$\text{subs}(\{\tau = 10000, V = 29,7\}, \{[DG[11], DG[10], DG[9], DG[8], DG[7], DG[6], DG[5], DG[4], DG[3], DG[2], DG[1]]\});$$

$$\{[8.324555127 \cdot 10^{106}, 4.821624050 \cdot 10^{88}, 4.267784102 \cdot 10^{73},$$

$$6.316692329 \cdot 10^{60}, 7.036635123 \cdot 10^{46}, 6.849591480 \cdot 10^{34},$$

$$3.205600311 \cdot 10^{23}, 5.006327047 \cdot 10^{15}, 4.240599658 \cdot 10^7,$$

$$8399.847352, 0.8398709865]\}$$

$$\text{subs}(\{\tau = 10000, V = 29,8\}, \{[DG[11], DG[10], DG[9], DG[8], DG[7], DG[6], DG[5], DG[4], DG[3], DG[2], DG[1]]\});$$

$$\{[8.113993260 \cdot 10^{106}, -2.950748390 \cdot 10^{89}, 4.158446943 \cdot 10^{73},$$

$$6.232266695 \cdot 10^{60}, 6.942650682 \cdot 10^{46}, 6.780857212 \cdot 10^{34},$$

$$3.173436186 \cdot 10^{23}, 4.972782363 \cdot 10^{15}, 4.212185986 \cdot 10^7,$$

$$8371.658727, 0.8370526275]\}$$

Як видно з наведених результатів, саме десятний визначник Гурвіца змінює знак за швидкості 29,8 м/с. Таким чином, обраний вище набір числових значень конструктивних параметрів разом із параметром приведеної жорсткості  $\tau = 10000 \text{ м/с}^2$  (відповідні йому значення коефіцієнтів жорсткості пружних елементів  $k_y = k_x = 595 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$ ) гарантує стійкість прямолінійного руху моделі вагона за швидкостей до 30 м/с.

### Висновки

Для асимптотичної стійкості прямолінійного руху моделі колісного візка спеціалізованого швидкісного вагона необхідна наявність додаткових горизонтальних пружних елементів; параметри первинного ресорного підвішування, що забезпечують стійкість системи, можна визначити на основі наведеного коефіцієнта жорсткості  $\tau$ . Надалі буде розглянуто оптимізацію цього параметра та параметра жорсткості горизонтального пружного елемента  $K_y$ , з метою збільшення області стійкості за величиною повздовжньої швидкості руху.

### Література

1. Рокар И. Неустойчивость в механике / Ива Рокар. – М.: Издательство иностр. лит., 1959. – 288 с.
2. Эллис Д. Р. Управляемость автомобиля / Д. Р. Эллис. – М.: Машиностроение, 1975. – 216 с.
3. Неймарк Ю. Н. Динамика неавтономных систем / Ю. Н. Неймарк, Н. А. Фуфаев. – М.: Наука, 1967. – 520 с.
4. Автоколебания рельсовых экипажей / Ю.В. Демин, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко, О. М. Маркова. – К.: Наук. думка, 1984. – 160 с.
5. Характеристики поворачиваемости автомобиля при наличии внешней боковой силы / В.Г. Вербицкий, Р.А. Кулиев, А.Н. Ефименко, Ю.Н. Стрельник // Вестник СевНТУ: зб. наук. пр. Серія «Машиноприладобудування та транспорт». – 2013. – Вип. 142/2013. – С. 96–99.

Рецензент: В.І. Клименко, професор, к.т.н., ХНАДУ.

Стаття надійшла до редакції 28 листопада 2014 р.