УДК 681.5.015

К ИЗУЧЕНИЮ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

А.Г. Гурко, доцент, к.т.н., ХНАДУ

Аннотация. *Применительно к решению задачи синтеза оптимального управления дискретной системой рассматриваются некоторые свойства функции Ляпунова, которые позволяют предложить новую процедуру поиска оптимального управления.*

Ключевые слова*: функция Ляпунова, состояние системы, оптимальное управление.*

ЩОДО ВИВЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА У ПРОСТОРІ СТАНІВ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ

О.Г. Гурко, доцент, к.т.н., ХНАДУ

Анотація. *Стосовно вирішення задачі синтезу оптимального управління дискретною системою розглядаються деякі властивості функції Ляпунова, що дозволяють запропонувати нову процедуру пошуку оптимального управління.*

Ключові слова*: функція Ляпунова, стан системи, оптимальне управління.*

FOR RESEARCH OF LYAPUNOV FUNCTION PROPERTIES IN CONTROL SYSTEM STATE SPACE

A. Gurko, Associate Professor, Candidate of Technical Science, KhNAHU

Abstract. *Some properties of Lyapunov function in application to solving the task of optimal control of discrete system are considered.*

Key words: *Lyapunov function, system state-space, optimal control.*

Введение

Функции Ляпунова являются не только мощным аппаратом исследования устойчивости и качества движения систем управления. Они также нашли эффективное применение при решении проблемы синтеза робастных, оптимальных и адаптивных систем. В связи с этим исследование свойств функции Ляпунова является актуальной задачей.

Анализ публикаций

За более чем столетнюю историю функциям Ляпунова посвящено множество публикаций.

Так, Е.А. Барбашиным [1] рассматривались методы построения функций Ляпунова. В.И. Зубовым [2] и А.М. Летовым [3] рассмотрены вопросы применения аппарата функций Ляпунова при синтезе систем управления, что стимулировало развитие теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов.

В [4] введена концепция устойчивости вход-состояние (input-to-state stability), тесно связанная с функциями Ляпунова и позволяющая исследовать устойчивость колебаний в системах с неопределенностями относительно их параметров и внешних возмущений.

В [5] рассмотрена задача синтеза управления при различного рода ограничениях в условиях нестохастической неопределенности, когда параметры системы и действующие возмущения точно неизвестны, но для них заданы некоторые множественные оценки. При этом управление не только обеспечивает асимптотическую устойчивость или диссипасивность системы, но и минимизирует некоторую функцию удельных потерь, также связанную с функцией Ляпунова. Это направление получило дальнейшее развитие (см, например [6–9]).

В работе [10] при решении задачи определения управления, минимизирующего функцию удельных потерь при ограниченных возмущениях, введено понятие «дна» функции Ляпунова как прямой, делящей пополам отрезки, заключенные внутри линий уровня функции Ляпунова и параллельной вектору коэффициентов, определяющему направление внешних воздействий на систему.

Цель и постановка задачи

Рассмотрим дискретную систему управления, динамика которой описывается разностным уравнением

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_n + \mathbf{B}\mathbf{U}_n\,,\ n = 0,1,2\ldots \qquad (1)$$

где $\mathbf{X}_n$ – m-мерный вектор состояний системы; $\mathbf{U}_n$ – p-мерный вектор управляющих воздействий; $\mathbf{A}$ – матрица параметров системы размерности ($m\times m$), $\mathbf{B}$ – матрица выхода размерности ($m\times p$).

Целью оптимального управления $\mathbf{U}_n$ является минимизация на каждом шаге квантования n функции удельных потерь вида

$$\omega_n = V(\mathbf{X}_{n+1}) - V(\mathbf{X}_n) + \mathbf{U}_n^T\mathbf{R}\mathbf{U}_n\,, \qquad (2)$$

где $V(\mathbf{X})$ – функция Ляпунова; $\mathbf{R}$ – числовая матрица размерности ($p\times p$), учитывающая расходы на управление.

При отсутствии возмущений оптимальное управление $\mathbf{U}_n$ определяется следующим выражением [5]

$$\mathbf{U}_n = -\frac{1}{\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}}\cdot\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{X}_n\,, \qquad (3)$$

где $\mathbf{P}$ – симметрическая положительно определенная матрица ($m\times m$), определяемая из дискретного матричного уравнения Риккати.

Уравнение дна функции Ляпунова $V(\mathbf{X})$ имеет вид [10]

$$\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{X} = 0. \qquad (4)$$

Пусть в произвольный момент n система в свободном движении переходит из состояния $\mathbf{X}_n$ в состояние $\mathbf{X}_{n+1}^c$

$$\mathbf{X}_{n+1}^c = \mathbf{A}\mathbf{X}_n\,. \qquad (5)$$

Уравнение прямой, параллельной дну и проходящей через точку $\mathbf{X}_{n+1}^c$, имеет вид

$$\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{X}_{n+1}^c + Z = 0\,, \qquad (6)$$

где $Z = \text{const}$.

Таким образом, на прямой (6)

$$\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{X}_{n+1}^c = \text{const} = -Z\,.$$

Отсюда следует вывод, что для всех точек $\mathbf{X}_n$, свободное движение из которых приводит в $\mathbf{X}_{n+1}^c$, расположенные на одной и той же прямой, параллельной дну функции Ляпунова, управление $\mathbf{U}_n$ одинаково и равно

$$\mathbf{U}_n = \frac{1}{\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}}\cdot Z\,. \qquad (7)$$

Этот факт позволяет предположить возможность разработки процедуры определения оптимального управления системой, основываясь на анализе расположения изображающих точек, характеризующих состояние системы относительно дна функции Ляпунова и ее эквипотенциальных поверхностей.

Целью данной работы является исследование свойств дна функции Ляпунова. Для этого необходимо выяснить, как изменяется значение функции Ляпунова:

– при перемещении изображающей точки под влиянием внешних воздействий в направлении, задаваемом матрицей $\mathbf{B}$ в уравнении (1), т.е. в вынужденном движении системы;

– при движении изображающей точки по прямым, параллельным дну.

Вынужденное движение системы

Будем для наглядности рассматривать случай, когда система имеет две переменные состояния, U – скаляр, а $\mathbf{B}$ – вектор (2×1).
Если в произвольный момент n состояние системы известно точно, то его можно представить в виде изображающей точки X_n с коор-

динатами (x_{1n}, x_{2n}), которая удалена от дна функции Ляпунова на расстояние l по вектору $\mathbf{B} = (b_1, b_2)^T$ (рис. 1). Получим выражение для l. Для двумерного случая уравнение прямой, параллельной дну функции Ляпунова, имеет вид

$$(b_1 p_{11} + b_2 p_{21}) x_1 + (b_1 p_{12} + b_2 p_{22}) x_2 + C = 0 \,, \quad (8)$$

где C – произвольная константа.

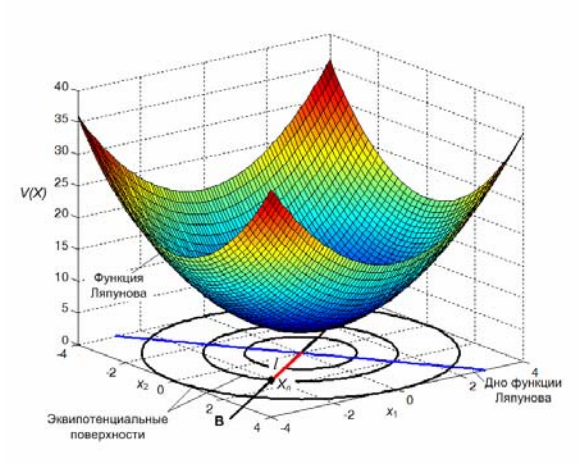


Рис. 1. Движение изображающей точки по вектору **B**

Вектор **B** описывается следующим уравнением

$$b_2 x_1 - b_1 x_2 = 0 \,. \quad (9)$$

Решая совместно (8) и (9), найдем координаты точки пересечения этих прямых

$$x_1 = -\frac{C b_1}{\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}} \,, \quad (10)$$

$$x_2 = -\frac{C b_2}{\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}} \,. \quad (11)$$

Тогда

$$l = \frac{|C| \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}} \,. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь, как ведет себя функция Ляпунова при движении изображающей точки по прямым, параллельным вектору **B**. Прямая, параллельная вектору **B** и проходящая через точку $X = (x_1, x_2)$, описывается уравнением

$$b_2 x_1 - b_1 x_2 + S = 0 \,, \quad (13)$$

где S – произвольная константа.
Выразим из (13) x_2

$$x_2 = \frac{b_2 x_1 + S}{b_1} \,. \quad (14)$$

Тогда учитывая симметричность матрицы **P**, т.е. что $p_{12} = p_{21} = p_c$, уравнение функции Ляпунова в точке X имеет вид

$$V(\mathbf{X}) = p_{11} x_1^2 + 2 p_c x_1 \frac{x_1 b_2 + S}{b_1} + p_{22} \frac{(x_1 b_2 + S)^2}{b_1^2} \,. \quad (15)$$

Поскольку целью управления является минимизация функции удельных потерь (2), найдем координаты точки, в которой функция $V(\mathbf{X})$ достигнет минимума при движении изображающей точки по прямой (13). Для этого продифференцируем (15)

$$\frac{\partial V(\mathbf{X})}{\partial x_1} = p_{11} x_1 + 2 p_c \frac{b_2}{b_1} x_1 + p_c \frac{S}{b_1} + p_{22} \frac{(x_1 b_2 + S) b_2}{b_1^2} = 0. \quad (16)$$

Откуда

$$x_1 = x_{10} = \frac{-S(p_c b_1 + p_{22} b_2)}{\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}} \,, \quad (17)$$

$$x_2 = x_{20} = \frac{S(p_c b_2 + p_{11} b_1)}{\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}} \,. \quad (18)$$

Из (17) и (18) следует, что

$$\frac{x_{20}}{x_{10}} = -\frac{p_{11} b_1 + p_c b_2}{p_c b_1 + p_{22} b_2} \,. \quad (19)$$

Однако уравнение (19) представляет собой уравнение дна функции Ляпунова V, причем (19) не зависит от S. Таким образом, дно функции Ляпунова существует.

Определим теперь зависимость $\partial V(\mathbf{X})/\partial l$ от S, (рис. 2). Введем обозначения $y_1 = x_1 - x_{10}$; $y_2 = x_2 - x_{20}$.

Тогда уравнение (13) прямой, параллельной вектору **B** и проходящей через точку с координатами (x_1, x_2), будет иметь вид

$$(x_{10} + y_1) b_2 - (x_{20} + y_2) b_1 + S = 0 \,, \quad (20)$$

$$x_{20} + y_2 = \frac{(x_{10} + y_1) b_2 + S}{b_1} \,. \quad (21)$$

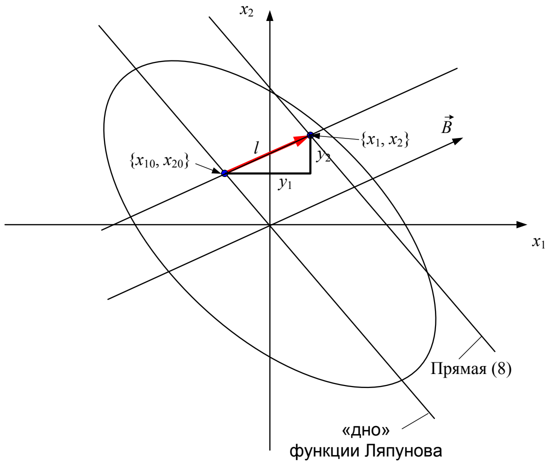


Рис. 2. К определению зависимости $\partial V(\mathbf{X})/\partial l$ от S

Отсюда

$$V(y_1) = p_{11}(x_{10} + y_1)^2 + 2p_c(x_{10} + y_1) \times \times \frac{(x_{10} + y_1)b_2 + S}{b_1} + + p_{22} \cdot \frac{((x_{10} + y_1)b_2 + S)^2}{b_1^2}. \qquad (22)$$

Продифференцировав (22) после соответствующих преобразований, получим

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = y_1\left(p_{11} + 2p_c\frac{b_2}{b_1} + p_{22}\frac{b_2^2}{b_1^2}\right) + + \left[x_{10}\frac{\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}}{b_1^2} + p_c\frac{S}{b_1} + p_{22}\frac{S}{b_1^2}b_2\right]. \qquad (23)$$

Исследуем слагаемое в квадратных скобках. Умножим его на b_1^2

$$x_{10}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B} + p_cSb_1 + p_{22}Sb_2 = 0. \qquad (24)$$

С учетом (17) получим

$$-S(p_cb_1 + p_{22}b_2) + p_cSb_1 + p_{22}Sb_2 = 0. \qquad (25)$$

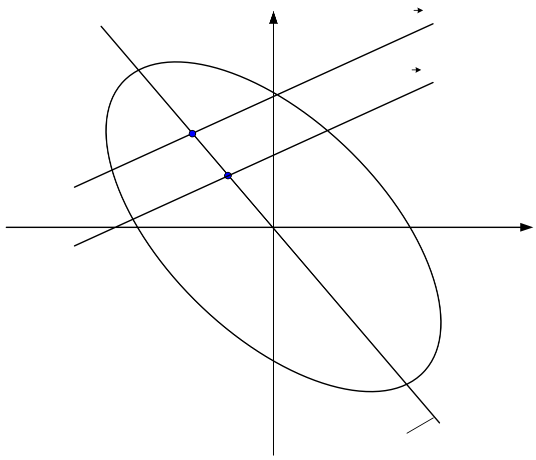
Таким образом, слагаемое, помещенное в (23) в квадратные скобки, не зависит ни от S, ни от x_{10}. Следовательно, производная $\partial V/\partial l$ одинакова на любой прямой, параллельной вектору $\mathbf{B}$ в точках, имеющих одинаковое удаление l от дна функции Ляпунова

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = \frac{2y_1}{b_1^2}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}. \qquad (26)$$

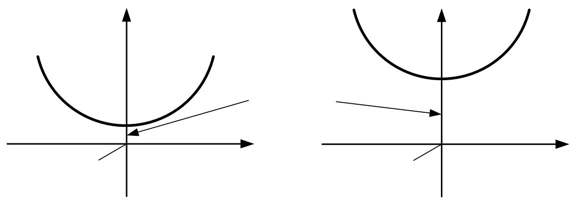
Отсюда

$$V = V_{\text{на дне}} + y_1^2\frac{\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}}{b_1^2}. \qquad (27)$$

Значит $V(\mathbf{X})$ имеет следующее строение (рис. 3).



а



б

Рис. 3. Зависимость $V(\mathbf{X})$ при движении изображающей точки по прямым, параллельным вектору $\mathbf{B}$

Как видно из рис. 3,б, кривые одинаковы, только имеют разное расстояние от дна. Если провести прямую, параллельную дну, то во всех точках этой прямой производные $\partial V/\partial y$ одинаковы.

Движение по прямым, параллельным дну

Ответим теперь на вопрос: как зависит $V(\mathbf{X})$ в разных сечениях, параллельных вектору $\mathbf{B}$, от C, где C определяет величину сдвига прямой, параллельной дну (рис. 3).

$$\frac{\partial V}{\partial C} = \frac{\partial V}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial C}. \qquad (28)$$

Рассмотрим каждый множитель (28) отдельно.

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = \frac{2}{b_1^2} B^T P B y_1. \qquad (29)$$

Поскольку $l = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$, а $y_2 = y_1 b_2 / b_1$, то

$$l = y_1 \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{b_1}. \qquad (30)$$

Таким образом,

$$\frac{\partial y_1}{\partial l} = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}. \qquad (31)$$

Рассмотрим еще раз уравнение (12). Будем считать l отрицательным, если $C < 0$. Тогда

$$\frac{\partial l}{\partial C} = \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{B^T P B}. \qquad (32)$$

Итак, получаем

$$\frac{\partial V}{\partial C} = \frac{2\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}}{b_1^2} \cdot \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \cdot \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}} y_1.$$

Из (30) и (12) следует, что

$$y_1 = \frac{b_1}{\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}} C. \qquad (33)$$

Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial C} = \frac{2C}{\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}}, \qquad (34)$$

следовательно

$$V = V_{\text{на дне}} + \frac{C^2}{\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}}. \qquad (35)$$

Пример

Проверим справедливость полученного результата на простом примере. Пусть $\mathbf{B} = (1\ 1)^T$ и $\mathbf{P}$ – единичная матрица 2×2. Тогда уравнение дна функции Ляпунова

$$x_1 + x_2 = 0. \qquad (36)$$

Через точку с координатами X_1=(1, 1) проведем прямую, параллельную дну (рис. 4). Её уравнение имеет вид

$$x_1 + x_2 + C = 0, \qquad (37)$$

откуда $C = -2$.

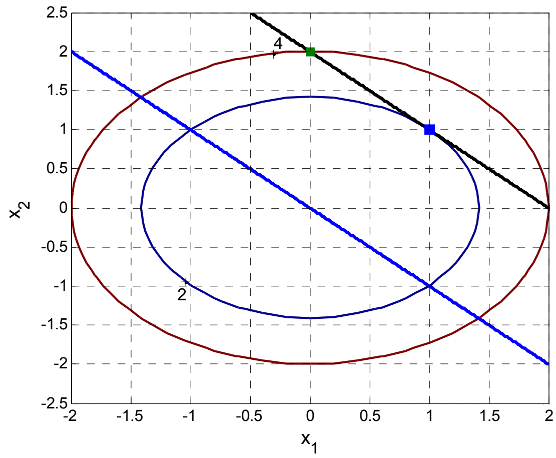


Рис. 4. Иллюстрация к примеру

Из уравнения Ляпунова значение функции Ляпунова V в точке X_1 равно

$$V(X_1) = \mathbf{X}_1^T\mathbf{P}\mathbf{X}_1 = 2.$$

Если же воспользоваться формулой (35), то также получим $V(X_1) = 2$.

Если теперь необходимо определить значение V в некоторой точке на прямой (37), то нужно к значению $V_{\text{на дне}}$ прибавить 2. Найдем, например, значение V в точке $X_2 = (0, 2)$. $V(X_2) = \mathbf{X}_2^T\mathbf{P}\mathbf{X}_2 = 4$. Найдем $V_{\text{на дне}}$, т.е. в точке (–1, 1):

$$V_{\text{на дне}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Прибавив теперь к полученному значению $V_{\text{на дне}}$ 2, получаем 4. Таким образом, формула (35) верна.

Выводы

В работе исследованы некоторые свойства

функции Ляпунова. Доказано существование дна функции Ляпунова. Показано, что для любых изображающих точек, характеризующих состояние системы, равноудаленных от дна функции Ляпунова, скорость изменения функции Ляпунова одинакова.
Получена зависимость, позволяющая определять значение функции Ляпунова для произвольной точки на основе соответствующего значения на дне.

Рассмотренные свойства позволяют разработать новую процедуру определения оптимального управления системой в рамках игрового подхода в условиях действия неопределенных возмущений.

Литература

1. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова / Е.А. Барбашин. – М. : Наука, 1970. – 240 с.
2. Зубов В.И. Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение) / В.И. Зубов. – М. : Высшая школа, 1984. – 232 с.
3. Летов А.М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем / А.М. Летов. – М. : Физматгиз, 1962. – 484 с.
4. Sontag E.D. Smooth stabilization implies coprime factorization / E.D. Sontag // IEEE Transactions on Automatic Control. –1989. – Vol. 34. – P. 435–443.
5. Кунцевич В.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова / В.М. Кунцевич, М.М. Лычак. – М. : Наука, 1977. – 400 с.
6. Кунцевич В.М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход / В.М. Кунцевич, М.М. Лычак. – К. : Наук. думка, 1985. – 248 с.
7. Лычак М.М. Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода / М.М. Лычак // Проблемы управления и информатики. – 1999. – №5. – С. 34–41.
8. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации / В.М. Кунцевич. – К. : Наукова думка, 2006. – 261 с.
9. Еременко И.Ф. Реализация игрового подхода к управлению линейными объектами второго порядка / И.Ф. Еременко, А.Г. Гурко // Проблемы управления и информатики. – 2009. – №5. – С. 13–24.
10. Гурко А.Г. Некоторые свойства функции Ляпунова на множестве состояний / А.Г. Гурко // Вестник национального технического университета «ХПИ». Тематический выпуск «Информатика и моделирование». – 2010. – Вып. 21. – С. 46–51.

Рецензент: Л.И. Нефёдов, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 27 июня 2011 г.