

УДК 534.1

МОДЕЛЬ РАДИАЛЬНО-УПОРНОГО ШАРИКОПОДШИПНИКА ДЛЯ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ ВИБРАЦИЙ РОТОРА

С.В. Филипковский, доцент, к.т.н.,
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Аннотация. Получена математическая модель нелинейных сил упругости радиально-упорного шарикоподшипника с предварительным осевым поджатием. Контактные силы определены на основе теории Герца и разложены в ряд Тейлора. Предлагаемая модель предназначена для решения задач нелинейной динамики машин. Примеры расчётов показали соответствие расчётам традиционной модели.

Ключевые слова: радиально-упорный шарикоподшипник, контактные силы, степенной ряд, ротор, нелинейные колебания.

МОДЕЛЬ РАДИАЛЬНО-УПОРНОГО КУЛЬКОВОГО ПІДШИПНИКА ДЛЯ АНАЛІЗУ НЕЛІНІЙНИХ ВІБРАЦІЙ РОТОРА

С.В. Філіпковський, доцент, к.т.н.,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. Отримано математичну модель нелінійних сил пружності радіально-упорного кулькового підшипника з попереднім осьовим підтисненням. Контактні зусилля визначені на основі теорії Герца і розвинені в ряд Тейлора. Запропонована модель призначена для розв'язання задач нелінійної динаміки машин. Приклади розрахунків показали відповідність розрахункам традиційної моделі.

Ключові слова: радіально-упорний кульковий підшипник, контактні зусилля, степеневий ряд, ротор, нелінійні коливання.

THE MODEL OF THE RADIAL-THRUST BALL BEARING FOR ANALYSIS OF NONLINEAR VIBRATIONS OF THE ROTOR

S. Filipkovskiy, Assoc. Prof., Ph. D. (Eng.),
Kharkov National Automobile and Highway University

Abstract. The non-linear model of resilient forces of pre-loaded ball bearing is developed. The contact forces are obtained and arranged in the Heyn's row on the basis of Hertz theory. The obtained model is used for solving the problem of non-linear dynamics of vehicles. The design samples correspond to calculations performed with the help of the traditional model.

Key words: angular ball-bearing, contact forces, power series, rotor, nonlinear vibration.

Введение

Радиально-упорные шарикоподшипники используют во многих машинах, в том числе в машинах и механизмах, в которых ротор нагружен осевым усилием. Если при этом необходимо минимизировать вибрации, то радиально-упорные шарикоподшипники уста-

навливают с гарантированным осевым поджатием, чтобы исключить раскрытие и закрытие зазоров между шариками и канавками подшипников. Это объясняется тем, что при закрытии зазора происходит удар шарика по поверхности канавки, что может вызвать повышенные вибрации ротора. Жёсткость шарикоподшипников нелинейна

потому, что она обусловлена контактными силами между шариками и канавками, которые определяются теорией контактных напряжений Герца. При анализе динамики любой системы в первую очередь надо решить задачу о свободных колебаниях. Для анализа свободных колебаний нелинейной системы надо построить скелетные кривые. Эффективным методом построения скелетных кривых роторных систем с несколькими степенями свободы является метод нелинейных нормальных форм (ННФ) [1]. Этот метод предполагает представление движения системы в виде степенных рядов по фазовым координатам. В этом случае все нелинейные слагаемые уравнений движения также удобно представить в виде степенных рядов по фазовым координатам. Точность такого представления нуждается в оценке.

Анализ публикаций

В статье [2] изучено влияние радиального зазора и угловой скорости ротора на периодические, субгармонические и хаотические колебания. В [3] рассмотрен ротор с диском на двух шарикоподшипниках, радиальная жёсткость которых принята линейной, построены траектории центра ротора и подшипников. Основное внимание статьи [4] уделено диагностике повреждений (дефектов внутреннего и внешнего колец) подшипников и их влиянию на динамику ротора.

В работе [5] исследована динамика ротора при разных значениях предварительного осевого натяга радиально-упорных шарикоподшипников. В работе [6] рассмотрен ротор с диском на предварительно нагруженных шарикоподшипниках. Для выбранной частоты вращения определяется линеаризованная жёсткость путём минимизации невязки работы нелинейной силы упругости и линейной силы упругости за один период колебаний. Далее итерационным путём уточняется жёсткость подшипников и решаются линейные уравнения движения.

Нелинейные нормальные формы колебаний вала на подшипниках скольжения исследованы в статье [1]. В статье [7] методом ННФ исследованы свободные колебания ротора на радиально-упорных шарикоподшипниках с предварительным поджатием и получены скелетные кривые при разных углах между линией действия контактных сил и осью

подшипника. Поскольку ННФ описываются полиномами фазовых координат, то и жёсткость подшипников в [7] представлена в виде степенного ряда по фазовым координатам.

Цель и постановка задачи

Целью работы является проверка, сходится ли решение задачи динамики ротора разложением нелинейной жёсткости радиально-упорных шарикоподшипников с предварительным осевым поджатием в степенной ряд к решению задачи интегрированием нелинейных уравнений теории Герца.

Расчётная схема

Ротор представляет собой вал с диском, закреплённым несимметрично относительно опор (рис. 1). Назначение и условия работы агрегатов, в которых применяют осевое поджатие шарикоподшипников, таковы, что соотношение длины и диаметра вала обуславливает жёсткость вала на порядок больше жёсткости подшипников. Поэтому считаем вал недеформируемым телом, а степенями свободы являются перемещения цапф относительно внешних колец подшипников.

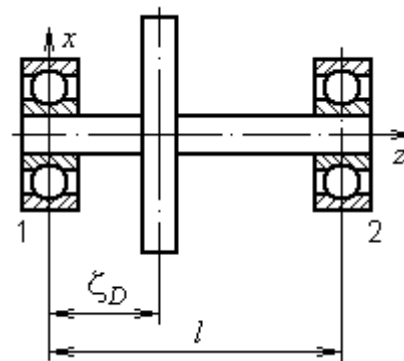


Рис. 1. Схема ротора

Компоненты упругих реакций подшипника (рис. 2) вдоль осей x , y , z получены в работе [8]. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 P_{x1} &= K \sum_{v=1}^{N_B} [x_1 \cos \alpha \cos \beta_v + y_1 \cos \alpha \sin \beta_v + \\
 &+ (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \cos \alpha \cos \beta_v, \\
 P_{y1} &= K \sum_{v=1}^{N_B} [x_1 \cos \alpha \cos \beta_v + y_1 \cos \alpha \sin \beta_v + \\
 &+ (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \cos \alpha \sin \beta_v,
 \end{aligned} \quad (1)$$

$$P_{z_i} = K \sum_{v=1}^{N_B} [x_i \cos \alpha \cos \beta_v + y_i \cos \alpha \sin \beta_v + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \sin \alpha,$$

где

$$K = \frac{3P_0}{2N_B} z_0^{-3/2} \sin^{-5/2} \alpha,$$

x_i, y_i, z – смещения центра внутреннего кольца относительно центра наружного кольца; $i=1,2$ – номер обобщенной координаты цапфы; α – угол контакта (угол между линией действия контактных сил и плоскостью, перпендикулярной оси вращения подшипника); β_v – угол между координатной плоскостью xOz и плоскостью, проходящей через ось вращения и центр шарика (рис. 2); v и N_B – номер и количество шариков; P_0 – сила предварительного осевого натяга; z_0 – осевое смещение внутреннего кольца относительно внешнего кольца от действия силы P_0 . Величина z_0 определяется из геометрических соотношений в зонах контакта

$$z_0 = (2R_K + w_1 + w_2 - d_B) \sin \alpha,$$

где R_K – поперечные радиусы канавок в кольцах подшипника; w_1 и w_2 – сближения внутреннего и внешнего колец с шариком по направлению линии контакта, вызванное предварительным осевым поджатием; d_B – диаметр шарика.

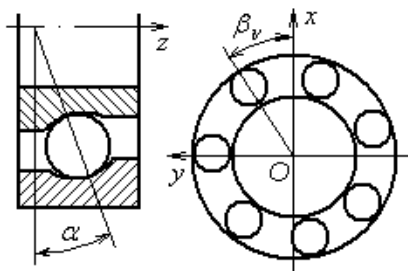


Рис. 2. Схема шарикоподшипника

Сближения вычисляем по формуле Герца [9]

$$w_i = b_i P_K^{2/3}; i=1,2,$$

где b_1 и b_2 – коэффициенты формулы Герца; P_K – сила сжатия, действующая по направлению линии контакта

$$P_K = P_0 / (N_B \sin \alpha).$$

Угол α удовлетворяет уравнению

$$(2R_K + w_1 + w_2 - d_B) \cos \alpha = R_1 + 2R_K - R_2,$$

где R_1 и R_2 – радиусы внутреннего и внешнего колец, измеренные от оси подшипника до середин канавок качения.

Коэффициенты формулы Герца определены выражением [9]

$$b = \frac{3}{2} F_1 \sqrt[3]{\frac{(K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}) k^2 (\Theta_1 + \Theta_2)^2}{3F_2}},$$

где F_1, F_2 – эллиптические интегралы первого и второго рода; $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ – кривизны главных нормальных сечений контактирующих поверхностей; k – корень трансцендентного уравнения

$$\frac{F_1 - F_2}{F_1 - F_2/k^2} = \frac{K_{11} - K_{21}}{K_{12} - K_{22}}.$$

Величины Θ_1 и Θ_2 зависят от свойств материалов контактирующих тел. Они определяются следующим образом:

$$\Theta_i = (1 - \mu_i^2) / (\pi E_i); i=1,2,$$

где μ_i и E_i – коэффициенты Пуассона и модули упругости материалов подшипниковых колец и шариков.

Уравнения колебаний ротора

Длину вала обозначим l ; перемещения средней линии вала по направлениям координатных осей $u_x(\zeta, t), u_y(\zeta, t)$ записываются следующим образом:

$$u_x(\zeta, t) = x_1(t) \frac{l - \zeta}{l} + x_2(t) \frac{\zeta}{l},$$

$$u_y(\zeta, t) = y_1(t) \frac{l - \zeta}{l} + y_2(t) \frac{\zeta}{l},$$

где ζ – координата сечения вала вдоль оси z ; $x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)$ – обобщенные координаты, описывающие радиальные перемещения цапф; t – время. Внутренние кольца

шарикоподшипников совершают как радиальные, так и осевые колебания относительно наружных колец. Отметим, что перемещения малы по сравнению с длиной вала. Тогда продольные колебания ротора вдоль координатной оси z можно описать одной обобщённой координатой $u_z(t) = z(t)$.

Для составления уравнений движения воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. При принятых допущениях выражение кинетической энергии вала T_B в виде функции обобщённых координат будет иметь вид

$$T_B = \frac{\rho I}{2l}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 + \frac{\rho I}{2l}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \rho I \Omega^2 - \frac{2\rho I \Omega}{l}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(y_1 - y_2) + \frac{\rho S l}{6}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \dot{y}_2^2) + \frac{\rho S l}{2} \dot{z}^2, \quad (2)$$

где ρ – плотность материала вала; I – полярный момент инерции сечения вала; S – площадь сечения вала; Ω – угловая скорость вращения ротора. Кинетическая энергия диска T_D в виде функции обобщённых координат будет

$$T_D = \frac{I_1}{2} \left(\frac{\dot{y}_1 - \dot{y}_2}{l} \right)^2 + \frac{I_1}{2} \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l} \right)^2 + \frac{I_0}{2} \Omega^2 + I_0 \Omega \frac{(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)(x_2 - x_1)}{l^2} + \frac{m_0}{2} \left[\dot{x}_1 \left(1 - \frac{\zeta_D}{l} \right) + \dot{x}_2 \frac{\zeta_D}{l} \right]^2 + \frac{m_0}{2} \left[\dot{y}_1 \left(1 - \frac{\zeta_D}{l} \right) + \dot{y}_2 \frac{\zeta_D}{l} \right]^2 + \frac{m_0}{2} \dot{z}^2, \quad (3)$$

где I_1 и I_0 – экваториальный и полярный моменты инерции диска; m_0 – масса диска; ζ_D – координата диска по оси z .

Из допущения о том, что вал недеформируемый, следует, что потенциальная энергия деформации системы представлена только энергией деформации подшипников $\Pi = \Pi_{\Pi}(x_1, y_1, x_2, y_2, z)$. Производные потенциальной энергии по обобщённым координатам представляют собой выражения (1).

Демпфирование, обусловленное смазкой опор, описываем функцией Рэлея

$$\Phi = \frac{C}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}^2), \quad (4)$$

где C – коэффициент вязкого сопротивления, который определяют экспериментально [10]. Колебания возбуждаются силой $Q(\Omega, t)$, обусловленной дисбалансом диска.

В работе [8] показано, что перемещения цапф при колебаниях малы по сравнению с осевым смещением z_0 . Поэтому представим выражения (1) в виде степенных рядов по обобщённым координатам цапф, ограничившись третьим порядком малости по x_i/z_0 , y_i/z_0 , z/z_0 :

$$P_{x1} = c_r x_1 + \frac{c_r x_1 z}{2z_0} - \frac{c_r x_1^3}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r x_1 y_1^2}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r x_1 z^2}{8z_0^2}, \\ P_{y1} = c_r y_1 + \frac{c_r y_1 z}{2z_0} - \frac{c_r y_1^3}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r y_1 x_1^2}{32z_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{c_r y_1 z^2}{8z_0^2}, \\ P_{z1} = \frac{c_a 2z_0}{3} + c_a z + \frac{c_r x_1^2}{4z_0} + \frac{c_r y_1^2}{4z_0} + \frac{c_a z^2}{4z_0} - \frac{c_r z x_1^2}{8z_0^2} - \frac{c_r z y_1^2}{8z_0^2} - \frac{c_a z^3}{24z_0^2}, \quad (5)$$

где

$$c_r = \frac{3}{4} N_B K z_0^{1/2} \sin^{1/2} \alpha \cos^2 \alpha, \\ c_a = 2c_r \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Преобразовав выражения (2)–(5), получим уравнения колебаний в матричном виде

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} + \bar{\mathbf{K}} \cdot \{\mathbf{U}^2\} + \tilde{\mathbf{K}} \cdot \{\mathbf{U}\mathbf{U}_\lambda\} + \check{\mathbf{K}} \cdot \{\mathbf{U}^3\} + \tilde{\check{\mathbf{K}}} \cdot \{\mathbf{U}_\mu^2 \mathbf{U}_\nu\} = \mathbf{Q}(\Omega, t), \quad (6)$$

где \mathbf{M} – матрица масс; \mathbf{G} – гироскопическая матрица; \mathbf{C} – матрица демпфирования; \mathbf{K} – матрица жёсткости; $\bar{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{K}}$, $\check{\mathbf{K}}$ и $\tilde{\check{\mathbf{K}}}$ – матрицы коэффициентов нелинейной жёсткости; $\mathbf{U} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ z]^T$ – вектор обобщён-

ных координат. Компоненты векторов $\{U_{U_\lambda}\}$, $\{U^2\}$, $\{U_\mu^2 U_\nu\}$, $\{U^3\}$ представляют собой произведения обобщённых координат второй и третьей степени; $Q(\Omega, t)$ – вектор правой части. Если вместо разложений (5) использовать непосредственно выражения упругих сил (1), то уравнения движения примут вид

$$M \cdot \ddot{U} + G \cdot \dot{U} + C \cdot U + K(U) = Q(\Omega, t), \quad (7)$$

где $K(U)$ – вектор, компонентами которого являются нелинейные функции (1). Выбор уравнений (6) или (7) для дальнейших исследований зависит от цели работы.

Результаты численных исследований

Для выяснения, насколько близки характеристики модели шарикоподшипника, полученной разложением сил упругости в степенной ряд, к характеристикам, описываемым формулами теории Герца, проведено сравнение амплитудно-частотных характеристик (АЧХ), построенных решением систем (6) и (7). Под АЧХ понимаем зависимость полуразмаха колебаний от частоты Ω . Характеристики строим в безразмерных координатах, которые определим следующим образом: $x_A = x_1/z_0$, $y_A = y_1/z_0$, $x_B = x_2/z_0$, $y_B = y_2/z_0$, $z_A = z/z_0$, $\omega = \Omega/\omega_1$, $\tau = t \cdot \omega_1$, где ω_1 – основная резонансная частота линеаризованной системы при $\alpha = 15^\circ$.

Рассмотрены колебания недеформируемого ротора с одним диском. Параметры ротора таковы: $l = 0,5$ м, $\zeta_D = 0,125$ м, диаметр вала $d = 0,025$ м, $m_0 = 10$ кг, $I_1 = 0,1$ кг·м², $I_0 = 0,2$ кг·м². Ротор вращается на радиально-упорных подшипниках средней серии по ГОСТ 831-75. Стандартом определён ряд из пяти разных значений углов контакта α . Характерные параметры подшипника таковы: радиусы внешней канавки качения R_2 для углов α , равных 12° , 15° , 26° , 36° и 40° соответственно, равны 27,5125 мм, 27,5167 мм, 27,5399 мм, 27,5709 мм и 27,5858 мм; радиус внутренней канавки качения $R_1 = 16,000$ мм; радиус поперечного сечения канавок качения $R_K = 5,930$ мм; диаметр шарика $d_B = 11,510$ мм; количество шариков $N_B = 7$; модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.

Характеристики построены методом продолжения по параметру, в соответствии с которым точки АЧХ находятся экстраполяцией по предыдущим точкам с определённым шагом по параметру продолжения (частоте или фазовой координате). На каждом шаге результат уточняется итерационным методом Ньютона, как показано в работе [11]. На рис. 3–7 представлены АЧХ обобщённой координаты y_B вблизи основного резонанса для каждого из углов контакта α , определённого стандартом. На всех рисунках характеристики, полученные решением системы (6), обозначены 1, а характеристики, полученные решением системы (7), обозначены 2. АЧХ других координат аналогичны.

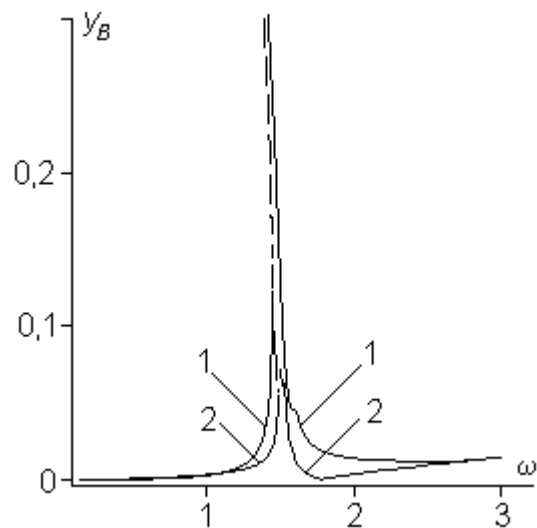


Рис. 3. АЧХ координаты y_B при $\alpha = 12^\circ$

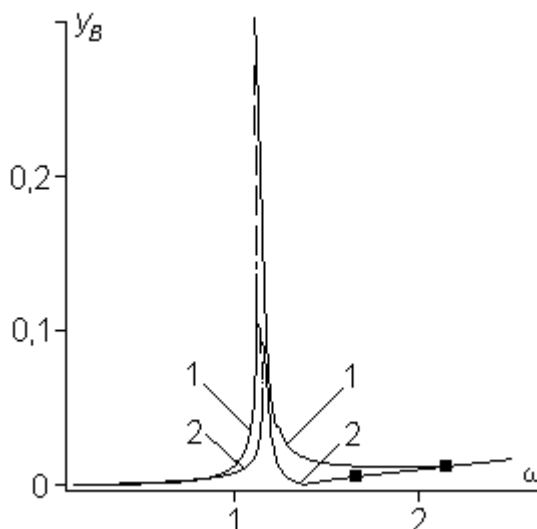
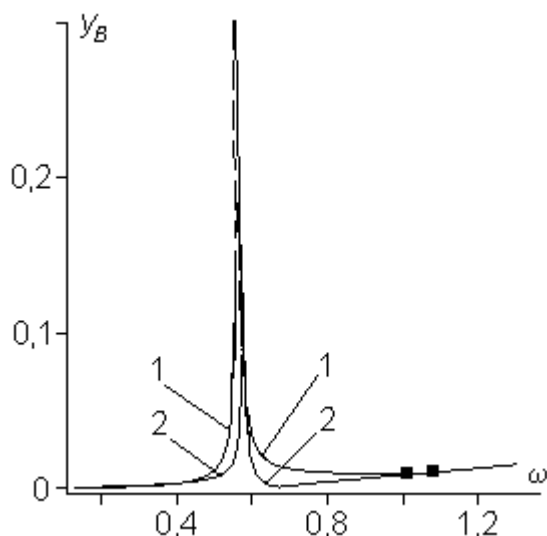
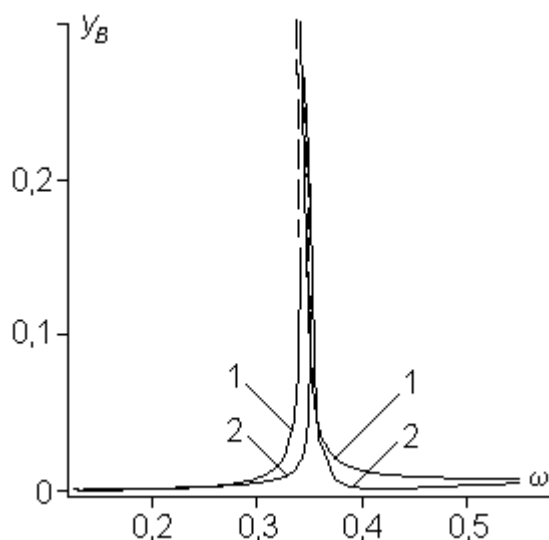
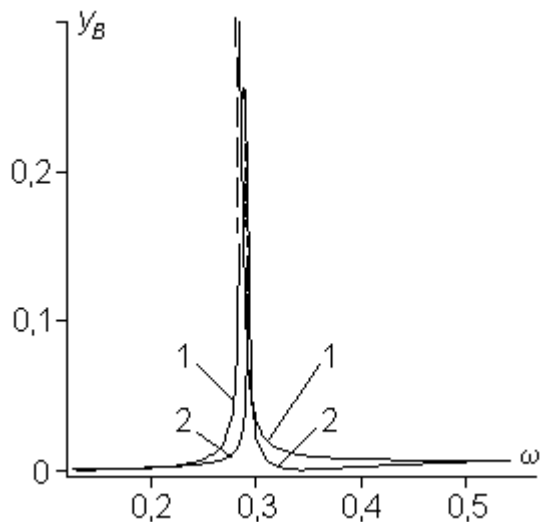


Рис. 4. АЧХ координаты y_B при $\alpha = 15^\circ$

Рис. 5. АЧХ координаты y_B при $\alpha = 26^\circ$ Рис. 6. АЧХ координаты y_B при $\alpha = 36^\circ$ Рис. 7. АЧХ координаты y_B при $\alpha = 40^\circ$

Из рисунков видно, что АЧХ, построенные решением систем уравнений (6) и (7), практически совпадают при малых значениях ω . В окрестностях резонансных частот амплитуды решений систем (6) и (7) заметно отличаются, но сами резонансные пики совпадают по частоте, и можно сделать вывод, что у них общие скелетные кривые.

На левых ветвях всех АЧХ в точках, в которых касательные к кривым параллельны оси ординат, появляются седло-узловые бифуркации [12]. Выше этих точек штриховыми линиями показаны неустойчивые режимы. На правых ветвях АЧХ, построенных решением наших систем, вблизи оснований резонансных пиков появляются бифуркации двумерного тора [12], которые обозначены точками на графиках рис. 4, 5. Для других углов контакта такие точки бифуркации также появляются, но они не попали в показанные на графиках диапазоны.

Проведенный анализ позволяет определить границы применимости предложенной модели в зависимости от значения силы осевого поджатия и амплитуды возмущающей нагрузки. При заданной осевой силе 200 Н и дисбалансе диска 10^{-5} м раскрытие зазоров в шарикоподшипниках появляется, когда вычисленные безразмерные обобщенные координаты достигают значений 0,2–0,25.

Выводы

Исследованная в настоящей работе расчётная модель радиально-упорного шарикоподшипника с предварительным осевым поджатием, которая основана на разложении контактных сил в степенной ряд, позволяет получить достоверные характеристики нелинейных колебаний ротора.

Из рисунков видно, что построенные решением систем (6) и (7) АЧХ стремятся к одним и тем же скелетным кривым. Предлагаемую модель целесообразно использовать для анализа свободных нелинейных колебаний, в частности, методом нелинейных нормальных форм.

Применение данной модели к расчёту вынужденных нелинейных колебаний роторов ограничено значениями амплитуд, при которых отсутствует раскрытие зазоров между шариками и канавками качения в шарико-

подшипниках. Такими роторами являются роторы гироскопических приборов, шпиндели высокооборотных станков, роторы центробежных насосов и других машин.

Литература

1. Legrand M. Nonlinear Normal Modes of a Rotating Shaft Based on the Invariant Manifold Method / M. Legrand, D. Jiang, C. Pierr, S. Shaw // *Int. J. of Rotating Machinery*. – 2004. – Vol. 10, № 4. – P. 319–335.
2. Harsha S. Nonlinear dynamic analysis of an unbalanced rotor supported by roller bearing / S. Harsha // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 2005, – Vol. 26, № 1. – P. 47–66.
3. Villa C. Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system / C. Villa, J.-J. Sinou, F. Thouverez // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2008. – Vol. 13, № 4. – P. 804–821.
4. Cong F. Vibration model of rolling element bearings in a rotor-bearing system for fault diagnosis / F. Cong, J. Chen, G. Dong, M. Pecht // *Journal of Sound and Vibration*. – 2013. – Vol. 332, № 8. – P. 2081–2097.
5. Alfares M. Effects of axial preloading of angular contact ball bearings on the dynamics of a grinding machine spindle system / M. Alfares, A. Elsharkawy // *Journal of Materials Processing Technology*. – 2003. – Vol. 136. – P. 48–59.
6. Panda K. Optimum support characteristics for rotor–shaft system with preloaded rolling element bearings / K. Panda, J. Dutt // *Journal of Sound and Vibration*. – 2003. – Vol. 260, № 4. – P. 731–755.
7. Филипповский С.В. Свободные нелинейные колебания многодисковых роторов на шарикоподшипниках / С.В. Филипповский, К.В. Аврамов // *Проблемы прочности*. – 2013. – № 3. – С. 86–96.
8. Новиков Л.З. Определение собственных частот колебаний электродвигателя, связанных с нелинейной упругостью подшипников / Л.З. Новиков // *Изв. АН СССР. Механика и машиностроение*. – 1961. – № 6. – С. 84–91.
9. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. / Л.С. Лейбензон – М.–Л.: Гостехтеориздат, 1947. – 464 с.
10. О колебаниях момента сопротивления вращению шарикоподшипника / В.Б. Ба-

льмонт, Б.О. Дубовецкий, А.М. Авдеев, Г.В. Селезнёв // *Машиноведение*. – 1988. – № 3. – С. 73–81.

11. Филипповский С.В. Нелинейные колебания ротора на радиально-упорных шарикоподшипниках / С.В. Филипповский, А.С. Беломытцев // *Вестник ХНАДУ: сб. науч. тр.* – 2014. – Вып. 64. – С. 66–73.
12. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах / В.С. Анищенко. – М.: Наука, 1990. – 312 с.

References

1. Legrand M., Jiang D., Pierr C., Shaw S. Nonlinear Normal Modes of a Rotating Shaft Based on the Invariant Manifold Method. *Int. J. of Rotating Machinery*, 2004, Vol. 10, no. 4, pp. 319-335.
2. Harsha S. Nonlinear dynamic analysis of an unbalanced rotor supported by roller bearing. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, Vol. 26, no. 1, pp. 47-66.
3. Villa C., Sinou J.-J., Thouverez F. Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008, Vol. 13, no. 4, pp. 804-821.
4. Cong F., Chen J., Dong G., Pecht M. Vibration model of rolling element bearings in a rotor-bearing system for fault diagnosis. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, Vol. 332, no. 8, pp. 2081-2097.
5. Alfares M., Elsharkawy A. Effects of axial preloading of angular contact ball bearings on the dynamics of a grinding machine spindle system. *Journal of Materials Processing Technology*, 2003, Vol. 136, pp. 48-59.
6. Panda K., Dutt J. Optimum support characteristics for rotor–shaft system with preloaded rolling element bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, Vol. 260, no. 4, pp. 731-755.
7. Filipkovskii S.V., Avramov K.V. Nonlinear Free Vibrations of Multi-Disk Rotors on Ball Bearings [Svobodnye nelineynye kolebanija mnogodiskovykh rotorov na sharikopodshipnikach], *Strength of Materials*, 2013, Vol. 45, no. 3, pp. 316-323.
8. Novikov L.Z. Opredelenie sobstvennykh chastot kolebanij jelektrodvigatelja, svjazannyh s nelinejnoju uprugost'ju podshipnikov [Determination of the natural frequencies of the vibrations of an electric motor connected with the nonlinear elastic-

- ity of the bearings]. Izv. AN SSSR. Mehanika i mashinostroenie, 1961, no. 6, pp. 84-91.
9. Lejbenzon L.S. Kurs teorii uprugosti [Course of Elasticity Theory]. Moscow-Leningrad, Gostehteorizdat Publ., 1947. 464 p.
 10. Bal'mont V.B., Duboveckij B.O., Avdeev A.M., Seleznev G.V. O kolebaniyah momenta soprotivleniya vrashheniju sharikopodshipnika [On the vibrations of moment of resistance to the bearing rotation]. Mashinovedenie, 1988, no. 3, pp. 73-81.
 11. Filipkovskii S.V., Belomytcev A.S. Nelinejnye kolebanija rotora na radial'no-upornyh sharikopodshipnikah [Nonlinear vibration of a rotor on the angular contact ball bearings]. Vestnik HNADU, 2014, Vol. 64, pp. 66-73.
 12. Anishhenko V.S. Slozhnye kolebanija v prostyh sistemah [Complicated oscillations in simple systems], Moscow, Nauka Publ., 1990, 312 p.
- Рецензент: И.В. Янчевский, профессор, д.ф.-м.н., ХНАДУ.
- Статья поступила в редакцию 22 июня 2015 г.
-
-