

УДК 624.048:625.7/8

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНЫХ, ЛИНЕЙНЫХ, ВЯЗКОУПРУГИХ 3-D МОДЕЛЕЙ

**В.А. Богомолов, профессор, д.т.н., В.К. Жданюк, профессор, д.т.н.,
С.В. Богомолов, инженер, ХНАДУ**

Аннотация. Предложены общие решения для 3-D вязкоупругих четырехэлементных моделей, которые могут быть использованы как при численном анализе напряженно-деформированного состояния дорожных одежд, так и при экспериментальных исследованиях.

Ключевые слова: вязкоупругая модель, тензор, девиатор, шаровой тензор, деформации, напряжения.

ЗАГАЛЬНЕ РІШЕННЯ ДЛЯ ЧОТИРИЕЛЕМЕНТНИХ, ЛІНІЙНИХ, В'ЯЗКОПРУЖНИХ 3-D МОДЕЛЕЙ

**В.О. Богомолов, професор, д.т.н., В.К. Жданюк, професор, д.т.н.,
С.В. Богомолов, інженер, ХНАДУ**

Анотація. Запропоновано загальні рішення для 3-D в'язкопружних чотириелементних моделей, що можуть бути використані як при числовому аналізі напружено-деформованого стану дорожнього одягу, так і при експериментальних дослідженнях.

Ключові слова: в'язкопружна модель, тензор, девиатор, шаровий тензор, деформації, напруги.

GENERAL SOLUTION FOR FOUR –ELEMENT LINEAR VISCOELASTIC 3-D MODELS

**V. Bogomolov, Professor, Doctor of Technical Science, V. Zhvaniuk, Professor,
Doctor of Technical Science, S. Bogomolov, engineer, KhNAHU**

Abstract. General solution for 3-D viscoelastic four – element models that can be used at both numerical analysis of stressedly – deformed condition of road coatings and experimental investigations are offered.

Key words: viscoelastic model, tensor, deviator, spherical tensor, deformation, stress.

Введение

Известно, что четырехэлементные реологические модели в достаточно полной мере способны описывать вязкоупругое поведение различных материалов [1], и, в частности, асфальтобетона [2, 3, 4].

Уже в работе [1] отмечается, что увеличение количества элементов свыше четырех «... не дает качественного изменения механического поведения модели».

Поэтому в дальнейших исследованиях целесообразно ограничиться именно такими конструкциями.

Анализ публикаций

В работе [5] показано, что линейную вязкоупругую модель любой сложности можно привести к обобщенной модели Максвелла. На рис. 1 показаны два возможных типа таких четырехэлементных моделей. В работе [6] дано общее решение для дифференциальных уравнений, описывающих схемы (рис. 1).

Цель и постановка задачи

Вместе с этим практика использования рассматриваемых моделей показывает, что очень часто бывает удобным модель (рис. 1, а)

представлять в виде схем рис. 2, а, б, в [7, 8]; а модель рис. 1, б, по схеме рис. 2, г [7].

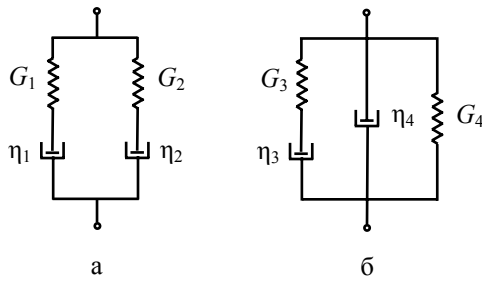


Рис. 1. Два типа четырехэлементных линейных вязкоупругих моделей: а – с мгновенной упругостью и остаточной деформацией; б – без них; $G_1 \dots G_4$, $\eta_1 \dots \eta_4$ – коэффициенты, характеризующие жесткостные и вязкостные свойства материала

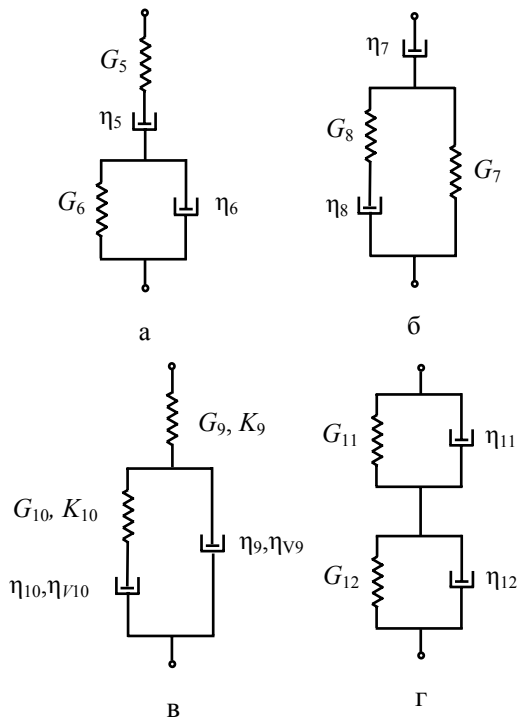


Рис. 2. Разновидности четырехэлементных моделей: а, б, в – с мгновенной упругостью и остаточной деформацией; г – без них

Например, модель рис. 2, а очень удобна для использования в экспериментальных исследованиях, а рис. 2, б для создания нелинейной вязкоупругой модели и т.д.

Таким образом, необходимо построить общее решение для схем рис. 2.

Девиаторы напряжений и деформаций

В работе [5] получены дифференциальные зависимости, связывающие девиаторы напряжений и деформаций.

Для схемы рис. 1, а

$$\eta_1 \eta_2 \ddot{D}_H + (G_1 \eta_2 + G_2 \eta_1) \dot{D}_H + G_1 G_2 D_H = 2\eta_1 \eta_2 (G_1 + G_2) \ddot{D}_d + 2G_1 G_2 (\eta_1 + \eta_2) \dot{D}_d. \quad (1)$$

Для схемы рис. 2, а

$$\eta_5 \eta_6 \ddot{D}_H + (G_5 \eta_5 + G_6 \eta_6) \dot{D}_H + G_5 G_6 D_H = 2G_5 \eta_5 \eta_6 \ddot{D}_d + 2G_5 G_6 (\eta_5 + \eta_6) \dot{D}_d. \quad (2)$$

Для схемы рис. 2, б

$$\eta_7 \eta_8 \ddot{D}_H + [G_7 \eta_8 + G_8 (\eta_7 + \eta_8)] \dot{D}_H + G_7 G_8 D_H = 2(G_7 + G_8) \eta_7 \eta_8 \ddot{D}_d + 2G_7 G_8 \eta_7 \dot{D}_d. \quad (3)$$

В соответствии с методикой, предложенной в [5] для рис. 2, в получаем

$$\eta_9 \eta_{10} \ddot{D}_H + [G_{10} (\eta_9 + \eta_{10}) + G_9 \eta_{10}] \dot{D}_H + G_9 G_{10} D_H = 2G_9 \eta_9 \eta_{10} \ddot{D}_d + 2G_9 G_{10} (\eta_9 + \eta_{10}) \dot{D}_d. \quad (4)$$

Как видно из (1)–(4), полученные дифференциальные уравнения для решения относительно D_H можно представить в виде

$$a_0 \ddot{D}_H + a_1 \dot{D}_H + a_2 D_H = f(t). \quad (5)$$

Поэтому, решение такого уравнения можно построить по общеизвестной схеме [9]

$$D_H = D_{H0} + D_{Hch}, \quad (6)$$

где D_{H0} – решение однородного уравнения; D_{Hch} – частное решение неоднородного уравнения (5).

Характеристическое уравнение для (5)

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \quad (7)$$

Откуда

$$k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}; \quad (8)$$

в дальнейшем будем рассматривать случай, когда $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$.

Для однородного уравнения

$$D_{H0} = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t}, \quad (9)$$

откуда из начальных условий могут быть определены c_1 и c_2 .

Так, например, если при $t=0$; $D_H = D_H^0$ и $\dot{D}_H = \dot{D}_H^0$, то

$$c_2 = \frac{\dot{D}_H^0 - k_1 D_H^0}{k_2 - k_1}; \quad c_1 = D_H^0 - c_2. \quad (10)$$

Если частное решение искать в виде

$$D_{Hch} = c_1(t) e^{k_1 t} + c_2(t) e^{k_2 t}, \quad (11)$$

то, после соответствующих преобразований, можно получить

$$D_{Hch} = \int_0^t \frac{1}{a_0(k_2 - k_1)} \left[e^{k_2(t-\xi)} - e^{k_1(t-\xi)} \right] \times f(\xi) d\xi, \quad (12)$$

где $f(\xi)$ – правая часть уравнения (5).

Таким образом, окончательно для девиатора напряжений можно записать

$$D_H = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} + \int_0^t \frac{1}{(k_2 - k_1)a_0} \times \left[e^{k_2(t-\xi)} - e^{k_1(t-\xi)} \right] f(\xi) d\xi. \quad (13)$$

Для решения относительно девиатора деформаций, (1)–(4) необходимо представить в виде

$$a_0 \ddot{D}_d + a_1 \dot{D}_d = f(t). \quad (14)$$

Тогда из решения характеристического уравнения (8)

$$k_1 = 0; \quad k_2 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad (15)$$

и общее решение

$$D_d = c_1 + c_2 e^{k_2 t} + \int_0^t \frac{1}{a_1} \times \left[1 - e^{k_2(t-\xi)} \right] f(\xi) d\xi, \quad (16)$$

где постоянные c_1 и c_2 так же, как и в предыдущем случае, определяются из начальных условий. Например, если при $t=0$; $D_d = D_d^0$ и $\dot{D}_d = \dot{D}_d^0$, то, по аналогии с (10),

$$c_2 = \frac{\dot{D}_d^0}{k_2}; \quad c_1 = D_d^0 - c_2. \quad (17)$$

Для схем рис. 1, б, 2, г.

Модель рис. 1, б

$$\eta_3 \dot{D}_H + G_3 D_H = 2\eta_3 \eta_4 \ddot{D}_d + 2 \left[G_3 (\eta_3 + \eta_4) + G_4 \eta_3 \right] \dot{D}_d + 2G_3 G_4 D_d. \quad (18)$$

Модель рис. 2, г

$$(\eta_{11} + \eta_{12}) \dot{D}_H + (G_{11} + G_{12}) D_H = 2\eta_{11} \eta_{12} \ddot{D}_d + 2(G_{11} \eta_{12} + G_{12} \eta_{11}) \dot{D}_d + 2G_{11} G_{12} D_d. \quad (19)$$

Таким образом, при решении относительно D_H уравнения (18), (19) приводятся к виду

$$a_0 \dot{D}_H + a_1 D_H = f(t). \quad (20)$$

Характеристическое уравнение для (20)

$$a_1 k + a_1 = 0, \quad (21)$$

откуда

$$k_0 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad (22)$$

и общее решение

$$D_H = c e^{k_0 t} + \int_0^t \frac{1}{a_0} e^{k_0(t-\xi)} f(\xi) d\xi, \quad (23)$$

где c находим из начальных условий, например, если при $t=0$, $D_H = D_H^0$, то

$$c = D_H^0. \quad (24)$$

При решении относительно D_d имеем

$$a_0 \ddot{D}_d + a_1 \dot{D}_d + a_2 D_d = f(t), \quad (25)$$

и тогда характеристическое уравнение имеет вид (7), его корни (8), а общее решение

$$D_d = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} + \int_0^t \frac{1}{(k_2 - k_1) a_0} \times \\ \times [e^{k_2(t-\xi)} - e^{k_1(t-\xi)}] f(\xi) d\xi. \quad (26)$$

При этом c_1 и c_2 , при $t=0$, $D_d = D_d^0$ и $\dot{D}_d = \dot{D}_d^0$, будут иметь вид

$$c_2 = \frac{\dot{D}_d^0 - k_1 D_d^0}{k_2 - k_1}; \quad c_1 = D_d^0 - c_2. \quad (27)$$

Шаровой тензор напряжений и деформаций

Как известно [8, 10], для того, чтобы определить шаровой тензор, необходимо знать значение средних параметров

$$\sigma_{sr} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}; \\ \varepsilon_{sr} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}; \quad \sigma_{sr} = \varepsilon_{sr} \frac{2G(1+\mu)}{(1-2\mu)}, \quad (28)$$

где $\sigma_x \dots \varepsilon_z$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций по соответствующим координатным осям; μ – коэффициент Пуассона.

В работе [5] предложена методика составления дифференциальных уравнений для рассматриваемых величин.

Так, например, для схемы рис. 2, в получаем

$$\eta_{V9} \eta_{V10} \ddot{\sigma}_{sr} + \\ + [K_9 \eta_{V10} + K_{10} (\eta_{V9} + \eta_{V10})] \dot{\sigma}_{sr} + \\ + K_9 K_{10} \sigma_{sr} = 3K_9 \eta_{V9} \eta_{V10} \ddot{\varepsilon}_{sr} + \\ + 3K_9 K_{10} (\eta_{V9} + \eta_{V10}) \dot{\varepsilon}_{sr}, \quad (29)$$

где η_{V9} , η_{V10} – коэффициенты объемного вязкого сопротивления; K_9 , K_{10} – объемные модули упругости (см. рис. 2, в).

Таким образом, для схем на рис. 1, а, 2, а–в дифференциальные уравнения имеют вид (5), откуда общее решение для σ_{sr} получим в виде

$$\sigma_{sr} = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} + \int_0^t \frac{1}{(k_2 - k_1) a_0} \times \\ \times [e^{k_2(t-\xi)} - e^{k_1(t-\xi)}] f(\xi) d\xi, \quad (30)$$

где k_1 , k_2 находим по аналогии с (10);

$$c_2 = \frac{\dot{\sigma}_{sr,0} - k_1 \sigma_{sr}^0}{k_2 - k_1}; \quad c_1 = \sigma_{sr,0} - c_2; \quad (31)$$

$f(\xi)$ – правая часть уравнения (29); $\sigma_{sr,0}$, $\dot{\sigma}_{sr,0}$ – начальные условия.

При решении относительно ε_{sr} исходное дифференциальное уравнение получаем в виде (14), и решение

$$\varepsilon_{sr} = c_1 + c_2 e^{k_2 t} + \int_0^t \frac{1}{a_1} [1 - e^{k_2(t-\xi)}] f(\xi) d\xi, \quad (32)$$

где k_2 находим по аналогии с (15);

$$c_2 = \frac{\dot{\varepsilon}_{sr,0}}{k_2}; \quad c_1 = \varepsilon_{sr,0} - c_2; \quad (33)$$

$f(\xi)$ – левая часть уравнения (29); $\varepsilon_{sr,0}$, $\dot{\varepsilon}_{sr,0}$ – начальные условия.

В случае, если $\eta_{V9} = \eta_{V10} = \infty$, т.е. $\dot{\varepsilon}_{cp} = 0$ [10], уравнение (29) выражается [5] в: $\varepsilon_{sr} = 3K_9 \varepsilon_{sr}$.

Выводы

Полученные решения могут быть использованы в численных решениях 3-D моделей, а также в процессе анализа экспериментальных данных.

Литература

1. Гольберг И.И. Механическое поведение полимерных материалов (математическое описание) / И.И. Гольберг. – М. : Химия, 1970. – 192 с.
2. Рейнер М. Деформация и течение / М. Рейнер; пер. со втор. англ. изд. Л.В. Никитина, А.М. Кочеткова, В.Н. Кукуджанова. – М. : Гос. научн.-техн. изд-во нефтян. и горно-топливной лит-ры, 1963. – 381 с.

3. Золотарев В.А. Исследование свойств асфальтобетонов различной макроструктуры: дис... канд. техн. наук: 05.23.05 / В.А. Золотарев. – Харьков, 1967. – 207 с.
4. Богомолов В.О. Реологічна модель роботи асфальтобетону при стисканні / В.О. Богомолов, В.К. Жданюк, В.М. Ряпухін, С.В. Богомолов // Автошляховик України. – 2010. – № 3. – С. 34–37.
5. Богомолов В.А. Общий метод получения дифференциальных зависимостей деформаций от напряжений для линейных реологических 3-D моделей / В.А. Богомолов, В.К. Жданюк, С.В. Богомолов // Вестник ХНАДУ: сб. научн. тр. – 2011. – № 52. – С. 54–59.
6. Богомолов В.А. Общее решение для линейной, трехмерной, вязкоупругой модели Максвелла // Вестник ХНАДУ : сб. научн. тр. / В.А. Богомолов, В.К. Жданюк, С.В. Богомолов. – 2011. – № 53. – С. 70–72.
7. Богомолов В.А. Универсальный метод составления линейных вязкоупругих структурных моделей / В.А. Богомолов, В.К. Жданюк, С.В. Богомолов // Автомобильный транспорт : сб. научн. тр. – 2011 – №28. – С. 125–131.
8. Дж. Мейз Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз; пер. с англ. Е.И. Свешниковой. – М. : Мир, 1974. – 318 с.
9. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн ; пер. со 2-го американск. перераб. изд. Н.Г. Арамановича, А.М. Березмана и др. – М. : Наука. Главн. ред. физ.-мат. лит-ры, 1984. – 831 с.
10. Безухов Н.И. Основы теории упругости пластичности и ползучести / Н.И. Безухов. – М. : Высшая школа, 1968. – 512 с.

Рецензент: В.В. Филиппов, профессор, д.т.н. ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 1 сентября 2011 г.