

УДК 629.11.012.814

РОЗРОБКА ОСНОВИ МЕТОДУ АВТОМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ

**М.В. Дячук, доцент, к.т.н.,
Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,
м. Дніпропетровськ**

Анотація. Розглядаються фундаментальні основи методу автоматичного складання систем диференціальних рівнянь для динамічних моделей транспортних засобів.

Ключові слова: динаміка автомобіля, імітаційне моделювання, автоматичне складання ДР.

РАЗРАБОТКА ОСНОВЫ МЕТОДА АВТОМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

**М.В. Дячук, доцент, к.т.н.,
Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры,
г. Днепропетровск**

Аннотация. Рассматриваются фундаментальные основы метода автоматического составления систем ДУ для динамических моделей транспортных средств.

Ключевые слова: динамика автомобиля, имитационное моделирование, автоматическое составление ДУ.

METHOD'S BASIS'S DEVELOPMENT OF VEHICLE'S DYNAMICS AUTOMATIC MODELING

**M. Dyachuk, Associate Professor, Candidate of Technical Science,
Prydniprov'ska State Academy of Civil Engineering and Architecture,
Dnipropetrovsk**

Abstract. Fundamental bases of a method of automatic compilation of systems of differential equations for vehicle's dynamic models are considered.

Key words: vehicle's dynamics, simulation, ODE's system automatic generating.

Вступ

Розробка конструкції сучасного автомобіля не можлива без засобів віртуального аналізу, що, природно, вимагає високоточних математичних моделей елементів конструкції і процесів їх функціонування. Комп'ютерне моделювання дозволяє відтворювати критичні ситуації, імітувати роботу вузлів, систем управління, поведінку водія, а також розробляти й оптимізувати системи активного контролю.

Аналіз публікацій

Як науковий напрямок питання динаміки ТЗ розвинуто такими провідними вченими як:

Чудаков Е.А., Певзнер Я.М., Литвинов А.С., Фаробін Я.Е., Хачатуров А.А., Елліс Д.Р., Пасейка Х.Б., Гіліспі Т., Альмаді У. [1].

На жаль, роботи цих авторів не пропонують універсального методу складання математичних моделей ТЗ, максимально адаптованого до програмування та чисельного аналізу.

Мета та постановка задачі

Метою роботи є розробка та апробація методу автоматизованого моделювання плоскої динаміки ТЗ, максимально адаптованого до використання комп'ютерних технологій. Це, у свою чергу, дозволить вирішувати завдання

аналізу, проектування, синтезу алгоритмів роботи для систем управління, агрегатів, вузлів та інших завдань мехатроніки автомобілів у середовищах імітаційного моделювання [2, 3].

Метод моделювання динаміки

Як об'єкт моделювання обрано автопоїзд МАЗ-MAN-642368 + «Дністр»-93571. Виділимо концентровані маси елементів конструкції ТЗ, розташовані у своїх геометричних центрах. Радіус-вектори \vec{R} вузлів графа динамічної системи можна виразити через радіуси-ребра графа \vec{r} : [1]

$$\{\vec{R}\} = G \cdot \{\vec{r}\}, \quad (1)$$

де G – матриця інциденцій ребер основного графа.

Кожний вектор \vec{r}_k жорсткої ланки можна розкласти у місцевий базис, а $\vec{r}_1 = \vec{R}_1$ – у глобальний

$$\vec{r}_k = \{\vec{u}_k\} \cdot \{r_k\}^T; \quad \vec{r}_1 = \{\vec{u}\} \cdot \{r_{1XY}\}^T, \quad (2)$$

де $\{\vec{u}\} = [\vec{u}_X \quad \vec{u}_Y]$ – базис глобальної системи координат; $\{\vec{u}_k\} = \{\vec{u}\} \cdot C_k^T$ та $\{\vec{u}_k\} = [\vec{u}_{r_k} \quad \vec{u}_{\phi_k}]$ – базис місцевої полярної системи координат вектора \vec{r}_k ; $\{r_k\} = [r_k \quad 0]$ – модульні складові вектора \vec{r}_k у місцевій полярній системі координат; $C_k = C(\phi_k)$ – матриця косинусів напрямку вектора \vec{r}_k ; $\{r_{1XY}\} = [r_{1X} \quad r_{1Y}]$ – модульні складові вектора $\vec{r}_1 = \vec{R}_1$.

Маси динамічних ланок n моделі формують вектор мас системи

$$\{M\} = [m_1 \quad \dots \quad m_n]. \quad (3)$$

Рівняння поступального руху. Кількість та зміна кількості руху системи [1]

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \{M\} \cdot d\{\vec{R}\}/dt \\ d\vec{Q}/dt &= \frac{d}{dt}(\{M\} \cdot d\{\vec{R}\}/dt) = \\ &= \{M\} \cdot d^2\{\vec{R}\}/dt^2 = \\ &= \{M\} \cdot G \cdot d^2\{\vec{r}\}/dt^2 = \{M\} \cdot G \cdot \{\vec{q}\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Кожний елемент \vec{q}_k вектора $\{\vec{q}\} = d^2\{\vec{r}\}/dt^2$ можна представити матричним розкладанням

$$\vec{q}_k = \{\vec{u}\} \cdot C_k^T \cdot E_{r_k} \cdot (\{j_k\} + \Delta \cdot \{w_k\}), \quad (5)$$

де $\{w_k\} = [2 \cdot d\phi_k/dt \cdot dr_k/dt \quad (d\phi_k/dt)^2]^T$ – вектор коріюлісової та відцентрової складових прискорень \vec{r}_k ; $\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ – матриця перевороту; $E_{r_k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_k \end{bmatrix}$ – матриця модульного значення вектора \vec{r}_k ; $\{j_k\} = [d^2r_k/dt^2 \quad d^2\phi_k/dt^2]^T$ – вектор лінійної та кутової складових прискорень \vec{r}_k .

Згрупуємо дані у вектори та блочні матриці розрідженої структури

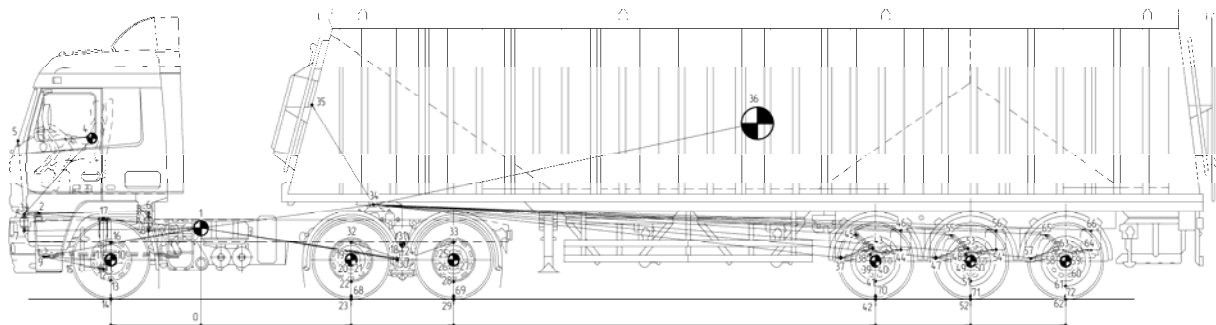


Рис. 1. Зв'язки вузлів динамічної системи автопоїзда

$$C_r^T = \begin{bmatrix} C_1^T & & \\ & \ddots & \\ & & C_k^T \end{bmatrix}; \quad E_r = \begin{bmatrix} E_{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & E_{r_k} \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} \Delta & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta \end{bmatrix}; \quad \vec{U} = \begin{bmatrix} \{\vec{u}\} & & \\ & \ddots & \\ & & \{\vec{u}\} \end{bmatrix};$$

$$\{j\} = \begin{bmatrix} \{j_1\} \\ \vdots \\ \{j_k\} \end{bmatrix}; \quad \{w\} = \begin{bmatrix} \{w_1\} \\ \vdots \\ \{w_k\} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Вирази (6) дозволяють компактно представити вектор $\{\vec{q}\}$

$$\{\vec{q}\} = \vec{U} \cdot C_r^T \cdot E_r \cdot (\{j\} + D \cdot \{w\}). \quad (7)$$

Зміна кількості руху системи у векторно-матричній формі

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \{M\} \cdot G \cdot \vec{U} \cdot C_r^T \cdot E_r \cdot (\{j\} + D \cdot \{w\}). \quad (8)$$

Рівняння поступального руху у векторно-матричній формі

$$\{M\} \cdot G \cdot \vec{U} \cdot C_r^T \cdot E_r \cdot (\{j\} + D \cdot \{w\}) = \sum_j \vec{F}_j^{(e)}, \quad (9)$$

де $\sum_j \vec{F}_j^{(e)}$ – результуюча всіх зовнішніх сил,

що діють на ТЗ; $\vec{U} = E_X \cdot \vec{u}_X + E_Y \cdot \vec{u}_Y$ – матриця розкладання у глобальний базис, що представлена через розріджені одиничні матриці E_X та E_Y .

У рівняннях (7)–(9) $\{j\}$ загалом є вектором псевдопараметрів, бо деякі його складові дублюють прискорення ступенів свободи. Введення логічної матриці T дозволяє перейти від $\{j\}$ безпосередньо до унікальних прискорень

$$\{j\} = T \cdot \{J\}, \quad \{w\} = T \cdot \{H\}, \quad (10)$$

де $\{J\}$ – вектор невідомих прискорень; $\{H\}$ – вектор складових переносних прискорень.

Розкладання векторного рівняння (9) по базису глобальних координат дає рівняння проєкцій на осі OX та OY

$$\begin{bmatrix} \{M\} \cdot G \cdot E_X \\ \{M\} \cdot G \cdot E_Y \end{bmatrix} \cdot C_r^T \cdot E_r \cdot T \cdot \{J\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_j F_{jX}^{(e)} \\ \sum_j F_{jY}^{(e)} \end{bmatrix} - \quad (11)$$

$$- \begin{bmatrix} \{M\} \cdot G \cdot E_X \\ \{M\} \cdot G \cdot E_Y \end{bmatrix} \cdot C_r^T \cdot E_r \cdot D \cdot T \cdot \{H\}.$$

Рівняння обертального руху. Розглянемо формування моментних складових

$$\vec{L}_{n,k} = \vec{L}_n + \vec{l}_{n,k}, \quad \vec{R}_{n,k} = \vec{R}_n + \vec{l}_{n,k},$$

$$\vec{a}_{n,k} = d^2 \vec{R}_n / dt^2 + d^2 \vec{l}_{n,k} / dt^2, \quad (12)$$

де \vec{L}_n – векторна координата маси n ; $\vec{l}_{n,k}$ – радіус-вектор до точки k n -ої ланки у місцевій системі координат; $\vec{a}_{n,k}$ – прискорення довільної точки k ланки n .

Динамічний момент системи є сума векторних добутків координат точок та діючих у них сил інерції

$$\sum_j \vec{L}_j \times m_j \cdot \vec{a}_j = \sum_n \left(\sum_k \vec{L}_{n,k} \times m_{n,k} \cdot \vec{a}_{n,k} \right). \quad (13)$$

Після складних перетворень (14) отримуємо

$$\sum_j \vec{L}_j \times m_j \cdot \vec{a}_j = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{d^2 \phi_1}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^2 \phi_n}{dt^2} \end{bmatrix} \cdot \vec{u}_Z +$$

$$+ \begin{bmatrix} \vec{L}_1 \\ \vdots \\ \vec{L}_n \end{bmatrix}^T \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix}}_{Diag(\{M\})} \times \begin{bmatrix} \frac{d^2 \vec{R}_1}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^2 \vec{R}_n}{dt^2} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

де $Diag(\{M\})$ – діагональна матриця мас ланок; $\{I\} = [I_1 \ \dots \ I_n]$ – вектор моментів інерції ланок відносно центрів місцевих систем координат;

$\left\{ \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 \vec{R}_1}{dt^2} & \dots & \frac{d^2 \vec{R}_n}{dt^2} \end{bmatrix}^T$ – вектор прискорень центрів мас ланок;

$\{\varepsilon\} = [d^2\phi_1/dt^2 \quad d^2\phi_2/dt^2 \quad d^2\phi_3/dt^2]^T$ – вектор кутових прискорень ланок.

Враховуючи співвідношення (1), (7), (10), отримаємо векторний запис абсолютних прискорень центрів мас ланок

$$\left\{ \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right\} = G \cdot \bar{U} \cdot C_r^T \cdot E_r \cdot \begin{pmatrix} T \cdot \{J\} + \\ + D \cdot T \cdot \{H\} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Вектор кутових прискорень можна виразити через вектор узагальнених прискорень та логічну матрицю переходу K

$$\{\varepsilon\} = K \cdot \{J\}. \quad (16)$$

Векторні координати центрів мас залежать від положення початкової точки, яка мігрує у міру відтинання частини системи

$$[\bar{L}_1 \quad \dots \quad \bar{L}_3] = \{r\} \cdot C_r \cdot \bar{U}^T \cdot G_n, \quad (17)$$

де $\{r\} = [\{r_1\} \quad \dots \quad \{r_k\}]$; G_n – матриця інцидентів тієї частини системи, для якої розглядається динамічна рівновага.

Вираз для запису динамічних моментів (13) після підстановки (15)–(17) набуває універсального виду

$$\begin{aligned} \sum_j \bar{L}_j \times m_j \cdot \bar{a}_j &= \{I\} \cdot K \cdot \{J\} \cdot \bar{u}_Z + \\ &+ \{r\} \cdot C_A \cdot \bar{U}^T \cdot G_n \cdot \text{Diag}(\{M\}) \times \\ &\times G \cdot \bar{U} \cdot C_A^T \cdot E_r \cdot (T \cdot \{J\} + D \cdot T \cdot \{H\}). \end{aligned} \quad (18)$$

Підставляючи \bar{U} у розгорнутому вигляді, отримаємо більш компактний вигляд

$$\begin{aligned} \sum_j \bar{L}_j \times m_j \cdot \bar{a}_j &= \{I\} \cdot K \cdot \{J\} \cdot \bar{u}_Z + \\ &+ (\{r\} \cdot C_r \cdot N_n \cdot C_r^T \cdot E_r \cdot T) \cdot \{J\} \cdot \bar{u}_Z + \\ &+ \{r\} \cdot C_r \cdot N_n \cdot C_r^T \cdot E_r \cdot D \cdot T \cdot \{H\} \cdot \bar{u}_Z, \end{aligned} \quad (19)$$

де $N_n = \begin{pmatrix} E_X^T \cdot G_n \cdot \text{Diag}(\{M\}) \cdot G \cdot E_Y - \\ - E_Y^T \cdot G_n \cdot \text{Diag}(\{M\}) \cdot G \cdot E_X \end{pmatrix}$.

Система диференціальних рівнянь руху має вигляд

$$\left\{ \begin{aligned} &\left[\begin{matrix} \{M\} \cdot G \cdot E_X \\ \{M\} \cdot G \cdot E_Y \\ \vdots \\ \{r\} \cdot C_r \cdot N_n \end{matrix} \right] \cdot C_A^T \cdot E_r \cdot T + \\ &+ \left[\begin{matrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \vdots \\ \{I\} \end{matrix} \right] \cdot K \\ &= \left[\begin{matrix} \sum_j F_{jX}^{(e)} \\ \sum_j F_{jY}^{(e)} \\ \vdots \\ \sum_k M_{nk}^{(e)} \end{matrix} \right] + \\ &+ \left[\begin{matrix} \{M\} \cdot G \cdot E_X \\ \{M\} \cdot G \cdot E_Y \\ \vdots \\ \{r\} \cdot C_r \cdot N_n \end{matrix} \right] \cdot C_r^T \cdot E_r \cdot D \cdot T \cdot \{H\} \end{aligned} \right\} \cdot \{J\} =$$

Висновки

Унікальність та універсальність математичної моделі руху автопоїзда підкреслюється представленням її в матричному вигляді, що є оптимальним для швидкості розрахунків та програмування у середовищі MATLAB. Віртуальна модель автопоїзда створена таким чином, що дозволяє подальший розвиток та ускладнення математичної моделі руху автопоезду, а саме – інтеграцію з імітаційними моделями систем контролю та автоматизації [2, 3].

Література

1. Леви-Чевита Т. Курс теоретической механики / Т. Леви-Чевита, У. Амальди ; пер. с итал. Д.И. Кутилина. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1951-544.
2. carsim.com
3. simpack.com

Рецензент: В.Д. Мигаль, професор, д.т.н., ХНАДУ.

Стаття надійшла до редакції: 1 вересня 2011 р.