

## ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭКСПЛУАТАЦИЯ, ТЕХНОЛОГИЯ ПРОИЗВОДСТВА, РЕМОНТА И СЕРВИСА АВТОМОБИЛЕЙ

УДК 629.113

### ДО ПИТАННЯ ПРО АПРОКСИМАЦІЮ ЗАЛЕЖНОСТІ БІЧНОГО ВІДВЕДЕННЯ

**В.П. Сахно, професор, д.т.н., Національний транспортний університет (НТУ), Київ**  
**В.А. Макаров, доцент, к.т.н., А.В. Костенко, доцент, к.т.н., В.Г. Вербицький,**  
**професор, д.ф.-м.н., Донецька академія автомобільного транспорту**

*Анотація.* Запропоновано підхід до визначення «чутливості» апроксимації залежності сил бічного відведення на прикладі «магічної» формули та її поліномного наближення на основі побудови біфуркаційної діаграми.

*Ключові слова:* відведення бічне, діаграма біфуркаційна, поліном, формула «магічна».

### К ВОПРОСУ ПРО АПРОКСИМАЦИЮ ЗАВИСИМОСТИ БОКОВОГО УВОДА

**В.П. Сахно, профессор, д.т.н., Национальный транспортный университет (НТУ), Киев**  
**В.А. Макаров, доцент, к.т.н., А.В. Костенко, доцент, к.т.н., В.Г. Вербицкий,**  
**профессор, д.ф.-м.н., Донецкая академия автомобильного транспорта**

*Аннотация.* Предложен подход к определению «чувствительности» аппроксимации зависимости сил бокового увода на примере «магической» формулы и ее полиномного приближения на основе построения бифуркационной диаграммы.

*Ключевые слова:* увод боковой, диаграмма бифуркационная, полином, формула «магическая».

### TO THE QUESTION OF APPROXIMATION OF LATERAL WITHDRAWAL DEPENDENCE

**V. Sakhno, Professor, Doctor of Technical Science, National Transport University, Kyiv,**  
**V. Makarov, Associate Professor, Candidate of Technical Science,**  
**A. Kostenko, Associate Professor, Candidate of Technical Science, V. Verbitsky,**  
**Professor, Candidate of Physical-Mathematical Science, The University**  
**of Transportation Systems and Technology (DAAT), Donetsk, Ukraine**

*Abstract.* The approach to definition of «sensitivity» of dependence approximation of lateral withdrawal forces on example of the «magic» formula and its polynom bifurcation diagrams approach on the basis of construction is offered.

*Key words:* lateral withdrawal, bifurcation diagrams, polynom, magic formula.

#### Вступ

При дослідженні динамічних якостей математичної моделі автомобіля – стійкості, керованості та маневреності постає питання про спосіб описання взаємодії автомобільно-

го колеса та дороги. Коректний вибір залежності бічної сили від кута відведення  $Y-f(\delta)$  є важливою частиною при вирішенні цього питання. Одним з найпоширеніших прийомів є відома «магічна» формула, що запропонована Х. Пацейкою [1], в роботі ставиться пи-

тання про можливість спрощеної апроксимації цієї залежності у вигляді кубічного полінома, який би не призводив до суттєвих похибок динамічних показників моделі.

**Мета та постановка задачі**

Визначення «чутливості» апроксимації залежності сил бічного відведення на прикладі магічної формули та її поліномного наближення на основі побудови біфуркаційної діаграми, що є інтегральною характеристикою стійкості всієї множини стаціо-нарних станів.

**Апроксимація залежності бічного відведення**

Одним з найпопулярніших способів зображення залежності бічної сили від кута відведення є відома «магічна» формула, що запропонована Х. Пацейкою [1]

$$Y = D \sin \left[ C \arctg \left\{ B\delta - E \left( B\delta - \arctg(B\delta) \right) \right\} \right], \quad (1)$$

де  $D, C, B, E$  – коефіцієнти формули, що визначають зовнішній вигляд графіка залежності стабілізуючого моменту від кута відведення з урахуванням різних факторів, що можуть впливати на бічне відведення (рис. 2, б).

Обираючи відповідні коефіцієнти, що входять в формулу (6), можна забезпечити відповідну апроксимацію кривих, отриманих в результаті тестування шин.

Для застосування цієї формули необхідно знати близько 50 коефіцієнтів, що визначаються експериментально. Це, безумовно, потребує дуже високотехнологічного обладнання.

В деяких роботах, зокрема [2], запропоновано використовувати поліноми, що можуть мати такий вигляд:

$$Y = k_{\delta} \delta - n_{\delta} \delta^2 + K_{\delta} \delta^3; \quad (2)$$

$$Y = k_{\delta} \delta - n_{\delta} \delta^3 + K_{\delta} \delta^5, \quad (3)$$

де  $k_{\delta}, n_{\delta}, K_{\delta}$  – коефіцієнти полінома.

На рис. 1, а та 1, б наведено, відповідно загальний вигляд графіків, що описують бічне

відведення за допомогою магічної формули та кубічного полінома. Слід зауважити, що загальний вигляд кубічного полінома (рис. 1) залежить від знака коефіцієнта, що знаходиться біля кубічного члена (або біля члена, що має п'ятий степінь) рівнянь (2) та (3): крива 1 відповідає позитивному коефіцієнту, крива 2 – негативному.

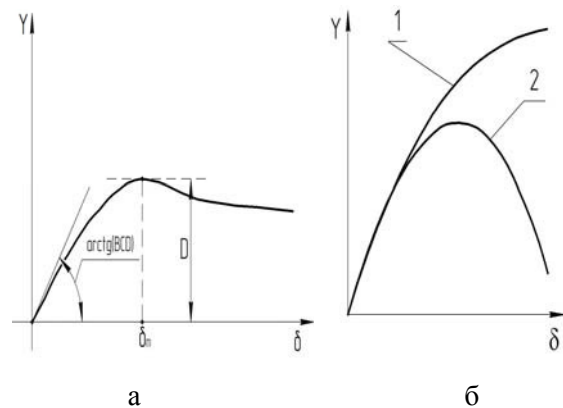


Рис. 1. Залежності бічної сили від кута відведення: а – формула Пацейки; б – поліноми

Постає питання щодо співставлення результатів дослідження курсової стійкості руху з урахуванням однієї та другої залежностей.

Для отримання кубічного полінома, що відповідає рівнянню (1), слід визначити такі параметри: коефіцієнт опору бічного відведення –  $k_{\delta}$ ; кут відведення за максимально можливою бічною силою –  $\delta_{\gamma}$  при  $Y_{\max}$ , коефіцієнти  $n_{\delta}$  та  $K_{\delta}$ .

Математично коефіцієнт опору бічного відведення – це похідна бічної сили по куту відведення на початку координат, що геометрично відповідає куту нахилу прямою, яка дотична до кривої  $Y = f(\delta)$ , що показано на рис. 1, а. Отже, для розрахунку визначимо похідну для рівняння (2)

$$Y = \frac{D \cos(C \arctg(-B\delta + E(E\delta - \arctg(B\delta))))}{1 + (-B\delta + E(B\delta - \arctg(B\delta)))^2} \times \frac{C(-B + E(B - \frac{B}{1 + B^2\delta^2}))}{1 + (-B\delta + E(B\delta - \arctg(B\delta)))^2} \quad (4)$$

далі слід підставити в отримане рівняння (4)  $\delta = 0$  та визначити величину коефіцієнта  $k_{\delta}$

$$k = BCD. \quad (5)$$

Рівняння (5) можна використати як для перевірки розрахунку, оскільки в літературі наведено коефіцієнти формули, які можна перемножити, так і для безпосереднього отримання коефіцієнта  $k_\delta$ .

Величину кута відведення за максимальної бічної сили  $\delta_{\max}$  знайдемо з рівняння (1), підставивши величину максимальної бічної сили – чисельно дорівнює коефіцієнту  $D$ , отже величина  $\delta_Y$  визначиться з рівняння

$$Y_{\max} = D \sin \left[ C \operatorname{arctg} \left\{ B\delta_Y - E \left( B\delta_Y - \operatorname{arctg} (B\delta_Y) \right) \right\} \right]. \quad (6)$$

Далі визначимо похідну для рівняння (2), отримаємо

$$Y' = k_\delta - 2n_\delta \delta + 3K_\delta \delta^2. \quad (7)$$

Приравнявши  $Y' = 0$ , отримаємо квадратичне рівняння, з якого, в свою чергу, одержимо вираз для знаходження кута відведення за максимальної бічної сили для полінома  $\delta_{Yp}$ :

$$\delta_{Yp} = \frac{1}{3} \frac{n_\delta + \sqrt{n_\delta^2 - 3K_\delta k_\delta}}{K_\delta}. \quad (8)$$

Відповідно, для отримання виразу для розрахунку максимальної бічної сили  $Y_{\max}$  підставимо  $\delta_{Yp}$  в рівняння (2)

$$Y_{\max p} = \frac{1}{27} \times \frac{(n_\delta + \sqrt{n_\delta^2 - 3K_\delta k_\delta})(6K_\delta k_\delta - n_\delta^2 - n_\delta \sqrt{n_\delta^2 - 3K_\delta k_\delta})}{K_\delta^2}. \quad (9)$$

В результаті складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \delta_{Yp} - \delta_{\max} = 0; \\ Y_{\max p} - Y_{\max}. \end{cases} \quad (10)$$

Підставивши в систему (9) отримані вище дані, одержимо рівняння для знаходження величин  $n_\delta$  та  $K_\delta$ :

$$\begin{cases} K_\delta = -\frac{-k_\delta \delta_{\max} + 2Y_{\max}}{\delta_{\max}^3}; \\ n_\delta = -\frac{-2k_\delta \delta_{\max} + 3Y_{\max}}{\delta_{\max}^2}. \end{cases} \quad (11)$$

Аналогічно отримані коефіцієнти полінома п'ятого степеня (3)

$$\begin{cases} K_\delta = -\frac{1}{2} \frac{3Y_{\max} - 2\delta_{\max} k_\delta}{\delta_{\max}^5}; \\ n_\delta = -\frac{1}{2} \frac{1 - 4\delta_{\max} k_\delta + 5Y_{\max}}{\delta_{\max}^3}. \end{cases} \quad (12)$$

Необхідні для апроксимації величини  $k_\delta$ ,  $\delta_{\max}$  та  $Y_{\max}$  можна отримати з незалежного експерименту, що значно спрощує задачу.

Для подальшого дослідження використаємо велосипедну схему автомобіля з такими параметрами: маса 6 000 Н; база 2,42 м; відстань від передньої осі до центра мас  $a = 1,6$  м. Математичні рівняння руху велосипедної моделі легкового автомобіля мають такий вигляд

$$\begin{cases} m(\dot{u} + v\omega) = Y_1 + Y_2; \\ J\dot{\omega} = aY_1 - bY_2. \end{cases} \quad (13)$$

Використаємо результати експерименту, що наведені в [3]:

– для передніх коліс

$$Y = 3650 \sin \left[ 1,19 \operatorname{arctg} \left\{ 0,239\delta + 0,678 \times (0,239\delta - \operatorname{arctg}(0,239\delta)) \right\} \right];$$

– для задніх коліс –

$$Y = 1936 \sin \left[ 1,5 \operatorname{arctg} \left\{ 0,244\delta + 0,132 \times (0,244\delta - \operatorname{arctg}(0,244\delta)) \right\} \right].$$

На рис. 2 наведено співставлення трьох варіантів отримання залежностей бічного відведення.

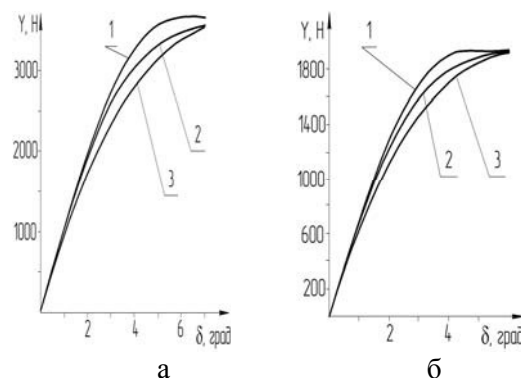


Рис. 2. Залежності бічної сили від кута відведення: а – передні колеса; б – задні колеса; 1 – поліном п'ятого степеня; 2 – «магічна» формула; 3 – кубічний поліном

З аналізу рис. 3, а видно, що є якісні зміни – при використанні «магічної» формули отримуємо додаткові області на біфуркаційній діаграмі. Якщо співставити множини, отримуємо рис. 3, б.

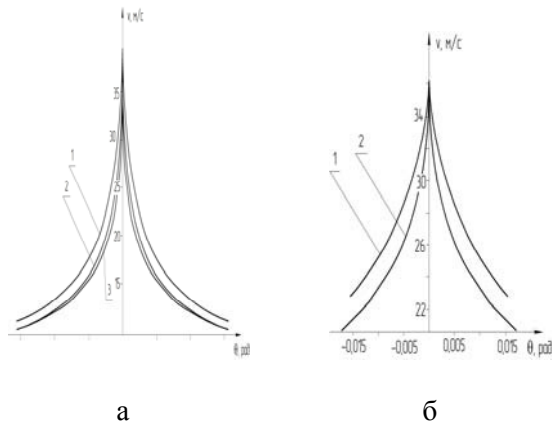


Рис. 3. Біфуркаційні множини: а – магічна; б – поліноми; 1 – магічна формула; 2 – поліном п'ятого степеня; 3 – кубічний поліном

Якщо, біля критичної швидкості майже прямолінійний рух, та маємо якісне відхилення, що засвідчує про додаткову увагу при дослідженні саме таких режимів руху автомобіля (великі швидкості та невеликі кути повороту коліс). З іншого боку, можливість реалізації водієм або реакція водія на зміни в цій області є сумнівною (зміна кута  $\theta$  в межах від мінус 0,06 – до плюс 0,06 рад).

При великих кутах повороту керованих коліс та невеликих швидкостях вигляд множин ідентичний, хоча є невеликі кількісні зміни, які, мабуть, не призводять до великої похибки досліджень саме таких режимів (наприклад, рух автомобіля на поворотах малого радіуса).

Використовуючи біфуркаційні множини, можна приблизно оцінити радіус руху центра мас при криволінійному русі за формулою

$R = v/\omega$ . Наприклад, для швидкості 12 м/с отримано, що для біфуркаційної множини 1 –  $R = 16,4$  м; для 2 –  $R = 17,4$  м; для 3 –  $R = 18,1$  м. Було визначено радіуси в діапазоні швидкостей  $v = 10-15$  м/с найбільша похибка становить 10 % при швидкості, що відповідає 15 м/с, причому при зменшенні швидкості похибка зменшується. Це означає, що дослідження курсової стійкості руху в режимах, що відповідають швидкостям до 15 м/с, цілком можливе за допомогою поліномів.

**Висновки**

Залежно від прийнятої дослідником апроксимації залежності бічної сили від кута відведення можливі дещо різні результати. Це не означає, що прийнята та чи інша апроксимація зовсім не є правильною.

**Література**

1. Pacejka H. The magic formula tyre model / H. Pacejka, E. Bakker // Prog. IstCollog. Models for Vehicle Dynamic Analysis. Delft. – Amsterdam : Swits and Zeitlinger, 1991. – P.1–18.
2. Костенко А.В. Аналіз впливу стабілізаційних моментів на характеристики стійких стаціонарних станів моделі автомобіля з абсолютно жорстким керованим модулем / А.В. Костенко, А.М. Єфименко, В.Г. Вербицький // Вісник Донецької академії автомобільного транспорту. – 2010. – №4. – С. 68–73.
3. Pacejka H. Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies / H. Pacejka, E. Bakker, L. Nyborg. // SAE. – Paper No. 870421.

Рецензент: В.П. Волков, професор, д.т.н., ХНАДУ.

Стаття надійшла до редакції 9 серпня 2011 р.