

УДК 539.3

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА О НЕСТАЦИОНАРНОМ КИНЕМАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Е.Г. Янютин, профессор, д.т.н.,
Д.И. Богдан, доцент, к.т.н., ХНАДУ

Аннотация. Рассмотрено решение обратной задачи о нестационарном кинематическом нагружении упругого полупространства. Искомым является возмущающее кинематическое воздействие, прикладываемое на поверхности полупространства. Рассматривается осесимметричная постановка краевой задачи теории упругости. Решение строится в виде разложения в ряд по функциям Бесселя по радиальной координате. Рассмотрен численный пример идентификации перемещений на поверхности полупространства.

Ключевые слова: полупространство, обратная задача, кинематическое воздействие, система интегральных уравнений, краевая задача.

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ПРО НЕСТАЦІОНАРНЕ КІНЕМАТИЧНЕ НАВАНТАЖЕННЯ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ

Є.Г. Янютін, професор, д.т.н.,
Д.І. Богдан, доцент, к.т.н., ХНАДУ

Анотація. Розглянуто розв'язок оберненої задачі про нестационарне кінематичне навантаження пружного півпростору. Шуканою є збурювальна кінематична дія, прикладена на поверхні півпростору. Розглянуто осесиметричну постановку крайової задачі теорії пружності. Розв'язок будується у вигляді розкладу в ряд за функціями Бесселя за радіальною координатою. Розглянуто чисельний приклад ідентифікації переміщень на поверхні півпростору.

Ключові слова: півпростір, обернена задача, кінематична дія, система інтегральних рівнянь, крайова задача.

INVERSE PROBLEM OF NON-STATIONARY KINEMATICALLY LOADED ELASTIC HALF-SPACE

E. Yanyutin, Professor, Doctor of Technical Science,
D. Bogdan, Associate Professor, Candidate of Technical Science, KhNAHU

Abstract. The solution of inverse problem concerning non-stationary kinematic loading of elastic half-space is considered in the given article. Kinematic loading applied to the surface of half-space is the result of inverse problem solving. Axisymmetric statement of the second boundary value problem is under consideration. The problem is solved by using expansion in a series in the form of cylindrical functions. The numerical examples of inverse problem solving are represented.

Key words: half-space, kinematic loading, system of integral equations, boundary value problem.

Введение

В настоящей статье рассматривается обратная нестационарная задача теории упругости

для упругого полупространства. Вначале укажем некоторые возможные постановки обратных задач. Остановимся на четырех типах такого рода задач.

1. На границе полупространства заданы нормальные перемещения, а касательные перемещения являются неизвестными. Граничные касательные перемещения находятся из условия, что на некоторой глубине упругого полупространства, вдоль конкретной плоскости, параллельной граничной, касательные перемещения должны отсутствовать.

2. На границе упругого полупространства заданы касательные перемещения, а нормальные перемещения являются неизвестными. Необходимо так подобрать граничные нормальные перемещения, чтобы на некоторой глубине в полупространстве нормальные перемещения были бы равными нулю.

3. На границе полупространства приложены неизвестные и нормальные, и касательные перемещения. Их необходимо найти из условия, что на некоторой глубине в полупространстве и нормальные, и касательные перемещения изменялись бы по заданному закону.

4. Пусть в упругом полупространстве реализовано некоторое деформационное состояние. В глубине полупространства имеются определенные перемещения (нормальные и касательные). Необходимо приложить к поверхности полупространства такие дополнительные граничные перемещения, чтобы на некоторой глубине нормальные и касательные перемещения отсутствовали.

Перечень возможных постановок обратных задач можно было бы продолжить, однако ограничимся приведением этих четырех.

Анализ публикаций

Решение обратных задач для упругого полупространства является новым направлением механики деформируемого твердого тела, и, как следствие, мы можем заметить отсутствие публикаций в этом направлении. Решение прямой задачи, которое бралось за основу для решения обратной задачи, детально описано в работе Сеймова В.М. [3].

Цель и постановка задачи

Постановка обратной задачи для упругого полупространства будет состоять в следующем: на некоторой глубине упругого полу-

пространства (на плоскости ($z \neq 0$)) известен закон изменения перемещений во времени, а необходимо определить его на поверхности упругого полупространства (на плоскости $z = 0$).

Подробное описание решения соответствующей прямой задачи в осесимметричной постановке и условий, при которых реализуется это решение, приведено в работах [1, 3].

Решение обратной задачи

Для построения решения задачи будем исходить из выражений (1), (2) [1], которые определяют перемещения в упругом полупространстве в зависимости от переменных r, z, t .

$$w(r, z, t) = -\frac{1}{\alpha} H(t - z\beta) \times \quad (1)$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\lambda_k r) \left((-\beta C_k(t - z\beta)) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{t-z\beta} C_k(\tau) \left(\frac{z\beta \lambda_k J_1 \left(\frac{\lambda_k}{\beta} \left(\sqrt{(t-\tau)^2 - z^2\beta^2} \right) \right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - z^2\beta^2}} \right) d\tau \right) -$$

$$-\frac{H(t-z)}{\alpha^2} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (-J_0(\lambda_k r)) \int_0^{t-z} D_k(\tau) J_0 \left(\lambda_k \sqrt{(t-\tau)^2 - z^2} \right) d\tau,$$

$$u(r, z, t) = -\frac{1}{\alpha\beta} H(t - z\beta) \times \quad (2)$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\lambda_k r) \int_0^{t-z\beta} \frac{C_k(\tau)}{\lambda_k} J_0 \left(\frac{\lambda_k}{\beta} \sqrt{(t-\tau)^2 - z^2\beta^2} \right) d\tau +$$

$$+\frac{1}{\alpha^2} H(t-z) \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda_k J_1(\lambda_k r) \times$$

$$\times \left(D_k(t-z) + \int_0^{t-z} D_k(\tau) \frac{z\lambda_k J_1 \left(\lambda_k \left(\sqrt{(t-\tau)^2 - z^2} \right) \right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - z^2}} d\tau \right) \right).$$

Следует отметить, что при решении обратной задачи (исходные данные обратной задачи) $w(r, z, t)$ и $u(r, z, t)$ при $z \neq 0$ ($z = \text{const}$) являются заданными функциями переменных r и t . В дальнейшем обозначим упомянутую константу через z_0 .

Для простоты записи получаемых формул на основе (1) примем следующие обозначения

$$\frac{z_0 \lambda_k J_1 \left(\frac{\lambda_k}{\beta} \sqrt{(t-\tau)^2 - z_0^2 \beta^2} \right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - z_0^2 \beta^2}} = F_1^k(t, \tau)$$

$$-J_0 \left(\lambda_k \sqrt{(t-\tau)^2 - z_0^2} \right) \lambda_k^2 = F_2^k(t, \tau). \quad (3)$$

Запишем первое уравнение из системы (1) для нормальных перемещений в виде

$$w(r, z_0, t + z_0 \beta) = \frac{H(t)}{\alpha} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\lambda_k r) \left(-C_k(t) + \int_0^t C_k(\tau) F_1^k(t + z_0 \beta, \tau) d\tau \right) -$$

$$- \frac{H(t - z_0 + z_0 \beta)}{\alpha^2} \times \quad (4)$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t - z_0 + z_0 \beta} D_k(\tau) F_2^k(t + z_0 \beta, \tau) d\tau J_0(\lambda_k r).$$

В формуле (4) произведена замена переменной $t_1 = t + z_0 \beta$, причем индекс «1» в дальнейшем опущен.

Чтобы воспользоваться свойством ортогональности рядов [2], помножим правую и левую части выражения (4) на $r J_0(\lambda_k r)$, а затем проинтегрируем на интервале от 0 до 1. В результате будем иметь

$$\int_0^1 w(r, z_0, t + z_0 \beta) r J_0(\lambda_k r) dr = \frac{1}{2\alpha} J_1^2(\lambda_k) \times$$

$$\times \left(-C_k(t) + \int_0^t C_k(\tau) F_1^k(t + z_0 \beta, \tau) d\tau \right) -$$

$$- \frac{H(t - z_0 + z_0 \beta) J_1^2(\lambda_k)}{2\alpha^2} \times$$

$$\times \int_0^{t - z_0 + z_0 \beta} D_k(\tau) F_2^k(t + z_0 \beta, \tau) d\tau. \quad (5)$$

Для нахождения $C_k(t)$ аппроксимируем интеграл, содержащий эти функции, по методу прямоугольников

$$\int_0^t C_k(\tau) F_1^k(t + z_0 \beta, \tau) d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^m C_k(t_i) \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} F_1^k(t + z_0 \beta, \tau) d\tau. \quad (6)$$

После подстановки (6) в уравнение (5) выразим из него $C_k(t)$ и в результате получим

$$C_k(t_m) = \left(1 - \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} F_1^k(t_m + z_0 \beta, \tau) d\tau \right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{m-1} C_k(t_i) \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} F_1^k(t_m + z_0 \beta, \tau) d\tau + \right. \quad (7)$$

$$- \frac{2\alpha}{J_1^2(\lambda_k)} \int_0^1 w(r, z_0, t + z_0 \beta) r J_0(\lambda_k r) dr -$$

$$\left. - \frac{H(t - z_0 + z_0 \beta)}{\alpha} \int_0^{t - z_0 + z_0 \beta} D_k(\tau) F_2^k(t + z_0 \beta, \tau) d\tau \right).$$

Отметим, что если исходные данные для обратной задачи (законы изменения перемещений) представлены в виде дискретных значений, а не явной (аналитической) функциональной зависимостью, то интеграл $\int_0^1 w(r, z_0, t + z_0 \beta) r J_0(\lambda_k r) dr$ можно записать в следующем виде

$$\int_0^1 w(r, z_0, t + z_0 \beta) r J_0(\lambda_k r) dr =$$

$$= \sum_{j=1}^{round(\frac{1}{\Delta r})} W^{z_0}(r_j, t + z_0 \beta) \int_{(j-1)\Delta r}^{j\Delta r} r J_0(\lambda_k r) dr,$$

где Δr – малый участок, делящий интервал $0 < r < 1$ на подынтервалы.

Число этих подынтервалов определяется в процессе численного эксперимента.

Выполним аналогичные операции и для второго уравнения системы (1), из которого определим функцию $D_k(t)$. Для этого примем обозначения

$$\frac{-J_0 \left(\frac{\lambda_k}{\beta} \sqrt{(t-\tau)^2 - z_0^2 \beta^2} \right)}{\alpha \beta \lambda_k} = F_3^k(t, \tau),$$

$$\frac{\lambda_k z J_1 \left(\lambda_k \sqrt{(t-\tau)^2 - z_0^2} \right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - z_0^2}} = F_4^k(t, \tau). \quad (8)$$

После этого перепишем выражение для касательных перемещений

$$\begin{aligned}
 u(r, z_0, t + z_0) &= -H(t - z_0\beta + z_0) \times \\
 &\times \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t-z_0\beta+z_0} C_k(\tau) F_3^k(t + z_0, \tau) d\tau J_1(\lambda_k r) + \\
 &+ \frac{H(t - z_0)}{\alpha^2} \times \\
 &\times \sum_{k=1}^{\infty} (-J_1(\lambda_k r)) \lambda_k \left(D_k(t) + \int_0^t D_k(\tau) F_4^k(t + z_0, \tau) d\tau \right).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Помножим правую и левую части выражения (9) на $rJ_1(\lambda_n r)$ и проинтегрируем по r от 0 до 1. Отметим, что свойство ортогональности рядов Дини [2] записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 r J_1(\lambda_k r) J_1(\lambda_n r) dr &= \\
 &= \begin{cases} 0, k \neq n \\ \frac{(\lambda_k^2 - 1) J_1^2(\lambda_k) + \lambda_k^2 J_1'^2(\lambda_k)}{2\lambda_k^2} = I_k, k = n. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Как и в случае нахождения значений $C_k(t)$, после аппроксимации интеграла, содержащего $D_k(t)$, и последующего выражения $D_k(t_m)$ получим

$$\begin{aligned}
 D_k(t_m) &= \left(1 + \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} F_k^4(t_m + z_0, \tau) d\tau \right)^{-1} \times \\
 &\times \left(-\sum_{j=1}^{m-1} D_k(t_j) \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} F_k^4(t + z_0, \tau) d\tau + \right. \\
 &+ \frac{\alpha^2}{I_k \lambda_k} \sum_{j=1}^{\text{round}(\frac{1}{\Delta r})} U^{z_0}(r_j, t + z_0\beta) \int_{(j-1)\Delta r}^{j\Delta r} r J_0(\lambda_k r) dr - \\
 &\left. - \frac{\alpha^2}{\lambda_k} H(t - z_0\beta + z_0) \int_0^{t-z_0\beta+z_0} C_k(\tau) F_k^3(t + z_0, \tau) d\tau \right).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Теперь целесообразно записать уравнения (7) и (11) в виде системы двух уравнений (12).

Анализируя рекуррентные формулы (12) по индексу m , можно заметить, что весь интервал вычислений по времени необходимо разделить на два участка. На первом временном участке при $0 < t_m < t_m - z_0 + z_0\beta$, используя только первое выражение, можно рассчитать

значения $C_k(t_m)$, не имея значений $D_k(t_m)$ на этом интервале. При проведении расчетов по первой формуле на интервале от $t_m - z_0 + z_0\beta$ до T уже необходимо знать значения $D_k(t_m)$ при временах, меньших на величину $-z_0 + z_0\beta$, которые можно получить из второго уравнения, зная значения $C_k(t_m)$, полученные на первом этапе.

$$\begin{cases}
 C_k(t_m) = \frac{1}{m\Delta t} \times \\
 \frac{1}{1 - \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} F_1^k(t_m + z_0\beta, \tau) d\tau} \times \\
 \left(\sum_{i=1}^{m-1} C_k(t_i) \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} F_1^k(t_m + z_0\beta, \tau) d\tau + \right. \\
 \left. + \frac{2\alpha}{J_1^2(\lambda_k)} \left(-\int_0^1 w(r, z_0, t + z_0\beta) r J_0(\lambda_k r) dr - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{H(t - z_0 + z_0\beta) J_1^2(\lambda_k)}{2\alpha^2} \times \right. \right) \\
 \left. \times \int_0^{t-z_0+z_0\beta} D_k(\tau) F_2^k(t + z_0\beta, \tau) d\tau \right), \\
 \\
 D_k(t_m) = \frac{1}{m\Delta t} \times \\
 \frac{1}{1 + \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} F_k^4(t_m + z_0, \tau) d\tau} \times \\
 \left(-\sum_{j=1}^{m-1} D_k(t_j) \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} F_k^4(t + z_0, \tau) d\tau + \right. \\
 \left. + \frac{\alpha^2}{I_k \lambda_k} \left(\sum_{j=1}^{\text{round}(\frac{1}{\Delta r})} U^{z_0}(r_j, t + z_0\beta) \int_{(j-1)\Delta r}^{j\Delta r} r J_0(\lambda_k r) dr - \right. \right. \\
 \left. \left. - H(t - z_0\beta + z_0) \int_0^{t-z_0\beta+z_0} C_k(\tau) F_k^3(t + z_0, \tau) d\tau J C_k' \right) \right).
 \end{cases} \tag{12}$$

Вычисленные значения $C_k(t_m)$ и $D_k(t_m)$ дают возможность рассчитать закон изменения перемещений во времени в полупространстве при любых значениях z в полупространстве, используя выражения (1).

Численный пример расчета

Рассмотрим решение обратной задачи при условии, что известен закон изменения нормальных и касательных перемещений во времени на некоторой плоскости полупространства $z = z_0$, причем они задаются в виде

функций двух переменных $W(r,t)$ и $U(r,t)$. Пусть графическое изображение этих двух функций, принимаемых далее для конкретных расчетов, представлено набором кривых (рис. 1).

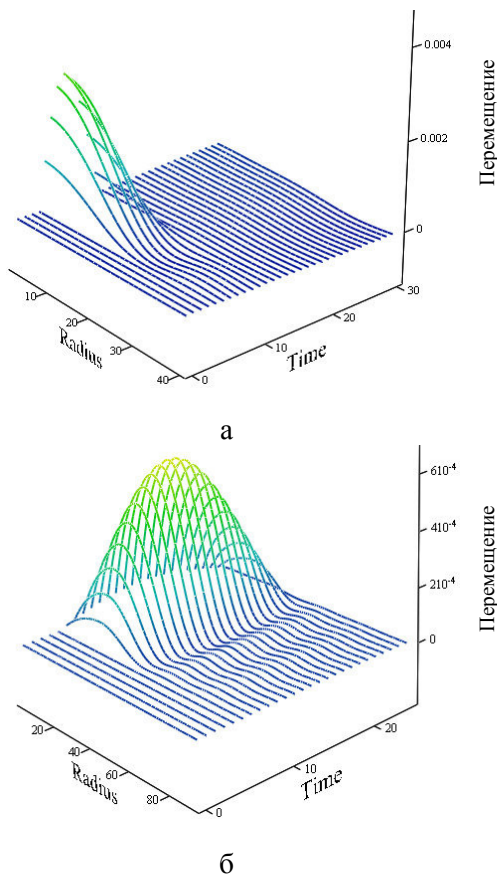


Рис. 1. Исходные данные для задачи идентификации (значения времени и координаты приводятся в вычислительных шагах): а – зависимость нормальных перемещений от времени и координаты; б – зависимость касательных перемещений от времени и координаты

На рис. 1, а показано пространственно-временное распределение нормальных перемещений в точках полупространства при $z = z_0$. Можно считать, что каждая кривая на этом рисунке иллюстрирует эпюру перемещений вдоль радиуса полупространства в фиксированный момент времени. На рис. 1, б приведен набор кривых, описывающих изменение касательных перемещений. Исходные данные для задачи идентификации «регистрируются» на глубине $z = 0,008$. Материал полупространства – сталь с модулем упругости $2,1 \cdot 10^{11}$ Па, плотностью 7850 кг/м^3 и коэффициентом Пуассона, равным $0,3$. Будем восстанавливать распределение перемещений на поверхности полупространства.

Найденные значения $C_k(t_m)$ и $D_k(t_m)$ дают возможность рассчитать по формулам (1) закон изменения перемещений на любой глубине полупространства, в том числе и на поверхности полупространства при $z = 0$. Расчет перемещений производился с учетом пяти членов в соответствующих рядах Фурье-Бесселя.

Рассчитанные на основе разработанной методики наборы кривых при $z = 0$ приведены на рис. 2.

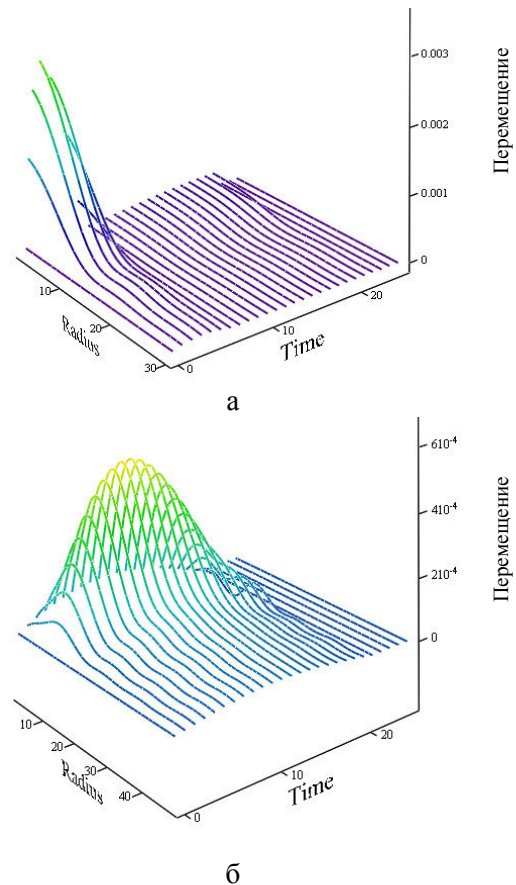


Рис. 2. Идентифицированные граничные перемещения: а – распределение нормальных перемещений; б – распределение касательных перемещений

На рис. 2, б показано пространственно-временное распределение касательных перемещений, а на рис. 2, а – нормальных перемещений на поверхности полупространства.

Анализ согласования результатов

Был проведен анализ согласования результатов решения прямой и обратной задач. Согласование оказалось удовлетворительным. Приведем для иллюстрации указанного со-

гласования сравнения некоторых эпюр при фиксированных моментах времени ($t = 0,004$). На рис. 3 сплошными линиями показаны перемещения ($z = 0$), принимаемые при решении прямой задачи для получения исходных данных ($z = 0,008$) для задачи идентификации.

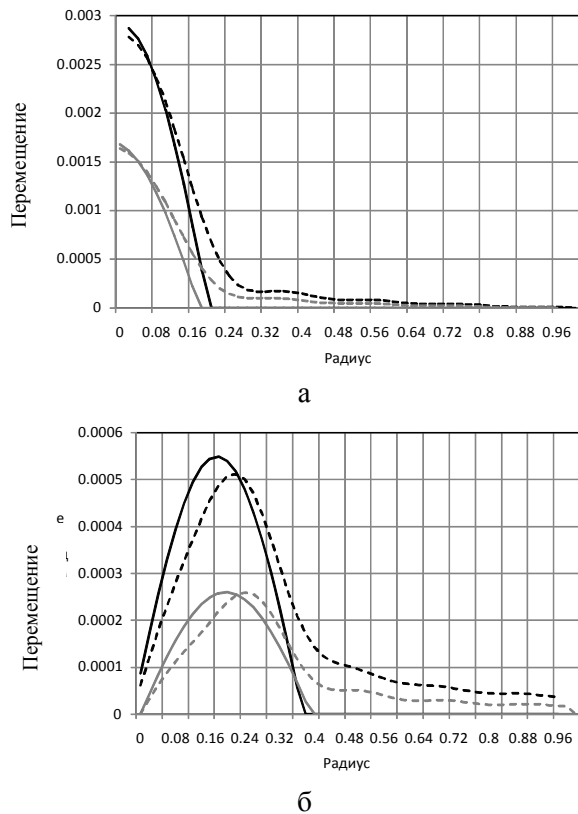


Рис. 3. Согласование результатов решения прямой и обратной задач: а – нормальные перемещения; б – касательные перемещения

Пунктирными линиями изображены кривые на поверхности полупространства, полученные в результате выполнения процедуры идентификации, если в качестве исходных данных при решении обратной задачи принять соответствующие значения перемещений, которые отвечают их пространственному распределению.

Выводы

Как уже отмечалось, согласование результатов удовлетворительное; хорошо совпадают кривые в областях их максимумов, форма кривых также хорошо согласуется. Каждая пара из четырех кривых на каждом рисунке рассчитана для разных значений времени.

Литература

1. Богдан Д.І. Відновлення імпульсних навантажень, що діють на пружні пластини та напівпростір : автореф. дис. на здобуття наук. ступ. канд. техн. наук: 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла» / Д.І. Богдан. – Х., 2008. – 20 с.
2. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. – М.: Изд. иностр. лит., 1949. – 800 с.
3. Сеймов В.М. Динамические контактные задачи / В.М. Сеймов. – К.: Наукова думка, 1976. – 224 с.

Рецензент: Ф.И. Абрамчук, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 3 декабря 2012 г.