

СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

УДК 624.21

**О ГИБКИХ ПЛАСТИНАХ, ДВЕ СМЕЖНЫЕ СТОРОНЫ КОТОРЫХ
ЗАЩЕМЛЕНА, ДЛИННАЯ СТОРОНА – ШАРНИРНО ОПЕРТА,
А КОРОТКАЯ – СВОБОДНА**

**В.П. Кожушко, проф., д.т.н.,
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет**

Аннотация. Приведен расчет пластин по методу, разработанному автором, что позволяет решать задачу о напряженно-деформированном состоянии пластины при воздействии на нее любых поперечных внешних нагрузок.

Ключевые слова: поперечная полоса, продольная полоса, система уравнений, смешанный метод строительной механики, фиктивное защемление.

**ПРО ГНУЧКІ ПЛАСТИНИ, ДВІ СУМІЖНІ СТОРОНИ ЯКИХ ЗАТИСНЕНІ,
ДОВГА СТОРОНА – ШАРНІРНО ОПЕРТА, А КОРОТКА – ВІЛЬНА**

**В.П. Кожушко, проф., д.т.н.,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет**

Анотація. Наведено розрахунок пластин за методом, розробленим автором, що дозволяє розв'язувати задачу про напружено-деформований стан пластини при дії на неї будь-яких поперечних зовнішніх навантажень.

Ключові слова: поперечна смуга, поздовжня смуга, система рівнянь, змішаний метод будівельної механіки, фіктивне затиснення.

**ON FLEXIBLE PLATES TWO ADJACENT SIDES OF WHICH ARE RESTRAINED,
THE LONG ONE IS HINGED, AND THE SHORT SIDE IS FREELY SUPPORTED**

**V. Kozhushko, Prof., Doctor of Engineering Science,
Kharkiv National Automobile and Highway University**

Abstract. The design of plates by the method developed by the author that makes it possible to solve the problem of stress-strain state of the plate under the effect of any transverse external loads is presented.

Key words: horizontal line, longitudinal stripe, the system of equations, mixed method of structural mechanics, fictitious jamming.

Введение

Тонкие пластины с рассматриваемыми условиями закрепления их граней встречаются при проектировании и строительстве различных сооружений, поэтому расчет этих конструктивных элементов при воздействии на них различных поперечных внешних нагру-

зок представляет определенный интерес в теоретическом и практическом аспектах.

Анализ публикаций

На основе изучения целого ряда литературных источников по расчету тонких (жестких) пластин [1–21] можно сделать вывод о том,

что пластины с заданными в настоящей статье условиями опирания их сторон вообще не рассматривались, поэтому хотелось бы нашими исследованиями заполнить этот пробел. В целом задача о работе прямоугольных пластин под воздействием поперечных нагрузок является сложной, даже при иных (более простых) условиях закрепления их граней. В замкнутом виде решения получены при воздействии на систему только простейших поперечных нагрузок (распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и т.д.). При приложении к пластине иных внешних нагрузок задача решается численными методами, а для некоторых условий закрепления сторон пластин решений вообще нет.

Таким образом, исследования напряженно-деформированного состояния пластин с предложенными условиями закрепленных сторон дополняют сведения об их работе. Эти исследования, на наш взгляд, дают возможность оценить работу пластин при воздействии на них любых поперечных нагрузок единым методом.

Цель и постановка задачи

Рассматривается приближенный метод расчета исследуемых пластин, нагруженных любой внешней поперечной нагрузкой.

Реализация задачи

Разрежем пластинку на систему продольных и поперечных полос (рис. 1). Продольными полосами будем называть полосы, выделенные параллельно длинной l стороне пластины, а короткими – полосы, расположенные вдоль стороны b . Ширина продольных полос $d = b/n$, где b – ширина прямоугольной пластины; n – количество продольных пластин, которое должно быть не менее десяти. Поперечную полосу шириной 1 м следует вырезать в том сечении по длине пролета l , в котором поставлена задача определения внутренних усилий и перемещений пластины. Если пластина подкреплена ребрами, то продольная полоса должна включать в себя продольное ребро, которое будет учтено при определении жесткости продольной полосы. При определении жесткости поперечной полосы (если пластина имеет поперечные ребра жесткости) рекомендуется вводить в расчет

приведенную к одному метру погонную жесткость.

Поперечная полоса рассматривается как неразрезной элемент, опирающийся на упруго-оседающие опоры (рис. 1). Роль упруго-оседающих опор играют продольные полосы.

Для реализации задачи предлагается применить смешанный метод строительной механики, для чего вводится фиктивное защемление левого края поперечной полосы в точке A (рис. 1).

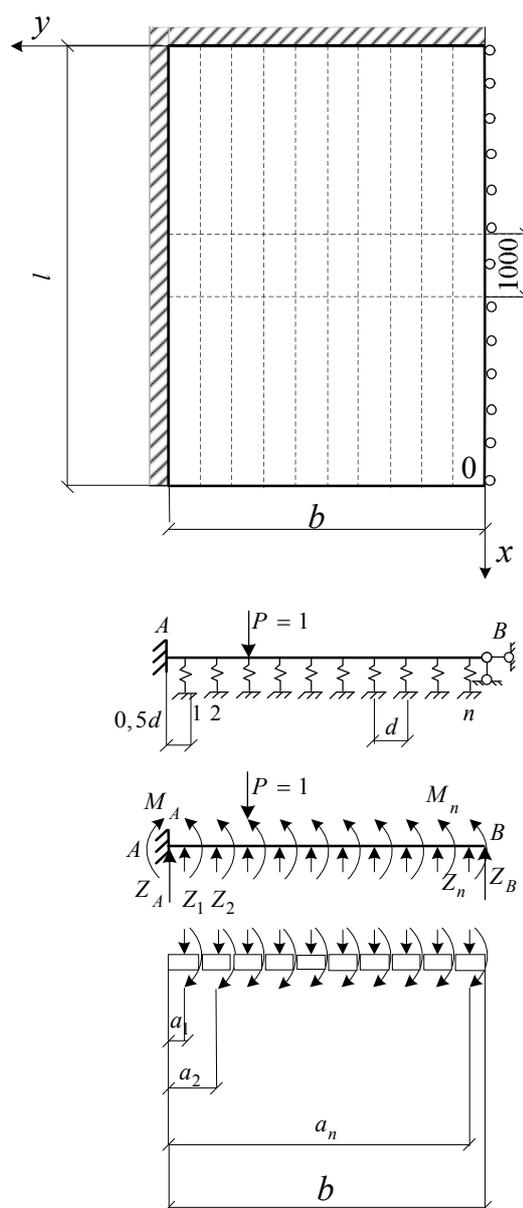


Рис. 1. Расчетная и основная схемы поперечной полосы

Предлагается усилия, передаваемые поперечной полосой на продольные, определять

от единичной поперечной силы $P=1$, что позволит построить линии влияния вертикальных усилий Z_i и крутящих моментов M_i .

При учете в работе только вертикальных сил Z_i количество неизвестных составит $(n + 3)$. Для их определения следует решить систему уравнений (1).

$$\begin{cases} \delta_{11}^{(z)} \cdot Z_1 + \dots + \delta_{1n}^{(z)} \cdot Z_n + \delta_{1B}^{(z)} \cdot Z_B + \Delta_{1P} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1}^{(z)} \cdot Z_1 + \dots + \delta_{nn}^{(z)} \cdot Z_n + \delta_{nB}^{(z)} \cdot Z_B + \Delta_{nP} = 0; \\ \delta_{B1}^{(z)} \cdot Z_1 + \dots + \delta_{Bn}^{(z)} \cdot Z_n + \delta_{BB}^{(z)} \cdot Z_B + \Delta_{BP} = 0; \\ Z_1 + \dots + Z_n + Z_A + Z_B - 1 = 0; \\ a_1 \cdot Z_1 + \dots + a_n \cdot Z_n + b \cdot Z_B - M_A - a_i = 0. \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1) два последних уравнения представляют собой уравнения равновесия.

Методика определения увеличенных в $1/y_i$ раз единичных перемещений $\delta_{ik}^{(z)}$ и свободных членов Δ_{iP} от силы $P=1$ изложена в работах автора [22, 23]. Если поперечная полоса имеет переменную жесткость, то она заменяется ступенчатой полосой, изгибная жесткость которой в пределах ширины d продольной полосы применяется одинаковой. Методика определения единичных перемещений $\delta_{ik}^{(z)}$ и свободных членов Δ_{iP} ступенчатых балок изложена в работах [23, 24].

Величина y_i – это прогиб продольной полосы пролетом l от единичной распределенной нагрузки $q=1$ в том сечении по ее длине, в котором вырезана поперечная полоса (рис. 2). При данных условиях закрепления кромок пластины продольный элемент в статическом отношении представляет собой консольную полосу.

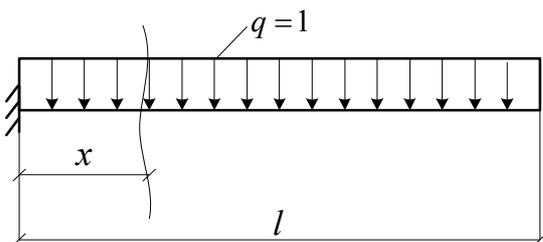


Рис. 2. Расчетная схема продольной полосы

Прогиб y_i в сечении x равен

$$y_i = \frac{l^4(1 - \nu_{np}^2)}{24E_{np}J_{np}} \left(6 \frac{x^2}{l^2} - 4 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right). \quad (2)$$

Увеличенные в $1/y_i$ раз единичные перемещения $\delta_{ik}^{(z)}$ и свободные члены Δ_{iP} определяем по следующим формулам

$$\delta_{ik}^{(z)} = \alpha w_{ik}^{(z)}; \quad (3)$$

$$\Delta_{iP} = \alpha w_{iP}^{(z)}, \quad (4)$$

где $w_{ik}^{(z)}$ – вертикальное перемещение поперечной полосы в точке i от единичной силы $Z_k = 1$, приложенной в точке k ; $w_{iP}^{(z)}$ – вертикальное перемещение поперечной полосы в i -й точке от силы $P=1$; α – показатель, зависящий от соотношения изгибных жесткостей продольной $E_{np}J_{np}$ и поперечной $E_{попер}J_{попер}$ полос и их размеров

$$\alpha = \frac{d^3(1 - \nu_{попер}^2)}{6E_{попер}J_{попер} \cdot y_i}. \quad (5)$$

Методика определения перемещений $w_{ik}^{(z)}$ и $w_{iP}^{(z)}$ приведена в работах [22–24].

Покажем, как определяется показатель α , если поперечная полоса вырезается в различных сечениях по длине продольной полосы. Если короткая полоса вырезана в начале пластины ($x = l$), то прогиб продольной полосы

$$y_i = \frac{l^4(1 - \nu_{np}^2)}{8E_{np}J_{np}}, \quad (6)$$

а коэффициент

$$\alpha = \frac{4d^3}{3l^4} \cdot \frac{E_{np}J_{np}}{E_{попер}J_{попер}}. \quad (7)$$

Если поперечная полоса вырезана в сечении $x = 0,5l$, то

$$y_i = \frac{17}{384} \cdot \frac{l^4(1 - \nu_{np}^2)}{E_{np}J_{np}}, \quad (8)$$

а коэффициент

$$\alpha = \frac{64d^3}{17l^4} \cdot \frac{E_{\text{пр}} J_{\text{пр}}}{E_{\text{попер}} J_{\text{попер}}} \quad (9)$$

Таким образом, показатель α в последнем случае будет примерно в 2,8235 раза больше α для полосы, вырезанной в начале пластинки.

В формулах [2, 5–9] $\nu_{\text{пр}}$ и $\nu_{\text{попер}}$ – коэффициенты Пуассона материала продольной и поперечной полос соответственно.

Главные единичные перемещения $\delta_{ii}^{(z)}$ включают в себя прогиб i -й главной балки от распределенной нагрузки $q=1$ в том сечении, где вырезана поперечная полоса, и прогиб поперечной полосы в i -й точке от единичной силы $Z_i = 1$, приложенной в этой же точке

$$\delta_{ii}^{(z)} = \beta + \alpha w_{ii}, \quad (10)$$

где β – увеличенный в $1/y_i$ раз прогиб продольной полосы.

Если бы длинные стороны были свободны, то $\beta=1$. Но пластина слева закреплена, а правая сторона ее – шарнирно оперта. Следовательно, следует учесть влияние на прогиб продольной полосы этих закреплений. Тогда

$$\beta = \frac{K_i}{K_1}, \quad (11)$$

где K_i – выражение, которым обозначена часть формулы (12) по определению прогиба поперечной полосы в точке i от единичной сосредоточенной силы $P=1$, приложенной в этой же точке (рис. 3).

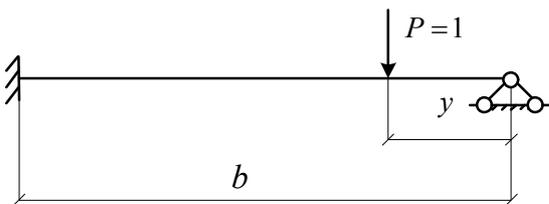


Рис. 3. Расчетная схема поперечной полосы при определении ее прогибов от силы $P=1$

Прогиб δ поперечной полосы равен

$$\begin{aligned} & \frac{E_{\text{попереч}} \cdot J_{\text{попереч}}}{1 - \nu_{\text{попереч}}^2} \cdot \delta = \\ & = \frac{1}{12} b^3 (3\xi^2 - 8\xi^3 + 6\xi^4 - \xi^6), \quad (12) \end{aligned}$$

где $\xi = y/b$ – относительное расстояние до точки приложения силы P (расстояние до i -й продольной полосы).

Примем, что

$$K_i = 3\xi^2 - 8\xi^3 + 6\xi^4 - \xi^6. \quad (13)$$

Обозначим через K_1 выражение (13) при $\xi = 0,5$.

Тогда для продольной полосы, расположенной на расстоянии $\xi = 0,5b$, величина $\beta=1$, а для остальных продольных полос $\beta \neq 1$.

Предложенный метод расчета позволяет учесть влияние на распределительную способность пластины иных внутренних усилий. Покажем, как учесть влияние крутящих моментов M_i на напряженно-деформированное состояние (НДС) пластины. Для этого необходимо решить систему (14) из $(2n+3)$ уравнений.

$$\begin{cases} \delta_{11}^{(z)} Z_1 + \dots + \delta_{1n}^{(z)} Z_n + \delta_{1b}^{(z)} Z_B + \delta_{11}^{(M)} M_1 + \dots + \delta_{1n}^{(M)} M_n + \Delta_{1P} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1}^{(z)} Z_1 + \dots + \delta_{nm}^{(z)} Z_n + \delta_{nb}^{(z)} Z_B + \delta_{n1}^{(M)} M_1 + \dots + \delta_{nm}^{(M)} M_n + \Delta_{nP} = 0; \\ \delta_{b1}^{(z)} Z_1 + \dots + \delta_{bn}^{(z)} Z_n + \delta_{bb}^{(z)} Z_B + \delta_{b1}^{(M)} M_1 + \dots + \delta_{bn}^{(M)} M_n + \Delta_{bP} = 0; \\ \theta_{11}^{(z)} Z_1 + \dots + \theta_{1n}^{(z)} Z_n + \theta_{1b}^{(z)} Z_B + \theta_{11}^{(M)} M_1 + \dots + \theta_{1n}^{(M)} M_n + \theta_{1P} = 0; \\ \dots \\ \theta_{n1}^{(z)} Z_1 + \dots + \theta_{nm}^{(z)} Z_n + \theta_{nb}^{(z)} Z_B + \theta_{n1}^{(M)} M_1 + \dots + \theta_{nm}^{(M)} M_n + \theta_{nP} = 0; \\ Z_1 + \dots + Z_n + Z_A + Z_B - 1 = 0; \\ a_1 Z_1 + \dots + a_n Z_n + b Z_B + M_1 + \dots + M_n - M_A - a_i = 0. \end{cases} \quad (14)$$

В системе (14): $\delta_{ik}^{(M)}$ – вертикальное перемещение поперечной полосы в точке i от единичного момента $M_k = 1$, приложенных в точке k ; $\theta_{ik}^{(z)}$ – единичный угол поворота поперечной полосы в точке i от единичного момента $Z_k = 1$, приложенных в точке k ; $\theta_{ik}^{(M)}$ – единичный угол поворота поперечной полосы в точке i от единичного момента $M_k = 1$, приложенных в точке k ; θ_{iP} – угол

поворота поперечной полосы в точке i от внешней силы $P = 1$.

Следует учесть, что главный единичный угол поворота $\theta_{ii}^{(M)}$ включает в себя поворот продольной полосы от единичных распределенных вдоль нее крутящих моментов и угол поворота поперечной полосы.

Методика определения единичных перемещений δ_{ik} и единичных углов поворота θ_{ik} изложена в работах [23, 25, 26].

Выводы

Предложенный метод расчета позволяет определить напряженное состояние пластин с рассмотренными граничными условиями при действии на них любых поперечно приложенных нагрузок.

Литература

1. Вайнберг Д.В. Пластины, диски, балки-стенки (прочность, устойчивость и колебания) / Д.В. Вайнберг, Е.Д. Вайнберг. – К.: Гос. изд-во л-ры по стр-ву и архитектуре УССР, 1959. – 1049 с.
2. Вайнберг Д.В. Расчет пластины / Д.В. Вайнберг, Е.Д. Вайнберг. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Будівельник, 1970. – 435 с.
3. Колманюк А.С. Расчет пластинок / А.С. Колманюк. – М.: Госстройиздат, 1959. – 212 с.
4. Галеркин Б.Г. Собрание сочинений / Б.Г. Галеркин. – М.: Изд-во АН СССР, 1953. – Т. 2. – 440 с.
5. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений (расчетно-теоретический) / В.Л. Агамиров, В.Н. Архангельский, М.С. Бернштейн и др.; под. ред. А.А. Уманского – М.: Госстройиздат, 1960. – 1040 с.
6. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты / З. Кончковский; пер. с польск. – М.: Стройиздат, 1984. – 480 с.
7. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер; пер. с англ. – 2-е изд., стереотипное. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
8. Толоконников Л.А. Механика деформируемого твердого тела: учебное пособие для вузов / Л.А. Толоконников. – М.: Высшая школа, 1979. – 318 с.
9. Шадурский В.П. Таблицы для расчета упругих прямоугольных плит: справочное пособие / В.П. Шадурский. – М.: Стройиздат, 1976. – 152 с.
10. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами: учебное пособие / А.М. Масленников. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 224 с.
11. Строительная механика корабля и теория упругости: учебник для вузов: в 2 т. Т.2: Изгиб и устойчивость стержней, стержневых систем, пластин и оболочек / В.А. Постнов, Д.М. Ростовцев, В.П. Суслов, Ю.П. Кочанов. – Л.: Судостроение, 1987. – 416 с.
12. Суслов В.П. Строительная механика корабля и основы теории упругости / В.П. Суслов, Ю.П. Кочанов, В.Н. Спихтаренко. – Л.: Судостроение, 1972. – 720 с.
13. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек. Ч.1 / А.В. Александров, Б.Я. Лашенков, Н.Н. Шапошников, В.А. Смирнов. – М.: Стройиздат, 1976. – 248 с.
14. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела: учебное пособие / Ю.Н. Работнов. – М.: Гл. ред. физ.-мат. л-ры, 1979. – 744 с.
15. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис; пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 590 с.
16. Музыченко Ю.Н. Расчет пластинчато-стержневых систем / Ю.Н. Музыченко. – Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1974. – 202 с.
17. Власова Е.В. Метод расчета прямоугольных пластин при изгибе сосредоточенными силами: монография / Е.В. Власова. – М.: Рос. гос. откр. техн. ун-т путей сообщения, 2003. – 116 с.
18. Запорожец Е.В. Некоторые особенности расчета балочных пластин и балок при больших прогибах / Е.В. Запорожец, В.Б. Запорожец, Л.В. Фролова // Вісник Придніпр. держ. акад. буд-ва та архіт. – 2002. – Вип. 6. – С. 22–27.
19. Игнатъев Ф.В. Применение МКЭ в смешанной форме при расчете тонких пластин / Ф.В. Игнатъев // Вестник Волгоград. гос. архит.-строит. акад. Серия «Естественные науки». – 2002. – №2. – С. 251–255.
20. Габрусенко В.В. Работа железобетонных плит, защемленных по трем сторонам,

- при действии линейных загрузок с учетом перераспределения моментов / В.В. Габрусенко // Изв. вузов. Стр-во. – 2003. – №1. – С. 103–107.
21. Джабидзе Г.О. Расчет на изгиб тонкой плиты прямоугольной формы, когда три её грани закреплены жестко, а четвертая – свободна / Г.О. Джабидзе // Проблемы прикл. мех. – 2003. – №4. – С. 87–93.
 22. Кожушко В.П. Расчет пролетных стропильных балочных мостов разрезной системы / В.П. Кожушко // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1980. – Вып. 36. – С. 118–122.
 23. Кожушко В.П. Моделивання прольотних будов мостів: монографія / В.П. Кожушко. – Х.: ХНАДУ, 2010. – 196 с.
 24. Кожушко В.П. Определение перемещений ступенчатых балок на упругооседающих опорах / В.П. Кожушко // Науковий вісник будівництва. – 2002. – Вип. 17 – С. 146-150.
 25. Кожушко В.П. До розрахунку балочно-консольних прогінних будов на тимчасове навантаження / В.П. Кожушко // Автом. дороги і дор. буд-во. – 1985. – Вип. 37. – С. 56–60.
 26. Кожушко В.П. Определение перемещений ступенчатых балок от единичных изгибающих моментов / В.П. Кожушко // Науковий вісник будівництва. – 2002. – Вип. 18 – С. 73–76.
- Рецензент: А.Г. Кислов, профессор, к.т.н., ХНАДУ.
- Статья поступила в редакцию 23 января 2015 г.
-