УДК 004

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПІД КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ ТЕПЛОВОГО ПОШИРЕННЯ В НЕОДНОРІДНОМУ ДВОВИМІРНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Кожин А.Ю.
Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків

У даній роботі представлено результати чисельного моделювання процесу поширення тепла у двовимірній пластині з неоднорідними теплофізичними властивостями. Розглянуто задачу керування температурою в заданій точці шляхом регулювання потужності джерела тепла. Для реалізації системи керування зі зворотним зв'язком було застосовано пропорційно-інтегрально-диференціальний (ПІД) регулятор. Проаналізовано динаміку системи, продемонстровано ефективність ПІД-регулятора для досягнення та підтримки заданої температури (уставки) в умовах значної просторової неоднорідності коефіцієнта теплопровідності. Робота демонструє застосування класичних методів теорії керування до складних розподілених параболічних систем, що є актуальною задачею в інженерії та матеріалознавстві.

Задачі оптимального керування для систем, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, зокрема параболічного типу, є фундаментальними в багатьох галузях науки та техніки [1]. Керування температурними полями є ключовим для оптимізації виробничих процесів, забезпечення стабільності матеріалів та підвищення енергоефективності. У реальних умовах матеріали часто мають неоднорідну структуру, що суттєво ускладнює як моделювання, так і керування такими системами.

Процес поширення тепла в двовимірній області $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_u]$ описується нестаціонарним рівнянням теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

де u – температура у точці (x, y) у момент часу t;

k – коефіцієнт теплопровідності матеріалу;

x, y – координати на поверхні.

У даній моделі пластина має розміри 2×2. Коефіцієнт теплопровідності $k(x, y)$ є неоднорідним: у центрі пластини знаходиться кругла область радіусом 0.5 м з аномально низьким коефіцієнтом ($k = 0{,}0005$), тоді як для решти пластини він становить $k = 0.1$. Границі пластини вважаються ізольованими.

Задача керування полягає у підтримці температури $u(x_m, y_m, t)$ в точці вимірювання (x_m, y_m) на заданому рівні $T_{sp} = 30°C$. Параметром керування є потужність джерела тепла Q, яке розташоване в точці (x_s, y_s) і здійснюється за допомогою дискретної форми пропорційно-інтегрально-диференціального (ПІД) регулятора [2]. Керуючий сигнал формується відповідно до закону:

$$Q_t = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt},$$

де $e(t) = T_{sp} - u(x_m, y_m, t)$ – помилка регулювання;

K_p, K_i, K_d – коефіцієнти підсилення (пропорційна, інтегральна та диференціальна складові). Для симуляції було обрано наступні значення коефіцієнтів: $(K_p = 30, K_i = 15, K_d = 1)$.

Чисельне розв’язання рівняння теплопровідності було виконано за допомогою методу скінченних різниць [3]:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n} + \frac{k\Delta t}{\Delta x^2}\left(T_{i+1,j}^{n} + T_{i+1,j}^{n} + T_{i+1,j+1}^{n} - 4T_{i,j}^{n}\right)$$

Результати моделювання представлені на рисунках 1 та 2. Лівий графік на рисунку 1 демонструє, як тепло нерівномірно поширюється від джерела, розташованого у верхньому лівому куті

Центральна область з низькою теплопровідністю $(k = 0{,}0005)$ діє як тепловий ізолятор, змушуючи тепло "обтікати" цю холодну зону. Внаслідок цього точка вимірювання, хоч і нагрівається, але робить це з суттєвою затримкою.

.

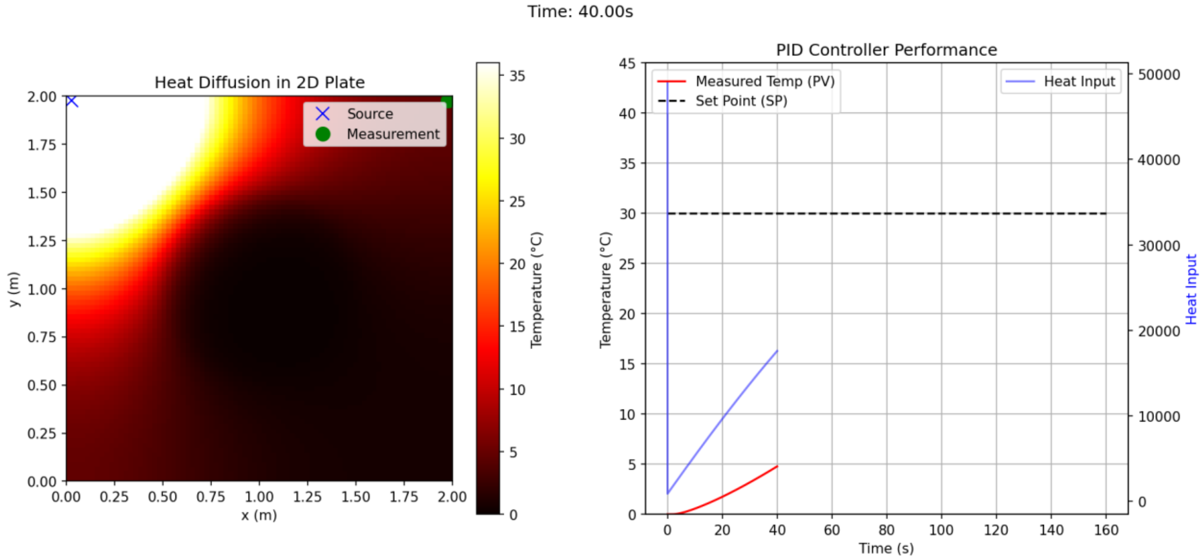

Рисунок 1. Розподіл тепла у момент часу $t = 40$ с

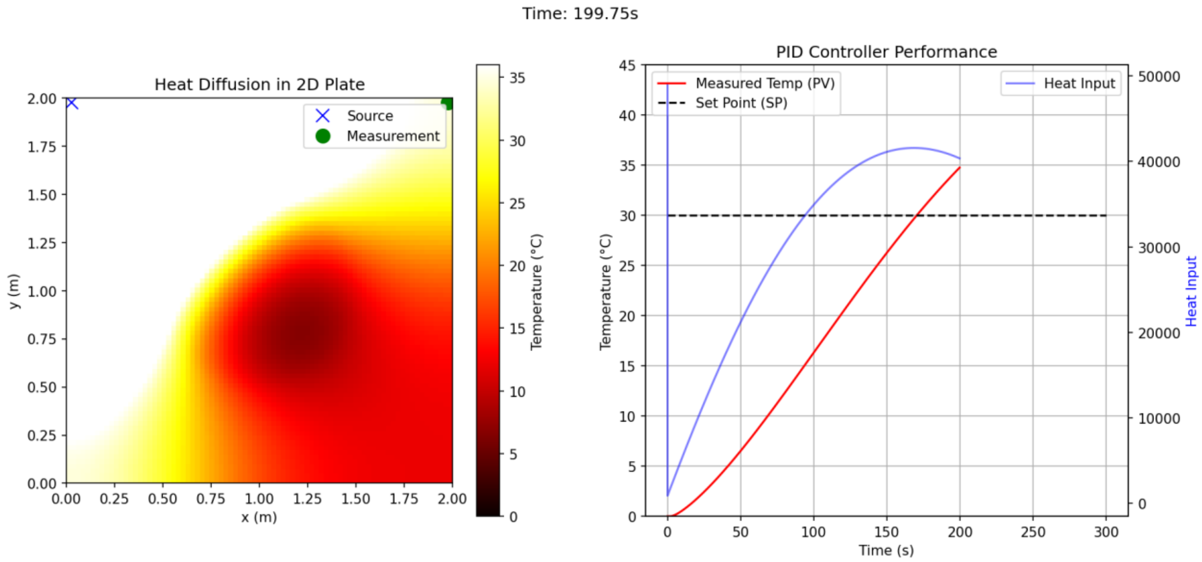

Рисунок 2. Стан системи на $t = 200$ с.

На 200 секунді симуляції можна побачити, що кількість тепла, що подає нагрівач, зменшується, оскільки температура в точці вимірювання стала вищою за необхідну. Спостережуваний перегрів є очікуваною характеристикою для ПІД-керованої системи з розподіленими параметрами, що пояснюється значною тепловою інерцією між джерелом та точкою вимірювання. Одночасно, алгоритмічний ефект "накопичення інтеграла", що виник під час тривалої фази нагріву, продовжував вимагати високої потужності, навіть коли пропорційна помилка наближалася до нуля. Корекція (зниження потужності) була ініційована лише після того, як вимірювана температура перевищила цільову, оскільки тільки від'ємна помилка могла почати зменшувати накопичене інтегральне значення.

Розроблена математична модель системи слугуватиме фундаментальною основою для подальших досліджень. Вона буде застосована для проведення аналізу ефективності різних типів керування та пошуку оптимальної стратегії. Це передбачає розв'язання задачі оптимального керування, що базується на мінімізації відповідного функціоналу вартості. Подальше вдосконалення моделі також включатиме інтеграцію компонентів, що описують втрату тепла, для забезпечення вищого рівня адекватності моделі реальним фізичним процесам.

Література:

1.Tagiev R. K. Optimal coefficient control in parabolic systems. *Differential Equations*. Вип. 45, № 10. С. 1526–1535. DOI: 10.1134/S0012266109100164.

2. Seborg D. E., Edgar T. F., Mellichamp D. A. та ін. Process dynamics and control. Fourth edition. Hoboken, N.J: Wiley, 2017. 502 с. ISBN 978-1-119-28591-5.

3. LeVeque R. J. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. 341 с. ISBN 978-0-89871-629-0.