ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

ПРАКТИКУМ
З ТЕОРІЇ СТАТИСТИКИ

За реакцією *А. В. Непрана* та *О. І. Дмитрієвої*

Харків – 2022

УДК 311.2

АВТОРСЬКИЙ КОЛЕКТИВ

Дмитрієва О. І. — гл. 8, Шевченко І. Ю. — гл. 9,
Гіржева О. М. — гл. 6, Непран А. В. — гл. 2, 3, 7,10,
Бірченко Н. О. — гл. 4, Чуйко Н. В. — гл. 1, 5.

Рецензенти:

Аванесова Н.Е., д-р екон. наук, професор, завідувач кафедри менеджменту та публічного адміністрування Харківського національного університету будівництва та архітектури;

Щербак В.Г., д-р екон. наук, професор, професор кафедри підприємництва та бізнесу Київського національного університету технологій та дизайну;

Корінь М.В., д-р екон. наук, доцент, професор кафедри економіки та управління виробничим і комерційним бізнесом Українського державного університету залізничного транспорту.

Рекомендовано до видання рішенням Вченої Ради
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету
(*Дозвіл № 42/22/3.1 від 24 травня 2022 р.*)

Практикум з теорії статистики / За ред. А. В. Непрана та О. І. Дмитрієвої. Харків: ПП Іванченка, 2022. 479 с.

ISBN

Практикум підготовлено у відповідності з програмою курсу «Статистика». Практикум містить задачі по статистичному спостереженню, зведенню і групуванню статистичної інформації, визначенню відносних і середніх величин, показників варіації. Широко представлені задачі по рядам динаміки, індексам, вибірковому спостереженню, дослідженню взаємозв'язку між суспільними явищами. Використані показники відображають практику діяльності підприємств провідних галузей економіки.

Для студентів економічних спеціальностей, аспірантів, викладачів вищих навчальних закладів.

УДК 311.2

ISBN

© Непран А.В., Дмитрієва О. І., 2022
© Харківський національний автомобільно-дорожній університет, 2022.

Глава 1. СТАТИСТИЧНЕ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Початком будь-якого статистичного дослідження, пізнання суспільного життя є збір відомостей (даних, фактів) про досліджувані явища і процеси. Планомірний, науково організований збір даних про явища та процеси суспільного життя шляхом реєстрації за заздалегідь розробленою програмою спостереження суттєвих ознак називається *статистичним спостереженням*. Це перший етап статистичного дослідження, що відповідає принципам наукової організації, від якої істотно залежить успіх усієї роботи. У процесі статистичного спостереження формується первинний статистичний матеріал — статистичні дані (висхідна первинна інформація) про об'єкти, що спостерігаються.

Статистичне спостереження має програму і організаційний план і проводиться з урахуванням ряду вимог, найважливішими серед яких є *достовірність* та *повнота* зібраної інформації. Тільки перевірені та достовірні дані можуть в подальшому піддаватися статистичній обробці.

Організації та проведення статистичного спостереження має передувати ретельна розробка досліджуваних питань, що дозволить правильно визначити об'єкт спостереження, відокремити одне досліджуване явище від інших, встановити взаємозв'язок між окремими факторами.

1.1. Програма статистичного спостереження

Методичні вказівки та вирішення типової задачі

Проведення статистичного спостереження починається із складання плану, що поділяється на програмно-методичну та організаційні частини. В плані статистичного спостереження основне питання — програма спостереження. Програмно-методологічна частина плану включає: визначення завдань спостереження, об'єкта, одиниці та програми спостереження. Вирішуються також питання часу спостереження: момент реєстрації значень ознак (критичний момент спостереження), період вивчення явища, терміни самого спостереження. У процесі спостереження у значеннях ознаки можливі помилки реєстрації, виявити та виправити які можна на всіх етапах, контролюючи повноту та достовірність даних.

Задача 1. Поставлена задача дослідити виробіток токарів механічного цеху машинобудівного заводу за квітень звітного року. Необхідно *визначити* об'єкт, одиницю сукупності і скласти програму спостереження.

І так, *визначимо об'єкт статистичного спостереження*. Здавалося б, питання є простим, оскільки об'єктом спостереження є токарі заводу. Проте це не зовсім так. Необхідно уточнення. По-перше, обстеженню підлягає не всі токарі механічного цеху, а лише ті, які працювали на протязі досліджуваного періоду. Із цього контингенту деяка частина токарів не змогла займатися виготовленням деталей через хворобу, у зв'язку з відрядженнями та за іншими причинами. По-друге, деякі із токарів могли бути відсутніми через прогули. Окремі із робітників можуть бути звільнені або переведені в інші цехи підприємства. Вони теж не підлягають статистичному обстеженню. Отже, об'єктом статистичного спостереження — сукупність токарів механічного цеху, які на протязі звітного періоду займалися виготовленням продукції.

Далі визначимо одиницю сукупності. Ми встановили, що об'єкт статистичного спостереження — сукупність токарів механічного цеху. Значить, одиницею цієї сукупності є окремий робітник (токар).

Далі переходимо до *розробки програми статистичного спостереження*, до переліку ознак, за якими необхідно характеризувати кожного токаря цеху. Правильно складено програма у значній мірі визначає успіх всього статистичного спостереження. В неї включаються найбільш суттєві ознаки, які відповідають поставленій меті. Важливо встановити не лише головні ознаки, але й чітко, ясно дати їм формулювання, підказати очікувані відповіді. Питання програми записують в статистичний формуляр (бланк, анкету, форму звітності і т. п.). Центральне питання в нашому спостереженні — виробіток продукції. Щоб отримати відомості, необхідно за даними первинного обліку встановити, скільки виробів виготовив кожен токар цеху.

Далі виявимо фактори, які вплинули на величину виробітку. Перш за все встановимо ознаки, які характеризують кваліфікацію (розряд) робітників. Визначимо вік робітників, виробничий стаж із даної професії, в тому числі стаж на даному підприємстві (до року, від 1 до 3 років, 3 роки і більше). Суттєве значення на виробіток має фактор простоїв робітників (через зупинку обладнання, відсутність матеріалів, інструментів та ін.). Перераховані ознаки дають характеристику теоретичної підготовки робітників і можливості щодо виготовлення продукції. Важливими ознаками-факторами виробітку є технічний стан обладнання (рівень зносу, тривалість проведення технічного огляду та капітального ремонту). Крім того, визначають рівень забезпеченості матеріалами відповідної якості, що суттєво впливає на обсяг виготовлення продукції. Їх низька якість може бути причиною браку та збільшенню часу на обробку деталей.

Є багато інших факторів, які впливають на виробіток робітників. Але не можна без меж розширяти програму спостереження. Є фактори, які складно статистично виміряти (наприклад, здатність робітників освоїти нову технологію обробки матеріалів, їх працездатність, комунікабельність та ін.).

Заключною частиною роботи по складанню програми спостереження є визначення порядку розташування питань в статистичному формулярі. Обов'язковим елементом статистичного формуляру є наявність титульної та адресної частини. В титульній частині вказується найменування статистичного спостереження, дата і орган, що затвердив форму, дата отримання відомостей, а в адресній — найменування або фамілія, ім'я та по-батькові обстежуваної одиниці та її адреса. В нашому прикладі в адресній частині слід вказати найменування цеху. Порядок розташування питань повинен бути таки, щоб відповіді на попередні питання лаконічно контролювали правильність відповідей на наступні питання. Така послідовність дозволяє контролювати правильність відповідей на них. Тому спочатку вказати загальні дані: фамілія, ім'я та побатькові робітника, вік, освіта, стаж роботи. Далі слід перейти до питань, що характеризують рівень кваліфікації робітника (тарифний розряд, коли проходив підвищення кваліфікації). Питання про стаж роботи перевіряються з віком робітника. Потім ставляться питання про відпрацьований час (наявність прогулів, простоїв, в тому числі за окремими причинами). На завершення визначають за даними первинного обліку кількість виробленої продукції, кількість продукції, що відповідаю ДСТУ, ТУ або іншим нормативним документам, а також кількість браку (за окремими видами).

Після встановлення порядку ретельно сформульовані питання розміщують так, щоб було достатньо місця для запису інформації, а також можливих виправлень.

Задачі

1.1. *Сформулюйте* об'єкт, мету спостереження і розробіть програму: а) перепису працівників науково-дослідних інститутів; б) перепису рухомого складу залізничного транспорту; в) інвентаризації основних засобів станом на 1.01.2022 р.; г) обліку персоналу працюючих за розрядами станом на 1.01.2021 р.; д) перепису застарілого обладнання на підприємстві станом на 25.10.2022 р.; е) перепису дитячих станків України в 2022 р.; є) заробітної плати робітників.

1.2. *Розробіть* об'єкт статистичного спостереження, одиницю сукупності і складіть програму спостереження для дослідження зв'язку між заробітною платою та рівнем кваліфікації робітників заводу.

1.3. Які ознаки необхідно реєструвати при проведення обстеження промислового підприємства з метою дослідження плинності робочої сили?

1.4. Собівартість виробу *А* у жовтні склала:

Завод № 1	150 грн	Завод № 7	163 »
» № 2	156 »	» № 8	165 »
» № 3	164 »	» № 9	159 »
» № 4	158 »	» № 10	167 »
» № 5	160 »		
» № 6	157 »		

Визначте: 1) що є об'єктом статистичного спостереження і одиницею спостереження; 2) якими ознаками характеризуються одиниці даного статистичного спостереження.

1.5. При дослідженні чисельності та складу персоналу торговельного підприємства планується провести спеціальне спостереження. *Визначте* питання, які можуть бути включенні в програму обстеження. *Спроектуйте* програму обстеження, складіть макет таблиці та статистичний формуляр для такого обстеження.

1.6. Державна служба статистики України проводила «Обстеження наявності, руху і використання обладнання в деяких галузях переробної промисловості». До якого виду спостереження за ступенем повноти охоплення об'єкту спостереження «Переробна промисловість» відноситься це обстеження?

1.7. *Сформулюйте* об'єкт, мету спостереження і розробіть програму: а) вибіркового спостереження сімей робітників промисловості; б) вибіркового спостереження випуску інноваційної продукції; в) запасів палива на складі; г) точності обточування деталі.

1.8. *Сформулюйте* мету обстеження, установіть об'єкт та одиницю спостереження і розробіть програму і формуляр спостереження для обстеження якості продукції, що випускається у великих обсягах на поточній лінії. Яким за повнотою охоплення одиниць сукупності досліджуваного об'єкта доцільно організувати це обстеження?

1.9. Для 20 % обстеження токарів машинобудівного заводу (станом на 1.01.2022 р.) *складіть* програму статистичного бланку у формі картки. В бланку повинні бути передбачені назва підприємства, фамілія, ім'я та по-батькові, спеціальність, розряд, освіта, виробничий стаж (повних років) і заробітна плата за 2021 р. (в грн).

1.10. Для дослідження якості нового продукту вирішено провести спеціальне статистичне спостереження станом на 1.02.2022 р. З цією метою складіть бланк опитування споживачів магазину, на основі якого можна отримати відомості про якість, зовнішній вид та доступність ціни споживачами. *Складіть* інструкцію про порядок проведення обстеження і заповнення формуляру спостереження.

1.11. Здійсніть проектування всього процесу статистичного спостереження (сформулюйте мету спостереження, розробіть програму, формуляр спостереження, організаційний план): про роботу студентів факультету або групи на протязі семестру; про результати сесії; про бюджет робочого часу.

1.12. З метою дослідження залежності змінної виробітки робітника механічного цеху від віку, освіти, стажу роботи і кваліфікації вирішено провести статистичне спостереження 05.06.2022 р. З цією метою *сформулюйте* питання програми статистичного спостереження, а також інструкцію до його заповнення.

1.13. Для дослідження причин руху робочої сили на підприємстві складіть проект первинного статистичного спостереження, в якому вкажіть облікове число робітників на початок місяця, число прибулих і вибулих робітників за місяць, переводи із цеха в цех, облікове число робітників на кінець місяця, а також кількість виходів (явок) і невиходів (неявок) на роботу.

1.14. Для дослідження причин звільнення робітників механічного цеху складіть опитувальний бланк статистичного спостереження, на основі якого можна отримати відомості про причини звільнення робітників, виявнити мотиви звільнення. *Скласти* коротку інструкцію до його заповнення.

1.15. *Розробити* програму статистичного спостереження для дослідження технічного стану обладнання на машинобудівних заводах за типами обладнання, потужністю і часом використання. *Вказати* одиницю спостереження, вид і спосіб обліку даних, час і місце спостереження.

1.16. *Наведіть* перелік показників, за допомогою яких можна при статистичному обстеженні охарактеризувати наступні явища: а) динаміку випуску продукції та продуктивності праці на промисловому підприємстві; б) якість промислової продукції; в) успішність студентів; г) ступінь виконання норм виробітку робітниками цеху.

1.17. *Перерахуйте* найбільш суттєві ознаки наступних одиниць спостереження: а) персонал підприємства; б) промислового підприємства; в) вузу; г) магазину; д) продукції; е) обладнання механічного цеху; є) робітника; ж) студента.

1.18. *Сформулюйте* питання для включення їх у формуляр спостереження за наступними ознаками різних об'єктів спостереження: а) заробітна плата робітників промислового підприємства; б) бюджет часу робітників цеху; в) якість нової продукції; г) обладнання механічного цеху; д) студенти вищого навчального закладу.

1.19. *Визначити* об'єкт та одиницю спостереження при проведенні: інвентаризації запасів готової продукції на складі; одночасного обліку персоналу підприємства за професіям, формами і системами оплати праці; дослідження використання робочого часу в ремонтному цеху промислового підприємства; обстеження виконання норм виробітку в механічному цеху машинобудівного заводу; перепису великої рогатої худоби та овець в фермерському господарстві; інвентаризації залишків незавершеного виробництва.

1.2. Організація статистичного спостереження

Методичні вказівки та вирішення типової задачі

При проведенні статистичного спостереження виникає дуже багато питань організаційного характеру. До організаційних питань статистичного спостереження відносять: визначення одиниці спостереження, місця і часу (строку) спостереження, органів спостереження; інколи вказується і програма спостереження. Серед заходів щодо організації статистичного спостереження відносять: підбір та навчання кадрів, що залучаються до проведення спостереження; складання різних списків, зокрема списків одиниць спостереження; підготовка картографічного матеріалу; порядок і строки забезпечення осіб, які беруть участь у проведенні спостереження, необхідними матеріалами і транспортними засобами; визначення місцезнаходження (розміщення) працівників різних рангів, які проводять спостереження тощо. В ряді випадків, як наприклад, при перепису населення, повинна бути проведена роз'яснювальна робота щодо мети, задач і порядку проведення перепису населення.

Місце спостереження — це місце, де повинна бути проведена реєстрація фактів, де заповнюються формуляри спостереження. З метою одноманітності зібраних відомостей у плані статистичного спостереження відзначаються межі явища.

Далі визначають форму організації спостереження та його види. Виділяють два способи організації збору статистичних даних —

звітність та спеціально організоване спостереження. за повнотою охоплення розрізняють два види спостереження: суцільне і несуцільне (вибіркове, основного масиву, анкетне, монографічне та ін.). За ознакою систематичності спостереження розрізняють безперервне, чи поточне, і перервне спостереження. Останнє поділяється на періодичне та одноразове.

Наступне організаційне питання — про *термін* або *час* статистичного спостереження, тобто про період, на протязі якого збираються відомості. При звітності обов'язково встановлюється строк подання того чи іншого звіту. Наприклад, щоквартальні звіти з праці подаються до 15 числа наступного місяця. При виборі часу необхідно вирішити питання про критичний час спостереження. Його точне встановлення є дуже вадливим одноразових спостереженнях, таких, як перепис населення. Термін проведення спостереження має бути максимально коротким та максимально наближеним до критичного моменту. Так, якщо дані за діяльність цеху на протязі місяця отримані через 15 днів, то вони є малопридатними для оперативного управління.

Потім переходять до питання про способи обліку фактів статистичного спостереження. Методи збирання відомостей різняться за їх організаційними принципами. У статистиці найважливішими є: а) звітний спосіб (шляхом заповнення звітів); 2) експедиційний спосіб (збирання даних через уповноважених осіб — реєстраторів або обліковців); 3) самореєстрація (заповнення бланків здійснюється самостійно особами, від яких необхідно отримати відомості).

Наступний підготовчий етап до спостереження — це інструктування кадрів, тобто навчання облікового і переписного апарату заповненню переписних листів та форм звітності. Як правило, робітники державних органів статистики збирають обліковців та проводять їх інструктаж. Особливого значення набуває цей організаційний етап при проведенні великих обстежень і переписів (наприклад, обстеження населення).

Одним із них є питання про органи спостереження. Орган спостереження — це організатор і виконавець статистичного спостереження. Основним організатором проведення державних статистичних спостережень є Державна служба статистики України, а також відповідні міністерства та відомства. В організаційному плані статистичного спостереження чітко визначаються і розмежовуються правничий та обов'язки окремих установ та закупівельних організацій, що у тому чи іншому спостереженні. Це забезпечує своєчасне та в повній мірі виконання всіх програмно-методичних питань статистичного спостереження.

Задачі

2.20. Дослідження умов праці у збиральному цеху проводиться методом вибіркового обстеження. *Визначити* форму, вид спостереження, спосіб обліку фактів, критичний момент, час і місце проведення.

2.21. *Визначте* види статистичного спостереження за часом проведення, охопленню одиниць сукупності та способу реєстрації (якщо опитування, то вказати його вид): 1) облік цін на ринку великих міст станом на 25-те число кожного місяця; 2) обстеження рівня кваліфікація робітників підприємства; 3) облік касової виручки магазину; 4) облік робітників магазину; 5) обстеження руху працівників підприємства.

2.22. Державна служба статистики України проводило вибіркове обстеження бюджету робочого часу робітників і службовців за квітень 2021 р. До якого виду статистичного спостереження за ознакою часу відноситься це обстеження?

2.23. *Укажіть*, до якого виду спостереження — а) за організаційною формою, б) часом спостереження, в) повнотою охоплення одиниць статистичної сукупності — відносяться наступні статистичні спостереження: 1) перепис населення; 2) контроль якості продукції; 3) облік запасів товарно-матеріальних цінностей; 4) місячні, квартальні та річні звіти підприємств; 5) обстеження обладнання на підприємстві; 6) облік запасів товарів у магазині; 7) фотографія робочого дня групи робітників цеху; 8) місячні, квартальні і річні звіти промислових підприємств; 9) облік виходів і невиходів робітників на роботу; обстеження 200 електричних ламп на тривалість горіння в годинах; 10) добове спостереження про причини простоїв робітників машинобудівного заводу.

2.24. *Укажіть*, що в кожній із перерахованих у задачі 2.36 гл. 1 спостережень є об'єктом і одиницею спостереження.

2.25. *Складіть* перелік ознак, які характеризують персонал автотранспортного підприємства. *Обгрунтуйте* вид статистичного спостереження, необхідного для збирання відомостей по складеному переліку ознак.

2.26. Для дослідження причин простою за неділю кожен слюсар вів щоденний облік на спеціальному бланку. *Вкажіть* вид статистичного спостереження за часом проведення, ступенем охоплення і способу збирання даних.

2.27. *Вирішіть* організаційні питання для кожного статистичного спостереження за даними задач 1.1 і 1.2 гл. 1.

2.28. *Вивчити* витримки із методологічного положення державного статистичного спостереження «Обстеження підприємств з питань стати-

стики праці», затвердженого наказом Державної служби статистики України від 06.01.2022 р. № 3 і *визначити*: 1) який вид спостереження застосовується; 2) одиницю спостереження; 3) джерела інформації; 4) статистичні методи обробки та аналізу даних статистичного спостереження.

2.29. *Ознайомитися* з методологічним положенням державного статистичного спостереження «Стан виплати заробітної плати», затвердженого наказом Державної служби статистики України від 30.12.2020 р. № 374 і *визначити*: 1) вид статистичного спостереження; 2) організаційну форму спостереження; 3) спосіб реєстрації даних спостереження; 4) одиниця спостереження; 5) періодичність спостереження; 6) засоби арифметичного та логічного контролю.

2.30. *Ознайомитися* з методологічним положенням державного статистичного спостереження «Умови праці на підприємствах», затвердженого наказом Державної служби статистики України від 20.09.2019 р. № 374 і *визначити*: 1) вид статистичного спостереження; 2) організаційну форму спостереження; 3) спосіб реєстрації даних спостереження; 4) одиниця спостереження; 5) періодичність спостереження; 6) органі, що здійснює проведення статистичного спостереження.

2.31. *Дослідіть* витримки із «Інструкції щодо проведення Всеукраїнського перепису населення 2001 року і заповнення переписної документації» (наказ Державного комітету статистики України від 31.07.2001 р. № 341 і визначити: 1) критичний момент проведення (і поясніть вибір даного моменту); 2) строк проведення; 3) форму, вид і способи проведення перепису населення; 4) заходи забезпечення повноти обліку наявного і постійного проживаючого населення.

2.32. Обліковець відвідав квартиру, де мешкають члени домогосподарства Новікова І.І. Перед початком опитування він з’ясував, що в даному приміщенні мешкає тільки одне домогосподарство, яке складається з Новікова І.І., його матері, дружини, одруженого сина, неодруженої дочки, невістки, онуки, розлученої сестри та няні, яка доглядає онуку. Першим побажав записатися сам Новіков І.І. *Визначте* послідовність запису членів домогосподарства у формі 1.

2.33. Сидорчук В. Н. 10 грудня повернувся до Києва з м. Бровари, де 5 грудня був переписаний як тимчасово проживаючий, і отримав довідку про проходження Перепису населення. Удома Сидорчук В.Н. ще раз зустрівся з обліковцем. Чи повинен заповнювати обліковець картку перепису?

2.34. Під час проведення перепису 5 січня 2001 р. в квартирі № 27 померла людина. Як повинен поступити обліковець: 1) занести відомос-

ті про померлу людину в переписний лист; 2) не заповнювати переписний лист; 3) заповнювати переписний лист з відміткою про смерть.

2.35. Дослідження показників якості продукції проводиться в порядку несуцільного спостереження. *Визначте* форму, найкращий вид несуцільного спостереження, спосіб відбору, час, місце і критичний момент за даними задачі 1.8 гл. 1.

1.3. Прийоми контролю результатів статистичного спостереження

Методичні вказівки та вирішення типової задачі

Статистичний матеріал, якій зібраний в процесі проведення статистичного спостереження, повинен бути повним, достовірним. Якщо отримані внаслідок статистичного спостереження матеріали будуть неякісними, вони будуть містити багато помилок, то на наступних етапах дослідження виправити ці помилки не вдасться. З цією метою первинні дані підлягають попередньому контролю, який може бути логічним та арифметичним. В програмі спостереження можуть бути поставлені контрольні питання, відповіді на які допомагають в процесі спостереженні здійснити контроль за відповідями на інші питання, а в подальшому здійснити перевірку отриманих даних.

Задача 2. Маються наступні дані оперативного обліку про рух робочої сили на підприємстві за звітний місяць (осіб):

Таблиця 1.1

Назва цеху	Чисельність працівників на початок місяця	Чисельність робітників, прийнятих на роботу	Звільнено за причинами плинності (за власним бажанням)	Звільнено за порушення трудової дисципліни	Чисельність працівників на кінець місяця
А	1	2	3	4	5
Механічний	164	32	14	8	174
Токарний	68	6	7	90	58
Збиральний	18	4	2	5	17
Всього	250	44	23	22	166

Необхідно *перевірити* правильність даних гр. 4 і підсумкових показників. Слід мати, що рух робочої сили можна представити у балансовій

формі, яка має вид наступного рівняння:

Чисельність на початок періоду	+	Надходження за період	=	Вибуття за період	+	Чисельність на кінець періоду

гр. 1 + гр. 2 = гр. 3 + гр. 4 + гр. 5

Звідси гр. 4 = гр. 1 + гр. 2 – гр. 3 – гр. 5

При контролі можна застосувати логічну та арифметичну перевірки.

Почнемо перевірку із механічного цеху. Порівняємо чисельність на початок періоду, надходження і вибуття працівників. Перевіряємо арифметично: 164 + 32= 14 + 174 + 8, тобто 196=196. Мається балансова рівність. Перевіряємо гр. 4 токарного цеху. За токарним цехом звертає на себе увагу чисельність звільнених за пропущення трудової дисципліни (90 осіб). Перевіряємо, чи є балансова ув'язка: 68 + 6≠ 7 + 90 + 58. Рівності не має.

Виходячи із взаємопов'язаних показників обчислюємо дані гр. 4. Отримаємо 9 (68 + 6 – 7 – 58). Отже, допущена помилка. Мабуть, при заповненні звіту механічно замість цифри 9 була поставлена цифра 90, тобто поставлений лишній 0. Вносимо виправлення: в гр. 4 ряд. 2 замість 90 ставимо 9.

Аналогічно перевіряємо за третім цехом. За збиральним цехом також не виходить балансової рівності (18+4≠2+5+17). Перевіряємо правильність обчислення: 18 + 4 – 2 – 17 = 3. У звіті написана цифра 5, значить, допущена арифметична помилка. Вносимо виправлення: замість цифри 5 ставимо 3.

Далі перевіряємо підсумкові дані, сумуючи за кожною графою окремо, а потім ув'язуємо в балансову рівність. За графою 4 з урахуванням внесених змін отримаємо 103 (8 + 90 + 5) і запишемо замість 22 цифру 20. Тепер підсумкові дані відповідають балансовій схемі: 250 + 42 = 23 + 20 + 249, тобто 292=292.

Звіт перевірений, правки внесені, дані можна використовувати для подальшої обробки.

Задачі

2.36. *Провести* арифметичний контроль руху деталей на складі підприємства за квітень звітного року (од.): кількість деталей на початок місяця 8635; надійшло за місяць 730; вибуло за місяць 468; кількість де-

талей на кінець місяця 8373.

3.37. Маються наступні дані про вартість готової продукції і напівфабрикатів за трьома машинобудівними підприємствами за звітний період (тис. грн):

Таблиця 1.2

Підприємство	Вартість готової продукції	Вартість напівфабрикатів	Всього
1	1 260	220	1 480
2	960	260	1 220
3	1 680	360	2 040
Всього	3 800	840	4 640

Провести арифметичний контроль даних, внесених в таблицю. *Вказати* характер допущених помилок і внести необхідні виправлення.

2.38. *Проведіть* логічний контроль правильності заповнення бланку для дослідження руху робочої сили. *Вказати* на помилки, допущені у відповідях, проаналізувати їх характер.

ПЕРЕПИСНИЙ ЛИСТ № 1

Питання	Відповіді
Фамілія, ім’я, по-батькові	*Волков Валентин Сергійович*
Стать	*Чоловіча*
Вік (число років)	*Вік 16 років, рік народження 1986 р.*
Освіта	*Вища*
Тип учбового закладу, в якому навчався (лась)	*Харківський торговельно-економічний коледж*
Посада або виконувана робота	*економіст з праці*

ПЕРЕПИСНИЙ ЛИСТ № 2

Питання	Відповіді
Фамілія, ім’я, по-батькові	*Тимченко Ірина Євгеніївна*
Стать	*Жіноча*
Вік (число років)	*Вік 26 років, рік народження 1995 р., місяць 6*
Освіта	*Середня*
Місце роботи	*Завод «Хартрон»*
Посада або виконувана робота	*Головний бухгалтер*

Чи можна виправляти виявлені помилки за допомогою логічного контролю помилки?

2.39. За допомогою логічного контролю *перевірте* правильність

відповідей на питання переписного листа перепису населення.

Питання	Відповіді
а) Фамілія, ім'я, по-батькові	*Польова Тетяна Володимирівна*
б) Стать	*Чоловіча*
в) Вік (число років)	*Вік 6 років, рік народження 1976 р.*
г) Освіта	*Середня*
д) сімейний стан	*Одружена*
е) освіта	*Крановик*

Вказати, у відповіді на які питання були допущені помилки? *Проаналізувати* їх характер.

2.40. Маються наступні дані про чисельність працівників заводу станом на 1 квітня звітного періоду:

Таблиця 1.3

Підприємство	Чисельність робітників		
	Цех № 1	Цех № 2	Цех № 3
Робітники	160	180	340
Інженерно-технічні робітники	20	15	30
Службовці	18	15	34
Молодший обслуговуючий персонал	8	8	16
Охорона та ученики	4	4	8
Всього	230	232	438

Здійсніть арифметичний контроль і *внесіть* виправлення.

2.41. Маються наступні дані про рух робітників збирального цеху за звітний місяць:

Таблиця 1.4

Номер цеху	Чисельність робітників на початок місяця	Прийнято робітників	Вибуло робітників	В тому числі за причинами					Чисельність робітників на кінець періоду
				закінчення строку договору	звільнено за власним бажанням	Звільнення за прогули та інші порушення трудової діяльності	Переведення в інші цехи	інші причини	
1	280	26	31	2	10	15	2	4	285
2	125	15	13	3	2	4	2	1	128
3	63	6	9	1	2	2	3		62
Всього	468	47	44	6	14	22	17	5	464

Здійсніть арифметичний контроль і *внесіть* виправлення.

2.42. *Перевірте* за допомогою рахункового (арифметичного) контролю наступні дані, отримані по підприємству за звітний період:

а) всього працівників на підприємстві — 106;

б) в тому числі: основних та допоміжних робітників — 56, інженерно-технічних робітників — 24, молодший обслуговуючий персонал — 20, працівники охорони, ученики — 16;

в) із загальної чисельності робітників: чоловіки — 76, жінки — 40.

1.4. Питання для обговорення

1. *Дайте* визначення поняттю «статистичне спостереження». Які вимоги пред'являються до статистичного спостереження?

2. *Охарактеризуйте* види статистичного спостереження за охопленням простору і часом.

3. *Визначте* об'єкт статистичного спостереження.

4. *Дайте характеристику* видам несуцільного спостереження.

5. *Охарактеризуйте* організаційні питання статистичного спостереження. Яку роль відіграють спеціально підготовлені заходи до проведення спостереження?

6. *Охарактеризуйте* програму статистичного спостереження. За чим необхідно слідкувати, встановлюючи круг ознак, які включаються в програму статистичного спостереження? Які питання необхідно намагатися виключити із програми статистичного спостереження? Від яких факторів залежить круг питань програми статистичного спостереження?

7. *Визначте* зміст інструкції до статистичного спостереження. Які вимоги пред'являються до її складання?

8. *Охарактеризуйте* основні джерела та способи збирання статистичних даних.

9. З якою метою проводиться монографічне спостереження?

10. В чому полягає специфіка одиниць спостереження проведенні такого несуцільного спостереження, як обстеження основного масиву?

11. *Визначте* вид, організаційну форму, одиницю державного статистичного спостереження за змінами цінам виробників промислової продукції, яке проводиться Державною службою статистики України.

12. В чому полягає відмінність між суцільним та несуцільним спостереженням? Які переваги має несуцільне спостереження?

13. Яке значення має статистична звітність як одна із форм статистичного спостереження? В чому її відмінність від спеціально організо-

ваного статистичного спостереження?

14. Яка причина існування спеціально організованого статистичного спостереження? З якою метою воно проводиться?

15. Як вплинуло розвиток електронно-обчислювальної техніки, комп'ютерних програм та обчислювальних пристроїв на концентрацію, збереження та видачу статистичних даних?

13. *Охарактеризуйте* помилки статистичного спостереження та заходи боротьби з ними.

14. В чому полягає особливість збирання статистичних даних при експедиційному способі? Які переваги та недоліки має експедиційний спосіб збирання даних? В яких випадках при збирання даних доводиться вдаватися до експедиційного способу?

15. Чи допускає статистична звітність як спосіб збирання даних можливість несуцільного спостереження?

15. Які переваги має кореспондентський спосіб збирання даних порівняно з експедиційним способом? Які складності виникають при цьому способі?

16. *Охарактеризуйте* відмінність між картковим бланком і бланком списку.

17. Які способи використовуються для здійснення контролю за достовірністю зібраного матеріалу? В чому полягає особливість логічного контролю?

18. Що є критичним моментом статистичного спостереження? Як його встановлюють?

Тести

1. Сутність статистичного спостереження полягає:
   а) в планомірному науково організованому збиранні масових даних про явища і процеси суспільного життя;
   б) виділення груп за спільними ознаками;
   в) в статистичній обробці цифрових даних;
   г) в розробці формуляра статистичного спостереження.
2. Первинний елемент об'єкта статистичного спостереження, який є носієм ознак, що підлягають реєстрації у ході статистичного спостереження — це:
   а) об'єкт статистичного спостереження;
   б) програма статистичного спостереження;
   в) одиниця статистичного спостереження;

г) час статистичного спостереження.

3. До спеціально організованих статистичних спостережень відносяться:

а) вибіркове спостереження;

б) переписи;

в) основного масиву;

г) монографічне.

4. Організаційна частина плану статистичного спостереження включає визначення:

а) об'єкту, форми, одиниці, інструкції статистичного спостереження;

б) об'єкту, одиниці, точність спостереження;

в) місця, часу, форми, виду, способу спостереження;

г) мету, об'єкта, одиниці та програми спостереження.

5. Проводиться перепис робітників заводу. Одиницею сукупності є:

а) заводи;

б) робітники заводу;

в) завод;

г) кожен робітник.

6. Проводиться обстеження технічного стану токарного обладнання на машинобудівному заводі. Об'єктом спостереження є:

а) підприємства;

б) підприємство;

в) одиниця токарного обладнання;

г) токарне обладнання.

7. Об'єктом статистичного спостереження в статистиці називається:

а) первинний елемент статистичної сукупності, який є носієм ознак, що підлягає реєстрації, і основою проведення обліку.

б) перепис, одночасний облік і спеціальне статистичне спостереження;

в) сукупність одиниць, про які повинні бути зібрані потрібні відомості;

г) первинна ланка сукупності, від якої повинні бути отримані відомості в процесі статистичного спостереження.

8. Програма статистичного спостереження представляє собою:

а) перелік відповідей, які отримуються в результаті проведення статистичного спостереження;

б) план статистичного спостереження;

в) перелік питань, на які необхідно отримати відповіді в процесі статистичного спостереження;

г) сукупність робіт, які необхідно провести для здійснення статис-

тичного спостереження.

9. Критичним моментом статистичного спостереження називається:
   а) час, до якого відносяться дані спостереження;
   б) період часу, на протязі якого проводиться статистичне спостереження;
   в) момент часу, станом на який проводиться статистичне спостереження;
   г) час, на протязі якого проводиться статистичне спостереження, групування та аналіз даних.

10. Мета статистичного спостереження:
   а) аналіз взаємозв'язків між соціально-економічними явищами і процесами, які підлягають статистичному обстеженню;
   б) збирання статистичних даних;
   в) статистичне оброблення даних, отриманих в результаті статистичного спостереження;
   г) групування одиниць статистичної сукупності за окремими ознаками.

11. Одиницею спостереження в статистиці називають:
   а) перепис та спеціально організоване статистичне спостереження;
   б) первинну ячейку сукупності, від якої повинні бути отримані відомості в процесі спостереження;
   в) первинний елемент статистичної сукупності, що є носієм ознак, які підлягають реєстрації, і основою обліку, що ведеться.
   г) статистичне спостереження окремих типових одиниць статистичної сукупності з метою їх досконалого вивчення.

12. В річному звіті по праці за 2022 р. чисельність робітників промислово-виробничого персоналу встановлена на 01.01.2023 р. Об'єктивним часом є:
   а) 2022 р.;
   б) 2023 р.;
   в) 01.01.2023 р.;
   г) І півріччя 2023 р.

13. Перепис обладнання на хімічному заводі проводився станом на 1 січня 2023 р. і тривав три місяця (з 1.10 по 31.12 2022 р.). Об'єктивним часом є:
   а) 2022 р.;
   б) 01.01.2023 р.;
   в) три місяці;
   г) IV квартал 2022 р.

14. Одночасний облік професійно-кваліфікаційного складу робітників

машинобудівного заводу проводився станом на 15 червня 2022 р. і тривав з 15 червня по 20 червня 2022 р. Об'єктивним часом є:

а) 15 червня 2022 р.;

б) 15–20 червня 2022 р.;

в) 20 червня 2022 р.;

г) 21 червня 2022 р.

15. Безперервним (поточним) спостереженням є:

а) облік касової виручки магазину;

б) перепис обладнання заводу станом на 1.01.2022 р.;

в) інвентаризація запасів товарно-матеріальних цінностей магазину;

г) звітність вищих начальних закладів про прийом студентів станом на 1 вересня.

16. Помилками репрезентативності називаються:

а) помилки, які виникають в результаті неправильного встановлення фактів;

б) помилки, які виникають в результаті неправильного запису фактів;

в) помилки, які виникають в результаті того, що спостереженню піддається лише частина досліджуваної сукупності, яка не може точно відобразити властивості всієї сукупності;

г) помилки, які виникають в результаті неправильної обробки отриманих даних.

17. Сукупність одиниць спостереження, що визначають собою явище або процес (у статистиці — сукупність статистична) і підлягають статистичному спостереженню — це:

а) час статистичного спостереження;

б) об'єкт статистичного спостереження;

в) період статистичного спостереження;

г) організаційна форма статистичного спостереження.

18. Об'єкт, що піддається ідентифікації, щодо якого можна отримати дані і щодо якого дані підлягають реєстрації — це:

а) реєстр;

б) програма статистичного спостереження;

в) одиниця статистичного спостереження;

г) мета статистичного спостереження;

19. Спостереження, що здійснюється більш, ніж один раз, часто на регулярній (періодичній) основі і зазвичай з частковою ротацією одиниць вибіркової сукупності з урахуванням водночас вимог до точності і до звітного навантаження — це:

а) несуцільне статистичне спостереження;

б) суцільне статистичне спостереження;
в) мета статистичного спостереження;
г) повторюване статистичне спостереження.

20. Офіційний документ, що містить опис дій (робіт), які виконуються у ході статистичного спостереження, а також описи очікуваних результатів та перелік їх користувачів.
а) статистичне спостереження;
б) програмно-методологічні питання плану статистичного спостереження;
в) план статистичного спостереження;
г) мета статистичного спостереження.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Горкавий В. К.* Статистика: Підручник. Третє вид., переробл. і доповн. Київ: Алерта, 2019. С. 37–54.
2. Статистика: підручник / *С. І. Пирожков*, *В. В. Рязанцева*, *Р. М. Моторин* та ін. Київ: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2020. С. 47–86.
3. *Ткач Є. І.*, *Сторожук В. П.* Загальна теорія статистики: підручник. 3-тє вид. Київ: Центр учбової літератури, 2009. С. 21–38.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

Навчальні посібники, *словники*

4. Глосарій до плану статистичного спостереження: Наказ Держкомстату від 29.12.2009 р. № 498. URL: http://ukrstat.gov.ua/me-tod_polog/glos.htm.
5. *Карпенко Л. М.* Статистика: навч. посіб. Одеса: ОРІДУ НАДУ, 2019. С. 12–16.
6. *Мармоза А. Т.* Теорія статистики: підручник. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: «Центр учбової літератури», 2013. С. 51–71.
7. *Сєрова І. А.*, *Аксьонова І. В*. Організація статистичних спостережень. Конспект лекцій для студентів спеціальності 8.050 110 усіх форм навчання. Харків: Вид. ХНЕУ, 2008. 237 с.
8. Статистичний словник / [*О. Г. Осауленко*, *О. О. Васєчко*, *М. В. Пугачова* та ін.]; за ред. д-ра держ. упр., проф., член-кор. НАН України О. Г. Осауленка; НТК статистичних досліджень. Київ: ДП «Інформ.-аналіт. агентство», 2012. 498 с.
9. *Шапочка М. К.*, *Маценко О. М.* Теорія статистики: навчальний посібник. Суми: Університетська книга, 2014, С. 27–40.

Монографії та статті

10. *Васєчко О. О.* Методологічні основи статистики підприємств. Київ: НТК стат. досліджень, 2005.

Глава 2. ЗВЕДЕННЯ І ГРУПУВАННЯ СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ

2.1. Побудова рядів розподілу за кількісною ознакою, за атрибутивною ознакою

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Зведення статистичних даних є другим етапом статистичного дослідження. В результаті статистичного спостереження одержують дані, які характеризують окремі одиниці спостереження. Цей матеріал непридатний для безпосереднього використання ні для практичних цілей, ні для наукового аналізу. Для того щоб на основі отриманого в результаті статистичного спостереження матеріалу можна було б зробити будь-які висновки, його необхідно систематизувати, підсумувати в ясному, зручному для використання вигляді. Цей етап називається *зведенням*. В результаті зведення статистичних даних дослідник як узагальнюючих статистичних показників отримує якісно нову (проти вихідних даних) зведену інформацію, яку жодними іншими шляхами отримати не можна. Наприклад, за даними про випуск продукції одним робітником цеху неможна скласти уявлення про обсяг і структуру продукції, виробленої підприємством. За одиничними даними неможна судити про народжуваність, міграцію, грамотність населення і т. п.

Розрізняють *просте зведення* (підрахунок лише підсумку) і *статистичне групування*, що підлягає у розчленуванні статистичної сукупності на однорідні групи за суттєвими ознаками, що встановлюються виходячи з мети угруповання. За допомогою групування отримують такі результати, за якими можна встановити закономірності та характерні особливості розвитку явищ.

Результати зведення можуть бути представлені у вигляді *рядів розподілу*, які представляють собою упорядкований розподіл одиниць сукупності на групи за досліджуваною ознакою. В залежності від виду ознаки ряди розподілу поділяють на два види: варіаційні (кількісні) та атрибутивні (якісні). *Кількісні ознаки* — це ознаки, які мають кількісне вираження у окремих одиниць статистичної сукупності. Наприклад, продукція, заробітна плата, урожайність, період стажу робітника, собівартість продукції та ін.

Атрибутивні ознаки — це ознаки, які не мають кількісної міри. Наприклад, стать, національність та освіта людини, вид економічної діяльності, професія робітника і т. п.

В залежності від того, яким числом виражені варіанти, ряди розподілу, поділять на дискретні та інтервальні. Ряд, в якому варіанти виражені цілим числом, називають *дискретним рядом розподілу*. Прикладом можуть служити розподіл сімей району *N* за чисельністю дітей:

Число дітей	Число сімей, тис.
1	18,5
2	13,6
3	9,5
4	6,2
5	2,4
	50,2

Інтервальний ряд розподілу — це ряд, в якому значення ознаки надані у вигляді інтервалу. Наприклад, розподіл робітників підприємства за рівнем виконання норми виробітку можна представити у вигляді інтервального ряду розподілу:

Норма виробітку, %	Число робітників
90–100	6
100–110	37
110–120	16
120–130	8
	67

При визначенні інтервальних рядів розподілу необхідно вирішити два важливих питання: 1) на скільки груп необхідно поділити статистичну сукупність; 2) які взяти інтервали (рівні або нерівні, закриті чи відкриті). Ці питання вирішуються на основі економічного аналізу сутності явищ, поставленої мети та характеру зміни ознак. Розглянемо методику складання рядів розподілу на прикладі.

Задача 1. Максимальний вік робітника підприємства становить 60 років, а мінімальний — 15 років. *Визначити* інтервал при рівновеликих інтервалах угруповання, якщо необхідна кількість груп складе 5 од.

Рішення

Розрахунок величини інтервалу (*i*) при рівних інтервалах провадиться за формулою:

$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n},$$

де $x_{\max}$ — максимальна величина ознаки;

$x_{\min}$ — мінімальна величина ознаки угруповання;

n — число груп.

Розмір інтервалів складе:

$$i = \frac{60 - 15}{5} = 9 \text{ років.}$$

Групи складуть: 1-а група — 15–24, 2-а — 25–32, 3-я — 33–41, 4-а —42–50, 5-а група — 51–60.

Задача 2. Маються наступні дані про стаж роботи та розмір місячного виробітку продукції робітниками-відрядниками:

Таблиця 2.1

№ п/п	Стаж роботи, років	Місячний виробіток продукції, од.	№ п/п	Стаж роботи, років	Місячний виробіток продукції , од.
1	12,0	310	13	8,4	294
2	11,2	326	14	8,0	287
3	12,3	354	15	7,4	276
4	13,0	315	16	5,5	274
5	12,0	342	17	5,1	243
6	2,8	246	18	10,3	291
7	2,6	257	19	6,1	284
8	6,0	281	20	5,0	267
9	4,5	276	21	9,1	298
10	9,8	334	22	1,0	241
11	6,5	316	23	10,6	310
12	1,0	224	24	6,4	286

Для дослідження залежності між стажем роботи та обсягом продукції, виробленої робітником-відрядником, здійснити групування робітників за стажем роботи, виділивши п’ять груп з рівними інтервалами. За кожною групою і в сукупності підрахувати число робітників (абсолютне і в процентів до загального числа), середній стаж роботи, середньомісячний виробіток продукції Результати представити у вигляді таблиці, зробити висновки.

Рішення

Визначимо інтервал за формулою:

$$\frac{x_{\max} - x_{\min}}{\textit{число груп}} = \frac{13 - 1}{4} = 3 \text{ (роки).}$$

З урахування мінімального значення ознаки в сукупності і розміру інтервалу до першої групи будуть віднесені робітники із стажем роботи від 1 до 4 років включно; до другої — від 4 до 7; до третьої — від 7 до 10; до четвертої — від 10 до 13 років.

Для розрахунку складено допоміжні таблиці групування робітників

за стажем:

Група 1, інтервал 1–4 роки

Обліковий номер робітника	Стаж робітника, років	Місячний виробіток продукції, од.
6	2,8	246
7	2,6	257
12	1,0	224
25	1,0	241
Всього 4	7,4	968

Група 3, інтервал 7–10 років

Обліковий номер робітника	Стаж робітника, років	Місячний виробіток продукції, од.
10	9,8	334
13	8,4	294
14	8,0	287
15	7,4	276
21	9,1	298
Всього 5	42,7	1489

Група 2, інтервал 4–7 років

Обліковий номер робітника	Стаж робітника, років	Місячний виробіток продукції, од.
8	6,0	281
9	4,5	276
11	6,5	316
16	5,5	274
17	5,1	243
19	6,1	284
20	5,0	267
24	6,4	286
Всього 8	45,1	2227

Група 4, інтервал 10–13 років

Обліковий номер робітника	Стаж робітника, років	Місячний виробіток продукції, од.
1	12,0	310
2	11,2	326
3	12,3	354
4	13,0	315
5	12,0	342
18	10,3	291
23	10,6	310
Всього 7	81,4	2 248

Використовуючи підсумкові дані за кожною групою, побудуємо основну таблицю групування робітників за стажем:

Таблиця 2.2

Група	Інтервал	Робітники		Стаж роботи, років		Місячний виробіток	
		осіб	%	всього	середній	всього	середній
1	1–4	4	16,7	7,4	1,9	968	242,0
2	4–7	8	33,3	45,1	5,6	2 227	278,4
3	7–10	5	20,8	42,7	8,5	1 489	297,8
4	10–13	7	29,2	81,4	11,6	2 248	321,1
Всього		24	100		7,4		288,8

Середній стаж роботи в кожній групі підраховується відношенням загального стажу до числа робітників даної групи. Так, для першої групи середній стаж становить 1,9 років (7,4 : 4).

Як свідчать дані, найбільша кількість робітників — 33,2 % в даній сукупності мають середній стаж 5,6 років. Із збільшенням стажу зростає середній виробіток на одного робітника-відрядника.

Задача 3. До складу великого холдингу входять 15 підприємств. На 1 березня 2021 р. кількість робітників розподілялася по підприємствах наступним чином:

Таблиця 2.3

№ підприємств	Число працюючих за списком на 1-е березня 2021 р.	№ підприємств	Число працюючих за списком на 1-е березня 2021 р.
№ 1	375	№ 9	3 533
№ 2	2 392	№ 10	630
№ 3	1 027	№ 11	3 646
№ 4	3 821	№ 12	315
№ 5	3 644	№ 13	2 464
№ 6	525	№ 14	415
№ 7	1 560	№ 15	1 413
№ 8	240		

На основі наведених даних *побудувати* таблицю «Угруповання підприємств холдингу за кількістю робітників на 1 березня 2021 р.», поклавши в основу угруповання ознаку чисельності робітників за такими інтервалами: а) до 1000 осіб; б) 1000–1999; в) 2000– 2999, г) 3000 чоловік та вище. *Підрахувати* у кожній групі кількість підприємств та загальну кількість робітників.

Рішення

Для побудови групування необхідно скласти допоміжну таблицю.

а) Допоміжна таблиця:

Таблиця 2.4

До 1000 осіб		1000–1999 осіб		2000–2999 осіб		3000 осіб і більше	
№ заводу	число робітників	№ заводу	число робітників	№ заводу	число робітників	№ заводу	число робітників
1	375	3	1 027	2	2 392	4	3 821
6	525	7	1 560	5	2 644	9	3 533
8	240	15	1 413	13	2 464	11	3 643
10	630						
12	315						
14	415						
Всього	2500	3	4 000	3	7 500	3	11 000

б) підсумкова таблиця:

Угруповання підприємств холдингу за кількістю зайнятих робітників на 1 березня 2021 р.

Таблиця 2.5

Групи за розміром заробітної плати	Число підприємств	Загальне число робітників
До 1000 осіб	6	2 500
1000–1999 »	3	4 000
2000–2999 »	3	7 500
3000 осіб і більше	3	11 000
Всього	15	25 000

Розглянемо ряди розподілу за атрибутивними ознаками.

Задача 4. Маються дані, які характеризують розподіл робітників за рівнем виконання змінною норми виробітку:

Таблиця 2.6

№ п/п	Процент виконання норми, %	№ п/п	Процент виконання норми, %
1	95	6	100
2	102	7	106
3	113	8	108
4	98	9	96
5	104	10	101

За даними таблиці *здійсніть* групування за атрибутивною ознакою, виділивши дві групи робітників: які виконали планову норму і які не виконали планову норму.

Рішення

В групу робітників, які виконали норму, включаємо тих, числове значення виконання норми становить 100 % і більше, а в групу, що не виконали змінну норму виробітку — відповідно до 100 %. Підрахуємо число робітників по групам і оформимо у вигляді таблиці (табл. 2.7).

Таблиця дає наглядне уявлення про розподіл робітників за рівнем виконання змінної норми виробітку. При побудові атрибутивних ознак не виникають проблеми визначення інтервалу та кількості груп, оскільки сама атрибутивна ознака часто визначає їх число. Наприклад, розподіл населення за місцем проживання дає всього дві групи — міське та сільське населення; розподіл за освітою — стільки груп, скільки видів освіти і т. п.

Таблиця 2.7

Групи робітників за рівнем виконання норми	Число робітників	Загальне число робітників
Які не виконали норму	3	30
Які виконали норму	7	70
Всього	10	100

Задачі

2.1. Кількість оброблених деталей в механічному цеху № 2 одним основним робочим за звітний період склала (в шт.):

281	212	238	274	208	190	256	188	260	241
169	200	260	245	190	213	270	292	276	205
210	293	280	170	291	164	253	281	227	177
234	235	221	183	194	302	337	325	213	156
228	230	239	386	225	169	135	250	264	350

Побудуйте безперервний варіаційний ряд, утворивши наступні групи за кількістю оброблених деталей: до 180 шт., 181–240 шт. и 241 шт. і більше. *Укажіть*, яка з груп є найбільш типовою.

2.2. Максимальний стаж робітників підприємства становить 44 роки, мінімальний — 5 років, намічено утворити 5 рівних інтервалів. *Визначте* величину рівного інтервалу, вираженого цілим числом.

2.3. До яких групувальних ознак — кількісних або якісних відносяться: 1) заробітна плата робітника; 2) вид транспорту (автомобільний, залізничний, трубопровідний і т. п.); 3) розряд тарифної сітки; урожайність сільськогосподарських культур; 4) вік працівника; 5) денна норма виробітку робітника; собівартість одиниці продукції; 6) стаж робітника; продуктивність праці.

2.4. Якими групувальними ознаками — дискретними чи безперервними — є:1) товарна продукція підприємства; 2) чисельність працівників; урожайність сільськогосподарських культур; 3) процент виконання планового завдання по випуску валової продукції; 4) посівні площі сільськогосподарських культур; 5) вартість основних виробничих засобів; 6) чисельність лікарів усіх спеціальностей; 7) обсяг добування вугілля; 8) сорт продукції.

2.5. Мінімальний вік робітника становить 20 років, максимальний — 59 років, намічено утворити 5 рівних інтервалів. *Визначте* величину рівного інтервалу, вираженого цілим числом.

2.6. Виробіток товарної продукції на одного працюючого по машинобудівним заводам області склала (в тис. грн)

870	785	862	914	867	816	925	815	637	705
794	873	863	726	926	864	685	836	681	915
685	721	962	865	715	825	915	862	756	762
817	822	686	765	785	720	865	695	912	657
863	694	862	815	824	763	728	635	845	765

Побудуйте безперервний варіаційний ряд, утворивши три наступні групи підприємств за обсягом випуску товарної продукції на одного працюючого: до 700 тис. грн, 701–900 тис. грн 901 тис. грн і більше. *Вкажіть*, яка з груп є найбільш типовою.

2.7. Відомі наступні дані про ступінь виконання норми виробітку робітниками машинобудівного заводу за березень 2022 р., %

99,5	104,2	100,1	106,4	106,5	105,2	101,4	112,7	95,8	110,3
102,1	103,5	103,6	96,8	105,2	104,1	104,7	106,4	112,7	114,3
104,6	108,6	100,7	113,5	105,1	100,5	103,6	106,8	106,8	106,8
103,6	95,4	102,3	107,2	109,8	97,2	105,8	104,2	115,4	116,4
97,2	115,1	106,7	108,3	111,4	105,8	106,9	105,6	106,9	94,6

Побудуйте за цими даними: 1) емпіричний ряд розподілу (варіаційний ряд) робітників за ступенем виконання норми виробітку, виділивши п’ять робітників із рівними інтервалами; 2) ряд, який ділиться на дві групи: робітники, які не виконали планову норму виробітку та робітники, які виконали норму виробітку на 100 % та перевиконали норму виробітку. За якою групувальною ознакою побудований кожен із цих рядів: а) дискретному чи безперервному? б) якісному, кількісному чи формально якісному, а по суті якісному?

2.8. Маються наступні дані про тарифні розряди шліфувальників механічного цеху:

2	6	5	4	4	3	5	4	5	3
3	5	2	4	2	3	3	5	6	1
4	5	4	3	6	2	4	5	4	3
4	5	6	1	3	4	5	5	4	2

Побудуйте варіаційний ряд. *Вкажіть* елементи ряду розподілу, зробіть висновки про кваліфікацію робітників.

2.9. Які інтервали – рівні чи змінні (нерівні) – доцільно використати при дослідженні: 1) чисельності населення, яке проживає в міста країни; 2) розміру доходів на одну особу; 3) сільськогосподарських підприємств за рівнем урожайності; 3) промислових підприємств по числу робітни-

ків, обсягу товарної продукції, вартості основних виробничих засобів; 4) робітників промислових підприємств за розміром заробітної плати, стажем роботи, ступенем виконання норми виробітку.

2.10. Загальна чисельність робітників заводу складає 400 осіб, а мінімальна і максимальна заробітна плата — відповідно 6000 і 15000 грн.

Визначте, користуючись формулою Стерджеса, *побудуйте* постійний інтервал робітників заводу за розміром заробітної плати.

П р и м і т к а. Десятинний логарифм 400 рівний 2,60206.

2.11. Відомі наступні дані про чисельність поголів'я корів 40 сільськогосподарських підприємств району (на початок 2022 р.):

490	405	558	426	500	534	505	401	390	510
485	605	652	711	396	493	440	570	541	461
755	564	412	545	705	661	556	612	402	602
593	408	663	502	503	688	587	613	470	487

Побудуйте за цими даними емпіричний ряд розподілу (варіаційний ряд) сільськогосподарських підприємств по поголів'ю корів, виділивши в ньому 5 груп господарств з постійним — рівним інтервалом. За якою ознакою – безперервною чи дискретною — побудований ряд?

2.12. *Здійснити* перегрупування даних про рівень виконання норм виробітку робітниками двох машинобудівних заводів з метою отримання співставних показників для аналізу:

Таблиця 2.8

Завод № 1		Завод № 2	
Групи робітників за % виконання норм виробітку	Кількість робітників (в % до підсумку)	Групи робітників за % виконання норм виробітку	Кількість робітників (в % до підсумку)
До 90	3	До 100	9
90–100	5	100–120	40
100–110	36	120–140	36
110–120	25	140 і більше	15
120–130	20		
130–140	7		
140–150	4		

2.13. Маються наступні дані про тарифні розряди 60 робітників: 4, 2, 1, 2, 6, 4, 3, 4, 2, 3, 3, 5, 6, 3, 4, 5, 4, 2, 1, 3, 4, 3, 1, 6, 5, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 3, 3, 4, 6, 3, 4, 4, 4, 3, 3, 4, 6, 3, 4, 5, 5, 3, 3, 2, 4, 4, 5, 4, 3, 2, 5, 5, 3, 2. *Побудуйте* за цими даними: а) ряд розподілу робітників за тарифними розрядами; б) ряд розподілу робітників за рівнем кваліфікації, виділивши

в ньому три групи робітників: низької кваліфікації (1–2-й розряди), середньої кваліфікації (3–4-й розряди), високої кваліфікації (5–6-й розряди). За якою ознакою побудований кожен із цих рядів: а) дискретному чи безперервному? б) якісному чи кількісному?

2.14. Маються дані про продуктивність ткачів комбінату за години роботи на кожному станку (м):

Таблиця 2.9

Групи ткачів за продуктивністю праці, м	Число ткачів	Питома вага ткачів групи у відсотках до підсумку, %
3,25–3,50	4	1,0
3,50–3,75	3	0,8
3,75–4,00	21	5,3
4,00–4,25	74	18,5
4,25–4,50	102	25,5
4,50–4,75	88	22,0
4,75–5,00	62	15,5
5,00–5,25	25	6,3
5,25–5,50	7	1,8
5,50–5,75	6	1,5
понад 5,75	8	2,0
Всього	400	100,0

Здійснити перегрупування даних про рівень продуктивності праці, утворивши наступні п’ять груп ткачів: 3,0–4,0 *м* за годину, 4,0–4,5 *м* за годину, 4,5–5,0 *м* за годину, 5,0–5,5 *м* в за годину і понад 5,5 *м* за годину.

2.15. *Вкажіть*, до якого виду відносяться наступні групування:

Таблиця 2.10

Безробітні (за методологією МОП) за тривалістю пошуку роботи (в процентах)

	2015 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.
Усього безробітних	100	100	100	100
З них за тривалістю пошуку роботи, відсотків:				
до 1 міс.	10,5	12,0	11,7	17,4
від 1 до 3 міс.	23,3	26,1	28,8	22,2
від 3 до 6 міс.	23,9	19,3	22,8	28,9
від 6 до 9 міс.	11,0	9,5	9,0	11,2
від 9 до 12 міс.	7,3	6,4	6,1	7,2
12 місяців і більше	24,0	26,7	21,6	13,1

Таблиця 2.11

Виробничі основні засоби за видами промислової діяльності України на кінець 2020 р.

(за балансовою вартістю без вирахування зносу, млн грн)

Види промислової діяльності	Виробничі основні засоби — всього	Із них			
		будівлі, споруди і передавальні пристрої	машини і обладнання	транспортні засоби	інструменти, прибори, інвентар
Добувна промисловість і розроблення кар`єрів	402,0	184,4	122,6	74,5	12,3
Переробна промисловість	1061,1	485,7	386,9	176,7	46,8
Постачання електроенергії, газу, пари та кондиційованого повітря	1 425,6	1 054,2	305,3	28,4	12,7

Таблиця 2.12

Виконання плану реалізації валової продукції цехами підприємства за звітний рік

Цеха підприємства	Число цехів	Обсяг валової продукції, млн грн		Товарна продукції понад плану (+) або менше плану (–)
		по плану	фактично	
Всього по підприємству	20	250	260	+10
в тому числі:				
виконали і перевиконали план	17	215	230	+15
не виконали план	3	35	30	–5

2.16. В кожному із 40 зразків залізної руди міститься наступна кількість вуглецю, %:

2,8	2,6	2,8	2,7	2,8	2,9	2,3	2,3	2,2	2,5
3,0	2,8	2,7	2,6	2,5	2,6	2,7	2,7	2,3	2,7
2,8	3,0	3,0	2,8	2,3	2,5	2,4	2,8	2,7	2,8
2,7	2,4	2,9	2,3	2,6	2,9	2,8	2,4	2,5	2,7

Побудувати варіаційний ряд, виділивши чотири групи з рівними інтервалами. *Вказати* елементи ряду розподілу, *зробити* висновки.

2.17. Маються наступні дані, що характеризують розподіл робітників-відрядників на підприємстві в залежності від розміру заробітної плати за вересень звітного року:

Таблиця 2.13

Групи робітників-відрядників за розміром заробітної плати, грн	Число робітників-відрядників	Фонд заробітної плати, тис. грн
8 000–8 500	3	25,2
8 500–9 000	10	87,2
9 000–9 500	16	156,0
9 500–10 000	24	235,2
10 000–10 500	36	372,2
10 500–11 000	41	442,8
11 500–12 000	47	552,3
12 000–12 500	32	391,7
12 500–13 000	19	241,3
13 000–13 500	9	119,7
Понад 13 500	6	85,2

Здійснити укрупнення інтервалів даного групування, утворивши п’ять груп робітників-відрядників за розміром заробітної плати. За кожною групі *обчисліть* чисельність робітників-відрядників та середній розмір заробітної плати на одного робітника.

2.18. Розподіл сільськогосподарських підприємств області за урожайністю зернових культур характеризується наступними даними:

Таблиця 2.14

Область А		Область Б	
Групи підприємств за урожайністю, ц/га	Число підприємств, % до підсумку	Групи підприємств за урожайністю, ц/га	Число підприємств, % до підсумку
До 20	2	До 20	3
20–25	31	20–22	11
25–30	32	22–24	15
30–35	27	24–26	21
35 і більше	8	26–28	19
		28–30	8
		30–32	12
		32–35	6
		35 і більше	5
Всього	100		100

Для отриманні співставних даних за двома областями *здійсніть* шляхом укрупнення інтервалів перегрупування, утворивши п’ять груп з інтервалами області А. *Зробіть* короткі висновки.

2.19. Групування робітників токарного цеху машинобудівного заводу цеху за виробітком продукції за зміну характеризується наступними даними:

Число виробів за зміну, шт.	Число робітників
До 20	12
20–30	25
30–40	28
40–50	16
50–60	12
60 і більше	7
Всього	100

Визначити вид групування, вказати ознаку, за якою здійснювалося групування.

2.20. Групування 30-ти робітників цеху за виробітком продукції в залежності від стажу роботи характеризується наступними даними:

Стаж роботи, років	Число робітників	Вироблено продукції, грн
До 1	5	1 200
1–3	8	1 425
3–5	6	1 628
5–10	5	1 816
10–20	4	2 112
20 і більше	2	2 352
Всього	30	10 533

Визначити вид групування і ознаку, за якою здійснювалося групування.

2.21. Мається групування сільськогосподарських підприємств за чисельністю корів у звітному періоді на одне господарство:

Таблиця 2.15

Групи сільськогосподарських підприємств за кількістю корів, голів	Кількість підприємств
До 10	17
10–40	35
40–100	76
100–180	54
180–300	40
300–400	28
Більше 400	11
Всього	261

Зробити перегрупування даних, утворивши групи з наступними інтервалами: до 50, 50–100, 100–200, 200–300, більше 300.

2.22. Виробничий стаж 40 робітників цеху характеризується наступними даними (років):

2	6	12	5	7	9	5	8	3	5
15	25	7	15	9	18	6	1	3	4
1	8	1	4	6	15	17	6	1	3
24	14	11	9	4	1	5	6	16	5

Побудуйте варіаційний ряд, виділивши групи з рівними інтервалами. *Вкажіть* елементи ряду розподілу, *зробіть* висновки.

2.23. Маються наступні дані про 90 валиків:

Таблиця 2.16

Номер п/п	Діаметр (в *мм*)	Номер п/п	Діаметр (в *мм*)	Номер п/п	Діаметр (в *мм*)
1	48,943	31	48,947	61	48,952
2	947	32	953	62	943
3	962	33	942	63	937
4	958	34	944	64	937
5	951	35	943	65	937
6	947	36	948	66	935
7	938	37	944	67	948
8	945	38	945	68	950
9	944	39	936	69	927
10	942	40	958	70	939
11	953	41	941	71	950
12	936	42	926	72	951
13	947	43	935	73	945
14	921	44	940	74	942
15	936	45	948	75	943
16	935	46	937	76	930
17	944	47	949	77	936
18	938	48	944	78	939
19	935	49	938	79	934
20	946	50	951	80	935
21	932	51	934	81	930
22	946	52	950	82	937
23	942	53	952	83	952
24	939	54	934	84	940
25	951	55	946	85	951
26	946	56	933	86	935
27	941	57	949	87	931
28	948	58	947	88	938
29	941	59	935	89	950
30	946	60	943	90	943

Побудуйте варіаційний ряд із рівними інтервалами. Виділіть п’ять груп.

2.24. Припустимо, що обсяг виготовленої продукції кожним робітником становить (в тис. грн):

1,9	2,4	2,6	2,8	3,1	3,3	3,4	2,7	3,0	3,2	2,6	2,7
3,2	2,9	3,7	3,1	2,5	2,4	2,8	3,4	3,3	3,5	2,9	2,8
3,1	2,6	2,8	3,7	3,2	2,5	2,6	2,9	3,1	2,0	3,1	3,9
2,6	2,8	2,6	2,8	3,1	2,7	3,2	2,0	2,8	2,3	2,6	3,2

2,8	3,1	2,9	3,3	2,6	2,9	2,9	2,6	3,2	2,7	2,4	3,1
3,3	2,8	3,1	2,7	3,3	3,0	2,6	2,8	2,8	2,5	3,5	2,6
2,4	3,4	2,8	3,6	2,3	2,9	2,4	2,1	2,4	2,6	3,8	4,1
3,1	2,6	3,3	2,8								

Побудуйте інтервальний ряд, утворивши 8 груп з рівними інтервалами. За кожною групою обчисліть: 1) частоти; 2) центри інтервалів; 3) нагромаджені частоти.

2.2. Побудова групування типологічного, структурного і аналітичного

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Статистичні ряди розподілу дозволяють упорядкувати і узагальнити первинний матеріал статистичного дослідження. Проте він не дозволяє дати всебічну характеристику виділених груп. Для того, щоб виявити особливості розвитку явища, установити взаємозв'язки та закономірності між ними, необхідно здійснити групування статистичних даних.

Групування — процес утворення груп одиниць сукупностей, однорідних в якому-небудь відношенні, а також мають однакові або близькі значення групувальної ознаки. У найбільш загальної змістовній постановці завдання угруповання полягає в цілеспрямованому формуванні однорідних груп об'єктів спостереження. Статистичні групування застосовуються на вирішення трьох завдань: 1) виявлення у складі досліджуваної сукупності одноякісних груп (соціально-економічних типів); 2) для характеристики структури явища та структурних зрушень; 3) виявлення взаємозв'язку між окремими ознаками досліджуваного явища.

Для здійснення групування необхідно визначити групувальну ознаку і розробити систему показників, якими будуть характеризуватися виділені групи. Залежно від цього, які завдання вирішуються з допомогою методу групувань, розрізняють такі види останніх: типологічні, структурні, аналітичні.

До *типологічних групувань* відносять всі групування, які характеризують якісні особливості та відмінності між типами явищ. Завдання типологічного групування полягає у виділенні типів, які становили якісно-однорідні групи. За основу групування повинні бути взяті найбільш суттєві ознаки, які безпосередньо характеризують сутність явища.

Прикладом типологічного групування можуть служити дані про додану вартість за витратами виробництва суб'єктами підприємницької

діяльності в Україні (%):

Таблиця 2.17

Суб'єкти підприємницької діяльності	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Всі суб'єкти	100	100	100	100
Суб'єкти великого підприємництва	37,4	35,7	33,6	29,8
Суб'єкти середнього підприємництва	38,6	38,4	39,8	36,5
Суб'єкти малого підприємництва	24,0	25,9	26,6	33,7

Дані таблиці наочно свідчать про зміну структури виробництва валової доданої вартості в Україні за 2017–2020 рр. Так, частка суб'єктів великого підприємництва у виробництві валової доданої вартості знизилася з 37,4 % у 2017 р. до 29,8 % у 2020 р., в той же час частка суб'єктів малого підприємництва зросла відповідно з 24,0 до 33,7 %.

Якщо типологічні групування мають головним чином пізнавальне значення, то структурні групування служать переважно для отримання висновків про поточний стан господарства, використовуються для оперативного керівництва роботою підприємств і галузей, служать базою для виявлення та розрахунку наявних у господарстві резервів. Прикладом можуть служити групування підприємств за чисельністю робітників, затратами на виробництво продукції, товарооборотом і т. п. Наприклад, групування населення за віком необхідно для проведення різних розрахунків, пов'язаних із медичним, культурним, побутовим забезпеченням населення. Велике значення структурних угруповань у сфері вивчення концентрації, спеціалізації та територіального розміщення промислових та сільськогосподарських, торгових, будівельних та інших підприємств та організацій.

За допомогою *структурного групування* насамперед вивчається внутрішня структура типів, статистичних сукупностей. Вони дають інформацію про те, з яких елементів складається чисельність явища, яка будова типів явищ і якими показниками характеризуються окремі частини. Проте в окремих випадків досліджується і структура статистичних сукупностей, неоднорідних в окремих відношеннях явищ. Наприклад, досліджується структура сільськогосподарських підприємств району, структура товарообороту. Структурні групування дозволяють охарактеризувати частини однорідного явища, виявляють резерви, тенденції розвитку явищ.

Структурне угруповання проводиться у три етапи: 1) вибір групувальних ознак, за якими здійснюватиметься угруповання; 2) виділення груп (інтервалів) за групувальними ознаками; 3) безпосереднє угрупо-

вання матеріалу та характеристика виділених груп та підгруп статистичними показниками.

Розглянемо порядок складання структурного групування.

Задача № 5. Маються вихідні дані про вік 24-х робітників підприємства.

Таблиця 2.18

№ п/п	Вік	№ п/п	Вік	№ п/п	Вік	№ п/п	Вік
1	23	7	16	13	34	19	25
2	19	8	19	14	23	20	16
3	28	9	26	15	18	21	19
4	34	10	21	16	24	22	27
5	30	11	23	17	29	23	29
6	14	12	28	18	19	24	37

Розділити однорідну в якісному відношенні сукупність одиниць на чотири групи, та *визначити* її структуру (тобто скласти структурне угруповання). Групи робітників за віком становитимуть: 14–17, 18–24, 25–29, 30 років та старше.

Рішення

Структурним угрупованням називається розчленування однорідної в якісному відношенні сукупності одиниць на групи, що характеризують будову сукупності, її структуру. Побудова структурного угруповання вирішується у два етапи. На першому етапі первинні явища групують за віком залежно від обраних інтервалів (у нашому прикладі інтервали дані в умові завдання). Підсумкові дані зведені у табл. 2.19.

Таблиця 2.19

Групування робітників за віком
(в процентах до підсумку)

Групування осіб за віком, років	Кількість осіб	В % до підсумку
Число робітників — всього	24	100
В том числі у віці, років:		
14–17	3	12,5
18–24	9	37,5
25–29	7	29,2
30 лет і старше	5	20,8

На другому етапі розраховується питому вагу кожної групи. Для визначення структури робітників за віком необхідно абсолютні значен-

ня окремих груп поділити на загальний підсумок та помножити на 100:

$$d_i = \frac{П_i}{\sum П_i} \cdot 100,$$

де d_i — відносний показник структури;

$П_i$ — окремі частини сукупності явища.

Питома вага гру складе:

1-ої групи (14–17 років) $\frac{3}{24} \cdot 100\,\% = 12{,}5\,\%;$

2-ої групи (18–24 роки) $\frac{9}{24} \cdot 100\,\% = 37{,}5\,\%;$

4-ої групи (25–29 років) $\frac{7}{24} \cdot 100\,\% = 29{,}2\,\%;$

5-ої групи (30 років і старше) $\frac{5}{24} \cdot 100\,\% = 20{,}8\,\%.$

Дані, отримані в результаті розрахунків, заносить до другого стовпчика структурної таблиці.

За допомогою факторних групувань встановлюються та вивчаються причинно-наслідкові зв'язки між ознаками однорідних явищ, виявляються фактори розвитку сукупності. *Аналітичні групування* — групування, що виявляє взаємозв'язки між досліджуваними явищами та ознаками. Вони засновані на вивченні того, як у масових явищах зі зміною однієї або декількох факторних ознак змінюється результативний ознака. Взаємопов'язані ознаки поділяються на факторні ознаки і результативні ознаки. *Факторні* — це ознаки, які здійснюють вплив на інші, пов'язані із ним ознаки. *Результативні* — ознаки, які змінюються під впливом факторних. Аналітичні групування засновані на вивченні того, як у масових явищах зі зміною однієї чи кількох факторних ознак змінюється результативна ознака.

Щоб дослідити взаємозв'язки між досліджуваними ознаками за допомогою методу аналітичних групувань, необхідно здійснити групування одиниць сукупності за факторною ознакою і за кожною групою обчислити середні значення результативної ознаки. Коливання результативної ознаки від однієї групи до іншої, що відбувається під впливом факторної ознаки, буде свідчити про наявність або відсутністю взаємозв'язку.

Задача 6. Розглянемо застосування методу аналітичних групувань. Маються дані про середньорічну вартість основних засобів, випуск продукції та середньооблікову чисельність робітників 25 заводів однієї із галузей промисловості (табл. 2.20).

В якості задачі виявимо в даній галузі розподіл підприємств за

обсягом основних засобів, а також вплив цього фактору на розмір товарної продукції. В якості факторної ознаки візьмемо вартість основних засобів. Розіб'ємо нашу сукупність, що представлена 25 заводами однієї галузі, на 5 груп з рівними інтервалами.

Таблиця 2.20

Номер п/п	Середньорічна вартість основних виробничих засобів, тис. грн	Випуск товарної продукції, тис. грн	Середньооблікова чисельність промислово-виробничого персоналу, осіб
1	34,2	36,2	288
2	79,8	108,6	304
3	31,9	31,6	176
4	44,2	47,5	368
5	37,6	72,3	316
6	22,8	17,1	224
7	74,1	106,2	464
8	75,2	134,5	464
9	37,6	28,3	272
10	53,6	39,6	216
11	30,8	26,0	272
12	22,8	19,5	160
13	34,2	15,8	160
14	35,3	33,9	200
15	35,3	28,3	248
16	45,6	31,6	360
17	35,3	40,7	508
18	67,2	90,5	320
19	39,9	28,3	248
20	39,9	89,3	328
21	11,4	18,1	240
22	79,9	152,6	264
23	51,3	63,4	208
24	55,9	51,6	348
25	63,8	52,3	404

Визначимо величину інтервалу:

$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\textit{число груп}} = \frac{79,9 - 11,4}{5} = 13,7.$$

Тепер утворимо групи заводів, які відрізняються за розміром основних засобів (млн грн): I група – від 11,4 млн грн до 25,1 млн грн; II група — від 25,1 до 38,8; III група — від 38,8 до 52,5; IV група — від 52,5 до 66,2; V група — від 66,2 до 79,9 млн грн.

Складемо макет таблиці із системою показників, куди занесемо результати групування (табл. 2.21).

Таблиця 2.21

Номер п/п	Групи підприємств за середньорічною вартістю основних виробничих засобів, млн грн	Підприємства		Середньорічна вартість основних засобів		Число робітників		Товарна продукція	
		число підприємств	в % до підсумку	млн грн	в % до підсумку	осіб	в % до підсумку	млн грн	в % до підсумку
А	Б	1	2	3	4	5	6	7	8
I	11,4—25,1								
II	25,1—38,8								
III	38,8—52,5								
IV	52,5—66,2								
V	66,2—79,9								
	Всього								

Для заповнення макету таблиці попередньо складемо робочу таблицю (табл. 2.22).

Таблиця 2.22

Номер п/п	Групи підприємств за середньорічною вартістю основних виробничих засобів, млн грн	Номер заводу	Основні виробничі засоби, млн грн	Число робітників	Товарна продукція, млн грн
А	Б	1	2	3	4
I	11,4—25,1	6 12 21	22,8 22,8 11,4	224 160 240	17,1 19,5 18,1
	Всього	3	57,0	624	54,7
II	25,1—38,8	1 3 11 13 14 15 17 5 9	34,2 31,9 30,8 34,2 35,3 35,3 35,3 37,6 37,6	288 176 272 160 200 248 508 316 272	36,2 31,6 26 15,8 33,9 28,3 40,7 72,3 28,3
	Всього	9	312,2	2 440	313,1

Продовження табл. 2.22

А	Б	1	2	3	4
III	38,8—52,5	4 16 19 20 23	44,2 45,6 39,9 39,9 51,3	368 360 248 328 208	47,5 31,6 28,3 89,3 63,4
	Всього	5	220,9	1 512	260,1
IV	52,5—66,2	10 24 25	53,6 55,9 63,8	216 348 404	39,6 51,6 52,3
V	66,2—79,9	2 7 8 18 22	79,9 74,1 75,2 67,2 79,9	304 464 464 320 264	108,6 106,2 134,5 90,5 152,6
	Всього	5	376,3	1 816	592,4
	Разом	25	1 139,7	7 360	1363,8

Після заповнення допоміжної таблиці занесемо отримані цифрові дані в макет таблиці та отримаємо кінцеву групову таблицю з результатами групування заводів за обсягом середньорічної вартості основних виробничих засобів (табл. 2.23).

Таблиця 2.23

Номер п/п	Групи підприємств за середньорічною вартістю основних виробничих засобів, млн грн	Підприємства		Середньорічна вартість основних засобів		Число робітників		Товарна продукція	
		число підприємств	в % до підсумку	млн грн	в % до підсумку	осіб	в % до підсумку	млн грн	в % до підсумку
А	Б	1	2	3	4	5	6	7	8
I	11,4—25,1	3	12,0	57,0	5,0	624	8,5	54,7	4,0
II	25,1—38,8	9	36,0	312,2	27,4	2 440	33,2	313,1	23,0
III	38,8—52,5	5	20,0	220,9	19,4	1 512	20,5	260,1	19,1
IV	52,5—66,2	3	12,0	173,3	15,2	968	13,2	143,5	10,5
V	66,2—79,9	5	20,0	376,3	33,0	1 816	24,7	592,4	43,4
	Всього	25	100,0	1 139,7	100,0	7 360	100,0	1 363,8	100,0

На основі даних таблиці можна зробити ряд важливих висновків. Дане групування свідчить, заводи із вартістю основних засобів V групи виробляють 41,3 % всієї продукції. При цьому чисельність робітників на підприємствах цієї групи склала лише 24,7 % від їх загальної чисельності. Виділені групи можна охарактеризувати і за такими економічними показниками, як випуск продукції на 1 грн вартості основних виробничих засобів, продуктивність праці, виробництво продукції на 1 завод та ін.

Задача 7. За даними табл. 2.20 дослідити вплив вартості основних виробничих засобів на показники ефективності використання основних засобів та робочої сили.

Рішення

З економічної теорії відомо, що із зростанням маси основних виробничих засобів підвищується економічна ефективність використання капіталу підприємства. Отже, в якості факторної ознаки візьмемо середньорічну вартість основних засобів. В якості показника ефективності використання основних засобів візьмемо фондовіддачу, а показника ефективності використання робочої сили — виробництво товарної продукції на одного робітника (продуктивність праці). Здійснимо групування за розміром основних засобів та візьмемо ті ж п’ять груп. Отримаємо зведену таблицю, що характеризує залежність між розміром основних засобів та показниками економічної ефективності.

Таблиця 2.24

Групи підприємств за середньорічною вартістю основних виробничих засобів, млн грн	число підприємств	Середньорічна вартість основних засобів, млн грн		Товарна продукція, млн грн		Число робітників	Товарна продукція на 1 робітника, тис. грн	Товарна продукція на 1 основних засобів (фондовіддача), грн
		Всього по групі	В середньому на один завод	Всього по групі	В середньому на один завод			
А	1	2	3	4	5	6	7	8
11,4—25,1	3	57,0	19,00	54,7	18,23	624	87,7	0,96
25,1—38,8	9	312,2	34,69	313,1	34,79	2 440	128,3	1,00
38,8—52,5	5	220,9	44,18	260,1	52,02	1 512	172,0	1,18
52,5—66,2	3	173,3	57,77	143,5	47,83	968	148,2	0,83
66,2—79,9	5	376,3	75,26	592,4	118,48	1 816	326,2	1,57
Всього	25	1 139,7	45,59	1 363,8	54,55	7 360	185,3	1,20

В таблиці наглядно видно, що між вартістю основних засобів та

показниками економічної ефективності існує прямий зв'язок, який проявляється у тому, що при збільшенні розміру основних фондів підвищується фондовіддача та продуктивність праці.

Економічна ефективність виробництва у значній мірі залежить не лише від вартості основних засобів, але й від чисельності працюючих, технічного стану основних засобів, наявністю виробничих запасів та ін. Відбираючи необхідні фактори, можна дослідити характер залежності між економічною ефективністю та вибраними факторами.

Задачі

2.25. Маються наступні дані про господарську діяльність промислових підприємств однієї галузі (див. табл. 2.25).

Таблиця 2.25

№ п/п	Промислово-виробничі основні засоби (млн грн)	Середньо-облікове число працюючих	Товарна продукція (млн грн)	№ п/п	Промислово-виробничі основні засоби (млн грн)	Середньо-облікове число працюючих	Товарна продукція (млн грн)
1	100,8	273	180,3	26	77,6	208	110,6
2	6,7	20	10,7	27	41,4	230	122,9
3	59,6	300	161,6	28	81,2	218	119,2
4	9,1	36	12,3	29	124,1	319	220,4
5	47,2	121	62,3	30	10,5	53	34,5
6	35,6	98	30,2	31	7,1	37	14,8
7	8,2	88	27,5	32	4,1	44	17,5
8	43,2	96	48,4	33	4,0	20	10,7
9	73,2	191	103,8	34	5,7	70	26,8
10	13,5	85	24,7	35	8,4	45	18,3
11	4,4	30	11,5	36	7,7	29	10,4
12	58,6	124	65,1	37	5,1	44	19,3
13	10,5	45	16,7	38	10,8	52	27,1
14	24,8	91	26,8	39	88,1	217	151,8
15	30,2	250	10,6	40	12,2	51	19,8
16	15,4	108	54,6	41	40,1	180	68,7
17	65,7	175	84,6	42	100,1	191	114,5
18	102,3	198	126,8	43	52,8	181	90,8
19	12,6	103	43,5	44	72,1	210	113,6
20	20,8	170	71,8	45	33,0	90	33,7
21	13,8	92	38,2	46	7,4	70	22,8
22	85,1	320	218,6	47	13,8	100	34,3
23	21,3	121	45,3	48	22,7	97	27,4
24	14,5	82	31,1	49	35,1	110	40,2
25	4,1	25	11,9	50	66,4	185	91,8

Складіть групову аналітичну таблиці і *проаналізуйте*, в якій мірі зростання технічної оснащеності підприємств впливає на зростання товарної продукції.

2.26. На основі наведених в задачі 2.25 даних *здійсніть* групування підприємств за середньообліковою чисельністю робітників, утворивши чотири групи з рівними інтервалами. За кожною групу і в цілому *підрахуйте*: 1) кількість підприємств; 2) середньооблікову чисельність працюючих; 3) обсяг товарної продукції, виробленої всіма працюючими; 4) виробництво товарної продукції на одного працюючого.

2.27. На основі приведених в задачі 2.25 даних *здійсніть* групування підприємства одночасно за вартістю основних виробничих засобів і середньооблікової кількості працівників. За кожною групую *підрахуйте*: 1) число підприємств; 2) вартість основних виробничих засобів; 3) середньооблікову кількість працюючих; 4) товарну продукцію в середньому на одне підприємство; 5) виробіток товарної продукції, що приходиться на одного працюючого. *Складіть* групову аналітичну таблицю та проаналізуйте, в якій мірі вартість основних засобів та кількість працюючих впливає на обсяг виробництва товарної продукції.

2.28. На основі приведених в задачі 2.25 даних *здійсніть* групування за середньообліковою чисельністю працюючих, утворивши три групи з рівними інтервалами. За кожною групою *розрахуйте*: а) кількість підприємств; 2) середньооблікову чисельність працюючих; 3) обсяг товарної продукції; 4) обсяг товарної продукції, виробленої в середньому на одного працюючого. *Складіть* аналітичну таблиці і проаналізуйте, в якій мірі зростання чисельності працюючих впливає на обсяг товарної продукції.

2.29. До складу великого холдингу входять 15 підприємств. На 1-е березня 2022 р. число робочих розподілялося по підприємствах наступним чином:

Таблиця 2.26

№ підприємств	Число робітників за списком на 1-е березня 2022 р.	№ підприємств	Число робітників за списком на 1-е березня 2022 р.
№ 1	375	№ 9	3 533
№ 2	2 392	№ 10	630
№ 3	1 027	№ 11	3 646
№ 4	3 821	№ 12	315
№ 5	3 644	№ 13	2 464
№ 6	525	№ 14	415
№ 7	1 560	№ 15	1 413
№ 8	240		

На основі наведених даних *побудувати* таблицю «Угруповання підприємств холдингу за кількістю робочих на 1-е березня 2022 р.», поклавши в основу угруповання ознака чисельності робітників за такими інтервалом: а) до 1000 чоловік, б) 1000–1999, в) 2000–2999, г) 3000 чоловік і вище. *Підрахувати* в кожній групі число підприємств і загальне число робочих.

2.30. Маються наступні дані про роботу 25 продовольчих магазинів за звітний період:

Таблиця 2.27

Номер магазину	Товарообіг (виручка від продажу товарів), тис. грн	Середньооблікова чисельність робітників магазину, осіб	Затрати обігу (витрати магазина по реалізації товарів)	
			сума, тис. грн	в процентах до обороту $\left(\frac{гр.3}{гр.1}\times 100\right)$
А	1	2	3	4
1	511	20	30,5	6,0
2	705	24	39,8	5,6
3	1 024	29	50,2	4,9
4	1 100	31	53,1	4,8
5	1 504	35	60,4	4,0
6	507	22	29,8	5,9
7	1 317	28	58,3	4,4
8	725	24	38,7	5,3
9	1 374	31	57,8	4,2
10	864	25	41,6	4,8
11	1 228	30	53,7	4,4
12	953	27	54,3	5,7
13	1 141	29	52,6	4,6
14	1 076	28	51,8	4,8
15	587	23	34,5	5,9
16	1 465	33	63,7	4,3
17	1 201	34	63,8	5,3
18	1 318	32	61,3	4,7
19	1 016	33	49,8	4,9
20	986	28	54,7	5,5
21	685	27	40,2	5,9
22	571	24	34,6	6,1
23	1 060	30	47,2	4,5
24	883	29	48,6	5,5
25	1 284	35	62,7	4,9

З метою визначення зв’язку між обсягом товарообігу, затратами обігу та навантаженням робітників *здійсніть* групування магазинів за величиною товарообігу, утворивши 4 групи. За кожною групою і в

цілому підрахуйте: 1) кількість магазинів; 2) середньооблікову кількість робітників; 3) обсяг товарообороту; 4) суму витрат обігу; 5) рівень витрат обігу в процентах до обороту; 6) середнє навантаження на одного працюючого.

2.31. *Побудувати* таблицю «Угруповання робочих бригади слюсарів-складальників за розміром одержуваної заробітної плати за вересень місяць 2022 р.» на основі наступних даних, поклавши в основу угруповання в підлягає розмір отриманої заробітної плати: а) до 10000 грн, б) 10001–11000, в) 11001–12000, г) 12001 грн і вище.

Таблиця 2.28

№ по пор.	Фамілія робітника	Сума заробітної плати за вересень, грн	№ по пор.	Фамілія робітника	Сума заробітної плати за вересень, грн
1	Петров	12 785	11	Ніколаєнко	9 387
2	Волков	8 641	12	Загородній	8 965
3	Тихонов	9 154	13	Єфремов	11 865
4	Підгорний	12 982	14	Соколіцин	10 431
5	Смирнов	8 786	15	Вознесенський	12 178
6	Семенов	9 287	16	Летенко	11 965
7	Тимофєєв	8 985	17	Ліберман	10 652
8	Козлов	11 874	18	Разумов	9 854
9	Іванов	10 425	19	Ітін	10 652
10	Карпов	12 145	20	Бакланов	10 741

2.32. Відомі дані за звітний місяць по ділянкам механічного цеху машинобудівного заводу:

Таблиця 2.29

Номер ділянки цеху	Обсяг валової продукції	
	по плану	фактично
1	200	201
2	255	250
3	182	192
4	324	315
5	400	438
6	211	200
7	352	373
8	293	302
9	302	313
10	186	192
11	243	260
12	625	605

1) *Здійснити* групування ділянок механічного цеху за процентом

виконання плану виробництва валової продукції, виділивши чотири групи ділянок: не виконали план, виконали до 105 %, виконали план від 105 до 110 %, виконали план на 110 % і більше.

2) По кожній групі *підрахувати* число ділянок, їх питому вагу в загальному підсумку, плановий, фактичний обсяг виробництва валової продукції, приріст або втрати обсягу валової продукції. Кінцеві результати оформити в підсумкову статистичну таблицю.

2.33. По 30 підприємств легкової промисловості за звітний рік маються наступні дані:

Таблиця 2.30

Номер п/п	Середньорічна вартість основних виробничих засобів, тис. грн	Випуск товарної продукції, тис. грн	Середньооблікова чисельність промислово-виробничого персоналу, осіб
1	15 254	26 542	423
2	26 542	65 845	528
3	11 352	19 654	385
4	10 965	16 354	371
5	17 654	21 685	398
6	13 654	26 854	402
7	9 600	13 653	352
8	16 854	31 698	429
9	26 600	58 354	512
10	16 965	26 542	437
11	13 654	18 754	384
12	15 632	17 853	405
13	19 865	28 654	462
14	22 415	48 659	512
15	19 865	42 365	467
16	20 540	43 652	469
17	21 654	48 652	475
18	14 658	26 854	418
19	16 952	35 421	421
20	20 865	42 563	487
21	16 584	24 658	405
22	15 854	20 854	385
23	10 754	17 854	384
24	13 654	19 854	354
25	18 652	40 325	458
26	19 654	45 857	487
27	14 254	29 845	375
28	16 754	21 854	305
29	19 854	26 547	345
30	24 865	39 854	398

1) *Здійснити* групування підприємств за середньорічною вартістю

основних виробничих засобів. *Визначити* самостійно 5 груп. Кожну групу *охарактеризувати* числом підприємств, сумою основних виробничих фондів, випуском товарної продукції та середньооблікової чисельності персоналу. Поряд з абсолютними показниками за групами *обчисліть* їх процентне співвідношення. Результати групування *представити* у вигляді таблиці, *сформулювати* висновки.

2) *Побудувати* комбінаційну таблицю з метою виявлення залежності продуктивності праці від розмірів підприємства за вартістю основних виробничих засобів та обсягу товарної продукції.

2.34. За даними задачі 2.33 *здійсніть* групування за вартістю основних виробничих засобів, виділивши чотири групи з рівними інтервалами. *Підрахуйте* групові та загальні підсумки за наступними показниками: а) число підприємств; б) вартість основних виробничих засобів (тис. грн); середньооблікова чисельність промислово-виробничого персоналу; в) товарна продукція (тис. грн). Результати підрахунку *оформіть* у вигляді таблиці та *проаналізуйте* отримані дані.

2.35. Маються наступні дані про вартість та вік 15 одиниць обладнання токарного цеху:

Таблиця 2.31

Номер станка	Технічна придатність обладнання	Термін використання обладнання, років	Вартість обладнання, тис. грн
1	Придатне обладнання	3,6	542,1
2	Придатне обладнання	2,1	254,3
3	Обладнання, що потребує капітального ремонту	5,6	658,2
4	Непридатне обладнання, що підлягає списанню	7,2	54,9
5	Обладнання, що потребує капітального ремонту	3,6	186,7
6	Придатне обладнання	6,4	398,1
7	Придатне обладнання	5,6	795,2
8	Непридатне обладнання, що підлягає списанню	7,9	125,4
9	Придатне обладнання	5,3	468,1
10	Придатне обладнання	1,8	658,2
11	Непридатне обладнання, що підлягає списанню	8,2	354,8
12	Придатне обладнання	4,3	652,1
13	Обладнання, що потребує капітального ремонту	2,8	598,1
15	Придатне обладнання	3,6	402,8
15	Непридатне обладнання, що підлягає списанню	5,4	496,2
16	Придатне обладнання	6,7	286,4
17	Придатне обладнання	6,2	496,2
18	Обладнання, що потребує капітального ремонту	4,1	286,7
19	Непридатне обладнання, що підлягає списанню	4,3	384,2
20	Обладнання, що потребує капітального ремонту	3,8	421,3

На основі даних *приведіть* групування обладнання одночасно по терміну використання і технічної придатності обладнання. *Утворіть* 3 групи з рівними інтервалами. За кожною групою *підрахуйте*: 1) число одиниць обладнання; 2) середній термін використання обладнання; 3) вартість обладнання. Результат *представте* у вигляді комбінаційної таблиці і проаналізуйте, в якій мірі технічний стан та термін корисного використання основних засобів впливає на їх вартість.

2.36. За даними задачі 2.33 *побудуйте* групування підприємств за середньооблiковою чисельністю промислово-виробничого персоналу. Оберіть число груп і вид інтервалів — рівних і нерівних. *Підрахуйте* групові і загальні підсумки по наступним показникам: а) число підприємств; б) середньооблікове число промислово-виробничого персоналу; в) товарна продукція (всього і в середньому на одне підприємство; тис. грн); г) випуск продукції на одного працівника. Результати підрахунку *оформіть* у вигляді групової таблиці. *Проаналізуйте* отримані результати і *зробіть* висновки.

2.37. Маються наступні дані про основних робітників, що характеризують їх стаж, вік, розряд, форми та розмір оплати праці, ступінь виконання норм (див. табл. 2.32).

Здійснити групування робітників:

1) за формою оплати праці;

2) за стажем роботи, виділивши наступні групи:

До 1 року	10–20 років
1–10 років	20–30 років
	30 років і більше

3) за ступенем виконання норм, виділивши наступні групи:

До 100 %	105–110 %
100–105 %	110–115 %
	115 % і більше

4) за розміром заробітної плати, виділивши наступні, виділивши наступні групи:

До 9000 грн	10000–11000 грн
9000–10000 грн	11000–12000 грн
	12000 грн і більше

5) за віком, виділивши наступні групи:

До 20 років	30–40 років
20–30 років	40–45 років
	45 років і більше

Результати підрахунків групових та загальних підсумків *представте* у вигляді таблиці та *сформулюйте* її заголовок.

Таблиця 2.32

Табельний номер	Фамілія, і. п.	Тарифний розряд	Форма оплати праці	Стаж роботи (роки)	Ступінь виконання норми виробітку	Заробітна плата (грн)	Вік	Професія
001	Петров В. С.	IV	Погодинна	21	112	10 580	44	Слюсар
002	Казинец Л. В.	IV	Відрядна	10	117	11 060	36	Токар
003	Возкресенський В. Ю.	VI	»	9	120	13 650	32	»
004	Дімідов К. В.	V	»	24	106	13 790	46	Механік
005	Клімов А. С.	III	»	14	102	11 380	35	Токар
006	Сєргєєв Т. О.	I	Погодинна	0,5	100	80 80	24	Механік
007	Хотенко Р. К.	VI	Відрядна	26	113	11 750	47	Токар
008	Лукінов В. К.	V	Погодинна	31	100	12 100	54	Слюсар
009	Ніколаєнко Ю. П.	VI	»	6	102	13 120	36	»
010	Волков С. І.	IV	Відрядна	1	101	10 600	25	Токар
011	Чугунов Т. А.	IV	»	31	104	11 380	53	»
012	Попов В. С.	III	Погодинна	9	103	10 600	31	Слюсар
013	Федоров К. В.	VI	»	10	112	13 890	33	»
014	Клочко О. С.	IV	Відрядна	33	112	12 040	56	Токар
015	Голованов А. В.	II	Погодинна	4	102	9 300	25	Слюсар
016	Воробйов К. С.	IV	Відрядна	17	107	11 640	39	»
017	Богомолов І. М.	V	Погодинна	6	102	11 800	28	Слюсар
018	Афанасьєв М. А.	III	Відрядна	12	100,3	10 850	33	Токар
019	Чернишов С. І.	I	Погодинна	0,5	98	8 050	23	Механік
020	Дорошев В. С.	II	Відрядна	6	118	9 800	27	Токар
021	Кузьмін М. А.	IV	»	8	102,4	10 690	28	»
022	Лобоз Н. В.	IV	Погодинна	5	103	10 200	27	Механік
023	Іванов К. С.	V	»	14	102	13 180	37	»
024	Альошин В. Р.	I	Відрядна	1	98,7	8 200	21	Токар
025	Мінаєв Р. В.	III	»	10	103	11 020	31	»
026	Колосов К. М.	II	Погодинна	3	100	9 250	23	Механік
027	Єгоров Є. В.	V	»	27	107	13240	49	Слюсар

2.38. За наведеними в задачі 2.37 *побудуйте* наступні комбінаційні групування: 1) за статтю і кваліфікації; 2) за стажем роботи і статтю. Кожну виділену підгрупу охарактеризуйте двома показниками: а) число робітників; б) нарахована заробітна плата. *Підрахуйте* групові та загальні підсумки за цими показниками і сформулюйте заголовки побудованих вами таблиць.

2.39. В результаті обстеження 30 підприємств за звітний рік отримані наступні дані про використання робочого часу робітниками:

Таблиця 2.33

Номер п/п	Середньооблікова чисельність промислово-виробничого персоналу, осіб	Відпрацьовано робітниками, тис. люд.-днів	Внутрішньозмінні простої, люд.-днів	Відпрацьовано понаднормово, тис. люд.-год.	Втрати робочого часу, тис. люд.-днів
1	2 137	505,6	1,5	3,6	6,5
2	3 405	787,2	0,4	97,4	3,2
3	21 231	6 237,3	74,8	90,2	44,2
4	32 421	7 816,8	99,2	71,4	75,1
5	23 837	5 723,1	52,4	114,2	26,7
6	13 062	3 242,3	25,2	768,1	40,8
7	8 125	1 918,8	1,3	195,2	18,4
8	4 551	1 024,1	0,5	7,4	13,1
9	928	207,9	4,1	1,7	14,5
10	7 846	1 824,5	53,4	403,2	21,7
11	4 382	1 083,4	16,3	23,2	12,7
12	5 648	1 233,4	0,3	15,7	10,2
13	16 035	3 812,7	28,4	31,5	60,7
14	11 905	2 857,6	44,8	568,9	20,8
15	11 436	2 807,9	3,5	549,8	12,3
16	5 186	626,4	3,1	2,6	8,2
17	4 113	954,7	0,1	71,5	8,2
18	2 689	653,8	0,1	2,8	2,2
19	5 658	1 306,7	10,3	0,2	2,6
20	3 212	749,2	34,1	16,8	10,1
21	17 123	4 132,1	35,2	53,7	23,8
22	13 941	3 271,4	13,5	19,8	27,1
23	41 513	10 342,1	243,8	1 946,5	50,8
24	9 643	2 224,3	15,1	16,3	15,4
25	5 378	1 562,9	1,1	71,5	27,1
26	927	207,8	4,1	1,7	14,8
27	4 548	1 024,2	0,5	7,6	12,8
28	8 126	1 918,7	1,3	195,1	18,2
29	13 053	3 242,8	25,3	768,6	41,6
30	23 846	5 725,3	52,7	112,8	26,7

Згрупуйте підприємства за середньообліковою чисельністю працівників, виділивши три групи підприємств (малі, середні та великі).

За кожною групою *обчисліть* число підприємств і показники використання робочого часу. Результати оформіть в наступну таблицю:

Таблиця 2.34

Групи підприємств за середньообліковою чисельністю промислово-виробничого персоналу, осіб	Всього підприємств	Відпрацьовано робітниками, тис. люд.-днів		Втрати робочого часу, тис. люд.-днів		Втрати робочого часу в % до відпрацьованого часу (гр. 4 : гр. 2)
		всього	на одному підприємстві	всього	на одному підприємстві	
А	1	2	3	4	5	6
Малі Середні Великі						

Проведіть порівняльний аналіз виділених груп і *напишіть* аналітичну записку.

2.40. Виконання встановлених норм виробітку 30-ти токарями механічного цеху за травень 2022 р. характеризується наступними даними:

Таблиця 2.35

№ п/п	Фамілія, ім'я, по-батькові	Виконання норми виробітку, %	№ п/п	Фамілія, ім'я, по-батькові	Виконання норми виробітку, %
1	Авилов К. Т.	102,7	16	Рисин А. В.	97,3
2	Бєлов С. В.	126,1	17	Романов К. Ю.	102,9
3	Білокінь П. С.	104,5	18	Рябов К. С.	121,5
4	Гатовський В. О.	96,8	19	Рязанов П. М.	114,6
5	Заяць А. П.	127,6	20	Сидякін В. К.	110,8
6	Котов К. Р.	114,5	21	Станкевич В. О.	131,4
7	Крига В. Е.	105,8	22	Стоцька Р. К.	120,6
8	Коваль С. Ю.	100,0	23	Сторонянський О. Б.	101,8
9	Кизилов Б. А.	98,4	24	Терещенко В. А.	128,9
10	Лазарєв А. М.	105,6	25	Третяк В. О.	118,7
11	Мороз К. В.	125,6	26	Фокін А. М.	110,6
12	Недільська Т. А.	117,6	27	Фурманов С. М.	112,6
13	Панчишин В. М.	105,7	28	Шахов Т. С.	98,6
14	Пелешко Р. О.	108,6	29	Шлинченко Л. М.	105,7
15	Платонов О. Е.	110,3	30	Щагов В. Ф.	111,8

Побудуйте ряд розподілу робітників за ступенем виконання норми виробітку, прийняв наступні інтервали: 1) до 100 %; 2) від 100 до 110 %; 3) від 110 до 120 %; 4) від 120 % і більше. Результати *представте* у ви-

гляді таблиці. *Зробіть* висновки.

2.41. Маються наступні дані про господарську діяльність 40 підприємств хімічної промисловості за звітний рік:

Таблиця 2.36

Номер п/п	Товарна продукція, млн грн	Середньооблікова чисельність промислово-виробничого персоналу, осіб	Фонд заробітної плати, млн грн	Середньорічна вартість основних виробничих засобів, млн грн
1	336,7	162	55,4	46,5
2	2 875,1	2 244	746,6	802,7
3	447,6	183	57,1	75,1
4	8 163,4	3 532	1 268,5	1 406,3
5	8 186,7	2 837	1 043,3	1 365,8
6	1 346,7	437	161,7	236,7
7	1 384,6	467	163,8	236,2
8	1 478,9	430	147,2	253,4
9	1 542,1	431	146,3	260,1
10	1 603,2	703	232,9	268,5
11	645,6	241	94,2	90,4
12	715,7	210	78,3	93,8
13	805,9	215	74,8	96,2
14	847,5	256	84,2	98,6
15	876,8	281	89,6	122,7
16	3 491,7	1 298	494,6	598,1
17	3 632,2	1 264	459,3	602,6
18	375,2	171	57,3	60,7
19	412,3	183	58,7	68,4
20	2 784,1	2 182	793,5	729,8
21	475,8	193	58,6	82,7
22	1 468,7	672	282,4	139,2
23	1 814,2	670	219,7	174,6
24	2 730,1	2 215	776,1	762,4
25	4 633,7	1 542	572,2	501,7
26	3 076,3	2 218	738,9	836,4
27	4 472,1	1 372	531,8	465,2
28	3 062,9	2 101	677,6	853,7
29	3 873,2	1 489	628,7	386,9
30	4 415,1	1 327	531,6	398,7
31	4 402,8	1 338	521,4	431,5
32	4 244,5	2 262	1 019,7	310,8
33	4 456,7	2 143	927,8	315,7
34	4 652,8	2 091	902,5	327,6
35	432,6	972	2 284,6	345,7
36	4 757,2	1 776	716,8	367,9
37	487,5	298	131,7	84,2
38	426,9	294	126,1	85,2
39	1 243,7	992	386,7	148,6
40	1 458,9	232	392,9	192,1

З метою дослідження впливу концентрації виробництва по показники діяльності підприємства, продуктивність праці робітників *здійсніть* групування підприємств, виділяючи не більше 4 груп підприємств із рівними інтервалами. *Розрахуйте* по кожній групі вартість товарної продукції, чисельність промислово-виробничого персоналу, вартість основних виробничих фондів, фонд заробітної плати працівників. Результати розрахунків *представте* у формі аналітичної таблиці і сформулюйте висновки.

2.42. За даними задачі 2.41 гл. 1 *здійснити* комбінаційне групування підприємств з метою дослідження впливу вартості основних виробничих засобів і випуску продукції на рівень продуктивності праці робітників. Результати групування *представте* у вигляді комбінаційної таблиці, *зробіть* короткі висновки.

2.47. Маються наступні дані 30-ти підприємств однієї галузі:

Таблиця 2.37

№ п/п.	Основні виробничі засоби, млн грн	Середньо-облікова чисельність робітників, осіб	Товарна продукція, млн грн	№ по пор.	Основні виробничі засоби, млн грн	Середньо-облікова чисельність робітників, осіб	Товарна продукція, млн грн
1	1 185	416	1 850	16	642	247	718
2	1 086	421	2 252	17	3 240	1 186	4 564
3	2 615	785	3 340	18	3 470	1 040	5 230
4	1 612	785	3 362	19	2 015	547	2 754
5	3 385	1 017	5 541	20	721	236	864
6	4 000	978	4 250	21	1 427	438	1 809
7	1 420	360	1 874	22	892	314	985
8	1 809	572	2 115	23	1 276	621	1 567
9	534	204	412	24	2 004	476	2 143
10	2 052	724	2 708	25	400	186	510
11	682	234	645	26	1 352	342	734
12	2 945	804	3 780	27	2 576	624	2 650
13	527	217	618	28	527	381	834
14	1 242	597	1 624	29	2 643	672	2 805
15	3 845	1 050	6 150	30	1 234	354	1 462

Для отримання залежності між випуском товарної продукції і технічним оснащенням *здійсніть* групування підприємств за вартістю основних виробничих засобів, виділивши чотири групи з рівними інтервалами. За кожною групою і за всією сукупністю *підрахуйте* число підприємств (абсолютне і в процентах до підсумку), вартість основних виробничих засобів (всього і на одне підприємство), обсяг товарної продукції (всього і в середньому на одне підприємство), чисельність робітників (всього і в середньому на одне підприємство). *Зробіть* висновки.

2.3. Прийоми вторинного групування

Методичні вказівки та рішення типової задачі

При статистичному дослідженні іноді використовують метод *вторинного угруповання* — прийом, який використовується для утворення нових груп на основі раніше зробленого угруповання, тобто перегрупують статистичний матеріал, вже зведений до груп. До цього методу вдаються в тому випадку, коли в результаті первинного групування нечітко проявився характер розподілу одиниць сукупності. В цьому випадку здійснюють укрупнення або зменшення інтервалів. Необхідність у вторинному групуванні виникає з потреби у порівняльній та узагальнюючій оцінці явищ за матеріалами, зібраними у різних місцях, що відрізняються специфічними умовами та обробленим по-різному.

Задача № 8. Мається групування сільськогосподарських підприємств за кількістю великої рогатої худоби в звітному році:

Таблиця 2.38

Групи сільськогосподарських підприємств за кількістю великої рогатої худоби, голів	Кількість підприємств
До 10	7
10–40	23
40–100	48
100–170	61
170–250	56
250–400	27
Більше 400	10
Всього	232

Зробити перегрупування даних, утворивши групи з наступними інтервалами: до 50, 50–100, 100–200, 200–300, більше 300.

Рішення

В першу групу ввійдуть повністю перші дві групи сільськогосподарських підприємств і частина третьої. Щоб утворити групу до 50, необхідно від інтервалу третьої групи взяти 10. Величина інтервалу цієї групи становить 60 (100–40). Отже, із всієї чисельності 3 групи необхідно взяти від неї 1/6 (10 : 60). Таку ж частину у знов створеної першої групи необхідно взяти і від чисельності сільськогосподарських підприємств, тобто 48·(1:6)= 8 сільськогосподарських підприємств. Тоді чисе-

льність першої знов створеної групи сільськогосподарських підприємств становитиме: 7+23+8=38.

Другу групу утворюю сільськогосподарські підприємства третьої групи за вирахуванням числа підприємств, віднесених до першої групи, тобто 48 – 8=40 підприємств.

До знов створеної третьої групи ввійдуть всі підприємства четвертої групи і частини п'ятої. Для визначення цієї частини від інтервалу 170–250 (величина інтервалу становить 80) необхідно додати 30 (щоб верхня межа інтервалу була рівна 200). Таким чином, необхідно взяти частину інтервалу, рівну 30:80=3:8. Чисельність сільськогосподарських підприємств в цій групі становить 56, значить, необхідно взяти 56·(3:8)=21 підприємство. Чисельність знов створеної третьої групи становитиме: 61+21=82.

У знов створену четверту групу ввійдуть підприємства частина підприємства п'ятої групи в кількості 35 підприємств (56 – 21) і частина шостої групи. Величина інтервалу шостої групи становить 150 (400 – 250). Отже, від неї необхідно взяти від неї 1/3 (50 : 150). Таку ж частину у знов створену четверту групу необхідно взяти і від чисельності підприємств, тобто 27·(1:3)=9 підприємств. Кількість підприємств четвертої знов створеної групи складе 44 (35 + 9).

П'яту знов створену групу складуть частина підприємств шостої групи (27 – 9= 18) і всі підприємства сьомої групи. В цій групі загальна кількість підприємств становитиме 28 (10+18).

В результаті перегрупування отримаємо наступні дані:

Таблиця 2.39

Номер групи	Групи сільськогосподарських підприємств за кількістю великої рогатої худоби, голів	Кількість підприємств
1	До 50	38
2	50–100	40
3	100–200	82
4	200–300	44
5	Понад 300	28
	Всього	232

На практиці інколи бувають випадки, коли інтервали вибрані не досить вдало. В результаті цього досить складним є визначення закономірностей розвитку даного явища. Тоді укрупнюють інтервали.

Задача 9. Розглянемо наступне групування ткачих комбінату.

Таблиця 2.40

Продуктивність ткачих комбінату за час роботи на кожному станку, *м*

Групи ткачих за продуктивністю праці, м	Число ткачих	Питома вага ткачих групи в процентах до підсумку, %
3,25–3,50	2	1,0
3,50–3,75	6	3,0
3,75–4,00	11	5,5
4,00–4,25	37	18,5
4,25–4,50	51	25,5
4,50–4,75	28	14,0
4,75–5,00	31	15,5
5,00–5,25	24	12,0
5,25–5,50	3	1,5
5,50–5,75	3	1,5
Понад 5,75	4	2,0
Всього	200	100,0

В даному випадку закономірність у зміні продуктивності праці не досить чітко видно. Необхідно зробити вторинне групування і виділити п’ять груп: 3,0–4,0, 4,0–4,5, 4,5–5,0, 5,0–5,5 і понад 5,5 м. В першу групу ввійдуть ткачихи із продуктивністю 3,25–3,5, 3,5–3,75 і 3,75–4,0 м; чисельність групи складе 19 (2+6+11). В другу групу ввійдуть ткачихи 4,0–4,25, 4,25–4,50; чисельність групи складе 88 осіб. В третю групу ввійдуть ткачихи з продуктивністю 4,5–4,75, 4,75–5,0 м; чисельність групи складе 59 осіб. Четверта група утвориться шляхом об’єднання груп 5,0–5,25 та 5,25–5,5 м; чисельність групи складе 27 осіб. П’ята група утвориться шляхом об’єднання груп 5,5–5,75 і понад 75.

В табл. 2.41 створені нові групи шляхом сумування первісних груп.

Таблиця 2.41

Групи ткачих за продуктивністю праці, м	Число ткачих	Питома вага ткачих групи в процентах до підсумку, %
3,0–4,0	19	9,5
4,0–4,5	88	44,0
4,5–5,0	59	19,5
5,0–5,5	27	13,5
Понад 5,0	7	3,5
Всього	200	100,0

Дане групування дає більш наглядну характеристику чисельності робітників за рівнем продуктивності праці. Таким чином, вторинне групування виступає в ролі прискорювача закономірностей розвитку явища, в даному випадку продуктивності праці.

Задачі

2.48. Розподіл сільськогосподарських підприємств області по урожайності зернових культур характеризується наступними даними:

Таблиця 2.42

Область А		Область Б	
Групи підприємств за урожайністю, ц/га	Число підприємств, % до підсумку	Групи підприємств за урожайністю, ц/га	Число підприємств, % до підсумку
До 20	2	До 20	3
20–25	31	20–22	11
25–30	32	22–24	15
30–35	27	24–26	21
35 і більше	8	26–28	19
		28–30	8
		30–32	12
		32–35	6
		35 і більше	5
Всього	100		100

Для отриманні співставних даних за двома областями *здійсніть* шляхом укрупнення інтервалів перегрупування, утворивши п’ять груп з інтервалами області А. *Зробіть* короткі висновки.

2.49. Маються наступні дані про розподіл підприємств харчової промисловості за кількістю найманих працівників:

Таблиця 2.43

Групи підприємств за кількістю найманих працівників, осіб	Число підприємств, %	Кількість найманих працівників, в % до підсумку
До 100,0	63	14,8
100–250	28	45,5
Понад 250	9	39,7
Всього	100	100,0

Застосовуючи метод вторинного групування, *утворіть* групи підприємств за розміром реалізованої продукції, млн грн: до 10; 10–50; 50–100; 100–500; понад 500.

2.50. Користуючись методом вторинного групування, *виділіть* шляхом дольового перегрупування три групи машинобудівних заводів за чисельністю працюючих: невеликі — 80 %, середні — 30 % та великі — 20 %. Вихідні дані наступні:

Чисельність працюючих	Число заводів, %	Число працівників, %
До 200	7	3
201–500	19	6
501–1000	27	14
1001–2000	25	21
2001–3000	15	25
3001 і більше	7	31
Всього	100	100

Результати групування *представити* у вигляді таблиці, *зробити* висновки.

2.51. Користуючись методом вторинного групування, *здійсніть* перегрупування машинобудівних заводів за обсягом товарної продукції, утворивши три групи: невеликі — до 25 млн грн; середні — від 25 до 125 млн грн; великі — від 125 млн грн і більше. Вихідні дані наступні:

Обсяг товарної продукції, млн грн	Кількість заводів, %	Вартість товарної продукції, %
До 10	6	1
10,0–20,0	11	4
20,0–30,0	23	7
30,0–50,0	22	13
50,0–100,0	16	15
100,0–200,0	12	23
200,0 і більше	10	37
Всього	100	100

Результати групування *представити* у вигляді таблиці, *зробити* висновки.

2.52. Маються наступні дані про розподіл підприємств машинобудування за обсягом товарної продукції:

Таблиця 2.44

Групи підприємств за обсягом товарної продукції, млн грн	Число підприємств, %	Вартість товарної продукції, в % до підсумку
До 20,0	63	14,8
20,0–40,0	28	45,5
Понад 40,0	9	39,7
Всього	100	100,0

Застосовуючи метод вторинного групування, утворіть групи під-

приємств за обсягом товарної продукції, млн грн: до 10,0; 10,0–15,0; 15,0–20,0; 20,0–25,0; 25,0–30,0; понад 30,0.

2.53. Розподіл робітників двох заводів за рівнем місячної заробітної плати характеризується наступними даними:

Таблиця 2.45

Завод № 1		Завод № 2	
Групи працівників за рівнем заробітної плати (тис. грн)	Чисельність робітників, % до підсумку	Групи працівників за рівнем заробітної плати (грн)	Чисельність робітників, % до підсумку
7–8	2	7–8	1
8–10	9	8–9	6
10–12	13	9–11	5
12–15	26	11–13	15
15–20	30	13–15	22
20–25	15	15–17	23
25–30	5	17–21	11
		21–25	5
		25–30	7
		30 і більше	5
Всього	100		100

Для отримання співставних даних за двома заводами *здійсніть* шляхом укрупнення інтервалів перегрупування, утворивши наступні п’ять груп: 1) до 10 000 грн; 2) від 10 000 до 15 000 грн; 3) від 15 000 до 20 000 грн; 4) від 20 000 до 30 000 грн; 5) 30 000 грн і більше. Результати *представте* у вигляді таблиці. *Зробіть* короткі висновки.

2.54. Маються наступні дані про чисельність робітників-відрядників та фонду заробітної плати:

Таблиця 2.46

Групи робітників по розміру заробітної плати, грн	Чисельність робітників-відрядників, осіб	Фонд заробітної плати, тис. грн
7500–8000	13	100,8
8001–8500	17	140,3
8501–9000	26	227,5
9001–9500	31	301,3
9501–10000	42	409,5
10001–10500	48	492,0
10501–11000	51	548,3
11501–12000	37	434,8
12001–12500	26	318,5
12501–13000	13	165,8

Привести укрупнення інтервалів даного угрупування, утворивши не більше п'яти груп по розміру заробітної плати. За кожною групою *обчисліть* число робітників-відрядників, фонд заробітної плати і середній розмір заробітної плати на одного робітника-відрядника.

2.55. Маються наступні дані про діяльність підприємств двох галузей у звітному періоді:

Таблиця 2.47

Галузь А			Галузь Б		
Групи підприємств за числом працюючих	Число підприємств, %	Основні виробничі засоби, %	Групи підприємств за числом працюючих	Число підприємств, %	Основні виробничі засоби, %
До 10	40,3	5,1	До 25	34,1	3,4
11–50	20,3	3,3	26–100	19,8	4,5
51–250	10,3	8,3	101–400	23,8	11,7
251–500	8,6	9,4	401–1000	10,6	17,2
501–800	5,6	8,8	1001–3000	8,2	26,1
801–1500	5,0	12,4	3001–8000	2,7	22,6
1501–2500	4,6	12,1	8001 і більше	0,8	14,5
2501–4000	2,3	10,4			
4001–8000	1,6	13,7			
8001 і більше	1,4	16,5			
Всього	100,0	100,0	Всього	100,0	100,0

Здійснити вторинне групування підприємств галузі *А* у відповідності до групування підприємств галузі *Б*. По кожній групі *підрахувати* кількість підприємств і вартість основних виробничих засобів у процентах. Результати групування *представити* у вигляді таблиці.

2.56. Маються наступні дані про розподіл заводів харчової промисловості по розміру основних засобів:

Таблиця 2.48

Групи підприємств за розміром основних виробничих засобів, млн грн	Число підприємств (в % до підсумку)	Товарна продукція (в % до підсумку)
10–15	33,4	0,6
15–20	26,0	1,1
20–25	14,3	2,4
25–30	6,1	4,6
30–35	5,3	8,4
35–40	4,3	10,5
40–45	3,8	12,4
45–50	3,1	19,6
55–60	2,5	20,4
60–65	1,2	20,0

Використовуючи метод вторинного групування, *утворіть* групи заводів по наступному обсягу основних виробничих фондів (млн грн): 10–20, 20–30, 30–40, понад 40.

2.57. *Здійсніть* вторинне групування даних про розподіл робітників підприємства за розміром заробітної плати з метою приведення їх до спів ставного виду, перерахуйте дані таблиці, *зробіть* порівняльний аналіз результатів:

Таблиця 2.49

Підприємство А			Підприємство Б		
Групи робітників за розміром заробітної плати (тис. грн)	процент до підсумку		Групи робітників за розміром заробітної плати	процент до підсумку	
	число робітників	фонд заробітної плати		число робітників	фонд заробітної плати
до 10	4,2	2,4	10–14	22,5	15,7
10–12	7,1	4,9	14–18	23,7	19,9
12–14	8,1	7,2	18–26	28,7	22,1
14–18	20,1	18,7	26–40	21,1	24,9
18–26	28,3	26,7	40 і більше	4,0	17,4
26 і більше	32,2	39,2			
Всього	100,0			100,0	100,0

Примітка. У вторинному групуванні виділіть наступні групи робітників: до 14; 14–18; 18–26; 26 і більше.

2.58. *Здійсніть* вторинне групування даних про розподіл промислово-виробничого персоналу підприємств двох районів з метою приведення даних до спів ставного виду, перерахуйте дані цих таблиць і *зробіть* порівняльний аналіз отриманих даних:

Таблиця 2.50

Район 1			Район 2		
Групи підприємств по числу робітників	процент до підсумку		Групи підприємств по числу робітників	процент до підсумку	
	число підприємств	число робітників		число підприємств	число робітників
До 10	4,2	2,4	До 20	33,5	0,1
10–50	7,1	4,9	20–50	29,7	4,2
50–100	8,1	7,2	50–200	18,1	10,1
100–300	20,1	18,7	200–500	14,5	15,4
300–1000	28,3	26,7	500–1000	3,8	35,6
1000 і більше	32,2	39,2	1000 і більше	0,4	34,6
Всього	100,0			100,0	100,0

Примітка. Вторинне групування даних здійсніть в трьох варіантах, перерахував дані: а) другого району у відповідності до групування першого району, б) першого району у відповідності до другого району, в) обох районів на основі наступного групування промислових підприємств по числу робітників: до 20; 20–100; 100–500; 500–1000; 1000 і більше.

Тести

1. Зведення, яке проводиться без розподілу одиниць сукупності на групи і підгрупи, називається:
   а) простим;
   б) складним;
   в) типологічним;
   г) атрибутивним.
2. Величину рівних інтервалів визначають:
   а) як різницю між максимальним і мінімальним значеннями ознаки в сукупності, поділену на попередньо задане число утворюваних груп;
   б) як суму максимального і мінімального значення ознаки в сукупності, поділену на два;
   в) як різницю між максимальним і мінімальним значеннями ознаки в сукупності, помножену на попередньо задане число утворюваних груп;
   г) як максимальне значення ознаки в сукупності, поділену на попередньо задане число утворюваних груп.
3. Розчленування різнорідної сукупності на якісно однорідні групи проводиться в статистиці за допомогою групувань:
   а) атрибутивних;
   б) типологічних;
   в) структурних;
   г) аналітичних.
4. Виявлення і дослідження зв’язку і взаємозалежності між явищами проводиться в статистиці за допомогою групувань:
   а) атрибутивних;
   б) типологічних;
   в) структурних;
   г) аналітичних.
5. Для виявлення зв’язку між стажем роботи і рівнем виконання норми

виробітку побудоване групування:

Групи робітників за стажем роботи, років	Чисельність робітників	Виконання норми, %
До 1	43	95
1–5	126	104
5–10	315	108
10 і більше	62	113

Це групування є:

а) типологічним;

б) аналітичним;

в) атрибутивним;

г) структурним.

6. За кількістю групувальних ознак розрізняють групування:

а) атрибутивні і структурні;

б) структурні і типологічні;

в) аналітичні і комбінаційні;

г) прості і комбінаційні.

7. До атрибутивних ознак відноситься:

а) урожайність сільськогосподарських культур;

б) стаж роботи робітника;

в) рівень освіти;

г) товарообіг магазину.

8. Позначення груп «від» – «до», що утворюються групуванням за кількісною ознакою. Різниця між верхньою і нижньою межами інтервалу утворює його величину:

а) ряд розподілу;

б) межа інтервалу;

в) інтервали групування;

г) групова ознака (основа) групування.

9. Півсума нижньої і верхньої меж інтервалу кожної групи, утвореної групуванням — це:

а) інтервал;

б) середина інтервалу;

в) межі інтервалів;

г) число груп групування.

10. В залежності від характеру розподілу одиниць сукупності за даною ознакою інтервали за своєю величиною бувають:

а) рівними і атрибутивними;

б) рівними і нерівними;
в) рівними і закритими;
г) нерівними і відкритими.

11. Ознаки, які виражаються цілими і дрібними числами, між якими не може бути ніяких проміжних значень, є:
а) атрибутивними;
б) дискретними;
в) безперервними;
г) групувальними.

12. Вторинним групуванням називається:
а) утворення нових груп на основі групування, що вже існує;
б) групування по атрибутивним ознакам;
в) групування за безперервним ознакам;
г) розчленування сукупності на групи і підгрупи за суттєвим ознакам.

13. Інтервали, які мають дві межі, верхню і нижню, є інтервалами:
а) відкритими;
б) дискретними;
в) закритими;
г) безперервними.

14. Частотами називаються:
а) окремі значенні ознаки, що варіюється;
б) величини, які показують, скільки разів повторюється даний варіант;
в) питома вага кожної групи в загальній кількості сукупності;
г) побудова групування за атрибутивною ознакою.

15. Групування з метою виявлення взаємозв'язків між досліджуваними явищами (ознаками) — це:
а) групування типологічне;
б) групування аналітичне;
в) аналітичне групування;
г) групування первинне.

Питання для обговорення

1. Досліджується сукупність електричних ламп. Якими кількісними та якісними характеристиками можна їх охарактеризувати?

2. Якими кількісними та якісними показниками можна охарактеризувати роботу міського транспорту?

3. *Назвіть* основні факторні ознаки, які визначають варіацію про-

дуктивності праці в збиральному цеху машинобудівного заводу

4. *Назвіть* найбільш суттєві варіативні ознаки, що характеризують персонал промислового підприємства.

5. Якими показниками можна охарактеризувати студентську групу?

6. *Випишіть* із «Статистичного щорічника України» дані за декількома дискретними і безперервними кількісними ознаками.

7. За якими ознаками можна розбити на однорідні групи сільськогосподарські підприємства?

8. Який головний зміст процесу зведення статистичних даних? Що отримується в результаті зведення?

9. Як визначають величину закритих інтервалів? Чи можна визначити величину відкритих інтервалів?

10. Як визначається величина інтервалу у випадку, якщо при розрахунку величини рівного інтервалу отримано дробове число?

11. Якщо ознака безперервна, то при утворенні груп одне й теж значення його, як правило, виступає і верхньою і нижньою межею двох суміжних інтервалів. В яку групу відносить одиниці спостереження, значення ознак яких співпадають з межами інтервалів (наприклад куди відносити робітників із стажем роботи 6 і 12 років в інтервалах: до 6 років; 6–12 років; 12 років і вище)?

12. В чому полягає особливість вторинного групування? У яких випадках виникає необхідність у вторинному групуванні?

13. *Визначте* порядок обчислення числа інтервалів. Від чого залежить кількість намічених групувань?

14. Як здійснюється виділення груп та підгруп за атрибутивними та кількісними ознаками при розробці типологічних групувань?

15. Які завдання вирішуються за допомогою структурних групувань?

16. Як здійснюється вторинне групування методом укрупнення інтервалів? Коли застосовується спосіб розщеплення інтервалів?

17. *Охарактеризуйте* особливості типологічних групувань? Які задачі вирішуються за їх допомогою?

18. *Визначте* сутність та особливості аналітичних групувань? В чому їх полягає відмінність від типологічних групувань?

ЛІТЕРАТУРА

1. *Горкавий В. К.* Статистика: Підручник. Третє вид., переробл. і доповн. Київ: Алерта, 2019. С. 55–71.
2. *Козирєва О. В.*, *Федорова В. О.* Статистика: навчальний посібник. Харків: Видавництво Іванченка І.С., 2021. С. 34–42.

3. *Ткач Є. І.*, *Сторожук В. П.* Загальна теорія статистики: підручник. 3-тє вид. Київ: Центр учбової літератури, 2009. С. 40–64.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

Навчальні посібники, *словники*

4. *Мармоза А. Т.* Теорія статистики: підручник. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: «Центр учбової літератури», 2013. С. 78–114.

5 *Опря А. Т*. Статистика (модульний варіант з програмованою формою контролю знань). Навч. посіб. Київ: Центр учбової літератури, 2012. С. 48–65.

6. *Педченко Г. П.* Статистика: Навчальний посібник. Мелітополь: Колор Принт, 2018. С. 64–84.

7. Статистичний словник / [*О. Г. Осауленко*, *О. О*. *Васєчко*, *М. В. Пугачова* та ін.]; за ред. д-ра держ. упр., проф., член-кор. НАН України О. Г. Осауленка; НТК статистичних досліджень. Київ: ДП «Інформ.-аналіт. агентство», 2012. 498 с.

Глава 3. СТАТИСТИЧНІ ТАБЛИЦІ

3.1. Складання макетів таблиць

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Макетом таблиці називається бланк статистичної таблиці, що має заголовки рядків та граф, які ще не заповнені цифровими даними. Кожна статистична таблиця має підмет і присудок. *Підмет таблиці* — це одиниці статистичної сукупності або їх групи, що характеризуються цифровими даними. *Присудок таблиці* — це сукупність статистичних показників, що виражаються відповідними цифровими даними, якими характеризується підлягає (скажімо, показники випуску продукції, чисельності працівників, собівартості продукції тощо). Зазвичай підмет розташовується зліва, у вигляді найменування горизонтальних строк, а присудок — справа у вигляді найменування вертикальних граф.

В залежності від побудови підмету розрізняють наступні види таблиць: прості, групові, комбінаційні. *Простими* називаються такі таблиці, в підметі яких немає угруповань, а дається лише перелік (найменування) одиниць спостереження (одиниць сукупності), адміністративних районів або періодів часу.

Підмет може бути виражене поєднанням цих ознак. Прикладом територіально-хронологічної таблиці може служити наступна таблиця, що характеризує питому вагу населення у віці 15–70 років за областями України:

Таблиця 3.1

	2005 р.	2010 р.	2015 р.	2020 р.
Україна	62,2	63,7	62,4	62,1
Вінницька	61,8	63,9	63,4	62,9
Харківська	62,5	63,9	63,8	63,9
Херсонська	63,1	64,4	62,5	64,1

В цій таблиці підметом є перелік областей у поєднанні з періодом часу. В присудка дані показники питомої ваги населення у віці 15–70 років у загальній чисельності населення.

Прикладом хронологічної таблиці є таблиця, що характеризує виробництво основних видів продукції тваринництва (у всіх категоріях господарств) в Україні:

Таблиця 3.2

	1990 р.	2000 р.	2010 р.	2020 р.
М'ясо (у забійній масі), тис. т	4 358	1 663	2 059	2 478
Молоко, тис. т	24 508	12 658	11 249	9 264
Яйця, млн шт.	16 287	8 809	17 052	16 167
Вовна, т	29 804	3 400	4 192	1 573

Груповими таблицями називаються такі, в підметі яких міститься групування одиниць сукупності за однією ознакою. Прикладом групової таблиці є табл. 3.3, в якій представлене групування сільськогосподарських підприємств України за розміром сільськогосподарських угідь в 2020 р.

Таблиця 3.3

	Кількість підприємств		Площа сільськогосподарських угідь	
	од.	відсотків до загальної кількості	тис. га	відсотків до загальної площі сільськогосподарських угідь
Підприємства, що мали сільськогосподарські угіддя, у тому числі площею, га	36 277	76,3	20 254,2	100,0
до 5,00	1 975	4,2	6,4	0,0
5,01–10,00	1 877	3,9	14,7	0,1
10,01–20,00	3 061	6,4	47,7	0,2
20,00–50,00	9 395	19,7	353,3	1,7
50,01–100,00	4 626	9,7	333,0	1,6
100,01–500,00	7 889	16,6	1 928,1	9,5
500,01–1 000,00	2 716	5,7	1 957,9	9,7
1 000,01–2 000,00	2 409	5,1	3 458,9	17,1
2 000,01–3 000,00	1 030	2,2	2 500,3	12,4
3 000,01–4 000,00	473	1,0	1 629,9	8,1
4 000,01–5 000,00	247	0,5	1 099,2	5,4
5 000,01–7 000,00	263	0,6	1 535,9	7,6
7 000,01–10 000,00	132	0,3	1 107,0	5,5
більше 10 000,00	184	0,4	4 280,1	21,1
Підприємства, що не мали сільськогосподарських угідь	11 246	23,7		

Підметом цієї таблиці є групи сільськогосподарських підприємств за площею сільськогосподарських угідь. Показники, що характеризують ці групи, складають присудок таблиці. Як видно із таблиці, основна частина сільськогосподарських угідь сконцентрована в підприємствах

з площею угідь від 1 000 до 3 000 га та понад 10 000 га. Остання група складаючи 0,4 % всіх підприємств, має в розпорядженні 21,1 % сільськогосподарських угідь.

Комбінаційними таблицями називаються такі, в яких підмет містить групування одиниць сукупності за двома і більше ознаками, взятими у поєднанні. Прикладом служить табл. 3.4, яка представляє групування заводів за вартістю основних засобів та чисельністю робітників.

Таблиця 3.4

Групи заводів за вартістю основних засобів, млн грн	Підгрупи заводів за чисельністю робітників, осіб	Число заводів	Основні засоби, млн грн	Чисельність робітників, осіб	Випуск продукції, млн грн	Середній виробіток на 1 працівника, тис. грн
А	Б	1	2	3	4	5
10–30	10–50 50–200 Понад 200	18 6	205,2 129,6	648 564	195,1 373,8	301,1 662,8
Всього		24	334,8	1 212	568,9	469,4
30–50	10–50 50–200 Понад 200	3 8	85,8 252,8	72 776	20,3 297,3	281,9 383,1
Всього		11	338,6	848	317,6	374,5
50–70	10–50 50–200 Понад 200	 2 6	 122,8 382,8	 224 1 386	 97,5 653,4	 435,3 471,4
Всього		8	505,6	1 610	750,9	466,4
70–90	10–50 50–200 Понад 200	 2 4	 156,8 338,4	 226 1072	 102,6 705,6	 454,0 658,2
Всього		6	495,2	1 298	808,2	622,7
Разом по підгрупам	10–50 50–200 Понад 200	21 18 10	291 662 721,2	720 1 790 2 458	215,4 871,2 1 359,0	299,2 486,7 552,9

В таблиці добре видно тенденцію зростання продуктивності праці із збільшенням вартості основних фондів підприємств та чисельності працюючих.

Показники присудку можуть мати просту та складну структуру. Якщо показники присудку розміщені послідовно один за одним, то така розробка присудка називається простою. Прикладом можуть бути наведені раніше таблиці. При складній розробці присудка показники беруться в комбінації, як це наведено в наступному макеті таблиці розподілу валової продукції сільського господарства між областями та категоріями підприємств.

Таблиця 3.5

Області	Усі категорії господарств		У тому числі за категоріями господарств			
			сільськогосподарські підприємства		господарства населення	
	продукція рослинництва	продукція тваринництва	продукція рослинництва	продукція тваринництва	продукція рослинництва	продукція тваринництва
Вінницька Полтавська Харківська Херсонська і т. д.						

При складанні таблиці або макету таблиці необхідно дотримуватися ряд правил: 1) назва таблиці, за його наявності, має відбивати її зміст, бути точним, коротким; назву слід поміщати над таблицею; у заголовку таблиці має знайти відображення час, до якого належить таблиця; 2) ясно та коротко сформулювати назву рядків і граф таблиці; 3) нумерація граф таблиці арабськими цифрами допускається у випадках, як у тексті документа є посилання ними; 4) якщо всі показники, наведені в графах таблиці, виражені в одній і тій самій одиниці фізичної величини, то її позначення необхідно поміщати над таблицею праворуч, а при поділі таблиці на частини — над кожною її частиною; 5) цифра, записана на перетині рядків підлягає і присудка, повинна бути характеристикою підлягає; якщо один із чисельних виразів даної ознаки дорівнює нулю, то перетин відповідного рядка та графи прокреслюється; якщо чисельне значення ознаки невідомо, то в перетині графи та рядка ставиться крапка або пишеться «немає відомостей»; 6) мати підсумкові показники.

Задачі

3.1. *Складіть* макет групової статистичної таблиці для дослідження впливу рівня кваліфікації робітників на рівень продуктивності праці.

3.2. *Складіть* макет комбінаційної статистичної таблиці впливу рівня кваліфікації та стажу робітників на продуктивності праці на даному підприємстві.

3.3. *Складіть* на вільну тему макети простої, групової і комбінаційної статистичних таблиць в двох варіантах: 1) з простою і 2) зі складною розробкою показників присудка.

3.4. *Об'єднайте* два нижче наведених макета статистичних таблиць про розподіл токарів за спеціальностями, стажу і тарифному розряду в один і *сформулюйте* її заголовок.

Таблиця 3.5

Спеціальність	Всього робочих	В тому числі за стажем роботи	
		до 5 років	понад 5 років
Токар-винторізчик Токар-карусельщик Токар-розточник Інші			

Таблиця 3.6

Тарифний розряд	Всього робочих	Із них			
		токарі-винторізчики	токарі-карусельщики	токарі-розточники	інші
I II III IV V VI					

3.5. *Спроектуйте* макет таблиці, яка показує відхилення фактичних показників від показників попереднього року за обсягом товарної продукції, вартістю основних виробничих засобів та прибутку за трьома підприємствами.

3.6. *Спроектуйте* макет статистичної таблиці, яка характеризує виробництво в Україні валового внутрішнього продукту (у порівнянних цінах, в млрд грн) за роками: 2005, 2010, 2015, 2020, 2022 (прогноз).

3.7. *Розробіть* статистичний макет таблиці, яка характеризує обсяг і структуру перевезених вантажів за видам транспорту (залізничний, автомобільний, морський, водний, трубопровідний, авіаційний) в Україні за 2010 та 2020 рр. Макетом якого виду таблиці він являється? *Вкажіть* підмет і присудок цього макету.

3.8. По наведеним нижче таблицям *визначте* вид ознаки, за якою проводилося групування, а також вкажіть підмет і присудок.

А. Виробництво основних видів промислової продукції в 2022 р.

Вид промислової продукції	Одиниця виміру	Кількість одиниць продукції	2022 р. в процентах до 2021 р.
Вугілля кам'яне	млн т	25,6	98,4
Електроенергія	млрд кВт-год.	39,5	106,1
Нафта сира	млн т	2,4	104,3
Сталь	» »	6,4	103,1
Газ природний	млрд $м^3$	17,8	103,7
Автомобілі	тис. шт.	15,2	96,8
Трактори (з потужністю двигуна більше 59 квт)	» »	7,2	93,7
Борошно пшеничне та пшенично-житнє	тис. т	1 734,4	105,9
Пиво солодове	млн дал	181,6	103,4

Б. Загальний обсяг витрат на інноваційну діяльність промислових підприємств України за 2016-2020 рр.

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Витрати на інновації, млн грн	23 229,5	9 117,5	12 180,1	14 220,9	14 406,9
В тому числі на наукові дослідження і розробки	2 457,8	2 169,8	3 208,8	2 918,9	3 486,3

В. Середньорічні темпи приросту основних показників розвитку економіки України та Білорусії за 2015–2020 рр.

Показники	Україна	Білорусія
Валовий внутрішній продукт	2,1	4,6
Продукція промисловості	0,8	3,1
Продукція сільського господарства	1,7	2,8
Вантажообіг усіх видів транспорту	4,6	3,7
Капітальні вкладення	2,4	7,9
Продуктивність праці працюючих у промисловості	1,6	3,5

Г. Валовий внутрішній продукт в Україні та Німеччини

(млрд дол. США; за паритетом купівельної спроможності 2010 р.)

	2010 р.	2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.
Україна	747,7	666,3	682,5	669,4	732,2
Німеччина	2 938,4	3 203,0	3 274,4	3 355,1	3 406,4

Д. Перевезення вантажів за видами транспорту в Україні за 2016-2020 рр.

(млн т)

Види транспорту	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Усього перевезено вантажів	1 436	1467	1534	1466	1544
В тому числі:					
залізничний	343	339	322	313	306
автомобільний	1 086	1122	1206	1147	1232
морський	3	2	2	2	2
річковий	4	4	4	4	4

3.9. *Побудуйте* макет таблиці розподілу працівників підприємства за рівнем заробітної плати. *Сформулюйте* заголовок таблиці цього макету. Макетом якого виду таблиці він є? Чи є групування підмету цього макету типологічним?

3.10. *Розробіть* статистичну таблицю, що характеризує склад студентів вашої групи за статтю та успішністю. *Сформулюйте* заголовок цього макету. *Вкажіть*: а) підмет і присудок таблиці; б) ознаки групування макету таблиці.

3.11. *Розробіть* групової макет статистичної для характеристики обсягу товарної продукції підприємств. Які ознаки доцільно включити в присудок? Які групувальні ознаки доцільно покласти в основу групування підмета групової таблиці?

3.12. *Розробіть* макет статистичної таблиці, яка характеризує виробництво валового внутрішнього продукту (у порівнянних цінах; млрд дол. США) в Україні та в розвинених країнах Європейського Союзу (Німеччині, Австрії, Франції) за 2015–2020 рр. *Вкажіть* підмет і присудок цього макету.

3.13. *Побудуйте* макет статистичної таблиці, що характеризує структуру посівних площ сільськогосподарського підприємства. *Сформулюйте* заголовок макету. Макетом якого виду таблиці він є?

3.14. *Побудуйте* макет статистичної таблиці, що характеризує виробництво валової продукції сільського господарства за усіма категоріями господарств, в тому числі в сільськогосподарських підприємствах і в господарствах населення. *Вкажіть* її підмет і присудок.

3.15. *Розробіть* макет статистичної таблиці, що характеризує розподіл населення за обсягом доходу в середньому на одну особу. Макетом якого виду таблиці він є?

3.16. *Побудувати* макет таблиці із зазначеними нижче підлягаючими та присудками для заповнення його даними, що характеризують

робітників механічного цеху заводу «Дніпросталь» на 1 лютого 2021 р., та *визначити* тип цієї таблиці за підметом:

Підмет

Групи робітників за стажем

I група — зі стажем до 3 років
- а) не пройшли курси підвищення кваліфікації;
- б) пройшли курси підвищення кваліфікації

II група — зі стажем від 3 років і вище
- а) не пройшли курси підвищення кваліфікації;
- б) пройшли курси підвищення кваліфікації

Присудок

Всього робітників

в тому числі:

а) не виконують норми виробітку
- 1) абсолютне число робітників
- 2) в % до підсумку по групі

б) виконують норму від 100 до 109 %
- 1) абсолютне число робітників
- 2) в % до підсумку по групі

в) виконують норму від 110 до 124 %
- 1) абсолютне число робітників
- 2) в % до підсумку по групі

г) виконують норму на 125 % и вище
- 1) абсолютне число робітників
- 2) в % до підсумку по групі

3.17. *Розробіть* макет статистичної таблиці, що характеризує розподіл усього населення України, в тому числі міського і сільського населення за віком. *Вкажіть*: а) макетом якого виду таблиці він є; б) його підмет і присудок, ознаку групування підмету.

3.18. *Побудуйте* макет статистичної таблиці розподілу підприємств області за вартістю основних виробничих засобів. Кожну виділену групу охарактеризуйте наступними показниками: а) число підприємств; б) вартість основних виробничих засобів (млн грн); в) чисельність промислово-виробничого персоналу; г) товарна продукція (млн грн). *Сформулюйте* заголовок і *вкажіть*: а) макетом якого виду таблиці він є; б) підмет і присудок макету таблиці; в) ознаку групування його підмету; г) показники присудку.

3.19. Дані про населення країни, областей і районів за місцем проживання і статтю можуть бути розміщені в присудку наступним чином:

Таблиця 3.6

Чисельність населення			Чисельність		
в місті	на селі	всього	чоловіків	жінок	всього
1	2	3	4	5	6

Розмістіть ці дані по іншому. *Здійсніть* в присудку комбінаційну розробку (розміщення) показників.

3.20. *Побудуйте* макет статистичної таблиці, що характеризує виробництво валової продукції сільського господарства в Україні та по окремим областям за 2015–2020 рр. *Визначте* підмет, присудок і вид таблиці за характером підмету. *Вкажіть* вид розроблених показників присудка.

3.21. *Побудуйте* макет статистичної таблиці, що характеризує середній рівень продуктивності праці робітників (виробіток продукції на одного робітника) в залежності від рівня фондоозброєності одного робітника (вартості основних виробничих фондів на одного робітника) і стажу роботи. *Визначте* підмет і присудок, а також вид таблиці за характером підмету.

3.22. *Визначте* характер розробки підмета і присудка макету таблиці. *Сформулюйте* для неї заголовок і *вкажіть* одиниці виміру показників, що в ній містяться.

Таблиця 3.7

Заробітна плата робітників-відрядників, грн	Процент виконання норм виробітку робітниками-відрядниками					Всього
	до 90	90–100	100–110	110–120	120 і більше	
До 10 000 10 000–11 000 11 000–12 000 12 000–13 000 13 000 і більше						
Всього						

3.23. *Побудуйте* макет таблиці, що характеризує рух робочої сили за цехами підприємства за місяць. *Визначте* підмет, присудок і вид таблиці за характером підмету. *Вкажіть* вид розробки показників присудку.

3.24. *Визначте*, до яких групувальних ознак відносяться: види випущеної продукції (станки, деталі, хімічні добрива і т. п.); персонал підприємства; розмір посівної площі фермерського господарства; урожайність; залишки товарно-матеріальних цінностей на складі; забракована продукція; сімейний стан; освіта; стаж роботи.

3.25. *Побудуйте* макет таблиці, в якій відображено основні економічні показники розвитку підприємства за 2020, 2021 та 2022 рр.: середньорічна чисельність працівників, вартість основних виробничих засо-

бів, обсяг товарної продукції, виробіток на одного працюючого, розмір прибутку, рівень рентабельності. *Вкажіть* підмет, присудок і вид таблиці.

3.26. *Побудуйте* макет таблиці, що характеризує зміну за 2020–2022 рр. чисельності персоналу підприємства за окремими категоріями і розміром заробітної плати. *Вкажіть* підмет, присудок і вид таблиці.

3.27. Для дослідження ступеня механізації робіт *побудувати* макет таблиці, в підметі якої наведені цехи машинобудівного заводу (заготівельний, токарний, збиральний), в присудку – чисельність основних робітників, рівень механізації робіт (у відсотках). *Вказати* вид таблиці.

3.28. *Побудувати* макет таблиці, що відображає ефективність використання обладнання на підприємстві. *Вказати* підмет, присудок, визначити вид таблиці.

3.29. *Побудувати* макет таблиці, що відображає ефективність використання основних засобів на підприємстві. *Вказати* підмет, присудок, визначити вид таблиці.

3.30. *Побудувати* макет комбінаційної таблиці, що характеризує технічний стан обладнання (рівень зносу) та необхідність проведення капітального ремонту у звітному періоді. *Вказати* підмет, присудок, визначити вид таблиці.

3.31. Для характеристики динаміки фізичного обсягу валового внутрішнього продукту в Україна та в розвинених країнах за 2015–2020 рр. *побудувати* макет таблиці. *Вказати* підмет і присудок.

3.32. *Побудувати* макет таблиці, що характеризує розмір середньої заробітної плати (в дол. США) в Україні та в розвинених країнах ЄС в 2010 р. та в 2022 р. *Вказати* підмет і присудок.

3.33. *Побудувати* макет таблиці, що характеризує обсяг відходів за класами небезпечності в Україні за 2015–2020 рр. *Вказати* підмет і присудок.

3.34. *Побудувати* макет статистичної таблиці, що характеризує розподіл посівних площ сільськогосподарських культур (га) за категоріями господарств (підприємства, господарства населення). Сформулюйте заголовок цього макету. *Вкажіть*, макетом якого виду таблиці він є? Чи є групування підмету цього макету типологічним?

3.35. *Розробіть* макет статистичної таблиці, що характеризує розподіл міст України за чисельністю населення, яка в них проживає. Охарактеризуйте кожну виділену групу міст за числом міст та чисельністю населення, що в них проживає. *Вкажіть:* а) макетом якого виду таблиці він є? б) підмет та присудок таблиці; в) вид таблиці.

3.36. *Розробіть* макет статистичної таблиці, яка характеризує при-

родний приріст населення (осіб). *Вкажіть*: а) макетом якого виду таблиці він є? б) підмет та присудок таблиці.

3.37. *Побудувати* макет статистичної таблиці, що характеризує чисельність постійного населення України за статтю (осіб). *Визначте* підмет і присудок таблиці. Чи є групування підмету цього макету типологічним?

3.38. *Назвіть* підмет і присудок кожної із наведених нижче таблиць. *Визначте* тип таблиці і характер розробки присудка.

А. Групування сільськогосподарських підприємств, які здійснювали сільськогосподарську діяльність за розміром сільськогосподарських угідь на 1 листопада 2020 р.

	Кількість підприємств		Площа сільськогосподарських угідь	
	одиниць	у % до загальної кількості	тис. га	у % до загальної площі сільськогосподарських угідь
Підприємства, що мали сільськогосподарські угіддя	36 277	76,3	20 252,4	100,0
у т.ч. площею, га				
до 5,00	1 975	4,2	6,4	0,0
5,01–10,00	1 877	3,9	14,7	0,1
10,01–20,00	3 061	6,4	47,7	0,2
20,01–50,00	9 395	19,7	353,3	1,7
50,01–100,00	4 626	9,7	333,0	1,6
100,01–500,00	7 889	16,6	1 928,1	9,5
500,01–1000,00	2 716	5,7	1 957,9	9,7
1000,01–2000,00	2 409	5,1	3 458,9	17,1
2000,01–3000,00	1 030	2,2	2 500,3	12,4
3000,01–4000,00	473	1,0	1 629,9	8,1
4000,01–5000,00	247	0,5	1 099,2	5,4
5000,01–7000,00	263	0,6	1 535,9	7,6
7000,01–10000,00	132	0,3	1107,0	5,5
більше 10000,00	184	0,4	4 280,1	21,1

Б. Баланс основних засобів промислового підприємства за 2022 р.
(млн грн)

Види продукції	Всі основні засоби	В тому числі	
		виробничі	невиробничі
Основні засоби на 01.01.2022 р.	25,4	21,3	4,1
Надійшло основних засобів за 2022 р.	6,4	5,9	0,5
Вибуло за 2022 р.	5,3	4,8	0,5
Основні засоби на 01.01.2023 р.	26,5	22,4	4,1

В. Споживання продуктів харчування у домогосподарствах
(у середньому за місяць у розрахунку на одну особу; кг)

	2018 р.			2019 р.		
	усі домогосподарства	у тому числі, які проживають у місцевостях		усі домогосподарства	у тому числі, які проживають у місцевостях	
		міській	сільській		міській	сільській
М'ясо і м'ясопродукти	4,9	5,2	4,2	5,1	5,4	4,5
Молоко і молочні продукти	19,0	19,0	19,2	19,0	18,9	19,2
Яйця, шт.	19	20	18	20	20	19
Риба і рибопродукти	1,4	1,4	1,3	1,5	1,5	1,4
Фрукти, ягоди, горіхи, виноград	3,8	4,4	2,6	4,0	4,7	2,4
Хліб і хлібні продукти	8,3	7,7	9,6	8,1	7,4	9,4

Г. Кількість пенсіонерів в Україні

(на 1 січня)

	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Всього пенсіонерів, тис.	11 725	11 470	11 335
В тому числі:			
за віком	8 922	8 693	8 535
за інвалідністю	1 401	1 415	1 454
у разі втрати годувальника	646	629	649

3.39. *Складіть* макет комбінаційної таблиці впливу на розмір заробітної плати стажу та кваліфікації робітників.

3.40. *Назвіть* підмет і присудок приведеного нижче макета таблиці і *сформулюйте* для неї заголовок.

Таблиця 3.8

	Усього використано палива, %	У тому числі			
		на перетворення в інші види палива та енергію	для неенергетичних цілей	кінцеве використання	втрати при розподілі, транспортуванні та зберіганні
Усього	100,0	51,9	3,6	43,5	1,0
Вугілля	100,0	89,8	0,6	9,6	0
Газ природний	100,0	37,3	6,7	52,9	3,1
Нафта сира	100,0	99,3	0,3	0,2	0,2

3.41. *Побудуйте* макет статистичної таблиці, що характеризує структуру та технічний стан основних засобів підприємства за 2021–2022 рр. Визначте підмет, присудок і вид таблиці за характером підмету.

3.42. *Складіть* макет групової статистичної таблиці для дослідження впливу кваліфікації основних робітників на обсяг місячного виробітку.

3.43. *Складіть* макет групової таблиці для дослідження впливу добрив на урожайність зернових культур.

3.44. *Складіть* макет комбінованої таблиці для дослідження впливу фондоозброєності та рівня механізації робіт на продуктивність праці.

3.45. *Складіть* макет групової таблиці для дослідження впливу середньооблікової чисельності працівників магазинів на величину товарообігу.

3.2. Виклад статистичного матеріалу у вигляді таблиці

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Виклад цифрових даних, що характеризують суспільні явища та процеси, в табличній формі створює сприятливі умови для аналізу цих явищ. Розглянемо це на прикладі наступної задачі.

Задача 3.1. Чисельність наявного населення України на 1 січня 2010 р. складала 45,9 млн осіб, міського — 31,5 млн осіб, сільського — 14,4 млн осіб, що становить до всього населення відповідно 68,6 % та 31,4 %. За даними на 1 січня 2020 р. загальна чисельність постійного населення знизилася до 41,9 млн осіб, із яких на міське населення припадало 29,1 млн осіб і на сільське — 12,8 млн осіб, або в процентах до загальній чисельності наявного населення відповідно 69,5 і 30,5. На 1 січня 2021 р. чисельність наявного населення становила 41,6 млн осіб, в тому числі міського населення — 29,0 млн осіб і сільського — 12,6 млн осіб, що відповідно дорівнює 69,6 і 30,4 % від загальної чисельності наявного населення. *Представити* ці дані у вигляді таблиці.

Рішення

Для створення сприятливих умов для аналізу чисельності та структури наявного населення країни найбільш доцільно зліва помістити роки, а в вертикальних графах — показники (спочатку абсолютні, а потім відносні). При такому розміщенні можна легко прослідити закономірно-

сті зміни чисельності міського та сільського населення України за 2010–2011 рр. (табл. 12.1).

Таблиця 3.9

Роки	Чисельність наявного населення	В тому числі		В процентах до всього наявного населення	
		міське	сільське	міське	сільське
2010	45,9	31,5	14,4	68,6	31,4
2020	41,9	29,1	12,8	69,5	30,5
2021	41,6	29,0	12,6	69,6	30,4

Статистична таблиця завдяки визначеній системі розташування цифрових даних дозволяє значно наочніше і виразніше словесний текст, з'являється можливість порівняння та аналізу. При цьому відповідний пізнавальний ефект досягається за допомогою таблиць швидше і значно меншою витратою місця, ніж у текстовому викладі.

Задачі

3.46. Виробництво основних видів енергоресурсів (в нафтовому еквіваленті) характеризується наступними даними (тис. т): вугілля і торф 2010 — 33716, 2019 р. — 14089; сира нафта 2010 р. — 3590, 2019 р. — 2748; природний газ 2010 р. — 15428, 2019 р. — 16318, атомна енергія 2010 р. — 23387, 2019 р. — 21771, гідроелектроенергія 2010 р. — 1131, 2019 р. — 510. *Оформіть* дані у вигляді таблиці, *зробіть* висновки.

3.47. Питома вага матеріальних витрат без амортизації в загальному обсязі продукції переробної промисловості України за 2015–2020 рр. в процентах склала: в 2015 р. по всій переробній промисловості 65,1, виробництво харчових продуктів — 68,7, виробництво одягу — 70,5, поліграфічна діяльність — 65,3, металургійне виробництво — 70,6, машинобудування — 69,4, виробництво коксу та коксопродуктів — 62,1, виробництво продуктів нафтоперероблення — 57,6; в 2021 р. по переробній промисловості в цілому — 66,4, виробництво харчових продуктів — 69,5, виробництво одягу — 69,4, поліграфічна діяльність — 67,3, металургійне виробництво — 71,8, машинобудування — 70,3, виробництво коксу та коксопродуктів — 61,1, виробництво продуктів нафтоперероблення — 57,2. *Оформіть* дані в таблицю, зробіть *висновки*.

3.48. Імпорт палива (в перерахунку на нафтовий еквівалент) в народному господарстві України за видами в процентах склав у 2010 р. вугілля та торф — 12,2, сира нафта — 15,4, нафтопродукти — 11,8, при-

родний газ — 57,6; в 2020 р. вугілля та торф — 38,1, сира нафта — 3,8, нафтопродукти — 30,0, природний газ — 27,3. *Оформіть* дані у вигляді таблиці, *зробіть* висновки.

3.49. Чисельність промислово-виробничого персоналу на 1 січня 2021 р. на підприємстві склала 540 осіб. Із загального числа працюючих складали (осіб): основні робітники — 315, допоміжні робітники — 45, інженерно-технічні робітники — 150, молодший обслуговуючий персонал — 30. На 1 січня 2022 р. чисельність працюючих склала 550 осіб, в тому числі основні робітники — 325, допоміжні робітники — 55, інженерно-технічні робітники — 147, молодший обслуговуючий персонал — 23. *Представте* викладений матеріал у вигляді таблиці.

3.50. *Об'єднайте* нижче приведені таблиці про міграцію населення адміністративного району за 2021 р. в одну і дати їй загальний заголовок.

Таблиця 3.10

Вибуло із міста (осіб)	Всього	В тому числі	
		чоловіків	жінок
В село	5 380	2 734	2 646
В місто	1 250	854	396
Всього	6 630	3 588	3 042

Таблиця 3.11

Вибуло із села (осіб)	Всього	В тому числі	
		в місто	в село
Чоловіки	3 485	2 164	1 321
Жінки	3 473	2 189	1 284
Всього	6 958	4 353	2 605

3.51. Вищими навчальними закладами України було випущено спеціалістів (тис. осіб): 2015/2016 н. р. — 447,4, 2016/2017 н. р. — 386,7, 2018/2019 н. р. — 421,1. Із числа осіб, які закінчили вищі навчальні заклади на денному відділенні (тис. осіб): 2015/2016 н. р. — 272,9, 2016/2017 н. р. — 239,2, 2018/2019 н. р. — 262,7. Вечірнє відділення закінчили (тис. осіб): 2015/2016 н. р. — 1,6, 2016/2017 н. р. — 1,4, 2018/2019 н. р. – 1,3. Особи, які закінчили навчання за заочною формою, склали (тис. осіб): 2015/2016 н. р. — 172,8, 2016/2017 н. р. — 145,9, 2018/2019 н. р. — 157,0. *Представте* вище викладений матеріал у вигляді таблиці.

3.52. Енергетичне споживання чорної металургії за роками характеризується наступними даними (в % до підсумку): 2010 р. вугілля та торф — 43,6, нафтопродукти — 1,9, природний газ — 30,3, електроенергія — 15,9, теплоенергія — 8,4; в 2020 р. енергетичне споживання чорної металургії становило: вугілля та торф — 50,7, нафтопродукти — 1,0, природний газ — 16,7, електроенергія — 17,4, теплоенергія — 14,1. *Побудуйте* статистичну таблицю, що характеризує зміну структури енергоспоживання в чорній металургії.

3.53. В 2019 р. в Україні було вироблено електроенергії 29,2 млрд кВт-год., добуто 42,4 млн т вугілля, сирої нафти – 3,0 млн т, природного газу — 27,8 млрд м^3. В 2021 р. виробництво цих видів промислової продукції склало відповідно 30,8 млрд кВт-год., 43,5 млн т, 3,2 млн т і 26,7 млрд м^3. *Складіть* статистичну таблицю, охарактеризуйте динаміку зростання цих видів продукції. *Визначте* вид статистичної таблиці.

3.54. В 2015 р. в Україні було вироблено томатного соку 44,0 млн л, тканини – 520 млн м^2, тракторів (з потужністю більше 59 кВт) — 1 400 шт., 12,5 млн пар взуття. В 2022 р. виробництво цих видів промислової продукції склало відповідно 45,2 млн л, 510 млн м^2, 1380 шт., 12,8 млн пар. *Складіть* статистичну таблицю. *Визначте* вид статистичної таблиці.

3.55. В 2015 р. питома вага окремих видів транспорту в загальному обсязі перевезених вантажів склала (в процентах): залізничний — 48,5, автомобільний — 47,1, морський 3,9, річковий — 0,5. В 2021 р. відповідно 49,5, 46,2, 4,0 і 0,3. *Складіть* статистичну таблицю і *визначте* її вид.

3.56. *Об'єднайте* два наступних макети статистичних таблиць про розподіл робітників механічного цеху за професіями, статтю і тарифному розряду в одну і *сформулюйте* його загальний заголовок:

1. Розподіл робітників механічного цеху за професіями та статтю

Процесія	Всього робітників	Із них:	
		чоловіків	жінок
Токарі Свердлувальники Фрезерувальники і т. п.			
Всього			

2. Розподіл робітників механічного цеху різних професій за рівнем кваліфікації

Тарифний розряд	Всього робітників	Із них:			
		токарі	свердлувальники	фрезерувальники	і т. п.
I II III IV V VI					
Всього					

3.57. Видобування палива (в перерахунку на умовне паливо) в економіці країни за видами в процентах складає: в 2010 р. нафти (включаючи газовий конденсат) — 35,4, газу — 50,8, вугілля – 12,6, інші види — 1,2; в 2020 р. нафти – 36,8, газу — 49,3, вугілля — 12,9, інші види — 1,0. *Оформіть* таблицю, *зробіть* висновки.

3.58. Валова продукція сільськогосподарського підприємства в 2021 р. становила 6 500 тис. грн, в тому продукція рослинництва і тваринництва — відповідно 4 500 і 2 000 тис. грн. Валова продукція рослинництва і тваринництва в 2021 р. становила відповідно 69,2 % і 30,8 %. *Представте* дані у вигляді статистичної таблиці, *сформулюйте* її заголовок, *вкажіть* підмет і присудок. До якого виду таблиць вона відноситься?

3.59. Згідно з виробничої програми бізнес-плану за трьома основними видами продукції на 2022 р. по меблевій фабриці передбачено виробництво 5000 столів, 700 диванів і 10 000 стільців. Фактично у 2022 р. було виготовлено 4 900 столів, 770 диванів і 12500 стільців. Процент виконання плану на 2022 р. становив: за столами — 98 %, за диванами — 10 %, за стільцями — 125 %. *Побудуйте* за цими даними таблицю, *вкажіть* її підмет і присудок.

3.3. Тести

1. Називаються таблиці, у підмету яких немає групи, і дається лише перечень (найменування) одиниць сукупності (перечневі таблиці), адміністративних районів (територіальні таблиці) або періоди часу (хронологічні таблиці):

а) прості;

б) варіаційні;

в) структурні;

г) комбінаційні.

2. В підметі таблиці дається перелік досліджуваних об’єкт дослідження поділений за двома і більше ознаками. За характером підмету таблиця:

а) проста;

б) групова;

в) аналітична;

г) структурна.

3. Підмет простої таблиці складається із переліку дат. Це таблиця:

а) аналітична;

б) структурна;

в) хронологічна;

г) територіальна.

4. Виконання плану трьома цехами машинобудівного заводу в 2022 р. характеризується наступними даними (тис. грн):

Найменування цехів	По плану	Фактично	Виконання плану, %
Механічний	545,6	567,8	104,1
Інструментальний	213,6	239,5	112,1
Ремонтний	128,4	115,3	89,8
Збиральний	180,0	190,6	105,9

Підмет таблиці:

а) цехи;

б) планові показники виробництва продукції;

в) фактичні показники виробництва продукції;

г) показники виконання плану.

5. Виробництво найважливіших видів промислової продукції в Україні характеризується наступними даними:

Найменування цехів	2017 р.	2018 р.	2019 р.
Чавун переробний і дзеркальний у чушках, болванках чи формах первинних інших, млн т	19,8	20,5	20,1
Нафта сира	2,2	2,3	2,4
Газ природний скраплений або в газоподібному стані, млрд $м^3$	20,5	20,8	20,5

За характером підмету таблиця:

а) проста;

б) групова;

в) комбінаційна;

г) аналітична.

6. Комбінація горизонтальних рядків та вертикальних граф, на перетині яких утворюються клітинки — це:

а) підмет статистичної таблиці;

б) макет статистичної таблиці;

в) присудок статистичної таблиці;

г) заголовок статистичної таблиці.

7. Технічний стан та вік обладнання заводу характеризується наступними даними:

Групи обладнання		Кількість обладнання, одиниць	
За віком	За технічним станом	всього	в тому числі застарілого
До 3 років	придатне обладнання	20	6
	обладнання, що потребує капітального ремонтну	8	2
	непридатне обладнання	6	4
Від 3 до 5 років	придатне обладнання	26	16
	обладнання, що потребує капітального ремонтну	15	6
	непридатне обладнання	12	10

За характером підмету таблиця:

а) структурна;

б) групова;

в) проста;

г) комбінаційна.

8. Витрати державного бюджету України характеризуються наступними даними:

Найменування цехів	2017 р.	2018 р.	2019 р.
Витрати — всього	1 056,9	1 250,2	1 372,3
В тому числі:			
загальнодержавні функції	166,3	191,6	203,1
оборона	73,4	97,0	106,6
економічна діяльність	102,9	140,8	154,2
житлово-комунальне господарство	27,2	30,3	34,5

За характером підмету таблиця:

а) проста;

б) комбінована;

в) структурна;

г) комбінаційна.

9. Складові елементи досліджуваного об’єкта або їх групи, які розміщують у лівій частин таблиці, і підлягають характеристиці і вивченню — це:

а) підмет таблиці;

б) присудок таблиці;

в) статистична таблиця;

г) групова таблиця.

10. Це таблиця, підмет яких розбито на групи за якоюсь істотною ознакою (наприклад, групування магазинів за обсягом товарообороту, собівартістю продукції статтями витрат):

а) проста таблиця;

б) групова таблиця;

в) комбінована таблиця;

г) підмет таблиці.

11. Маються наступні дані про чисельність дослідників науково-дослідних інститутів країни:

Найменування цехів	2017 р.	2018 р.
Загальний обсяг витрат за напрямами інноваційної діяльності промислових підприємств — всього (млн грн)	9 117,5	12 180,1
В тому числі:		
дослідження і розробки	2 169,8	3 208,8
придбання інших зовнішніх знань	21,8	46,1
придбання машин обладнання та програмного забезпечення	5 898,8	8 291,3
інші витрати	1 027,1	633,9

За характером підмету таблиця:

а) проста;

б) вторинна;

в) структурна;

г) комбінаційна.

12. Маються наступні дані про чисельність населення області (тис. осіб):

Показник	На 01.01. 2020 р.	На 01.01. 2022 р.
Міське населення	1 547,5	1 725,6
Сільське населення	512,3	408,7
Усього	2 059,8	2 134,3

За характером підмету таблиця:

а) проста;

б) факторіальна;

в) структурна;

г) комбінаційна.

13. Безробіття населення (за МОП) в Україні за віковими групами в 2020 р. характеризується наступними даними:

Вікові групи населення	2020 р.	
	тис. осіб	у % до робочої сили відповідного віку
Усе населення віком 15 років і старше	1 674,2	9,5
з нього		
15–70 років	1 674,2	9,5
20–64 роки	1 627,8	9,4
працездатного віку	1 673,3	9,9
за віковими групами		
15–24 роки	227,9	19,3
25–29 років	173,0	8,7
30–34 роки	209,2	8,2
35–39 років	271,9	10,3
40–49 років	442,9	9,5
50–59 років	348,4	9,0
60–70 років	0,9	0,1
71 рік і старше	0,0	0,0

За характером підмету таблиця:

а) проста;

б) вторинна;

в) структурна;

г) комбінаційна.

14. Маються наступні дані про якість грунту та доз добрив на економічну ефективність вирощування зернових культур

Група сільськогосподарських підприємств за якістю грунтів, балів	Підгрупи підприємств за кількістю внесених добрив на 1 га зернових культур, ц діючої речовини	Кількість підприємств	Середня якість грунту	Середня доза внесених добрив, ц діючої речовини	Собівартість 1 ц зерна, грн
I до 60	До 2,0	7	50,8	1,45	9,18
	понад 2,0	3	55,6	2,26	9,03
Разом по I групі		10	52,3	20,5	9,14
II від 60 до 75	До 2,0	6	65,1	1,86	7,30
	понад 2,0	11	65,9	2,13	7,37
Разом по II групі		17	65,4	1,99	7,33

За характером підмету таблиця:

а) проста;

б) групова;
в) структурна;
г) комбінаційна.

Питання для обговорення

1. В чому полягають переваги статистичної таблиці порівняно із словесним текстом? Яке значення має статистична таблиці для групування статистичних даних?
2. Що називається підметом та присудком таблиці? Де зазвичай вони розташовуються на схемі статистичної таблиці?
3. Яке принципове завдання присудку? За допомогою чого дається ця характеристика?
4. Як у присудку може бути здійснене розробка (розміщення) показників?
5. *Охарактеризуйте* відмінність простих та групових таблиць. *Назвіть* приклади простих та групових таблиць.
6. *Дайте* характеристику побудові комбінаційних таблиць.
7. *Охарактеризуйте* основні вимоги до оформлення таблиць.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Горкавий В. К.* Статистика : Підручник. Третє вид., переробл. і доповн. Київ: Алерта, 2019. С. 72–74.
2. Статистика: підручник / *С. І. Пирожков*, *В. В. Рязанцева*, *Р. М. Моторин* та ін. Київ: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2020. С. 76–78.
3. *Ткач Є. І.*, *Сторожук В. П.* Загальна теорія статистики: підручник. 3-тє вид. Київ: Центр учбової літератури, 2009. С. 65–79.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

Навчальні посібники, словники

4. Мармоза А. Т. Теорія статистики: підручник. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: «Центр учбової літератури», 2013. 115–120.
5. *Педченко Г. П.* Статистика: Навчальний посібник. Мелітополь: Колор Принт, 2018. С. 23–31.
6. Статистичний словник / [*О. Г. Осауленко*, *О. О. Васєчко*, *М. В. Пугачова* та ін.]; за ред. д-ра держ. упр., проф., член-кор. НАН України О. Г. Осауленка; НТК статистичних досліджень. Київ: ДП «Інформ.-аналіт. агентство», 2012. 498 с.

Глава 4. АБСОЛЮТНІ ТА ВІДНОСНІ ВЕЛИЧИНИ

4.1. Перерахунок абсолютних величин в умовні одиниці

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Абсолютні величини характеризують розміри (обсяги, рівні) суспільних явищ. Розміри суспільних явищ можуть бути виражені або у вигляді чисельності одиниць сукупності (наприклад, чисельність населення), або у вигляді величини ознаки, що характеризує дане суспільне явище (наприклад, фонд заробітної плати, собівартість продукції).

Продукція в умовно-натуральному вираженні вимірюється кількістю одного виду продукції, одиниця якої приймається за умовну. Перерахунок продукції в умовно-натуральний вираз здійснюється шляхом множення кількості цього виду продукції на відповідний коефіцієнт переведення за формулою:

$$N_{yc} = \sum_{i=1}^{m} n_i K_i = n_1 K_2 + n_2 K_2 + \ldots + n_m K_m,$$

де N_{yc} — продукція в умовному вираженні;

n_i — кількість виробів кожного виду i в натуральному вираженні;

K_i — відповідні коефіцієнти переведення в умовні одиниці;

m — кількість різних видів виробів, що призводять до єдиного умовного виразу.

Розглянемо приклад обчислення умовно-натуральної продукції.

Задача № 1. У звітному періоді обсяг виробництва азотних добрив на хімічному заводі характеризувався наступними даними:

Таблиця 4.1

Вид добрив	Обсяг виробництва, т
Сульфат амонію	20 000
Карбамід	25 000
Селітра натрієва	1 000

Необхідно визначити загальний обсяг виробництва добрив у звітному періоді.

При визначенні загального обсягу виробництва окремі види добрив

виражаються в одиницях діючої речовини. Кожен вид добрив за вмістом діючих речовин перераховується до виду, що обирається за базу. Так, наприклад, всі види азотовмісних добрив враховуються в перерахунку на сульфат амонію, що містить 20,5 % азоту.

Для кожного виду добрив встановлені коефіцієнти перерахунку на сульфат амонію:

Таблиця 4.2

Вид добрив	Коефіцієнт перерахунку
Сульфат аммонію	1,00
Карбамід	2,20
Селітра натрієва	0,76

Рішення

Виходячи із цих коефіцієнтів перерахунок виробництва окремих видів добрив в одиницях маси сульфат амонію представимо в табл.

Таблиця 4.2

Вид добрив	Обсяг виробництва, т	Коефіцієнт перерахунку	Обсяг виробництва у перерахунку на стандартний вміст діючої речовини, т
Сульфат амонію	20 000	1,00	20 000
Карбамід	25 000	2,20	55 000
Селітра натрієва	2 000	0,76	1 520
Всього			76 520

Таким чином, загальний обсяг виробництва добрив (у перерахунку на стандартний вміст діючої речовини) склав у звітному періоді 76520 т.

Задачі

4.1. Випуск продукції сирним заводом за звітний період характеризується наступними даними:

Таблиця 4.3

Види продукції	Жирність, %	Випуск, т		Коефіцієнт переведення
		плановий	фактичний	
Звенигородський	50	45	40	1,0
Російський	45	68	74	0,9
Мраморний	40	60	64	0,8

Визначити процент виконання плану: а) в натуральному вираженні; б) в умовно-натуральному вираженні.

4.2. Випуск мінеральних добрив підприємством хімічної промисловості характеризується наступними даними:

Таблиця 4.4

Види продукції	Вміст поживних речовин, %	Випуск, тис. т		Оптова ціна за 1 т, грн
		по плану	фактично	
Аміачна селітра	35,0	510	525	5 400
Сульфат аммонія	20,5	70	65	6 600
Нітрофоска	33,0	50	58	8 400
Карбамід	46,0	480	506	10 500

Визначити показники виконання плану виробництва мінеральних добрив: а) в натуральному вираженні; б) умовно-натуральному (перерахунок на вміст 20,5 % поживної речовини); в) вартості.

4.3. У звітному періоді випуск мила підприємством характеризується наступними даними:

Таблиця 4.5

Види продукції	Коефіцієнт переведення в мило 40%-ної жирності	Випуск в натуральних одиницях (т)	
		по плану	фактично
Мило господарське 40%-ної жирності	1,0	100	120
Мило господарське 60%-ної жирності	1,5	100	90
Всього		200	210

Визначте виконання плану в умовно-натуральних одиницях (в перерахунку на 40%-ну жирність).

4.4. Маються наступні дані про обсяг виробництва електродвигунів в натуральному вираженні на машинобудівному заводі:

Таблиця 4.6

Потужність двигуна, кВт	Базисний період	Звітний період
120	900	1 000
150	1 100	1 240
180	1 600	1 760
300	2 500	2 420

Визначити відносні величини динаміки: а) в натуральному вираженні; б) умовно-натуральному. За умовну одиниці слід прийняти двигун потужністю 120 кВт.

4.2. Визначення відносних величин виконання плану та планового завдання

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Відносні величини планового завдання представляють собою співвідношення величини показника, встановленого на плановий період, до його фактичної величини, досягнутої за попередній період або за якийнебудь інший, прийнятий за базу.

Відносні величини виконання плану представляють собою результат порівняння фактично досягнутого рівня показника з його плановим рівнем.

Відносні величини динаміки, планового завдання і виконання плану пов'язані між собою наступним співвідношенням: відносна величина динаміки дорівнює добутку відносних величин планового завдання та виконання планую Таким чином, знаючи будь-які дві величини, можна завжди знайти третю. Розглянемо приклади вирішення задач.

Задача 2. Маються наступні дані про обсяг виробництва товарної продукції за промисловими підприємствами (тис. грн).

Таблиця 4.7

Промислові підприємства	План	Фактично
№ 1	5 000	5 230
№ 2	2 000	1 870
№ 3	8 500	8 800
№ 4	3 600	3 900

За приведеними нижче даними визначте процент виконання плану по виробництву продукції по кожному промисловому підприємству та в цілому по групі підприємств.

Рішення

Процент виконання плану:

по підприємству № 1 — $\frac{5230}{5000} \times 100 = 104{,}6\,\%$;

по підприємству № 2 — $\frac{1870}{2000} \times 100 = 93{,}5\ \%$;

по підприємству № 3 — $\frac{8800}{8500} \times 100 = 103{,}5\ \%$.

Задача 3. Випуск продукції підприємства характеризується наступними даними (тис. грн).

Таблиця 4.8

Базисний період	Звітний період	
	По плану	Фактично
56 875	57 954	59 764

Визначити відносні величини планового завдання, виконання плану і динаміки.

Рішення

Відносна величина планового завдання обчислюється шляхом ділення планового рівня на рівень базисного періоду:

$$\frac{y_{\text{пл}}}{y_0} = \frac{57\,954}{56\,875} \cdot 100 = 101{,}9\ \%.$$

Відносна величина виконання плану визначається діленням фактичного рівня на плановий рівень того ж періоду:

$$\frac{y_1}{y_{\text{пл}}} = \frac{59\,764}{57\,954} \cdot 100 = 103{,}1\ \%.$$

Відносна величина динаміки визначається шляхом ділення фактичного рівня за звітний період на фактичний рівень за базисний період:

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{59\,764}{56\,875} \cdot 100 = 105{,}1\ \%.$$

Між обчисленими показниками мається наступний взаємозв’язок:

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{y_{\text{пл}}}{y_0} \cdot \frac{y_1}{y_{\text{пл}}} = 1{,}019 \cdot 1{,}031 = 105{,}1\ \%.$$

Задача 4. Річним планом фабрики на 2021 р. передбачався зростання випуску товарної продукції на 4,6% .Фактично приріст товарної продукції за цей рік склав 8,3%. Визначте відносну величину виконання фабрикою річного плану по зростанню випуску товарної продукції.

Рішення

Заданий планом приріст випуску продукції (4,6 %) виражається у формі коефіцієнта зростання випуску продукції в порівнянні з 2020 р .: $\left(\frac{100+4,6}{100}=1,046\right)$.

Фактичний відсоток зростання випуску продукції (108,8%) висловлюємо у формі коефіцієнта:

$$\frac{100+8,3}{100}=1,083.$$

За допомогою отриманих коефіцієнтів розрахуємо відносну величину виконання плану:

$$\frac{1,083}{1,046}\cdot 100=103,5\,\%.$$

тобто в 2021 р. план випуску товарної продукції перевиконаний на 3,5 %.

Задача 5. Річний товарообіг торговельного підприємства на 2022 р. передбачав зростання випуску товарної продукції на 5,5 %. Фактично приріст товарообігу цей рік становив 8,8 %. *Визначте* відносну величину виконання торговельним підприємством річного плану щодо зростання товарообігу.

Рішення

Заданий планом приріст в 2022 р. товарообігу (5,5 %) виявляється у формі коефіцієнта зростання товарообігу порівняно з 2021 р:: $\frac{100+5,5}{100}=1,055.$

Фактичний відсоток зростання товарообігу (108,8%) виражаємо у формі коефіцієнта:

$$\frac{100+8,8}{100}=1,088.$$

За допомогою отриманих коефіцієнтів розрахуємо відносну величину виконання плану:

$$\frac{1,088}{1,055}\cdot 100=103,1\,\%.$$

тобто, досягнутий 2022 р. план випуску продукції перевиконано фабрикою на 3,1 %.

Задачі

4.5. Фактичний випуск продукції в 2020 р., план і фактичний випуск продукції в 2021 р. за окремими видами тканини, які виробляються ткацькою фабрикою, становив (тис. пог. м).

Таблиця 4.9

Види продукції	Фактично в 2020 р.	По плану 2021 р.	Фактично 2021 р.
Атлас	2 400	2 500	2 550
Батист	3 750	3 800	3 950
Бязь	500	500	430
Гіпюр	1 100	1 000	1 100

Визначити відносні величини: а) планового завдання; б) ступеня виконання плану; в) динаміки виробництва кожного виду тканини і представте їх у вигляді таблиці.

4.6. Випуск продукції підприємства характеризується наступними даними (тис. грн):

Таблиця 4.10

Базисний період	Звітний період	
	По плану	Фактично
54 650	56 864	57 685

Визначити відносні величини планового завдання, виконання плану і динаміки.

4.7. Плановий та фактичний обсяг валової продукції машинобудівного заводу становив:

Таблиця 4.11

Цеха	Обсяг валової продукції, тис. грн		
	базисний період	планове завдання на звітний період	звітний період
Механічний	2 314	2 415	2 578
Інструментальний	3 285	3 346	3 471
Збиральний	4 186	4 272	4 065
Ремонтний	1 527	1 685	1 874

Обчисліть відносні величини планового завдання, ступеня вико-

нання плану і фактичної зміни обсягу валової продукції у звітному періоді порівняно з базисним за кожним цехом і всього по машинобудівному заводу.

4.8. За приведеними нижче даними *визначте* процент виконання плану по виробництву продукції за звітний місяць по кожному цеху та в цілому по підприємству (тис. грн):

Таблиця 4.12

Цех підприємства	План	Фактично
Механічний	620	627
Токарний	291	276
Зварювальний	264	267
Збиральний	510	527

4.9. Виконання плану виробництва різних виробів верстатобудівного заводу «Факел» за звітний період характеризується наступними даними (тис. грн):

Таблиця 4.13

Виріб	Фактично 2020 р.	По плану 2021 р.	Фактично 2021 р.
Станок ТКР-250	48	45	48
ТКР-500	60	62	56
ТНП-150	120	128	136
ФКН-200	90	95	86

Визначити відносні величини: а) планового завдання; б) ступеня виконання плану; в) динаміки виробництва кожного виду тканини і *представте* їх у вигляді таблиці.

4.10. Планом передбачалося збільшення обсягу реалізації продукції на 4 %, фактично було реалізовано на 8,4 % більше, ніж в базисному періоді. *Визначте* процент виконання плану по реалізації продукції.

4.11. Фондовіддача у звітному періоді зросла порівняно з базисним періодом на 8,2 % при плані 4,6 %. *Визначте* виконання плану по зростанню фондовіддачі.

4.12. Планом передбачалося знизити собівартість товарної продукції на 7,6 %, фактично вона була знижена на 6,8 % порівняно з рівнем минулого року. *Визначте*, на скільки процентів перевиконаний план по зниженню собівартості товарної продукції.

4.13. За наведеними даними *визначте* фактичний випуск продукції (в тис. грн підприємством ТОВ «Факел» за кожен квартал і *обчисліть*

процент виконання плану за рік:

Таблиця 4.14

Види продукції	Квартали			
	I	II	III	IV
План виробництва продукції — тис. грн	400	420	430	460
Процент виконання плану	103,1	101,4	100,6	105,2

4.13. Маються наступні дані про виконання плану виробництва за жовтень звітного періоду цехами машинобудівного заводу:

Таблиця 4.15

Цехи	Фактичний обсяг продукції (тис. грн)	Процент виконання плану
№ 1	864	105
№ 2	657	92
№ 3	561	104
№ 4	284	101

Обчисліть процент виконання плану в цілому по заводу.

4.14. Маються наступні дані про обсяг фактичного випуску за окремими цехами підприємствами за вересень звітного року:

Таблиця 4.16

Цехи	Фактичний випуск валової продукції (тис. грн)	Процент виконання плану
Ливарний	1 284,6	106,2
Механічний	1 654,3	96,4
Збиральний	537,4	104,3
Ремонтний	1 284,5	101,4
Токарний	9 854,7	105,7
Шліфувальний	854,7	98,5

Визначте процент виконання плану в середньому по підприємству.

4.15. Промислове підприємство за планом на 2022 р. повинно було збільшити обсяг виробленої валової продукції на 4,0 % порівняно з 2021 р. Фактично підприємство збільшило виробництво валової продукції в 20022 р. порівняно з 2021 р. на 6,7 %. *Визначте* ступінь виконання плану по випуску валової продукції на підприємстві в 2022 р.

4.16. Виробництво продукції прокатним цехом металургійного комбінату за звітний період характеризується наступними даними:

Таблиця 4.17

Сталь кругла, діаметр, мм	Випуск, т		Коефіцієнт переведення
	плановий	фактичний	
40	5 000	4 480	1,0
45	4 000	4 100	0,9
50	3 000	3 250	0,8
55	1 500	1 500	0,7
60	1 000	1 200	0,6

Визначити процент виконання плану: а) в натуральному вираженні; б) в умовно-натуральному вираженні.

4.17. Промислове підприємство перевиконало план по випуску продукції у вартісному вираженні в 2022 р. на 7,2 %. Збільшення обсягу виробленої продукції підприємство порівняно з 2021 р. в 2022 р. становило 9,3 %. *Визначте* планове завдання по випуску продукції на підприємстві на 2022 р. порівняно з 2021 р.

4.18. Маються наступні дані про обсяг виробництва продукції в збиральному цеху машинобудівного заводу за окремими кварталами:

Таблиця 4.18

Квартал	Валова продукція (тис. грн)		Процент виконання плану
	за планом	фактично	
I	740,5	…	102,3
II	…	786,5	101,6
III	…	812,4	100,4
IV	834,8	…	98,2

Визначити процент виконання плану виробництва валової продукції за перше та друге півріччя і в цілому за рік. Які формули середньої слід використати для обчислення процента виконання плану за перше та друге півріччя?

4.19. План по реалізації продукції промислового підприємства 2022 р. передбачав збільшення обсягу реалізованої продукції порівняно з 2021 р. на 6 %. В дійсності план реалізації продукції був недовиконаний на 2,1 %. *Визначте*, на скільки процентів збільшився обсяг реалізації в 2022 р. порівняно з 2021 р.

4.20. Маються наступні дані про обсяг виробництва продукції в збиральному цеху машинобудівного заводу за окремими кварталами (табл. 4.19).

Таблиця 4.19

Квартал	Валова продукція (тис. грн)		Процент виконання плану
	за планом	фактично	
I	767,2	…	101,8
II	…	784,1	102,4
III	…	802,1	100,7
IV	824,5	…	97,3

Визначити процент виконання плану виробництва валової продукції за перше та друге півріччя і в цілому за рік. Які формули середньої слід використати для обчислення процента виконання плану за перше та друге півріччя?

4.21. Показники інструментального цеху за місяць наступні:

Таблиця 4.20

Види продукції	Затрати на 1 шт. за нормою, люд.-год.	Випуск, тис. шт.	
		плановий	фактичний
Прес-форми	26,1	3,0	2,7
Свердла	0,6	10,0	10,8
Ножові головки	1,6	0,5	0,8

Визначити відносну величину виконання плану за місяць за обсягом проведеної роботи у трудовому вираженні.

4.22. Маються наступні дані по ділянкам механічного цеху машинобудівного заводу:

Таблиця 4.21

Ділянка	Випуск валової продукції, тис. грн		
	в попередньому році	у звітному році	
		по плану	фактично
Токарна	756,3	775,1	786,3
Слюсарна	864,2	874,2	856,9
Фрезерна	581,4	594,2	605,7

Обчислити відносні величини планового завдання, виконання плану і динаміки за кожною ділянкою і в цілому за цехом.

4.23. Річним планом підприємства передбачено зростання випуску продукції на 5,2 %. Фактичний приріст склав 5,8 %. *Визначити* відносну

величину виконання річного плану по зростанню випуску продукції.

4.24. Річним планом підприємства передбачено зростання випуску продукції на 5,2 %. Фактичний приріст склав 4,8 %. *Визначити* відносну величину виконання річного плану по зростанню випуску продукції.

4.25. Річним планом фабрики на 2021 р. передбачалося зменшення матеріаломісткості випуску жіночого костюму на 4,2 %.Фактично матеріаломісткість деталі за звітний період знизилася на 4,8 %. *Визначте* відносну величину виконання фабрикою річного плану по зниженню матеріаломісткості жіночого костюму.

4.26. Виробничою програмою на 2022 р. передбачено зростання випуску товарної продукції заводу на 4,1% .Фактично приріст товарної продукції за цей рік склав 7,6%. *Визначте* відносну величину виконання фабрикою річного плану по зростанню випуску товарної продукції.

4.27. Планова трудомісткість виробництва деталі на машинобудівному заводі склала 6,8 люд.-год., а фактична 6,3 люд.-год. *Визначте* відносну величину виконання плану і зробіть висновки.

4.28. Планом на 2022 р. встановлена собівартість виробу в сумі 6280 грн. Фактична собівартість виробу в 2022 р. склала 5840 грн. *Визначте* відносну величину виконання плану і зробіть висновки.

4.29. Річний план фабрики на 2021 р. передбачав зростання випуску товарної продукції на 5,2 %.Фактично приріст товарної продукції цей рік становив 8,4 %. *Визначте* відносну величину виконання фабрикою річного плану щодо зростання випуску товарної продукції.

4.30. Рівень собівартості виробництва 1 т продукції *А* в базисному року становив 826 грн. Планом на 2020 рік намічено зниження витрат на виробництво тонни цієї продукції на 16 грн. Фактична собівартість тонни цієї продукції склала за звітом за 2020 рік 809 грн. *Визначте* відносну величину виконання плану зниження собівартості виробу *А* в 2020 р.

4.3. Визначення відносних величин структури

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Відносні величини структури представляють собою співвідношення розмірів частин та цілого. Вони характеризують склад статистичної сукупності і відповідають на питання, яку долю (або питому вагу) у всієї сукупності складають окремі її частини.

Для обчислення відносних величин структури необхідно розділити

значення окремих елементів значення загального підсумку і помножити на 100:

$$d_i = \frac{f_i}{\sum f_i} \cdot 100,$$

де d_i — відносний показник структури;

f_i — окремі частини сукупності явища;

$\sum f_i$ — сума окремих частин сукупності.

Розглянемо приклад обчислення відносних показників структури.

Задача 6. Обсяг капітальних інвестицій у матеріальні активи в народному господарстві України в 2020 р. характеризується наступними даними:

Таблиця 4.22

	Млн грн
Інвестиції в матеріальні активи — всього	483 324,0
будівлі житлові	34 885,7
будівлі нежитлові	78 920,1
інженерні споруди	127 995,4
машини, обладнання та інвентар	161 636,6
транспортні засоби	50 074,6
земля	2 298,5
довгострокові біологічні активи рослинництва та тваринництва	5 247,4
інші матеріальні активи	22 265,7

Визначити відносні показники структури капітальних інвестицій у матеріальні активи.

Рішення

Відносні показники структури представляють собою відношенні розмірів частин і цілого. Вони характеризують склад статистичної сукупності і відповідають на питання, яку частку (або питому вагу) із всієї сукупності складають окремі її частини.

Приведемо розрахунок відносних величин структури (див. табл.).

В останній колонці таблиці містяться відносні величини структури, виражені у відсотках. Вони отримані наступним чином:

будівлі житлові — $\frac{34\,885,7}{483\,324,0} \times 100 = 7,2\ \%$;

будинки нежитлові — $\frac{78\,920,1}{483\,324,0} \times 100 = 16,3\ \%$;

інженерні споруди — $\frac{127\,995{,}4}{483\,324{,}0}\times 100 = 26{,}5$ %;

машини, обладнання та інвентар — $\frac{161\,636{,}6}{483\,324{,}0}\times 100 = 33{,}4$ %;

транспортні засоби — $\frac{50\,074{,}6}{483\,324{,}0}\times 100 = 10{,}4$ %;

земля — $\frac{2\,298{,}5}{483\,324{,}0}\times 100 = 0{,}5$ %;

довгострокові біологічні активи рослинництва та тваринництва — $\frac{5\,247{,}4}{483\,324{,}0}\times 100 = 1{,}1$ %;

інші матеріальні активи — $\frac{22\,265{,}7}{483\,324{,}0}\times 100 = 4{,}6$ %.

Таблиця 4.23

	Млн грн	Процентів до підсумку
Інвестиції в матеріальні активи – всього	48 3324,0	100,0
будівлі житлові	34 885,7	7,2
будівлі нежитлові	78 920,1	16,3
інженерні споруди	127 995,4	26,5
машини, обладнання та інвентар	161 636,6	33,4
транспортні засоби	50 074,6	10,4
земля	2 298,5	0,5
довгострокові біологічні активи рослинництва та тваринництва	5 247,4	1,1
інші матеріальні активи	22 265,7	4,6

Найбільшу питому вагу займаю, як ми бачимо, інвестиції в машини, обладнання та інвентар. Їх частка в загальній сумі капітальних інвестицій в матеріальні активи становить 33,4 %.

Задачі

4.31. Обсяг продукції підприємства характеризується наступними даними (в тис. грн) (табл. 4.24). *Обчисліть* відносні показники структури товарної продукції в 2017 та 2022 рр. На основі отриманих результатів *зробіть* висновки про зміни в структурі товарної продукції за п’ять років.

Таблиця 4.24

Види продукції	2017 р.	2022 р.
Вся товарна продукція	10 000	11 250
В тому числі:		
готові вироби (відповідно до спеціалізації)	6 450	6 520
готові вироби (не відповідають спеціалізації)	864	1 254
напівфабрикати, що поставляються на сторону	1 686	1 480
роботи промислового характеру на сторону	674	1 780
інші види	326	216

4.32. В статистичному збірнику Держаної служби статистики України наведені наступні дані про розподіл населення за віком в 2019 та 2020 рр. (тис. чоловік):

Таблиця 4.25

Вікова група населення, років	2018 р.	2019 р.
Все населення	42 759,7	41 732,8
у тому числі у віці, років		
0–9	4 587,6	4 160,4
10–15	2 228,4	2 626,1
16–19	1 760,8	1 470,0
20–24	2 740,7	2 094,9
25–29	3 487,2	2 728,6
30–34	3 496,6	3 463,3
35–39	4 142,2	3 455,0
40–44	3 026,9	3 083,1
45–49	2 791,9	2 952,2
50–54	3 178,2	2 695,5
55–59	3 042,9	3 027,4
60–69	4 593,3	5 217,7
70 років і вище	3 683,0	3 683,1

Визначити: 1) відносні величини динаміки за кожною віковою групою та за усім населенням; 2) питому вагу кожної групи в загальній чисельності населення в 2018 та 2019 рр. Результати *представте* у вигляді таблиці та *проаналізуйте*.

4.33. В статистичному збірник Державної служби статистики України «Розподіл постійного населення України за статтю та віком на 1 січня» наведені дані про чисельність постійного населення за статтю і віком в цілому по Україні і окремо по Харківській області, тис. осіб (табл.. 4.26).

В а р і а н т *А*. *Обчисліть* вікову структуру населення України і

Таблиця 4.26

Вікова група населення, років	Україна			Харківська область		
	обидві статі	В тому числі		обидві статі	В тому числі	
		чоловіки	жінки		чоловіки	жінки
Все населення у тому числі у віці, років	41 418,7	19 195,4	22 223,3	2 618,2	1 213,8	1 404,4
0–4	1 689,4	871,8	817,5	98,9	51,3	47,6
5–9	2 297,7	1 184,2	1 113,5	131,4	67,6	63,8
10–14	2 292,7	1 179,9	1 112,8	128,0	66,3	61,8
15–19	1 901,4	978,3	923,1	119,0	60,7	58,2
20–24	1 999,1	1 029,3	969,8	132,7	70,5	62,3
25–29	2 579,8	1 323,9	1 255,9	162,1	85,4	76,7
30–34	3 351,9	1 705,3	1 646,7	210,6	107,2	103,4
35–39	3 497,9	1 758,9	1 739,0	232,8	119,3	113,6
40–44	3 117,5	1 533,8	1 583,7	207,5	104,1	103,4
45–49	2 962,5	1 420,9	1 541,6	193,4	93,0	100,3
50–54	2 717,3	1 269,4	1 447,9	172,7	80,2	92,5
55–59	2 889,8	1 286,0	1 603,8	185,3	81,3	104,0
60–64	2 910,4	1 225,4	1 685,1	188,1	76,4	111,6
65 років і старше	7 211,3	2 428,3	4 782,9	455,7	150,5	305,2

Харківської області за статтю і проаналізуйте отримані результати.

В а р і а н т *Б*. *Визначте* питому вагу населення у працездатному віці (жінки у віці 16–54, чоловіки — 16–59 років), а також питому вагу в цілому по Україні і окремо по Харківській області наступних вікових груп: 0–19 років, 20–59 років, 60 років і старше.

В а р і а н т *В*. *Визначте* відносні показники динаміки за кожною віковою групою і всьому населенню.

В а р і а н т *Г*. *Визначте*, скільки чоловіків приходиться на 1000 жінок і скільки чоловіків і окремо жінок приходиться на 1000 жителів.

4.34. За даними Державної служби статистики України маються наступні дані про чисельність чоловіків та жінок:

Таблиця 4.27

Рік	Осіб		
	обидві статі	чоловіки	жінки
2016	42 590 879	19 717 881	22 872 998
2017	42 414 905	19 644 580	22 770 325
2018	42 216 766	19 558 180	22 658 586
2019	41 983 564	19 455 272	22 528 292
2020	41 732 779	19 343 440	22 389 339

Визначте: а) за кожен рік питому вагу (%) чоловіків та жінок в загальній чисельності населення; б) зміну питомої ваги чоловіків і жінок за 2016–2020 рр.; в) скільки припадає жінок на 1000 чоловіків та 1000 осіб населення країни; г) співвідношення між чисельністю чоловіків і жінок за 2016–2020 рр. До яких видів статистичних величин відносяться обчислені вами показники?

4.35. В статистичному збірнику Держаної служби статистики України наведені наступні дані про розподіл чоловіків за віком в 2019 та 2020 рр. (тис. чоловік):

Таблиця 4.28

Вікова група населення, років	На 1 січня 2020 р.	На 1 січня 2021 р.
Все населення у тому числі у віці, років		
0–4	1 010,8	931,9
4–9	1 223,1	1 213,0
10–14	1 104,0	1 145,7
15–19	944,2	962,4
20–24	1 131,5	1 078,2
25–29	1 477,7	1 399,2
30–34	1 808,2	1 759,1
35–39	1 682,9	1 734,9
40–44	1 499,8	1 511,4
45–49	1 393,2	1 414,9
50–54	1 271,5	1 253,6
55–59	1 378,7	1 344,9
60 років і вище	3 980,3	3 594,2

Визначте: а) відносні величини динаміка за кожною віковою групою і всьому населенню; б) питому вагу кожної вікової групи в загальній чисельності населення. Результати *представте* у вигляді таблиці, *зробіть* висновки.

4.36. За даними про перевезення вантажів усіма видами транспорту (млн т) *обчисліть* відносні величини структури перевезення за 2010 і 2020 рр.:

Таблиця 4.29

Роки	Усі види транспорту	В тому числі				
		залізничний	автомобільний	трубопровідний	водний	авіаційний
2010	1 765	433	1 168	153	4	0,1
2019	1 579	313	1 147	113	2	0,1

Результати обчислень *представте* у вигляді таблиці і *зробіть* висновки.

4.37. Посівні площі під різними сільськогосподарськими культурами в фермерському господарстві «Фенікс» характеризуються наступними даними (*га*):

Таблиця 4.30

	2021 р.	2022 р.
Вся посівна площа	700	760
в тому числі:		
озима пшениця	340	380
ячмінь	80	72
овес	25	15
соняшник	80	124
кукурудза на силос та зелений корм	90	75
цукровий буряк	60	30
еспарцет	25	64

Визначте відносні величини структури посівних площ фермерського господарства в 2021 та 2022 рр.

4.38. По одному із сільськогосподарських підприємств маються дані про посівні площі зернових культур (*га*):

Таблиця 4.31

	Базисний період	Звітний період	
		план	фактично
Посівна площа всіх зернових та зернобобових культур	700	770	750
в тому числі:			
пшениця озима	450	425	410
пшениця яра	120	160	136
ячмінь озимий	45	52	67
ячмінь ярий	67	84	84
овес	38	25	25
квасоля	26	14	18
горох	14	10	10

Визначте: 1) відносні величини виконання плану за всіма зерновими і за кожною культурою окремо; 2) структуру посівних площ за планом, фактично і в базисному періоді. Отримані показники *проаналізуйте* та *зробіть* висновки.

4.39. Маються дані про чисельність робітників окремих цехів під-

приємства на 1 січня (осіб):

Таблиця 4.32

Роки	Цехи				
	механічний	збиральний	інструмент-тальний	ремон-тний	транспортний
2020	153	46	18	16	6
2021	147	44	21	19	5

Визначте питому вагу чисельності робітників окремого цеху в загальній чисельності робітників даного підприємства і представте отримані дані у вигляді таблиці. Які відносні величини ви розрахували?

4.40. Виробництво палива в Україні (в перерахунку на тис. т нафтового еквіваленту) в 2015 і в 2019 р. характеризується наступними даними:

Таблиця 4.33

Види палива	2015 р.	2019 р.
Вугілля й торф	17 423	13 696
Нафта сира	2 618	2 208
Газ природний	14 814	14 572
Атомна енергія	22 895	22 449
Гідроелектроенергія	464	769
Інші види	3 400	3 400
Усього	61 614	58 863

Визначте: а) структуру виробництва за основними видами палива в 2015 і 2019 рр.; б) відносні величини динаміки питомої ваги окремих видів палива в 2019 р. порівняно з 2015 р.

4.41. Чисельність промислово-виробничого персоналу підприємства характеризується наступними даними:

Таблиця 4.34

Категорія персоналу	2020 р.	2022 р.
Основні робітники	86	89
Допоміжні робітники	25	23
Інженерно-технічні робітники	18	24
Молодший обслуговуючий персонал, персонал охорони	16	14
Усього	145	150

Визначте: а) відносні показники структури промислово-виробничого персоналу за 2020 і 2022 рр.; б) відносні показники динаміки всього промислово-виробничого персоналу і кожної категорії персоналу за 2022 р. порівняно з 2020 р.

4.42. Маються наступні дані про структуру і динаміку основних виробничих засобів підприємства:

Таблиця 4.35

Види основних засобів	Питома вага в базисному періоду, процентів до підсумку	Поточний період в процентах до базисному (відносна величина динаміки)
Будівлі і споруди	80,3	107,8
Машини, обладнання	19,7	119,6
Всього	100	–

Визначити питому вагу окремих видів основних засобів у звітному періоді.

4.43. Маються наступні дані про імпорт зовнішньої торгівлі за регіонами (млрд дол. США):

Таблиця 4.36

	2019 р.	2020 р.
Імпорт – всього	60,8	54,3
В тому числі:		
Італія	2,1	2,1
Китай	9,2	8,3
Німеччина	6,0	5,3
Польща	4,1	4,1
Російська Федерація	7,0	4,5
Франція	1,7	1,4

Визначити: 1) питому вагу країн в імпорті зовнішньої торгівлі України; 2) які структурні зрушенні відбулися в імпорті зовнішньої торгівлі; 3) до якого виду відносних величин відноситься отриманий результаті і прокоментуйте його.

4.44. Маються наступні дані про чисельність промислово-виробничого персоналу підприємства на 1 січня звітного періоду (осіб) (табл. 4.37). *Визначити*: а) відносні величини структури промислово-виробничого персоналу підприємства за 2020 і 2022 р.; б) відносні

Таблиця 4.37

Роки	Категорії робітників				
	робітники	інженерно-технічні робітники	службовці	персонал охорони	інший персонал
2020	256	36	12	5	4
2022	271	41	13	4	5

показники динаміки всього промислово-виробничого персоналу підприємства і кожної категорії персоналу в 2022 р. порівняно з 2020 р.

4.45. Загальний обсяг валової доданої вартості промисловості України (у фактичних цінах; млрд грн) склав:

Таблиця 4.38

Рік	Промисловість України, млрд грн	В тому числі	
		добувна	переробна
2016	505,4	131,6	291,5
2017	632,9	177,2	359,8
2018	749,0	214,3	411,5
2019	791,9	222,4	430,2
2020	754,6	190,3	425,1

Визначити питому вагу продукції добувної і переробної промисловості у валовій доданій вартості всієї промисловості за кожен рік. *Зобразити* структуру загального обсягу виробленої доданої вартості промисловості країни за 2016 р. і за 2020 р. стовпчиковою діаграмою.

4.46. Чисельність наявного населення України за областями станом на 1 січня 2020 р. характеризується наступними даними:

Таблиця 4.40

	Усе населення, осіб	В тому числі	
		міське	сільське
Україна	41 902 416	29 139 346	12 763 070
Вінницька	1 545 416	799 385	746 031
Дніпропетровська	3 176 648	2 668 744	507 904
Житомирська	1 208 212	716 457	491 755
Закарпатська	1 253 791	465 904	787 887
Харківська	2 658 461	2 158 121	500 340
Чернівецька	901 632	390 551	511 081

Обчислити питому вагу міського населення у загальній чисельності населення України.

4.47. Затрати на виробництво продукції машинобудівного заводу склали, тис. грн:

Таблиця 4.41

Види затрат	Базисний рік	Звітний рік
Сировина і основні матеріали	4 863	5 487
Допоміжні матеріали	175	186
Напівфабрикати та послуги сторонніх підприємств	124	115
Паливо	346	385
Енергія	465	487
Заробітна плата	4 618	4 586
Відрахування на заробітну плату	1 345	1 302
Амортизація основних виробничих засобів	781	796
Інші витрати	15	24
Всього	12 732	13 368

Визначити структуру затрат підприємства за кожен період, зобразити її графічно.

4.48. Питома вага основних виробничих засобів підприємства в базисному періоді склала 88,3 %, невиробничих основних засобів — 11,8 %. Відносні величини динаміки (поточний період в процентах до базисного) основних виробничих засобів, невиробничих засобів та всіх основних засобів за аналізований період склали відповідно 108,1, 104,7, 107,0 %. *Визначте* структуру основних засобів в звітному періоді.

4.49. По промисловому підприємству маються наступні дані:

Таблиця 4.42

Показники	Півріччя	
	перше	друге
Фонд заробітної плати працівників, тис. грн	5 468,5	5 874,1
Фонд заробітної плати робітників, тис. грн	4 132,8	4 276,8

Визначити питому вагу фонду заробітної плати робітників у загальній чисельності всіх працюючих за звітний період безпосередньо за даними задачі і даними про питому вагу фонду заробітної плати робітників за півріччями. Яку форму середньої слід застосувати у другому випадку?

4.4. Визначення відносних величин координації та порівняння

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Відносні величини координації називають відношення частин цілого між собою. При обчисленні відносних величин координації за базу порівняння приймають одну із складових частин цілого, а потім знаходять відношення до неї всіх інших частин. Розрахунок показує, у скільки разів порівнювана частина більше або мене частини, прийнятої за порівняння, або скільки одиниць даної частини цілого приходиться на 1, 10, 100, 1000 і т. п. одиниць, прийнятої за базу порівняння.

Відносні величини порівняння представляють собою відношення однойменних величин, які відносяться до різних об'єктів або різних територій, і взятих, як правило, за один і той же самий час.

Розглянемо порядок обчислення відносних величин координації.

Задача 7. Відомо, що чисельність лікарів всіх спеціальностей в 2021 р. в Україні складала 181 тис. осіб, в Казахстані — 92 тис. осіб, в Азербайджані — 41 тис. осіб. *Визначити* відносні показники просторових порівнянь. Примітка: дані по Україні прийміть за 100 %.

Рішення

Для визначення відносної величини порівняння порівняємо вихідні дані про чисельність лікарів. Якщо прийняти дані по Україні 100 %, то чисельність лікарів у вказаному році Казахстані становитиме 50,8 % $\left(\frac{92}{181}\cdot 100\right)$, тобто по чисельності лікарів Україна випереджає Казахстан на 40,2 %; в Азербайджані — 22,7 % $\left(\frac{41}{181}\cdot 100\right)$. Два останні показника (50,8 % та 22,7 %) — це відносні показники просторового порівняння.

Задачі

4.50. Відомо, що споживання молока та молочних продуктів в Україні в середньому на одну особу в 2022 р. становило 237 кг, в Білорусії — 262 кг, в Казахстані — 197 кг, в Республіці Молдова — 203 кг. *Розрахувати* відносні показники просторового порівняння. Примітка: дані по Україні прийміть за 100 %.

4.51. В 2019 р. чисельність безробітних в Україні становила 1488 тис. осіб, в Казахстані — 441 тис., в Азербайджані — 252 тис., в Білору-

сії — 213 тис. *Розрахувати* відносні показники просторового порівняння. Примітка: дані по Україні прийміть за 100 %.

4.52. Кількість народжених у 2019 р. в Україні становила 8,1, в Австрії – 9,6, в Узбекистані – 24,3, у Японії – 6,9 ‰. *Розрахувати* відносні показники просторового порівняння. Примітка: дані по Україні прийміть за 100 %.

4.53. Маються дані про чисельність робітників окремих цехів підприємства на 1 січня (осіб):

Таблиця 4.43

Роки	Основні цехи				
	механічний	збиральний	токарний	фрезерний	заготівельний
Чисельність основних робітників	165	34	16	21	5
Припадає допоміжних робітників на одного основного робітника	0,31	0,44	0,37	1,19	2,15

Визначте чисельність допоміжних робітників кожного цеху, а також питому вагу чисельності допоміжних робітників окремого цеху в загальній чисельності робітників даного підприємства і представте отримані дані у вигляді таблиці. Які відносні величини ви розрахували?

4.5. Визначення відносних величин динаміки

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Для вивчення динаміки будуються ряди динаміки та розраховуються відносні показники. Відносні величини динаміки характеризують ступінь, швидкість зміни явищ у часі, або інакше, темп розвитку.

Відносна величина динаміки обчислюється як співвідношення величини показника (абсолютного або середнього) за даний період і величини його за будь-який аналогічний попередній час, прийнятої за базу порівняння. Щоб обчислити відносні показники динаміки, необхідно мати дані щонайменше за два періоди або моменту часу. Відносна величина динаміки може обчислюватися як відношення величини показника (рівня низки динаміки) за кожен наступний період до величини його за безпосередньо попередній період або як відношення до величини за

один і той же період, прийнятої за базу порівняння. У першому випадку відносні величина динаміки називається відносною величиною динаміки зі змінною базою, або *ланцюговими*, у другому — з постійною базою порівняння, або *базисними*. Відносні величини динаміки (темпи зростання) виражаються у формі процентів або коефіцієнтів.

Задача 8. Виробництво цементу в Україні за 2015–2020 рр. характеризується наступними даними (млн т):

Таблиця 4.44

2010 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
4,5	5,8	6,2	6,4	7,1

Обчислити базисні відносні показники динаміки. За базу прийняти обсяг виробництва цементу в 2016 р.

Рішення

Для обчислення базисних показників динаміки необхідно поділити кожен послідуючий рівень на рівень, прийнятий за базу. Базисні відносні показники динаміки складуть в 2016 р. порівняно з 2010 р.:

$$\frac{5,8}{4,5}=1,289, \text{ або } 128,9\,\%.$$

Аналогічно обчислюємо відносні базисні показники динаміки за інші роки:

2018 р. порівняно з 2010 р. — $\frac{6,2}{4,5}=1,378$, або $137,8\,\%$;

2019 р. порівняно з 2010 р. — $\frac{6,4}{4,5}=1,422$, або $142,2\,\%$;

2020 р. порівняно з 2010 р. — $\frac{7,1}{4,5}=1,578$, або $157,8\,\%$.

Задача 9. Виробництво електроенергії атомними станціями в Україні характеризується наступними даними:

Таблиця 4.45

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.
Вироблено, млрд кВт·год	81,0	85,6	84,4	83,0

Обчислити ланцюгові відносні величини динаміки (в процентах).

Рішення

Ланцюгові відносні величини динаміки обчислюються шляхом порівняння кожного ряду динаміки з рівнем попереднього року, тобто

$$T_{\text{ц}} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100,$$

де y_i — рівень досліджуваного періоду;

y_{i-1} — рівень попереднього періоду.

Обчислимо ланцюгові відносні величини (в процентах):

$$\frac{85,6}{81,0} \cdot 100 = 105,7\ \%; \qquad \frac{84,4}{85,6} \cdot 100 = 98,6\ \%; \qquad \frac{83,0}{84,4} \cdot 100 = 98,3\ \%.$$

Задача 10. Базисний темп зростання виплавки сталі на металургійному заводі у 2022 р. склав 1,117, базисний темп зростання 2021 р. — 1,087. При розрахунку базисних темпів зростання за базисний рівень вартості основних засобів був прийнятий 2019 р. Визначте величини ланцюгового темпу зростання виплавки сталі за 2022 р.

Рішення

Взаємозв'язок ланцюгових і базисних темпів зростання виражається іншим правилом, у визначеній мірі є оберненим, викладеному вище: при діленні наступного базисного темпу зростання на попередній отримується ланцюговий темп зростання попереднього періоду. В загальному вигляді це має наступний вид:

$$\frac{y_3}{y_0} : \frac{y_2}{y_0} = \frac{y_3}{y_2}.$$

Отже, поділивши базисний темп зростання за 2022 р. на базисний темп зростання за 2021 р., отримаємо ланцюговий темп зростання за 2022 р.

$$\frac{1,117}{1,087} = 1,028, \text{ або } 102,8\ \%.$$

Задачі

4.54. Маються наступні дані по добування піску (кременистого та кварцового) в Україні (млн т):

2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.
2,2	2,3	2,2	1,9	2,6

Визначте відносні величини динаміку добування піску в процен-

тах: 1) до 2015 р.; 2) до попереднього року.

4.55. Динаміка вкладів населення в банках України характеризується наступними даними:

Таблиця 4.46

	2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.
Млрд грн	56,5	61,2	64,2	67,3	76,1

Визначити відносні величини динаміки вкладів у банках: в процентах до 2015 р.; в процентах до попереднього року.

4.56. Питома вага підприємств в загальному обсязі виробництва валової продукції зменшився з 64,2 % в 2020 р. до 56,2 % у 2022 р., а обсяг виробництва валової продукції сільського господарства підприємств за цей період збільшився на 2,1 %. *Визначте*, як змінився обсяг виробництва валової продукції сільського господарства у господарств населення і в усіх категоріях господарств.

4.57. Виробництво окремих видів споживчих товарів в різні роки склало:

Таблиця 4.47

Види продукції	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Взяття, млн пар	4,6	4,3	4,6	4,8	5,1
Телевізори, тис. шт.	1 541	1 584	1 645	1 785	1 864
Пилососи, тис. шт.	580	576	584	597	615

Розрахувати відносні величини динаміки із змінною і постійною базою порівняння. *Зобразити* динаміку випуску стовпчиковою діаграмою.

4.58. Чисельність постійного населення України характеризується наступними даними:

Таблиця 4.48

Рік	Постійне населення, тис. осіб	В тому числі	
		чоловіки	жінки
2015	42 414,9	19 644,6	22 770,3
2016	42 216,8	19 558,2	22 658,6
2017	41 983,6	19 455,3	22 528,3
2018	41 732,8	19 343,5	22 389,3
2019	41 418,7	19 195,4	22 223,3

Обчислити показники, що характеризують динаміку чисельності всього населення, чоловіків і жінок; питому вагу чоловіків і жінок в загальній чисельності населення за окремими роками; співвідношення чисельності чоловіків і жінок. *Вказати*, до якого виду відносних величин належать обчислені показники. *Зобразити* динаміку чисельності у вигляді стовпчикової діаграми, структури населення за статтю — у вигляді секторальної діаграми за 2015 і 2019 рр.

4.59. Валовий внутрішній продукт, що використаний на споживання та нагромадження, в 2020 р. склав 2608,8 млрд грн (у цінах 2016 р.). *Визначте* обсяг валового внутрішнього продукту, що використаний на споживання та нагромадження в 2016 р. та в 2018 р., якщо відомого, що загальний обсяг валового внутрішнього продукту в 2019 р. процентах до 2016 р. склав 109,4 %, а до загального обсягу 2018 р. — 103,2 %.

4.60. В 2019 р. чисельність наявного населення України (за оцінкою) склала 41,9 млн грн, причому скорочення населення по відношенню до його чисельності в 2011 р. склала 3,9 млн грн. За оцінкою в 2019 р. чисельність міського населення становила 29,1 млн осіб, що на 7,3 % менше, ніж в 2019 р. *Визначте* чисельність населення і чисельність міського населення в Україні за даними 2011 р.

4.61. За даними про виробництво деяких видів продукції харчової промисловості *розрахуйте* відносні величини динаміки із постійною та змінною базою порівняння:

Таблиця 4.49

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Вафлі та вафельні облатки, тис. т	49,5	51,0	51,2	52,6	56,0
Цукор білий рафінований буряковий у твердій формі, млн т	2,0	2,0	1,8	1,5	1,0
Соуси і продукти для приготування соусів; приправи та пряноші змішані інші, тис. т	149	153	149	152	162
Води натуральні мінеральні газовані, млн дал	73,1	73,9	85,5	89,7	85,5
Йогурт рідкий та сквашене молоко ароматизовані, тис. т	112	116	126	136	139

4.62. На кінець 2019 р. в нашій країні чисельність чоловіків становила 19,3 млн осіб і 22,4 млн осіб жінок. Порівняно з 2010 р. чисельність чоловіків скоротилася на 8,5 %, а жінок — на 9,3 %. *Визначте* чисельність чоловіків і жінок в 2010 р.

4.63. Структура споживання палива в області (в перерахунку на на-

фтовий еквівалент) в 2010 і 2020 рр. характеризується наступними даними:

Таблиця 4.50

Види палива	2020 р.	2022 р.
Вугілля	34,7	44,6
Нафта (включаючи газовий конденсат)	16,6	23,5
Газ (включаючи газовий конденсат)	42,6	29,1
Інші види палива	6,1	2,8
Усього	100,0	100,0

Визначте відносні величини динаміки питомої ваги окремих видів палива в 2022 р. порівняно з 2020 р. За якими видами палива відносні величини динаміки обсягу споживання за цей період були вищими відносних величин динаміки обсягу споживання усіх видів палива в цілому і за якими нижче? *Складіть* перелік видів палива в порядку убування відносних величин динаміки обсягу споживання палива з 2020 р. по 2022 р.

4.64. Маються наступні дані про виробництво підшипників зі сферичною посадковою поверхнею зовнішнього кільця Харківського підшипникового заводу (шт.).

Таблиця 4.51

Види підшипників	2020 р.	2021 р.	2022 р. (план)
580204АК10С17	22	28	30
580205АС17	113	243	250
1580206ЕК10Т2С17	494	478	500
580306К10С17	54	56	60

Визначити відносні показники динаміки і відносні величини виконання планового завдання за кожним видом продукції. Обчислені показники *проаналізуйте* та зробіть висновки.

4.6. Відносні величини інтенсивності

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Відносні показники інтенсивності представляють собою відношення, що характеризує ступінь поширення або розвиток будь-якого явища у визначеному середовищі. Вони отримуються співставленням різно-

йменних абсолютних величин, які відносяться до різних, але пов'язаних у своєму розвитку сукупностей. Чисельник і знаменник відносного показника інтенсивності вимірюються в однакових одиницях, тому показники, хоч і мають свої назви (коефіцієнт народжуваності, коефіцієнт плинності тощо), виражаються в кратних відносинах, відсотках, проміле, продецимілі та подібних до них формах. До відносних показників інтенсивності відносять демографічні коефіцієнти, коефіцієнти смертності, народжуваності, шлюбності; показники фондовіддачі, енергоозброєності і механоозброєності праці.

Звісно, при обчисленні відносних показників інтенсивності, як і при обчисленні інших відносних показників, необхідно стежити за порівнянністю їх чисельників та знаменників. Приведемо приклад розрахунку.

Задача 11. На кінець 2020 р. в області чисельність лікарів всіх спеціальностей складала 10,5 тис. осіб, а чисельність населення на початок 2021 р. — 2738,4 тис. осіб. Визначити чисельність лікарів на 10 000 жителів.

Рішення

В 2020 р. на кожні 10 000 жителів приходилося 38 лікарів: (10,5 : 2738,4 ·100=38,3).

Задачі

4.65. Станом на 1 січня 2021 р. маються наступні дані про території та чисельність населення України та областям:

Таблиця 4.52

	Територія (тис. $км^2$)	Чисельність населення (тис. осіб)
Україна	603,5	41 554,8
Вінницька	26,5	1 527,7
Дніпропетровська	31,9	3 138,8
Закарпатська	12,8	1 194,3
Київська	29,0	4 748,6
Полтавська	28,7	1 370,1
Харківська	31,4	2 681,3
Чернівецька	8,1	896,3

Обчисліть відносні показники інтенсивності, які характеризують щільність населення в Україні та за кожною областю. Отримані резуль-

тати *проаналізуйте* і вкажіть найбільш щільні і найменш щільно населені області.

4.66. Народжуваність, смертність та природній приріст (скорочення) населення України за типом місцевості характеризується наступними даними:

Таблиця 4.53

Роки	Наявне населення, осіб	Осіб		
		кількість живонароджених	кількість померлих	природний приріст (+), скорочення (–)
		Усього		
2017	42 386 403	363 987	574 123	–210 136
2018	42 153 201	335 874	587 665	–251 791
2019	41 902 416	308 817	581 114	–272 297
		Сільська місцевість		
2017	13 015 408	126 113	223 574	–97 461
2018	12 896 505	115 772	223 933	–108 161
2019	12 763 070	106 171	218 454	–112 283

Обчисліть кількість живонароджених, кількість померлих та природний приріст населення на 1000 осіб наявного населення.

4.67. Населення України характеризується наступними даними:

Таблиця 4.54

	На 1 січня 2015 р.	На 1 січня 2020 р.
Чисельність населення	42,9	41,6
В тому числі:		
міське	29,7	29,0
сільське	13,2	12,6

Територія України (за даними Державної служби України з питань геодезії, картографії та кадастру) становить 603,5 тис. км^2. *Обчисліть* всі можливі види відносних величин і *вкажіть*, до якого виду вони відносяться.

4.68. Обсяг виробництва електроенергії в Україні в 2016 р. і в 2019 р. склав відповідно 147,8 і 141,2 млрд кВт. Чисельність населення в 2016 р. становила відповідно 42590,9 тис. осіб, а в 2019 р. — 41732,8 тис. осіб. *Обчисліть* показники виробництва електроенергії на одну особу в Україна в 2016 і 2019 рр. і відносні показники динаміки цих показників в 2016–2019 рр. *Зробіть* висновки. До якого виду відно-

сних величин відносяться обчислені вами показники?

4.69. *Визначити* виробництво найважливіших видів промислової продукції на одну особу в Україні за наступними даними:

Таблиця 4.55

	2015 р.	2020 р.
Вугілля кам'яне, млн т	30,2	25,5
Нафти сирої, млн т	1,8	1,7
Газ природний скраплений або у газоподібному стані, млрд $м^3$	19,9	20,5
Яловичини, тис. т	50	55,5
Чавуну, млн т	21,9	20,1
Тканини з ниток синтетичних та штучних, млн $м^2$	65,4	67,7

Чисельність населення в 2015 р. становила 42,7 млн осіб, а в 2020 р. — 41,6 млн осіб. *Прокоментуйте* отримані результати.

4.70. Маються наступні дані про площу та чисельність населення окремих країн за 2016 р.:

Таблиця 4.56

Країна	Чисельність населення, тис. осіб	Площа, $км^2$
Німеччина	81 709	357 030
Франція	54 457	551 500
Канада	35 950	9 970 610
Бельгія	11 288	305 28

Визначити кількість жителів на 1 $км^2$. *Порівняти* отримані результати і зробити висновок. Який відносний показник був в даному випадку застосований?

Тести

1. Показники, що виражають розміри, обсяги, рівні суспільних явищ і процесів, являються величинами:

а) абсолютними;

б) відносними показниками структури;

в) відносними показниками виконання плану;

г) відносними показниками динаміки.

2. Абсолютні величини можуть виражатися в одиницях виміру:
   а) процентах;
   б) коефіцієнтах, проміле, продециміле;
   в) кілограмах, метрах, штуках, тонах, гектарах;
   г) кубічних метрах, сантиметрах, процентах, коефіцієнтах.
3. Види абсолютних величин:
   а) динаміки, інтенсивності, порівняння;
   б) структури, координації;
   в) індивідуальні, сумарні;
   г) виконання плану, планового завдання.
4. Відносні величини виконання плану обчислюються як:
   а) відношення планового завдання до фактично досягнутого рівня за той же період;
   б) відношення планового завдання за попередній період до фактично досягнутого рівня за звітний період;
   в) відношення фактично досягнутого рівня до планового завдання за попередній період;
   г) відношення фактично досягнутого рівня до планового завдання за той же період часу.
5. Відносні величини планового завдання обчислюються як:
   а) відношення планового завдання до фактично досягнутого рівня за той же період;
   б) відношення планового завдання за майбутній період до фактично досягнутого рівня, який є базовим для плану;
   в) відношення фактично досягнутого рівня до планового завдання за попередній період;
   г) відношення фактично досягнутого рівня до планового завдання за той же період часу.
6. Відносні величини структури характеризують:
   а) співвідношення двох різнойменних показників, які знаходяться в визначеному взаємозв’язку;
   б) склад явища і показують, яку питому вагу в загальному підсумку складає кожна його частина;
   в) співвідношення двох однойменних показників, що відносяться до різних об’єктів або територій за один і той же період;
   г) співвідношення показників кожного наступного періоду з попереднім.
7. Відносна величина, що характеризує ступінь поширення явища у певному середовищі — це:
   а) відносна величина структури;

б) відносна величина динаміки;
в) відносна величина інтенсивності;
г) відносна величина планового завдання;

8. Планове завдання складає 107,5 %, план виконаний на 104,6 %. Показник динаміки становитиме:
а) 102,9 %;
б) 112,3 %;
в) 160,9 %;
г) 97,4 %.

9. План виконаний на 103 %, показник динаміки — 108,2 %. Планове завдання становить:
а) 105,1 %;
б) 105,3 %;
в) 111,2 %
г) 95,1 %.

10. Показник динаміки складає 123,8 %, планове завдання — 112 %. План виконаний на:
а) 111,8 %;
б) 138,7 %;
в) 110,5 %;
г) 90,5 %.

10. В результаті вибіркового спостереження отримані наступні дані про розподіл реалізованого взуття за розміром:

	Розмір взуття							Всього
	38	39	41	42	43	44	45	
В % до підсумку	6	12	24	26	21	8	3	100

Визначити моду в цьому ряду розподілу:
а) 26;
б) 47;
в) 50;
г) 71.

11. Відносна величина, що характеризує напрям та інтенсивність зміни явища у часі; розраховується як співвідношення значень показника за відповідні періоди чи моменти часу – це:
а) відносна величина динаміки;
б) відносна величина структури;
в) відносна величина інтенсивності;
г) відносна величина координації.

12. Форма кількісної характеристики статистичних показників, що

безпосередньо характеризує розміри (абсолютні) соціально-економічних явищ, їх ознаки в одиницях вимірювання обсягу, обліку часу, у грошових одиницях чи як кількість елементів (одиниць), що складають явище, досліджуване статистикою і назване статистичною сукупністю — це:

а) абсолютна величина;

б) відносна величина динаміки;

в) відносна величина інтенсивності;

г) відносна величина координації.

13. Формальна характеристика показника, що показує, на скільки процентів рівень більше (менше) рівня, взятого за базу порівняння. Його можна визначити як відношення абсолютного приросту до бази порівняння або безпосередньо на основі темпу зростання:

а) темп зростання;

б) темп приросту;

в) абсолютний приріст;

г) коефіцієнт інтенсивності.

14. Відносна величина, що характеризує співвідношення між окремими складовими сукупності. Ця величина показує, скільки одиниць однієї частини сукупності припадає на 1 або 100 одиниць іншої, прийнятої за базу порівняння:

а) абсолютна величина;

б) відносна величина динаміки;

в) відносна величина інтенсивності;

г) відносна величина координації.

15. Різниця, що рівна нулю, між величиною показника, досягнутого за будь-який час (або до якого-небудь моменту) і величиною його, встановленою за планом на цей же час, свідчить:

а) про недовиконання планового завдання;

б) перевиконання планового завдання;

в) точне виконання планового завдання;

г) в скільки разів поточна величина більше базової.

16. Відносна величина, що характеризує склад, структуру сукупності за тією чи іншою ознакою та обчислюється як відношення розміру складової частини до загального підсумку — це:

а) відносна величина структури;

б) відносна величина динаміки;

в) відносна величина інтенсивності;

г) відносна величина координації.

17. Припустимо, що внаслідок несприятливих природно-кліматичних

умов виробництво зернових і зернобобових культур в області в 2020 р. порівняно із 2019 р. скоротилося на 10 %. В 2021 р. продукція збільшилася на 10 %. Чи можна зробити висновок, що обсяг продукції в 2021 р. став таким же, як і був в 2019 р.?

а) так;

б) ні, він буде більшим від 2019 р. внаслідок того, що база порівняння в 2020 р. була більшою, ніж у 2019 р.;

в) ні, він буде меншим від 2019 р. внаслідок різних баз порівняння;

г) ні, він буде більшим внаслідок різних баз порівняння.

4.8. Питання для обговорення

1. Яке значення мають відносні показники в статистиці? З якою метою вони обчислюються? Що спільного між різними видами відносних величин?

2. Що представляє собою чисельник та знаменник відносних величин?

3. *Охарактеризуйте* відносні величини динаміки. Що виступає за базу при визначенні відносних величин динаміки?

4. Який взаємозв'язок між ланцюговими та базисними відносними величинами динаміки?

5. В яких величинах можуть обчислюватися відносні величини динаміки?

6. Як розраховуються відносні величини планового завдання? Який показник прийнятий за базу при їх обчисленні? Яка умова повинна виконуватися при їх обчисленні?

7. *Охарактеризуйте* порядок обчислення відносних показників виконання плану. Чи можна представити виконання плану в наростаючих підсумках?

8. Для яких цілей можуть бути використані показники виконання плану?

8. Який зв'язок між відносним показником виконання плану, відносним показником динаміки і відносним показником планового завдання?

9. *Визначте* порядок розрахунку відносних показників координації. Який зв'язок мають між собою порівняні різнойменні величини при обчисленні відносних показників координації другого роду?

10. Який з двох взаємопов'язаних ознак необхідно ставити в чисельник, а який — в знаменник дробу при обчисленні відносного показ-

нику координації першого роду?

11. *Охарактеризуйте* порядок обчисленні відносних показників інтенсивності. В яких сферах вони набули широко поширення? Чи підлягають сумуванню відносні показники інтенсивності?

12. Як обчислюються відносні показники структури? В чому полягає особливість показників структури від інших відносних показників? Якою пізнавальною ознакою володіють відносні показники структури? Чому дорівнює сума відносних величин структури досліджуваної сукупності?

13. Чи можуть підсумовуватися відносні показники структури? Яка вимога повинна виконуватися при розрахунку відносних показників структури?

14. *Дайте* характеристику загальним принципам обчислення та використання відносних показників.

15. Як визначається відносний показник виконання плану у випадку, коли планове завдання передбачає не зростання, а зниження рівня на ту або іншу величину?

ЛІТЕРАТУРА

1. *Горкавий В. К.* Статистика: Підручник. Третє вид., переробл. і доповн. Київ: Алерта, 2019. С. 81–87.
2. Статистика: Підручник / *С. С. Герасименко*, *А. В. Головач*, *А.М. Єріна* та ін.; За наук. ред. д-ра екон. наук С. С. Герасименка. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: КНЕУ, 2000. С. 41–46.
3. *Ткач Є. І.*, *Сторожук В. П.* Загальна теорія статистики: підручник. 3-тє вид. Київ: Центр учбової літератури, 2009. С. 113–130.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

Навчальні посібники, *словники*

4. Мармоза А. Т. Теорія статистики: підручник. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: «Центр учбової літератури», 2013. 333–396.
5. *Опря А. Т.* Статистика (модульний варіант з програмованою формою контролю знань). Навч. посіб. Київ: Центр учбової літератури, 2012. С. 66–73.
6. *Педченко Г. П.* Статистика: Навчальний посібник. Мелітополь: Колор Принт, 2018. С. 92–99.
7. Статистичний словник / [*О. Г. Осауленко*, *О. О. Васєчко*, *М. В. Пугачова* та ін.]; за ред. д-ра держ. упр., проф., член-кор. НАН України О. Г. Осауленка; НТК статистичних досліджень. Київ: ДП «Інформ.-аналіт. агентство», 2012. 498 с.

8. *Шапочка М. К.*, *Маценко О. М.* Теорія статистики: навч. посібник. Суми: Університетська книга, 2014. С. 109–117.

Монографії та статті

9. *Чекотовський Е. В.* Абсолютні статистичні показники: історичні та теоретичні аспекти. Частина І. Зародження теорії абсолютних статистичних показників. *Статистика України*. 2012. № 1. С. 74–78.
10. *Чекотовський Е. В.* Абсолютні статистичні показники: історичні та теоретичні аспекти. Частина ІІ. Розвиток теорії абсолютних статистичних показників. *Статистика України*. 2012. № 2. С. 85–89.
11. *Чекотовський Е. В.* Відносні статистичні показники: історія та теорія. Частина ІІ. Еволюція понять відносних статистичних показників, форм їх вираження та принципів побудови і застосування. *Статистика України*. 2013. № 4. С. 42–47.
12. *Чекотовський Е. В.* Відносні статистичні показники: історія та теорія. Частина ІІІ. Еволюція видів відносних статистичних показників та їх класифікації. *Статистика України*. 2014. № 1. С. 32–37.

Глава 5. СЕРЕДНІ ВЕЛИЧИНИ

5.1. Обчислення середньої арифметичної простої за індивідуальними даними

Методичні вказівки та рішення типової задачі

В якості однієї із важливих характеристик варіаційного ряду застосовують середні величини. *Середня величина* – узагальнююча характеристика сукупності однотипних явищ за ознакою, що варіюється. Вона виражає характерну, типову величину ознаки у одиниць сукупності, що утворюються в даних умовах місця і часу під впливом всієї сукупності факторів.

Середні величини мають дуже велике пізнавальне та практичне значення при дослідженні економічних явищ. Пізнавальна цінність середніх величин полягає в тому, що за їх допомогою здійснюється об'єктивно-точне вимірювання досліджуваних економічних явищ. Практична цінність середніх величин полягає у їх широкому використанні як потужного інструменту планових розрахунків. Середні величини тісним чином пов'язані із сутністю досліджуваних явищ.

У статистиці розрізняють кілька видів середніх величин: арифметична, гармонійна, геометрична, квадратична, кубічна середня та ін. Всі перелічені види середніх можуть бути обчислені і за результатів індивідуальних спостережень та за груповаим даними (із зазначенням частот). У першому випадку середню називають простою, у другому — зваженою. При цьому число повторень варіантів або інтервалів (частоти) називають статистичною вагою.

Вибір одного з перерахованих видів середніх для характеристики ознаки проводиться не довільно, а залежно від особливостей досліджуваного явища і від мети, для якої обчислюють середню величину. Необхідно врахувати, що середня величина повинна обчислюватися з урахуванням змісту визначеного показника. Це дозволить правильно визначити форму середньої.

Слід пам'ятати, що середня лише тому випадку є узагальнюючою характеристикою, якщо вона застосовується до однорідної сукупності. У разі використання середньої для неоднорідних сукупностей можна зробити неправильні висновки.

Середня арифметична — одна із найбільш поширених форм середньої величини. Розраховується як шляхом ділення сум індивідуальних

значень (варіант) ознаки на їх число:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$ — середня арифметична проста або

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f}$$ — середня арифметична зважена,

де x — варіанти ознаки;

n — число варіантів, із яких розраховується середня.

f — вага.

Середня арифметична застосовується у тих випадках, коли обсяг ознаки, що коливається, для всієї сукупності утворюється як сума значень ознак у окремих її одиниць. Наприклад, загальний збір урожаю сільськогосподарських культур представляє собою суму урожаїв з кожного гектару, собівартість продукції — сума собівартості одиниць продукції, загальне число робітників заводу — сума робітників за окремими цехами.

Обчислимо середню арифметичну за індивідуальними даними.

Задача 1. Заробітна плата за червень звітного року 10 слюсарів одного із ремонтних цехів машинобудівного заводу була наступною (в тис. грн): 11,5, 12,3, 14,4, 9,7, 9,4, 13,2, 11,4, 10,2, 10,7, 11,8. *Обчисліть* середню місячну заробітну плату слюсарів.

Рішення

При обчисленні середніх величин виходимо із економічної сутності даної ознаки. З цією метою необхідно встановити, що собою представляє середньомісячна заробітна плата. Середня заробітна плата може бути визначена наступним чином:

$$\text{Місячна заробітна плата} = \frac{\text{Загальна сума нарахованої заробітної плати за місяць}}{\text{Число робітників}}$$

В даній задачі середня місячна заробітна плата слюсарів розраховується за формулою середньої арифметичної:

$$\bar{x}_{ар.} = \frac{\sum x}{n},$$

де $\bar{x}_{ар.}$ — середня арифметична;

$\sum x$ — заробітна плата, отримана окремими робітниками;

n — число робітників.

$$\bar{x}_{ар.} = \frac{11,5 + 12,3 + 14,4 + 9,7 + 9,4 + 13,2 + 11,4 + 10,2 + 10,7 + 11,8}{10} =$$

$$\frac{114,6}{10} = 11,5 \text{ тис. грн.}$$

Задача 2. Залишки паливно-мастильних матеріалів на складі підприємства характеризуються наступними даними в (т):

Таблиця 5.1

	Всього	В тому числі бензину
На 1 січня 2020 р.	500	420
1 квітня »	525	412
1 листопада »	518	390
1 січня 2021 р.	497	385
1 березня »	520	415
1 липня »	536	428
1 січня 2022 р.	540	438

Визначити, на скільки тон і на скільки процентів зріс середній розмір запасів паливно-мастильних матеріалів всього і в тому числі бензину в 2021 р. порівняно з 2020 р.

Рішення

Середній рівень моментного ряду показника при наявності даних про його величину на окремі дати з нерівними проміжками часу між ними визначається за формулою середньої арифметичної середньої:

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i t_i}{\sum t_i},$$

де $\bar{y}_i$ — середні рівні за проміжки часу між сусідніми датами;

t_i — тривалість відповідних проміжків часу.

$$\bar{y}_{\substack{2020\text{ р.} \\ \text{(усі запаси)}}} = \frac{\frac{500+525}{2} \times 3 + \frac{525+518}{2} \times 7 + \frac{518+497}{2} \times 2}{3+7+2} =$$

$$\frac{1537,5 + 3650,5 + 1015}{12} = \frac{6203}{12} = 516,9 \text{ т.}$$

$$\bar{y}_{\substack{2021\text{р.} \\ \text{(усі запаси)}}} = \frac{\frac{497+520}{2} \times 2 + \frac{520+536}{2} \times 4 + \frac{536+540}{2} \times 6}{2+6+4} =$$

$$\frac{1117 + 2112 + 3228}{12} = \frac{6457}{12} = 538,1 \text{ т.}$$

Таким же чином знаходиться і залишки бензину: $\bar{y}_{2020\,р.}$=402,5 т; $\bar{y}_{2021р.}$=423,7 т.

В 2021 р. порівняно із 2020 р. залишки паливно-мастильних матеріалів на підприємстві зросли на 21,2 т (538,1–516,9), або на 4,1 % $\left(\frac{21{,}2\times100}{516{,}9}\right)$, в тому числі бензину на 21,2 т (423,7–402,5), або на 5,3 % $\left(\frac{21{,}2\times100}{402{,}5}\right)$.

Задачі

5.1. Заробітна плата за червень звітного року 10 слюсарів одного із ремонтних цехів машинобудівного заводу була наступною (в тис. грн): 12,6, 10,4, 13,5, 9,8, 9,7, 13,6, 11,5, 10,4, 10,6, 11,6.

Обчисліть середній місячний заробіток слюсарів. Яку формулу середньої ви застосували?

5.2. В двох бригадах працювало сім токарів. Заробітна плата токарів за бригадами характеризується наступними даними:

1-а бригада	8 640	8 960	9 450	10 540	9 600	10 420	9 650
2-а бригада	9 650	10 540	9 650	8 650	10 540	8 760	9 830

Визначити середню заробітну плату токарів по кожній бригаді.

5.3. Дві бригади займаються виробництвом однієї продукції. Виробіток однойменної продукції кожним членом бригади за зміну характеризується наступними даними:

Таблиця 5.2

Бригада № 1		Бригада № 2	
порядковий номер робітника	змінна норма виробітку робітника, шт.	порядковий номер робітника	змінна норма виробітку робітника, шт.
1	37	1	32
2	45	2	36
3	54	3	49
4	42	4	54
		5	28
		6	34

Визначте середнє число деталей, що виробляються одним робітником кожної бригади. Дайте порівняльну характеристику цим середнім.

5.4. Маються наступні дані про добовий видобуток вугілля на шахті:

Числа місяця	1	2	3	4	5	6	7
Добовий видобуток вугілля, т	600	615	594	603	608	612	604

Визначити середньодобове видобування вугілля.

5.5. Дві бригади займаються виробництвом однієї продукції. Виробіток однойменної продукції кожним членом бригади за зміну характеризується наступними даними:

Таблиця 5.3

Бригада № 1		Бригада № 2	
порядковий номер робітника	змінна норма виробітку робітника, шт.	порядковий номер робітника	змінна норма виробітку робітника, шт.
1	37	1	32
2	45	2	36
3	54	3	49
4	42	4	54
		5	28
		6	34

Визначте середнє число деталей, що виробляються одним робітником кожної бригади. *Дайте* порівняльну характеристику цим середнім.

5.6. Вісім токарів механічного цеху, зайнятих обробкою деталей № 15-К, за жовтень мають наступний виробіток (шт.): 420, 435, 384, 410, 395, 376, 405 і 423. *Визначити* середній виробіток одного токаря.

5.7. Проведений хронометраж роботи токарів з метою визначення затрат праці на обробку деталі. В результаті десяти замірів при фотографії робочого дня було встановлено наступний час обробки різьбових розвальцювальних втулок (хв.):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Час обробки, хв.	8	7	9	8	10	11	13	12	10	9

Визначте середній час обробки різьбових розвальцювальних втулок.

5.8. Відділом технічного контролю заводу було прийняті десять деталей № 13, вага яких становить (кг): 67, 68, 66, 63, 65, 64, 65, 62, 71, 70. *Визначте* середню вагу однієї деталі.

5.9. Валовий збір і посівна площа зернових і зернобобових культур сільськогосподарського підприємства «Фенікс» характеризується на-

ступними даними:

Таблиця 5.4

Культури	Посівна площа, га	Валовий збір, ц
Озима пшениця	134	4 300
Ячмінь	72	1 800
Овес	480	9 600
Соя	50	800

Визначити середню урожайність зернових і зернобобових культур по сільськогосподарському підприємству. Яку ви середню застосували?

5.10. Маються наступні дані про тривалість обробки однієї деталі робочими токарного цеху заводу:

Час обробки деталі, хв.	10	11	12	13	14	15
Число робітників	3	8	17	24	15	6

Обчисліть середню кількість часу, що витрачається на обробку однієї деталі.

5.11. За даними хронометражних спостережень затрати часу на обробку однієї деталі ТВ-II на токарних станках становлять:

Таблиця 5.5

	Порядковий номер робітника					
	1	2	3	4	5	6
Затрати часу на обробку однієї деталі, хв.	5	6	10	6	5	6

Визначити середні затрати часу на обробку однієї деталі робітників цеху.

5.12. Маються наступні дані про роздрібний товарооборот магазину за звітний період (тис. грн)

Таблиця 5.6

Місяці	Товарооборот	Місяці	Товарооборот
Січень	78,3	Липень	91,6
Лютий	79,5	Серпень	94,1
Березень	98,8	Вересень	93,6
Квітень	90,1	Жовтень	100,0
Травень	84,7	Листопад	98,2
Червень	90,0	Грудень	104,8

З метою виявлення тенденції *замініть* ряд показників щомісячного обороту рядом середньомісячного товарообороту за кварталами.

5.13. Відомі наступні дані про кількість деталей, вироблених за зміну кожним робітником бригади:

Табельний номер робітника	25	28	33	48	15	31	89	15	23	Всього
Число деталей, шт.	13	9	5	13	5	8	13	13	11	90

Обчислити число деталей, які вироблені одним робітником в середньому за зміну.

5.2. Обчислення середньої арифметичної зваженої в дискретному ряду розподілу

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Проста середня арифметична обчислюється застосовується у тих випадках, коли обсяг ознак, що варіюються, частіше всього утворюється як сума значень ознаки у окремих одиниць сукупності. Якщо дані представлені у вигляді рядів розподілу або групувань, середня арифметична обчислюється по-іншому.

Задача № 3. Кваліфікація робітників однієї із бригад механічного цеху промислового підприємства характеризується наступними даними:

Розряд тарифної сітки	1	2	3	4	5	6
Число робітників	4	12	15	26	14	8

Визначте середній тарифний розряд основних робітників цехів.

Вкажіть, який вид середньої застосовується при вирішенні даної задачі, і зробіть висновок про рівень кваліфікації основних робочих.

Рішення

Кваліфікація робітників представлена у вигляді дискреційного ряду, в якому одне й теж значення ознаки (варіанти) повторюється декілька разів. Наприклад, варіанта x_1 зустрічається чотири рази, варіант x_2 — 12 разів і т. п.

Число однакових значень ознак в рядах розподілу називається *частотою*, або *вагою* і позначається символом *f*.

Середній тарифний розряд робітників бригади механічного цеху визначається за формулою середньої арифметичної зваженої:

$$\bar{x}_{ар.} = \frac{\sum xf}{\sum f},$$

де x — значення варіант;

f — значення ваги кожного варіанту.

Чисельник визначаємо шляхом множення кількості робітників та тарифний розряд:

$$\bar{x}_{ар.} = \frac{1\times 4 + 2\times 12 + 3\times 15 + 4\times 26 + 5\times 14 + 6\times 8}{4 + 12 + 15 + 26 + 14 + 8} = \frac{295}{79} = 3{,}7.$$

Отже, середній тарифний розряд робітників заводу становить 3,7.

Задача 4. Залишки коштів на розрахунковому рахунку підприємства в банку склали на 1 червня 200 тис. грн, 15 червня надійшло на розрахунковий рахунок 130 тис. грн, а 25 червня було сплачено рахунок-фактуру за поставлені матеріали на суму 180 тис. грн. *Визначити* середній за місяць залишок коштів на розрахунковому рахунку підприємства, якщо з 23 червня і до кінця місяця ніяких надходжень або вибуття коштів не було.

Рішення

Середній рівень моментного ряду обчислюється за формулою простої середньої арифметичної:

$$\bar{y} = \frac{\sum yt}{\sum t},$$

де y — рівні, які залишилися незмінними на протязі певного часу t.

Таблиця 5.7

Календарний період	Залишок коштів (тис. грн)	Тривалість періоду (днів)	Сума (тис. грн-днів)
	y	t	$y\,t$
1–14	200	14	2 800
15–24	330	10	3 300
25–30	120	6	720
Всього		30	6 820

Середній рівень залишків коштів на розрахунковому рахунку становитиме:

$$\bar{y} = \frac{6\,820}{30} = 227{,}3 \text{ тис. грн.}$$

Задача 5. На одному підприємстві є два цехи (табл. 5.8).

Таблиця 5.8

Ставка заробітної плат в грн	Число штатних одиниць	Ставка заробітної плат в грн	Число штатних одиниць
4500	1	4830	1
3800	2	4570	1
3650	2	4200	2
3200	7	3800	3
2850	10	3200	12
2720	4	3040	8
		2720	6

На основі наведених даних про кількість штатних одиниць та ставки заробітної плати *обчислити* середню місячну ставку по першому цеху, другому цеху та по підприємству в цілому.

Рішення

Для обчислення середньої заробітної плати в середньому по цеху необхідно обчислити суму заробітної плати групи робітників за розміром заробітної плати. Потім складають допоміжну таблицю:

Таблиця 5.9

Ставка заробітної плати в грн	Число штатних одиниць	Добуток	Ставка заробітної плати в грн	Число штатних одиниць	Добуток
4 500	1	4 500	4 830	1	4 830
3 800	2	7 600	4 570	1	4 570
3 650	2	7 300	4 200	2	8 400
3 200	7	22 400	3 800	3	11 400
2 850	10	28 500	3 200	12	38 400
2 720	4	10 880	3 040	8	24 320
			2 720	6	16 320
Всього	26	81 180	Всього	33	108 240

Середня заробітна плата:

в 1-му цеху — $\frac{81180}{26} = 3122$ грн 31 коп.

» в 2-му цеху — $\frac{108240}{33} = 3180$ грн 00 коп.

» на підприємстві — $\frac{81180 + 108240}{26 + 33} = 3110$ грн 51 коп.

Для спрощення розрахунку середньої арифметичної статистичними

частотами (вагами) може бути відносні величини структури, т. е. частки кожної частоти у сумі всіх частот: $d_i = \frac{f_i}{\sum f_i}$. Якщо частка одиниць виражена у відсотках, такий показник питомої ваги може бути розрахунку середньої арифметичної. Застосовуючи ваги, відносні величини структури, отримаємо формулу середньої арифметичної зваженої: $\bar{x}_{ap} = \frac{\sum x_i d_i}{\sum d_i}$.

Задача 6. Маються наступні дані:

Таблиця 5.10

Виробіток, шт.	Питома вага робітників, %
5	10
7	20
8	20
11	50
Всього	100

Обчислити середній виробіток одного робітника.

Рішення

Для обчислення середнього виробітку одного робітника складемо допоміжну таблицю:

Таблиця 5.11

Виробіток, шт. (x_i)	Питома вага робітників, % (d_i)	$x \cdot d$
5	10	50
7	20	140
8	20	160
11	50	550
Всього	100	900

Середній виробіток одного робітника (середня арифметична):

$$\bar{x}_{ap} = \frac{\sum x_i d_i}{\sum d_i} = \frac{900}{100} = 9 \text{ шт.}$$

Якщо частоти підраховуються у частках (коефіцієнтах), то $\sum d_i = 1$, тоді формула середньої арифметичної спрощується: $\bar{x}_{ap} = \sum x_i w_i$.

Таблиця 5.12

Виробіток, шт. (x_i)	Питома вага робітників (в коефіцієнті) (w_i)	$x \cdot w$
5	0,1	0,5
7	0,2	1,4
8	0,2	1,6
11	0,5	5,5
Всього	1,0	9,0

Середній виробіток одного робітника (середня арифметична):

$$\bar{x}_{ap} = \sum x_i w_i = 0{,}5+1{,}4+1{,}6+5{,}5=9 \text{ шт.}$$

Незалежно від характеру ваги величина середньої арифметичної має однакове значення і в даному випадку дорівнює 9 шт.

Задачі

5.14. Маються наступні дані про затрати часу на обробіток окремими робочими на виробіток однієї деталі:

Час – хвилин	10	12	15	17	20
Число робочих	8	16	21	14	7

Обчисліть середню кількість часу, що затрачується на виготовлення однієї деталі.

5.15. За даними одноразового обліку на підприємства розподіл робітників за тарифним розрядом був наступним:

Порядковий номер робітників	1	2	3	4	5	6	7	8
Розряд тарифної сітки	4	2	5	6	3	4	5	3

Визначте середній тарифний розряд робітників бригади.

5.16. Розподіл основних робітників за тарифними розрядами одного із цехів машинобудівного заводу станом на 1 січня 2022 р. характеризується наступними даними:

Розряд тарифної сітки	1	2	3	4	5	6
Число робітників	15	28	34	45	32	18

Визначте середній тарифний розряд основних робітників цехів. *Вкажіть*, який вид середньої застосовується при вирішенні даної задачі? Яку властивість середньої дозволяє її застосувати в даній задачі?

Зробіть висновок про рівень кваліфікації основних робітників.

5.17. Відомі наступні дані про розподіл робітників заводу за тарифними розрядами:

Розряд тарифної сітки	1	2	3	4	5	6
Питома вага робітників, процентів до підсумку	2,4	5,6	20,7	36,5	21,4	13,4

Визначити середній тарифний розряд робітників заводу. Яку середню ви визначили? Яка властивість середньої дозволяє застосувати її в даній задачі?

5.18. Рівень кваліфікації робітників верстатобудівного заводу характеризується наступними даними:

Таблиця 5.13

Робітники	Тарифний розряд					
	I	II	III	IV	V	VI
Токарний цех						
Токарі	23	35	31	17	6	3
Фрезерувальники	37	31	28	21	8	2
Інструментальний цех						
Токарі	25	21	13	11	6	2
Фрезерувальники	28	36	15	10	4	1

Визначити середній рівень кваліфікації по кожному цеху: а) токарів; б) фрезерувальників. *Порівняйте* отримані результати, *зробіть* висновки.

5.19. На 1 січня працюючих на заводі нараховувалося 860 осіб. Тривалість робочого дня для 710 осіб складала 7,9 год., 120 осіб — 8,2 год., 30 осіб — 7,2 год. *Визначте* середню тривалість робочого дня на заводі.

5.20. Тривалість щорічної відпуски 126 робітників заводу становить 24 календарних дні, для 24 робітників — 36 календарних днів, а для 8 робітників — 54 календарних дні. *Визначити* середню тривалість відпустки робітників на заводі.

5.21. В механічному цеху 200 робітників за зміну виготовили наступну кількість однакових деталей:

Виготовлено деталей (шт.)	35	38	42	47	52	56
Число робітників, що виготовили вказану кількість деталей	28	37	38	42	34	21

Обчисліть середню виробітку на одного робітників.

5.22. Дві бригади робітників виготовляють один і той же вид деталі.

Денний виробіток деталей окремими робітниками двох бригад за 1 червня 2022 р. характеризується наступними даними:

Таблиця 5.14

Бригада № 1		Бригада № 2	
виробіток продукції (шт.)	число робітників, які мають вказані розміри виробітку	виробіток продукції (шт.)	число робітників, які мають вказані розміри виробітку
20	14	24	18
25	18	27	12
30	21	34	26
35	23	38	24
40	16	40	19

Визначте середнє денне число деталей, які виготовляються одним робітником кожної бригади за зміну і дайте їм порівняльну характеристику цим середнім.

5.23. Розподіл робітників одного із цехів інструментального заводу по числу оброблених на токарному станку деталей за зміну характеризується наступними даними:

Таблиця 5.15

Виробіток одного робітника (шт.)	Число робочих
1	25
2	34
3	86
4	34
5	16

Визначте виробіток деталей в середньому на одного робочого.

5.24. В цеху з пошиття верхнього жіночого одягу за місяць маються відомості про заробітну плату швачок:

Таблиця 5.16

Заробітна плата (грн)	Число швачок із даною заробітною платою
11 500	12
12 700	17
13 500	10
14 600	8
15 300	6

Визначте середню заробітну плату однієї швачки за місяць.

5.25. Маються дані про фактичний денний виробіток 67 токарів, за-

йнятих виготовленням деталі № 35. Встановлена денна норма 54 деталі.

Таблиця 5.17

Фактична денний виробіток одного токаря, шт.	Число токарів	Фактична денний виробіток одного токаря, шт.	Число токарів
50	4	54	17
51	6	55	8
52	10	56	6
53	12	57	4

Визначити середній виробіток одного токаря: 1) для всієї сукупності токарів; 2) які не виконують встановлену норму; 3) які виконують і перевиконують норму.

5.26. Маються дані про розмір заробітної плати слюсарів ремонтного цеху за травень:

Таблиця 5.18

Розмір місячної заробітної плати (грн)	Число слюсарів	Розмір місячної заробітної плати (грн)	Число слюсарів
8 630	2	11 360	6
9 240	3	12 840	3
9 760	3	13 050	3
10 680	4	13 180	2

Обчисліть розміри середнього заробітку одного слюсаря за місяць: 1) для всієї сукупності слюсарів; 2) для тих, які мають заробітну плату нижче середнього; 3) для тих, які мають заробітну плату вище середньої.

5.27. Маються наступні дані про витрати матеріалу на виробництво продукції за двома бригадами:

Таблиця 5.19

Номер цеху	Витрати матеріалу на 1 шт. готової продукції, кг	Кількість витраченого матеріалу, кг
№ 1	0,7	168
№ 2	1,5	60
№ 3	3,4	85
Всього	×	313

Визначити середні витрати матеріалу на 1 шт. готової продукції за

двома бригадами. Який вид середньої тут слід застосувати? Що є вагами цієї середньої?

5.28. За даними задачі 5.22 *визначте* середнє число деталей, виготовлених одним робітником обох бригад 1 червня 2022 р. Яку середню ви застосували?

5.29. Маються наступні дані про витрати матеріалу на виробництво продукції за двома бригадами:

Таблиця 5.20

Номер цеху	Витрати матеріалу на 1 шт. готової продукції, кг	Кількість витраченого матеріалу, кг
№ 1	0,7	168
№ 2	1,5	60
№ 3	3,4	85
Всього	×	313

Визначити середні витрати матеріалу на 1 шт. готової продукції за двома бригадами. Який вид середньої тут слід застосувати? Що є вагами цієї середньої?

5.30. На основі обстеження робітників, що займалися виготовленням деталі Т-23, встановлені затрати часу на виготовлення однієї деталі:

Таблиця 5.21

	Затрати праці на виготовлення однієї деталі, хв.				
	10	11	12	13	14
Число робітників	7	12	18	15	4

Визначити середні витрати часу на виготовлення однієї деталі.

5.32. На основі обстеження робітників, що займалися виготовленням деталі Т-23, встановлені затрати часу на виготовлення однієї деталі:

Таблиця 5.22

	Затрати праці на виготовлення однієї деталі, хв.				
	10	11	12	13	14
Число робітників	7	12	18	15	4

Визначити середні витрати часу на виготовлення однієї деталі.

5.33. Відомі наступні дані про розподіл робітників механічного

цеху за тарифними розрядами:

Таблиця 5.23

Тарифні розряди	I	II	III	IV	V	VI
Питома вага робітників, процент до підсумку	6	18	24	31	15	6

Визначте середній тарифний розряд робітників механічного цеху. Яку середню ви визначили? Яку властивість середньої дозволяє застосувати її для цієї мети?

5.34. Середній виробіток тканини робітників трьох бригад і їх середня чисельність за квітень 2022 р. склали:

Таблиця 5.24

Бригада	Виробіток тканини на одного робітника, пог. м	Число робітників
1	740	8
2	820	14
3	880	12

Визначити середній місячний виробіток тканини робітниками ткацької фабрики в цілому за квітень 2022 р.

5.35. Маються наступні дані:

Таблиця 5.25

Виробіток, шт.	Питома вага робітників, %
6	5
7	10
8	15
9	20
10	50
Всього	100

Обчислити середній виробіток одного робітника.

5.36. В трьох партіях виготовлених деталей чисельністю 1700, 2400, 950 штук виявлений наступний процент браку: перша партія — 2,6 %; друга партія — 2,1 %; третя партія — 0,8 %. *Визначте* середній процент браку.

5.37. Маються наступні дані (табл. 5.26). *Обчислити* середню заробітну плату.

Таблиця 5.26

Заробітна плата, грн	Питома вага робітників (в коефіцієнті) (w_i)
8 500	0,12
9 200	0,18
10 000	0,24
11 600	0,46
Всього	1,00

5.38. Представимо дані про чисельність робітників за умови наведеної вище типової задачі у відносних величинах:

Таблиця 5.27

Місячна заробітна плата, грн (x)	Показники структури	
	питома вага, у відсотках до підсумку (d_i)	частість (w_i)
1 800	8,0	0,08
2 000	20,0	0,20
2 300	32,0	0,32
2 700	24,0	0,24
3 000	16,0	0,16
Всього	100,0	1,00

Обчислити середню заробітну плату одного робітника із різними вагами.

5.39. Маються наступні дані будівельної ділянки

Таблиця 5.28

Номер бригади	Середня місячна заробітна плата, грн ($\overline{x_i}$)	Число робітників в бригаді, чол. (f_i)
1	11 530	20
2	13 750	35
3	14 460	15
Всього	–	70

Обчислити середню заробітну плату одного робітника.

5.3. Обчислення середньої арифметичної зваженої в інтервальному ряду розподілу із закритими і відкритими інтервалами

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Матеріал, отриманий в процесі статистичного дослідження, може бути представлений не лише у вигляді рядів розподілу, але й у вигляді інтервальних варіаційних рядів із закритими або відкритими інтервалами. Розглянемо розрахунок середньої арифметичної для таких рядів.

Задача 7. На машинобудівному заводі розподіл робітників по розміру місячної заробітної плати характеризується наступними даними:

Таблиця 5.29

№ п/п	Групи робітників за розміром місячної заробітної плати (грн)	Число робітників
1	8 000–9 000	13
2	9 000–10 000	18
3	10 000–11 000	26
4	11 000–12 000	17
5	12 000–13 000	11

Визначте середній розмір заробітної плати робітників.

Рішення

При обчисленні середніх величин виходимо із економічної сутності даної ознаки та умов задачі:

$$\text{Середньомісячна заробітна плата} = \frac{\text{Загальна сума нарахованої заробітної плати}}{\text{Число робітників}}$$

Середньомісячну заробітну плату обчислюємо за формулою середньої арифметичної зваженої, оскільки за умовами задачі відомий знаменник формули. Чисельник визначається шляхом добутку заробітної плати робітників на число робітників.

Для обчислення середньої необхідно перетворити інтервальні значення в дискретні. За кожною групою середнє значення ознаки умовно дорівнює середині інтервалу.

Для розрахунку середнього розміру заробітної плати скористаємося допоміжною таблицею (табл. 5.30).

Використовуючи дані таблиці, обчислимо середню місячну заробітну плату робітників:

Таблиця 5.30

Групи робітників за розміром місячної заробітної плати (грн)	Середнє значення інтервалу (x)	Число робітників (m)	Добуток варіант на частоти (xm)
8 000–9 000	$\frac{8000+9000}{2}=8500$	13	110 500
9 000–10 000	9 500	18	171 000
10 000–11 000	10 500	26	273 000
11 000–12 000	11 500	17	195 500
12 000–13 000	12 500	11	137 500
Всього	–	85	887 500

$$\bar{x}=\frac{887500}{85}=10441{,}2 \text{ грн.}$$

Висновок. Якщо відомі значення знаменника висхідного співвідношення середньої, але не відомі значення чисельника, то у всіх випадках середня обчислюється за формулою середньої арифметичної.

Задача 8. Маються наступні відомості про розподіл робітників збирального цеху за стажем роботи: зі стажем роботи до 3 років на заводі 4 % робітників, від 3 до 6 років — 10 %, від 6 до 10 років — 15 %, від 10 до 15 років — 34 %, від 15 до 25 років — 23 %, понад 25 років — 14 %. *Визначити* середній стаж роботи в колективі робітників збирального цеху.

Рішення

В якості ознаки, що усереднюється (x), виступає стаж робітників, але він даний в інтервалах. В таких випадках в якості варіантів слід брати середину інтервалу (центральний варіант), що є півсумою верхньої і нижньої межі інтервалів. Що стосується відкритих інтервалів, то за центральний варіант першого інтервалу береться половина другого інтервалу, за центральний варіант останнього інтервалу — сума нижчої межі та половини передостаннього варіанту. В нашому прикладі центральні варіанти будуть такими: 1,5 (3:2); 4,5 [(3+6):2]; 8,0 [(6+10):2]; 12,5 [(10+12):2]; 20,0 [(15+25):2]; 30,0 [(25+(10:2)].

Для рішення нашої задачі необхідно помножити центральні варіанти на відповідні частоти, які виражені у відсотках, просумувати ці добутки і отриману суму розділити на підсумок частостей. Всі висхідні і розрахункові дані наведені у наступній таблиці (табл. 5.31).

Звідси $\bar{x}=\frac{\sum xf}{100}=\frac{1476}{100}\approx 14{,}8$ років.

Таблиця 5.31

Групи основних робітників за стажем, років	Число робітників в процентах (w)	Середнє значення інтервалу (x)	Добуток ($x \cdot w$)
До 3 років	4	1,5	6
Від 3 до 6 років	10	4,5	45
» 6 » 10	15	8,0	120
» 10 » 15	34	12,5	425
» 15 » 25	23	20,0	460
Понад 25 років	14	30,0	420
Всього	100	×	1 476

Отже, середній стаж роботи в колективі робітників збирального цеху становить 14,8 років.

Задача 9. Маються наступні дані про розподіл робітників підприємства за розміром заробітної плати:

Таблиця 5.32

Групи робітників за розміром заробітної плати, тис. грн	Число робітників, % до підсумку
До 10	14
10–12	30
12–14	37
14–16	12
Понад 16	7
Всього	100

Визначити середню заробітну плату робітників методом від умовного нуля.

Рішення

Для вирішення задачі використаємо математичні властивості середньої. Одна із властивостей середньої полягає в тому, що від скорочення або збільшення всіх варіантів ознаки на одну й ту ж величину або скорочення або збільшення їх в одне й теж число разів середня відповідно змінюється на ту же величину або в це число разів. Для обчислення середньої спочатку зменшують (збільшують) варіанти на одне й теж число і обчислюють середню з них, а потім отриманий результат вносять поправки, в оберненому напрямку.

Обчислення представимо в табличній формі.

Таблиця 5.33

Групи робітників за розміром заробітної плати, тис. грн	Число робітників, % до підсумку f	Середня величина інтервалу x	$x - c$ (c=13)	$\frac{x-c}{d}$ (d=2)	$\frac{x-c}{d} \cdot f$
До 10	14	9	–4	–2	–28
10–12	30	11	–2	–1	–30
12–14	37	13	0	0	0
14–16	12	15	+2	1	12
Понад 16	7	17	+4	2	14
Всього	100				–32

Умовна середня:

$$x' = \frac{\sum\left(\frac{x-c}{d}\right)f}{\sum f};$$

$$x' = \frac{-32}{100} = -0{,}32.$$

Для того, щоб отримати дійсну середню, необхідно на отриману величину наложити поправки:

$$x' = \overline{x'} \cdot d + c = -0{,}32 \cdot 2 + 13 = 12{,}4 \text{ тис.грн.}$$

Отже, середня місячна заробітна плата становить 12,4 тис. грн.

Задачі

5.40. Розподіл робітників заводу за стажем роботи і кваліфікації станом на 1 травня 2022 р. характеризується наступними даними:

Таблиця 5.34

Групи робітників за стажем роботи, років	Розряд тарифної сітки					
	1	2	3	4	5	6
До 2	4	11	46	75	37	16
2–10	1	13	62	245	56	52
10–20	–	4	18	47	35	27

Визначте: а) середній тарифний розряд робітника кожної групи за стажем роботи; б) середній стаж роботи робітника кожної групи за рів-

нем кваліфікації; в) середній стаж роботи всіх робітників; г) середній тарифний розряд всіх робітників.

5.42. На машинобудівному заводі розподіл робітників по розміру місячної заробітної плати характеризується наступними даними:

Таблиця 5.35

№ п/п	Групи робітників за розміром місячної заробітної плати (грн)	Число робітників
1	8 000–9 000	25
2	9 000–10 000	34
3	10 000–11 000	86
4	11 000–12 000	34
5	12 000–13 000	16

Визначте середній розмір заробітної плати робітників.

5.43. На кінець звітного року робітники машинобудівного заводу розподілились наступними чином:

Таблиця 5.36

Вік (років)	17–20	20–30	30–40	40–50	50–60	Всього
Число робітників	52	73	34	26	15	200

Визначте середній вік робітників машинобудівного заводу.

5.44. Маються наступні дані про розподіл сільськогосподарських підприємств за урожайністю ячменю:

Таблиця 5.37

Групи сільськогосподарських підприємств за урожайністю, ц/га	Посівна площа сільськогосподарських підприємств, % до підсумку
До 24	14
24–26	26
26–30	31
30–35	20
35 і більше	9

Визначити середню урожайність ячменю по району.

5.45. *Обчислити* середній розряд робітників в колективі робітників механічного цеху за наступними висхідними даними: 1 розряд — 4 % робітників, 2 розряду — 10 %, 3 розряду — 15 %, 4 розряду — 32 %, 5 розряду — 25 %, 6 розряд — 14 %.

5.46. Маються наступні дані про розподіл працівників заводу за

розміром місячної заробітної плати:

Таблиця 5.38

	Групи робітників за розміром місячної заробітної плати, тис. грн					
	До 10	10–12	12–14	14–16	16–18	18 і більше
Чисельність робітників, % до підсумку	5	10	15	20	25	5

Визначити середню заробітну плату працівників заводу.

5.47. Маються дані про розподіл сільськогосподарських підприємств району за розміром річного надою молока на корову:

Таблиця 5.39

Середній надій молока на корову, ц	Число сільськогосподарських підприємств	Поголів'я корів за групами, тис. голів
До 20	3	0,7
20–22	4	9,4
22–25	10	5,1
25–30	13	6,4
30 і більше	5	4,2
Всього	35	25,8

Визначити середній річний надій молока на одну корову по району.

5.48. Маються наступні дані про розподіл робітників підприємства за стажем роботи:

Стаж роботи, років	До 1	1–3	3–5	5–10	10–15	15–25	25 і більше	Всього
Число робітників	7	16	28	17	31	12	6	117

Визначити середній стаж роботи.

5.49. *Обчислити* середній стаж роботи в колективі робітників механічного цеху за наступними висхідними даними: зі стажем роботи до 3 років на заводі 6 % робітників, від 3 до 6 років — 10 %, від 6 до 10 років — 15 %, від 10 до 15 років — 32 %, від 15 до 25 років — 25 %, понад 25 років — 12 %.

5.50. За даними вибіркового обстеження 100 однакових по масі проб пряжі було отримано наступний розподіл нитки за міцністю:

Таблиця 5.40

	Міцність пряжі, г				
	До 190	190–210	210–230	230–250	250–270
Число проб	6	14	41	29	10

Визначити середню міцність нитки.

5.51. *Обчислити* середню заробітну плату в колективі робітників механічного цеху за наступними висхідними даними: із розміром заробітної плати до 10 тис. грн — 4 % робітників, від 10 до 12 тис. грн — 10 %, від 12 до 15 тис. грн — 15 %, від 15 до 20 тис. грн —36 %, від 20 до 30 тис. грн — 22 %, понад 30 тис. грн — 13 %.

5.52. Розміри витрат на 1 грн товарної продукції за промисловими підприємствами області у звітному періоді характеризуються наступними даними:

Таблиця 5.41

Затрати на 1 грн товарної продукції, коп.	Число підприємств	Вартість товарної продукції, тис. грн
До 80	8	8 600
80–85	16	11 250
85–90	34	14 360
90–95	15	17 600
95–100	9	8 650
100 і вище	3	13 540

Визначити середній розмір затрат на 1 грн товарної продукції.

5.53. Розподіл сільськогосподарських підприємств області за поголів'ям свиней станом на 1 січня 2022 р. характеризується наступними даними:

Таблиця 5.42

	Групи сільськогосподарських підприємств за поголів'ям свиней						
	До 100	100–500	500–1000	1000–3000	3000 і більше	не мають свиней	Всього
Число сільськогосподарських підприємств, в % до підсумку	9,1	25,2	25,6	16,3	3,1	20,7	

Визначити середнє поголів'я свиней в області: а) в сільськогосподарських підприємствах, що мають свиней; в усіх сільськогосподарських підприємствах (включаючи ті господарства, які не мають свиней).

Примітка. Серединне значення першої та передостанньої групи прийміть відповідно 50 і 4000 голів.

5.54. За результатами обстежень сільськогосподарських підприємств отримані наступні дані за 2022 р.:

Таблиця 5.43

Групи сільськогосподарських підприємств за середньорічним надоєм молока від однієї корови, кг	Число сільськогосподарських підприємств	Середньорічне поголів'я корів (на 1 підприємство)	Процент жиру в молоці
До 2000	2	220	3,0
2000–2200	5	240	3,2
2200–2400	7	280	3,1
2400–2600	6	315	3,3
2600–2800	10	385	3,6
2800–3000	7	410	3,4
3000 і більше	9	480	4,1

Визначити: а) середній надій молока на одну корову; б) середню жирність молока (середній процент жиру); в) середньорічне поголів'я корів на 1 сільськогосподарське підприємство; г) середньорічне виробництво молока на 1 сільськогосподарське підприємство.

Примітка. Серединне значення першої та останньої групи прийміть відповідно 1900 і 3100 кг.

5.55. Розподіл швейних промислових підприємств області за числом працюючих станом на 1 січня 2022 р. характеризується наступними даними:

Таблиця 5.44

	Групи підприємств по числу робітників					
	До 100	100–500	500–1000	1000–2000	2000–5000	5000 і більше
Число підприємств, процентів до підсумку	44,3	28,0	15,8	9,2	2,4	0,3

Визначте середнє число працюючих на промислових підприємствах станом на 1 січня 2022 р.

Примітка. Серединне значення першої та останньої групи прийміть відповідно рівним 50 і 7500 осіб.

5.56. Фабрична лабораторія провела випробування на міцність 200 зразків пряжі. Результати вийшли такі:

Таблиця 5.45

Міцність пряжі в грамах	Кількість зразків пряжі
До 139	1
140–159	13
160–179	52
180–199	59
200–219	46
220–239	22
240–259	6
260 і більше	2

Визначити середню міцність пряжі (опір розриву).

5.4. Обчислення середньої арифметичної зваженої по способу моментів

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Одне із властивостей середньої арифметичної полягає в тому, що зменшення або збільшення всіх варіантів ряду в одне й теж саме число або на одну й ту ж величину призводить до зменшення або збільшення середньої арифметичної на одну й ту ж величину. На практиці при обчисленні середньої арифметичної так названим способом моментів (або від «умовного нуля») звичайно використовують цю властивість, зменшуючи всі варіанту на одну й ту ж величину.

Спосіб моментів є технічним прийомом для обчислення середньої арифметичної. Використання цього способу дозволяє значно спростити розрахунки. Обчислення середньої арифметичної здійснюється у такій послідовності:

1) умовне прийняття центру інтервалів за значення ознак усіх одиниць у кожному інтервалі;

2) віднімання від усіх варіантів початку відліку або «хибного нуля» (x_0);

3) ділення всіх варіантів або відхилення варіантів від початку відліку на загальний множник (k). Умовна середня має вид: $\overline{x'} = \dfrac{\sum\left(\dfrac{x - x_0}{k}\right)f}{\sum f}$.

Формула обчислення середньої методом відліку від умовного нуля або методом моментів має вигляд: $\bar{x} = \bar{x'} \cdot k + x_0$, де $\bar{x'} = \frac{x - x_0}{k}$.

Об'єднавши весь процес розрахунку, запишемо формулу розрахунку середньої арифметичної зваженої по способу моментів:

$$\bar{x} = \frac{\sum\left(\frac{x - x_0}{k}\right) f}{\sum f} k + x_0.$$

Всі обчислення будуть простими, якщо «довільний початок» x_0 буде вибране із числа варіант, які мають найбільшу частоту і служать близько до центру розподілу. Ці розрахунки можна спростити ще більше, скорочуючи всі відхилення варіант від «довільного початку» на величину інтервалу і перетворюючи їх таким чином в ряд натуральних чисел.

Приведемо приклад обчислення вказаним способом середньої арифметичної за способом моментів за наступному ряду розподілу.

Задача 10. Маються наступний ряд розподілу робітників за процентів виконання планового завдання:

Таблиця 5.46

Процент виконання плану	Число робітників
0–10	20
10–20	24
20–30	62
30–40	93
40–50	151
50–60	214
60–70	252
70–80	273
80–90	282
90–100	231
100–110	178
110–120	100
120–130	72
130–140	32
140–150	28
150–160	20
160–170	6
170–180	3
180–190	5
190–200	8
Всього	2054

Обчислити середній процент виконання плану способом від умов-

ного нуля.

Рішення

Для обчислення середньої арифметичної складемо допоміжну таблицю:

Таблиця 5.47

Процент виконання плану	Процент виконання плану (середнє значення інтервалу) x	Число робітників f	Добуток xf, які необхідні для розрахунку середньої	Відхилення від початку відліку $x - x_0$	Відхилення від «довільного початку», скорочені на величину інтервалу $\frac{x - x_0}{k} = x'$	Добуток відхилень і частот $x'f$
1	2	3	4	5	6	7
0–10	5	20	100	–80	–8	–160
10–20	15	24	360	–70	–7	–168
20–30	25	62	1 550	–60	–6	–372
30–40	35	93	3 255	–50	–5	–465
40–50	45	151	6 795	–40	–4	–604
50–60	55	214	11 770	–30	–3	–642
60–70	65	252	16 380	–20	–2	–504
70–80	75	273	20 475	–10	–1	–273
80–90	85	282	23 970	0	0	0
90–100	95	231	21 945	+10	1	231
100–110	105	178	18 690	+20	2	356
110–120	115	100	11 500	+30	3	300
120–130	125	72	9 000	+40	4	288
130–140	135	32	4 320	+50	5	160
140–150	145	28	4 060	+60	6	168
150–160	155	20	3 100	+70	7	140
160–170	165	6	990	+80	8	48
170–180	175	3	525	+90	9	27
180–190	185	5	925	+100	10	50
190–200	195	8	1 560	+110	11	88
Всього		2 054	161 270			$\sum df = -1332$

Розрахунки показників, наведених в таблиці, здійснені в такій послідовності:

1) за значення інтервалу 0–10, 10–20 і т. п. приймається їх центр. Наприклад, для першої групи центром інтервалу є 5 $\left(\frac{0+10}{2}\right)$, для другого — 15 $\left(\frac{10+20}{2}\right)$ і т. п. (колонка 2);

2) за початок відліку x_0 приймаємо інтервал, який рівний 85 (з найбільшою частотою) і знаходимо відхилення від початку відліку (колонка 5);

3) ділимо всі знайдені відхилення на загальний множник (i=10) і отримаємо умовні варіанти або робочі одиниці x' (колонка 6);

4) в якості ваги візьмемо число робітників (f), які містяться у другій колонці і здійснимо зважування усіх варіантів ($x'f$).

При розрахунку умовної середньої використовуємо формулу:

$$\overline{x'} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{-1332}{2054} = -0{,}658.$$

В якості «довільного початку» в цьому прикладі вибрана варіанта 85, яка лежить в центрі розподілу і має найбільшу частоту. Всі відхилення від «довільного початку» скорочені на 10, тобто на величину інтервалу. Тому середню величину відхилень необхідно було збільшити в десять разів.

Тоді

$$\overline{x} = -0{,}658 \cdot 10 + 85 \approx 78{,}5.$$

Порівняємо знайдену середню із середньою, обчисленою безпосередньо за формулою: $\overline{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{161270}{2054} = 78{,}515$, ми бачимо їх рівність. Очевидна перевага методу розрахунку від умовного нуля.

В деяких випадках середню арифметичну зручніше обчислювати, не прибігаючи до способу моментів, а слідуючи за формулою:

$$\overline{x} = \frac{\sum (x - A) f}{\sum f} + A,$$

де A — довільно взята величина.

Ця формула визначається із властивості середньої арифметичної (якщо до кожного варіанту додати або відняти із неї будь-яку величину, то середня відповідно збільшиться або зменшиться на цю величину).

Задачі

5.57. По сільськогосподарському підприємству відомі дані по розподілу корів за рівнем річного надою (кг) за 2022 р. (табл. 5.48). *Визначити* за методом моментів середній річний надій корів по підприємству за 2022 р.

Таблиця 5.48

Групи корів за річним надоєм молока, кг	Кількість корів
2 000–2 400	15
2 400–2 600	27
2 600–2 800	38
2 800–3 000	66
3 000–3 200	24

5.58. Розподіл заводів по річному виробництву цегли наступні:

Таблиця 5.49

Кількість виготовленої цегли, тис. шт.	До 400	400–500	500–600	600 і більше
Число заводів, в % до підсумку	17	25	34	24

Визначити звичайним способом і способом моментів виробництво цегли за рік в середньому на один завод.

5.59. Маються наступний ряд розподілу мігруючого населення за віком:

Таблиця 5.50

Групи мігруючого населення за віком (років)	Чисельність населення в процентах
0–5	4,7
5–10	2,3
10–15	2,6
15–20	17,6
20–25	24,0
25–30	19,6
30–35	8,0
35–40	5,7
40–45	4,6
45–50	3,4
50–55	2,3
55–60	5,2
Всього	100,0

Обчислити середній вік мігруючого населення способом моментів та звичайним способом.

5.60. Маються дані про розподіл робітників інструментального цеху

за розміром заробітної плати:

Таблиця 5.51

	Заробітна плата, грн					
	До 8000	8000–10000	10000–12000	12000–14000	14000–16000	16000 і більше
Чисельність робітників, осіб	25	32	36	18	11	4

Визначити середню заробітну плату звичайним способом і способом моментів.

Примітка. Серединне значення першої та останньої групи прийміть відповідно рівним 7 000 і 17 000 грн.

5.61. Маються наступні дані:

Таблиця 5.52

Розмір деталі, *мм*	Кількість деталей
10	153
11	1 027
12	1 038
13	686
14	241

Обчислити середній розмір деталі способом моментів та звичайним способом.

5.62. Маються наступні дані про розподіл робітників за розміром місячної заробітної плати:

Таблиця 5.53

Групи робітників за розміром місячної заробітної плати, грн	Число робітників, % до підсумку
10 000–11 000	10
11 000–12 000	15
12 000–13 000	45
13 000–14 000	20
14 000–15 000	10

Обчислити середню місячної заробітної плати робітників способом моментів та звичайним способом.

5.5. Розрахунок середньої арифметичної із групових середніх

Методичні вказівки та рішення типової задачі

В практиці економічної статистики інколи приходиться обчислювати середню по кожній групі (групові середні). В таких випадках за варіанти (x) приймаються групові середні, на основі яких обчислюється загальна середня як звичайна середня арифметична зважена. Виникає питання, в яких випадках усереднення слід здійснювати за простою, а в яких за зваженою середньою? Це залежить від того, яка ознака усереднюється. Якщо усереднюється первинна ознака, усереднення здійснюється за простою (незваженою) середньою, якщо усереднена ознака вторинна, використовується формула середньої зваженої.

Задача 11. Маються наступні дані про місячний виробіток одного робітника і чисельність робітників по трьом заводам однієї галузі:

Таблиця 5.54

Номер заводу	Виробіток на одного робітника, тис. грн (x)	Число працюючих (v)
1	300	100
2	400	300
3	700	600

Визначити середній виробіток, що приходиться на одного працюючого в цілому по трьом підприємствам.

Рішення

Правильне визначення середнього виробітку повинно врахувати різницю в чисельності працюючих на заводі. Це значить, що виробіток одного працюючого необхідно зважити по їх числу:

$$\bar{x} = \frac{\sum xv}{\sum v} = \frac{300 \cdot 100 + 400 \cdot 300 + 700 \cdot 600}{100 + 300 + 600} = \frac{570\,000}{1\,000} = 570 \text{ тис. грн.}$$

Правильність даного рішення підтверджується наступним. $\sum xv$ — сума випуску продукції, а $\sum v$ — число працюючих за трьома підприємствами; поділивши загальний обсяг продукції на чисельність працюючих, дійсно отримаємо виробіток працюючих в цілому за трьома підприємствами.

Задача 12. Обчислити середній процент виконання плану по випус-

ку продукції в цілому по об'єднанню на основі наступних даних:

Таблиця 5.55

Номер заводу	План випуску продукції за II квартал, тис. грн (v)	Фактичний випуск продукції за II квартал, тис. грн (xv)	Виконання плану в коефіцієнтах (x)
1	3 300	3 100	0,939
2	6 400	6 500	1,016
3	8 700	8 700	1,000
Всього	18 400	18 300	0,995

Рішення

Спочатку обчислимо виконання плану в коефіцієнтах. Таким чином, безпосередньо усередненими величинами (x) у нас виступають коефіцієнти, а вагами (v) — план випуску продукції, оскільки він є базою при розрахунку усереднених коефіцієнтів та процентів. Таким чином,

$$\bar{x} = \frac{\sum xv}{\sum v} = \frac{3300 \cdot 0{,}939 + 6400 \cdot 1{,}016 + 8700 \cdot 1{,}000}{3300 + 6400 + 8700} = \frac{18\,300}{18\,400} = 0{,}995.$$

Виконання плану становило 99,5 %, тобто план не виконаний на 0,5 %.

Середній процент виконання плану по об'єднанню можна обчислити і інакше — шляхом ділення фактичного обсягу продукції на плановий в цілому по об'єднанню $\left(\frac{18\,300}{18\,400} \cdot 100\right)$, тобто обчисленням відносного показника виконання плану для об'єднання.

Задачі

5.63. Витрати виробництва і собівартість одиниці продукції A за трьом заводами характеризується наступними даними:

Таблиця 5.56

Номер заводу	Витрати виробництва, тис. грн	Собівартість одиниці продукції A, грн
1	800	25
2	1 250	23
3	2 650	16

Визначити середню собівартість одиниці продукції за трьома заво-

дами. Який вид середньої слід тут застосувати? Що є вагами цієї середньої?

5.64. *Обчисліть* середні значення наведених показників за трьома підприємствами:

Таблиця 5.57

Підприємства	Чисельність робітників, осіб	Середній розмір однієї бригади	Місячний виробіток продукції в середньому на одного робітників, тис. грн
Завод № 1	410	83	254
Завод № 2	192	48	403
Завод № 3	304	60	742

5.65. Маються наступні дані про роботу чотирьох автотранспортних підприємства за звітний період:

Таблиця 5.58

Автотранспортне підприємство	Загальний вантажообіг, млн т-км	Виконано тис. т-км в середньому на один автомобіль за рік	Доля бензинових автомобілів в загальному парку автомашин, %	Середня вантажопідйомність одного дизельного автомобіля
АТП № 1	36	128	30	6,2
АТП № 2	45	158	26	5,7
АТП № 3	41	126	15	5,1

Обчислити загальні середні значення приведених показників за трьома автотранспортними підприємствами.

5.66. *Обчисліть* середні значення показників в цілому за 60 сільськогосподарським підприємствам:

Таблиця 5.59

Спеціалізація сільськогосподарських підприємств	Число господарств	Виробничі основні засоби сільськогосподарського призначення середньому на 1 робітника, тис. грн	Чисельність робітників в середньому на одне господарство	Розмір сільськогосподарських угідь, що припадає в середньому на одного робітника, га
Овочеві	12	310	125	0,7
Молочні	16	250	156	10,6
Зернові	32	142	76	34,6

5.67. *Обчисліть* середні значення показників в цілому за трьома підприємствам:

Таблиця 5.60

Підприємства	Виробіток продукції за рік в середньому на 1 робітника, тис. грн	Середньорічна чисельність робітників, осіб	Питома вага браку виробленої продукції, %	Процент виконання плану по випуску продукції, %	Питома вага молоді серед робітників, %
I	186,7	710	0,12	92	27
II	345,6	1 234	0,35	102	38
III	285,4	1 586	0,24	98	30

5.68. Маються наступні дані про двом підприємствам за звітний період:

Таблиця 5.61

Підприємства	Затрати на виробництво всієї продукції, грн	Собівартість одиниці продукції, грн	Середній виробіток на одного робітника, шт.
I	120 000	4,5	400
II	250 000	3,5	700

Визначити: а) середню собівартість одиниці продукції; б) середній виробіток на одного робітника. Який вид середньої слід застосувати?

5.69. Змінна норма виробітку і чисельність робітників за цехами заводу характеризується наступними даними:

Таблиця 5.62

Номер цеху	Січень		Лютий	
	чисельність робітників	середній виробіток за зміну одним робітником, шт.	чисельність робітників	середній виробіток за зміну одним робітником, шт.
1	25	340	28	345
2	37	260	39	265
3	12	540	10	480

Визначити виробіток продукції (в штуках) на одного робітника в середньому по заводу: а) за січень; б) за лютий. В якому місяці і на скі-

льки середній виробіток був вищим? *Зробіть* висновки.

5.70. Три бригади виготовляють один і той же вид продукції. Відомі затрати робочого часу на виготовлення продукції за трьома бригадами за квітень 2022 р.:

Таблиця 5.63

Бригада	Витрати робочого часу на виготовлення одиниці продукції, люд.-год.	Затрати робочого часу на всю вироблену продукцію, тис. люд.-год.
1	10,4	52,0
2	12,6	75,6
3	13,1	91,7

Визначте середні витрати робочого часу на одиницю продукції за трьома бригадами і в цілому за квітень 2022 р. Який вид середньої слід тут використати? Що є вагами цієї середньої?

5.71. Чисельність робітників та розмір заробітної плати характеризується наступними даними:

Таблиця 5.64

Цех № 1		Цех № 2	
Ставка заробітної плат в грн	Число штатних одиниць	Ставка заробітної плат в грн	Число штатних одиниць
14 500	1	14 830	1
13 800	2	14 570	1
13 650	2	14 200	2
13 200	7	13 800	3
12 850	10	13 200	12
12 720	4	13 040	8
		22 720	6

На основі наведених даних про кількість штатних одиниць та ставки заробітної плати *обчислити* середню місячну ставку по першому цеху, другому цеху та по підприємству в цілому.

5.72. Маються наступні дані про діяльність підприємств однієї галузі за квартал (табл. 5.65).

Визначити за трьома підприємствами в цілому за квартал: а) середнє число відпрацьованих робітниками люд.-днів; б) середній денний виробіток робітників; в) середню квартальний виробіток робітників; г) середні витрати на одну гривну виробленої продукції.

Таблиця 5.65

Підприємства	Число працюючих	Середнє число відпрацьованих одним робітником людино-днів	Середній денний виробіток робітників, грн	Затрати на одну гривну виробленої продукції, коп.
I	250	61	1 240	93,6
II	500	64	1 650	93,2
III	400	62	1 870	87,1

5.73. Маються наступні дані про підприємства, що виробляють один і той же вид продукції:

Таблиця 5.66

Підприємства	Затрати на виробництво всієї продукції, грн	Собівартість одиниці продукції, грн	Середній виробіток продукції на одного робітника, шт.
I	87 500	3,5	500
II	28 800	2,4	600
III	55 800	3,1	900

Визначити: а) середню собівартість виробу; б) середній виробіток на одного робітника, шт.; середнє число робітників на одне підприємство.

5.74. Маються наступні дані по тим же підприємствам, що і в попередній задачі за той же квартал:

Таблиця 5.67

Підприємства	Затрати на всю вироблену продукцію, тис. грн	Затрати на одну гривну виробленої продукції, коп.	Середній денний виробіток робітників, грн	Середнє число відпрацьованих одним робітником людино-днів
I	250	93,6	1 240	61
II	500	93,2	1 650	64
III	400	87,1	1 870	62

Визначити в середньому за трьома підприємствами за звітний квартал6 а) середні витрати на одну гривну продукції; б) середній денний виробіток робітників; в) середнє число відпрацьованих робітниками людино-днів; в) середнє число робітників.

5.75. *Обчислити* середній процент виконання плану по випуску продукції в цілому по об'єднанню на основі наступних даних:

Таблиця 5.68

Номер заводу	План випуску продукції за II квартал, тис. грн (v)	Фактичний випуск продукції за II квартал, тис. грн (xv)	Виконання плану в коефіцієнтах (x)
1	600	585	0,975
2	1 000	1 055	1,055
3	1 500	1 500	1,000
Всього	3 100	3 140	1,013

5.6. Розрахунок середньої гармонічної

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Середня гармонійна — одна із форм середньої. Обчислюється на зворотних значеннях ознаки:

$\bar{x} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$ — середня гармонійна проста зважена;

$\bar{x} = \frac{\sum w}{\sum \frac{1}{x} w}$ — середня гармонійна зважена,

де $\bar{x}$ — середня величина;

$\frac{1}{x}$ — зворотне значення варіантів ознаки;

n — число варіантів;

w — вага.

Середня гармонічна визначається для встановлення величини функції, що перебуває у зворотному пропорційної залежності від аргументу, що відповідає середній арифметичній величині аргументу.

Задача 13. Бригада токарів була зайнята обточуванням однакових деталей протягом 8-годинного робочого дня. Перший токар витратив на одну деталь 12 хв., другий — 16 хв., третій — 15, четвертий — 17 і п'ятий — 13 хв. *Визначте* середній час, необхідний для виготовлення однієї деталі.

Рішення

Для застосування формули середньої з'ясовуємо, що представляє собою середній час, який необхідний для виготовлення однієї деталі. Для отримання середнього часу виготовлення однієї деталі необхідно загальні витрати робітників на виробництво всіх деталей віднести до кількості деталей.

Таким чином, висхідне співвідношення середньої в даному випадку є співвідношення:

$$\text{Середній час на виготовлення однієї деталі} = \frac{\text{Загальні витрати часу на виготовлення усіх деталей}}{\text{Кількість деталей}}$$

Отже, нам відомі значення чисельника, а не відомі значення знаменника. Позначив загальні витрати часу на виготовлення усіх деталей через w ($w=xf$), час на обробку однієї деталі одним робітником через x, і позначивши середню, як звичайно, через $\bar{x}$, напишемо формулу в алгебраїчному виді:

$$\bar{x} = \frac{\sum w}{\sum \frac{w}{x}},$$

де w — загальний час на обробку деталей;

x — час на обробку однієї деталі.

Отже в даній задачі середній час, який необхідний для виготовлення однієї деталі, визначається за формулою середньої гармонічно зваженої. Таким чином, середній час на обробку однієї деталі робітниками бригади становить:

$$\bar{x} = \frac{8\cdot 60 + 8\cdot 60 + 8\cdot 60 + 8\cdot 60 + 8\cdot 60}{\frac{8\cdot 60}{12} + \frac{8\cdot 60}{16} + \frac{8\cdot 60}{15} + \frac{8\cdot 60}{17} + \frac{8\cdot 60}{13}} =$$

$$= \frac{2400}{40 + 30{,}0 + 32{,}0 + 28{,}2 + 36{,}9} = \frac{2\,400}{167{,}1} = 14{,}4 \text{ хв.}$$

Таким чином, середній час на виготовлення однієї деталі є середня гармонійна із середнього часу обробки однієї деталі одним робітником, зваженому по загальному обсягу витрат часу на обробку усіх деталей.

Висновок. Якщо відомі значення чисельника висхідного співвідношення середньої, але не відомі значення знаменника, то середня обчислюється за формулою середньої гармонічної.

Задача 14. Маються наступні дані про діяльність трьох цехів машинобудівного заводу:

Таблиця 5.69

Цехи	Фактичний обсяг валової продукції, тис. грн	Виконання плану, %
Механічний	762	102,1
Інструментальний	652	103,6
Збиральний	341	105,7

Визначити середній процент виконання плану виробництва валової продукції в цілому по машинобудівному заводу.

Рішення

Для визначення середнього проценту виконання плану за обсягом виробництва валової продукції застосуємо формулу середньої гармонійної зваженої, оскільки чисельник дробу (обсяг валової продукції) нам відомий. Знаменник (плановий обсяг виробництва валової продукції) обчислимо шляхом ділення фактичного обсягу валової продукції на процент виконання плану. В результаті розрахунків отримаємо:

$$\bar{x} = \frac{762 + 652 + 341}{\frac{762}{1{,}021} + \frac{652}{1{,}036} + \frac{341}{1{,}057}} = \frac{1755}{1698{,}3} = 1{,}033.$$

Задача 15. Два підприємства виготовляють один вид продукції. Затрати на виробництво та середній виробіток за окремими підприємствами за звітний період характеризуються наступними даними:

Таблиця 5.70

Підприємства	Затрати на виробництво всієї продукції, грн	Собівартість одиниці продукції, грн	Середній виробіток на одного робітника, шт.
1	276 000	4,6	300
2	572 000	5,2	250

Необхідно *обчислити* систему середніх: а) середню собівартість виробу; б) середній виробіток на одного робітника, шт.; в) середнє число робітників на одне підприємство.

Рішення

Для визначення середньої собівартості виробу необхідно встановити економічну сутність та порядок визначення середньої собівартості виробу. Середня собівартість виробу може бути обчислена як відношення затрат на виробництво всієї продукції до обсягу продукції, виробленої за звітний період, тобто:

$$\text{Середня собівартість одиниці продукції} = \frac{\text{Загальні витрати на виробництво продукції}}{\text{Кількість виробів}}$$

За умовами задачі маємо чисельник. Знаменник представляє собою відношення загальних витрат на виробництво до собівартості одиниці продукції. Отже, для визначення середньої собівартості одиниці виробу застосуємо середню гармонійну.

Середня собівартість одиниці виробу становитиме:

$$\frac{276\,000 + 572\,000}{\frac{276\,000}{4{,}6} + \frac{572\,000}{5{,}2}} = \frac{848\,000}{170\,000} = 4{,}99 \text{ грн.}$$

Таким чином, середня собівартість одиниця виробу в цілому за двома підприємствами є середня гармонійна із собівартості цього виробу на кожному підприємстві, зважена по загальним витратам на виробництво всієї продукції.

Далі визначимо середній виробіток на одного робітника. Він представляє собою відношення обсягу виробленої продукції (шт.) на чисельність робітників. Таким чином, середній виробіток одного робітника складе:

$$\text{Середній виробіток на одного робітника} = \frac{\text{Обсяг виробленої продукції, шт.}}{\text{Число робітників}}$$

Обсяг виробленої продукції ми обчислили при розрахунку середньої собівартості виробу. Так, обсяг виробленої продукції першим підприємством становив 60000 шт. $\left(\frac{276000}{4{,}6}\right)$, другого — 110 000 шт. $\left(\frac{572000}{5{,}2}\right)$.

Знаменник формули (число робітників) може бути обчислений як відношення обсягу виробленої продукції до середньої виробітки на одного робітника за цим підприємством.

Тому середній виробіток на одного робітника за двома підприємствами визначимо із співвідношення:

$$\frac{60\,000 + 110\,000}{\frac{60\,000}{300} + \frac{110\,000}{250}} = \frac{170\,000}{640\,000} = 266 \text{ шт.}$$

Отже, середній виробіток на одного робітника за двома підприємствами є середня гармонійна із середньої виробітки на одного робітника по кожному підприємству, зваженої по загальному обсягу продукції, виробленої на цих підприємствах.

Нарешті, визначимо середнє число робітників. Цей показник

обчислюється як відношення загального числа робітників на число підприємств, тобто

$$\text{Середнє число робітників на одне підприємство} = \frac{\text{Загальне число робітників}}{\text{Число підприємств}}$$

Число робітників кожного підприємства нами була обчислена при розрахунку середньої виробітки на одне підприємство. На першому підприємстві число робітників склало 200 осіб $\left(\frac{60\,000}{300}\right)$, а на другому — 440 осіб $\left(\frac{110\,000}{250}\right)$.

Середнє число робітників складе:

$$\frac{200+440}{2} = 320 \text{ осіб.}$$

Задачі

5.76. Двоє токарів на протязі семигодинного робочого дня були зайняті виготовленням однакових деталей. Перший виготовив 42 деталі, другий — 60 деталей. *Визначте* середні витрати часу токарями на виготовлення однієї деталі.

5.77. На протязі години проводився хронометраж роботи двох токарів, що займалися виготовленням деталі А-120. Перший токар на обробку однієї деталі витратив 4 хв., другий — 5 хв. *Визначте* середні затрати часу токарями на обробку деталі.

5.78. По восьми ділянкам заводу маються дані про витрати металу на виготовлення продукції:

Таблиця 5.71

Номер ділянки	Витрати матеріалу, кг		Номер ділянки	Витрати матеріалу, кг	
	на один виріб	на всі вироби		на один виріб	на всі вироби
1	0,65	78	6	0,76	95
2	0,69	100,7	7	0,67	113,9
3	0,72	144	8	0,61	122
4	0,54	81	9	0,79	94,8
5	0,85	136	10	0,52	75,4

Визначити витрати матеріалу на один виріб в середньому по ділянкам заводу.

5.79. В трьох однакових партіях деталей було виявлено забракова-

них виробів (у відсотках): у першій — 1,6, у другій — 1,9, у третій — 2,5. *Визначте* середній процент забракованої продукції у всіх трьох партіях.

5.80. Відділом технічного контролю заводу було перевірено три партії деталей — 2000, 3000 і 4000. В цих партіях деталей було виявлено 2,8; 3,6; 1,8 % забракованих деталей. *Визначити* середній процент забракованих деталей у всіх трьох партіях.

5.81. Було перевірено три різні за обсягом партії продукції, що призначалася для реалізації. В першій партії було виявлено 64 забраковані деталі, що становило 1,7 % від їх загальної кількості, у другій партії — 130 деталей, або 2,0 %, в третій — 70 деталей, або 3,2 %. *Визначте* середній процент забракованих деталей у всіх трьох партіях.

5.82. Маються дані про валовий збір та урожайність зернових культур за двома сільськогосподарськими підприємствами:

Таблиця 5.72

Види зернових культур	ТОВ «Зірка»		ТОВ «Агросвіт»	
	валовий збір, ц	урожайність 1 га, ц	валовий збір, ц	урожайність 1 га, ц
Пшениця	12 000	24	14 000	20
Овес	1 500	15	2 000	16
Горох	800	10	1 200	12

Визначити, на скільки середня урожайність зернових культур в одному із сільськогосподарських підприємств вища і на скільки.

5.83. Маються наступні дані про середньомісячну заробітну плату та фонд заробітної плати працівників підприємства у звітному періоді:

Таблиця 5.73

	Періоди				
	I квартал	квітень	травень	червень	липень
Середня місячна заробітна плата, грн	9 520	9 640	9 760	9 670	9 750
Фонд місячної заробітної плати, тис. грн	405	386	415	375	425

Визначити середньомісячну заробітну плату робітників підприємства: 1) за II квартал; 2) за перше півріччя; 3) за сім місяців (з початку року).

5.84. *Визначте* середню місячну заробітну плату працівників заводу: 1) за перше півріччя; 2) за друге півріччя; 3) в цілому за рік, викори-

стовуючи наступні дані:

Таблиця 5.74

	Періоди					
	I квартал	II квартал	III квартал	травень	червень	липень
Середня місячна заробітна плата, грн	8 100	8 340	8 450	8 520	8 370	8 460
Фонд місячної заробітної плати, тис. грн	755	817	913	310	297	318

5.85. Відділом технічного контролю підприємства надані про процент браку і вартості продукції за трьома виробами:

Таблиця 5.75

Показники	Види продукції		
	Виріб *А*	Виріб *Б*	Виріб *В*
Процент браку	1,2	2,44	3,48
Вартість продукції, тис. грн	250,4	185,6	108,7

Визначити середній процент браку у всій виробленій продукції підприємства.

5.86. Маються наступні дані про середню заробітну плату та фонд заробітної плати за окремими цехами підприємства:

Таблиця 5.76

Показники	Цехи підприємства		
	механічний	ремонтний	інструментальний
Середня заробітна плата, грн	11 850	12 657	13 856
Фонд заробітної плати, тис. грн	651,8	126,7	332,5

Визначити середню заробітну плату робітників в цілому по підприємству. Який вид середньої слід застосувати? Що є вагами цієї середньої? *Сформулюйте* властивість цієї середньої, яка використана при рішенні задачі.

5.87. По макаронній фабриці маються наступні дані:

Таблиця 5.77

Номер цеху	I квартал		II квартал	
	брак, %	фактичний випуск всієї продукції, тис. грн	брак, %	фактичний випуск всієї продукції, тис. грн
1	1,2	345,4	1,4	326,3
2	0,6	115,7	0,8	128,4
3	2,6	265,9	2,1	267,3
Всього	×	727,0	×	722,0

Визначте процент браку в середньому по фабриці по фабриці за I та II квартали. В якому кварталі і на скільки питома вага браку була вищою? *Зробіть* висновки.

5.88. По одному із машинобудівних заводів маються наступні дані:

Таблиця 5.78

Групи робітників за професіями	Середня місячна заробітна плата одного робітника, грн	Фонд заробітної плати за місяць, тис. грн
Токарі	12 540	313,5
Фрезерувальники	11 620	185,9
Слюсарі	10 460	52,3
Всього	?	551,7

Визначити середню місячну заробітну плату робітників усіх професій, разом взятих. Яку формулу середньої ви застосували?

5.89. *Обчислити* середню заробітну плату робітника по заводу, якщо відомі відповідні середні за цехами. Висхідні дані наступні:

Таблиця 5.79

Цех	Фонд заробітної плати за місяць, тис. грн	Середня місячна заробітна плата одного робітника, грн
1	11 200	140
2	19 200	160
Всього	30 400	?

5.90. Маються наступні дані про виробництво однакової продукції трьома робітниками механічного цеху заводу:

Таблиця 5.80

Робітник	Затрати часу на виготовлення одиниці продукції, хв.	Час, на протязі якого ця продукція вироблялася, год.
Колос С. В.	28	8
Соколіцин В. К.	29	6
Рибка В. А.	24	5

Визначити середні затрати часу цими робітниками на виготовлення одиниці продукції.

5.91. За даними відділу технічного контролю, за квітень звітного періоду маються наступні дані про вартість виробленої продукції та процент браку:

Таблиця 5.81

Виріб	Вартість всієї виробленої продукції, тис. грн	Процент браку
А	200	1,5
Б	650	2,4
В	150	3,8
Всього	1 000	×

Визначити середній процент браку продукції.

5.92. По трьом відділенням сільськогосподарського підприємства «Факел» маються наступні дані про урожайність та валовий збір цукрового буряку:

Таблиця 5.82

Номер відділення	Урожайність цукрового буряку, ц/га	Валовий збір цукрового буряку, ц
№ 1	360	43 200
№ 2	270	10 800
№ 3	400	9 600
Всього	×	63 600

Визначити середню урожайність цукрового буряку по сільськогосподарському підприємству.

5.93. Маються наступні дані обсяг виробництва зернових культур за

категоріями господарств станом на 1 липня 2021 р.:

Таблиця 5.83

Номер цеху	Підприємства		Господарства населення	
	урожайність, ц з га	валовий збір, тис. ц	урожайність, ц з га	валовий збір, тис. ц
Пшениця	48,2	183,2	36,0	318,3
Ячмінь	45,1	6 878,1	34,2	818,6
Горох	24,0	48,2	14,1	1,7

Визначте: а) середню урожайність зернових культур за окремими категоріями господарств; б) середню урожайність окремих зернових культур в цілому за обома категоріями господарства. Чи можна при рішенні даної задачі користуватися формулою середньої арифметичної?

5.94. Урожайність та валовий збір зернових і зернобобових культур сільськогосподарського підприємства «Фенікс» характеризується наступними даними:

Таблиця 5.84

Культури	Урожайність, ц з 1 га	Валовий збір, ц
Озима пшениця	32	15 040
Ячмінь	27	9 720
Соя	18	360

Визначити середню урожайність зернових і зернобобових культур по сільськогосподарському підприємству. Яку ви середню застосували?

5.95. Маються наступні дані про посівні площі, валовий збір та затрати на виробництво пшениці в трьох сільськогосподарських підприємствах району за звітний період:

Таблиця 5.85

Підприємства	Посівна площа, га	Валовий збір, ц	Затрати на виробництво всієї пшениці, тис. грн
I	700	22 400	3 850
II	500	14 000	3 100
III	200	5 400	1 360

Визначте по трьом сільськогосподарським підприємствам за звітний період: а) середню урожайність пшениці (ц/га); б) середню посівну площу; в) середню собівартість (затрати на виробництво) одного ц пшениці (грн); г) середній валовий збір.

5.96. По підприємству маються наступні дані за II квартал звітного періоду:

Таблиця 5.86

Показник	Квітень	Травень	Червень
Випуск готової продукції, тис. грн	745	784	820
Брак, %	1,7	2,3	1,5

Визначити середній процент браку за другий квартал.

5.97. Нижче наводяться дані про затрати робочого часу на виготовлення продукції за трьома бригадами за квітень 2022 р.:

Таблиця 5.87

Бригада	Затрати робочого часу на виготовлення одиниці продукції, люд.-год.	Затрати робочого часу на виготовлення всієї виробленої продукції, тис. люд.-год.
1	4,1	5,7
2	5,5	4,4
3	6,3	15,1

Визначити середні витрати робочого часу на одиницю продукції за трьома бригадами в цілому за квітень 2022 р.

5.98. Маються наступні дані про собівартість продукції та затрати за чотирма підприємствами за звітний період:

Таблиця 5.88

Підприємство	Собівартість одиниці продукції, грн	Затрати на виготовлення всієї виробленої продукції, тис. грн
1	50	30,0
2	100	18,6
3	300	27,6
4	1 000	125,0

Визначити середню собівартість одиниці продукції за чотирма підприємствами. Який вид слід застосувати при вирішенні даної задачі?

5.99. Затрати часу трьома робітниками на обробку однієї деталі становили: 10, 12 і 8 хв. Загальні витрати часу на обробку деталей робітниками склали відповідно: 420, 480 і 400 хв. *Визначити* середній час на обробку деталі одним робітником.

5.7. Розрахунок моди

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Модою в статистиці називається величина ознаки (варіанта), яка частіше всього зустрічається в даній сукупності. У варіаційному ряду це буде варіанта, яка має найбільшу частоту. Мода і медіана дають деяке уявлення про структуру сукупності, тому їх інколи називають структурними середніми.

Модою користуються у тих випадках, коли обчислення середньої арифметичної просто безглуздо. Не можна, наприклад, обчислити середній розмір взуття, що продається в магазині. Тут необхідно вказувати модельну величину. Статистика цін також часто вдається до модальних величин замість середніх арифметичних.

Мода по-різному визначається для дискретного та інтервального рядів розподілу.

Знайти моду у варіаційному ряду, де значення ознаки задані числами, не представляє великої складності. Розглянемо приклад знаходження моди у дискриційному варіаційному ряду.

Задача 16. Розподіл 200 сімей за числом дітей характеризується наступними даними:

Таблиця 5.89

Група сімей за числом дітей	Число сімей
0	9
1	31
2	74
3	46
4	20
5	14
6	6
Всього	200

В цьому прикладі модою буде сім’я, яка має двох дітей, так як цьому значенню варіанта відповідає найбільше число сімей. Можуть бути ряди розподілу, де всі варіанти зустрічаються часто. В такому випадку моди не має. Тепер розглянемо приклад обчислення моди в інтервальному варіаційному ряду.

Для інтервального ряду розподілу величина моди визначається по особливій формулі.

Задача 17. За наступними даними про розподіл 96 токарів механічного цеху за обсягом денного виробітку *визначте* моду:

Таблиця 5.90

	Групи токарів за обсягом денної виробітки, шт.					
	30–34	34–38	38–42	42–46	46–50	Всього
Чисельність токарів	11	27	35	17	6	96

Рішення

Починаємо вирішення задачі із визначення модельного інтервалу. Знаходимо найбільшу чисельність. Вона становить 35 і відповідає інтервалу 38–42. Це і є модальний інтервал.

Введемо наступні позначення

$$x_0 = 38; \qquad f_{m-1} = 27;$$
$$i = 4\ (42 - 38); \qquad f_{m+1} = 17.$$
$$f_m = 35;$$

Підставляючи значення у формулу, визначимо моду:

$$38 + 4\frac{35 - 27}{(35 - 27) + (35 - 17)} = 38 + 4\frac{8}{8 + 18} = 39{,}2 \text{ шт.}$$

Задачі

5.100. В результаті вибіркового спостереження отримані наступні дані про розподіл реалізованого взуття за розміром:

	Розмір взуття							Всього
	38	39	41	42	43	44	45	
В % до підсумку	5	13	22	28	20	9	3	100

Визначити моду в цьому ряду розподілу.

5.101. В результаті зважування великої рогатої худоби були отримані наступні дані:

	Вага худоби (кг)							
	До 250	250–280	280–310	310–330	330–360	360–390	390 і більше	Всього
Кількість голів великої рогатої худоби	12	19	28	36	38	24	9	166

Визначити моду в цьому ряду розподілу.

5.102. Маються наступні дані про розподіл 230 робітників заводу за розміром місячної заробітної плати (грн):

	Групи робітників за розміром заробітної плати (тис. грн)							Всього
	До 10	10–12	12–14	14–16	16–180	18–20	20 і більше	
Число робітників	12	128	24	27	16	19	4	230

Визначте моду.

5.103. Розподіл сімей області по числу дітей в них характеризується наступними даними:

Число дітей в сім'ї	0	1	2	3	4	5	6
Число сімей, тис.	16	27	21	14	9	5	3

Визначити моду.

5.104. За наступними даними про розподіл 107 токарів за обсягом денної виробітки визначте моду (іншими словами, модальне значення денного виробітку у даної сукупності токарів):

	Денний виробіток токарів, шт.							Всього
	38–40	40–42	42–44	44–46	46–48	48–50	50–52	
Число токарів	6	14	26	29	21	8	3	107

Визначити моду в цьому ряду розподілу.

5.105. Маються дані про розподіл робітників інструментального цеху за розміром заробітної плати:

Таблиця 5.91

	Заробітна плата, грн					
	До 8 000	8 000–10 000	10 000–12 000	12 000–14 000	14 000–16 000	16 000 і більше
Чисельність робітників, осіб	25	32	36	18	11	4

Визначити моду і медіану.

Примітка. Серединне значення першої та останньої групи прийміть відповідно рівним 7 000 і 17 000 грн.

5.106. Маються наступні дані про розподіл токарів механічного цеху за розміром змінного виробітку:

Таблиця 5.92

	Змінна норма виробітку, шт.			
	20–22	22–24	24–26	26 і більше
Число робітників, осіб	4	27	18	11

Визначити моду.

5.107. За результатами весняної екзаменаційної сесії одного курсу студентів 3-го курсу отримано наступний розподіл оцінок (за національною шкалою) за балами:

Таблиця 5.93

Бал оцінка знань студентів	2 (незадовільно)	3 (задовільно)	4 (добре)	5 (відмінно)	Всього
Число оцінок, отриманих студентами	7	76	121	100	304

Визначте моду (модальний бал успішності).

5.8. Розрахунок медіани

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Медіаною в статистиці називається варіанта, яка знаходиться в середині варіаційного ряду. Медіана ділить ряд пополам, по обидві сторони від неї (верх і вниз) знаходиться однакова кількість сукупності. Медіана застосовується в тих випадках, коли необхідно охарактеризувати величину ознаки, яка частіше всього зустрічається.

Формули для обчислення медіани при непарному та парному числі варіантів:

$$Me = x_{m+1};$$

$$Me = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}.$$

Як і мода, медіана по-різному визначається для дискретного та інтервального рядів розподілу. Розглянемо приклад обчислення медіани на основі дискретного ряду розподілу.

Задача 18. Дано дев’ять варіантів кількості забракованої продукції, розташованих у зростаючому порядку (в шт.):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$x_{9=2m+1}$
4	6	10	12	14	16	18	19	22

Обчислити медіану.

Рішення

Маємо непарне число варіантів:

$$2m+1=9;$$

$$2m=8;$$

$$m=4.$$

Знаходимо медіану:

$$Me= x_{4+1} = x_5 = 14.$$

Якщо впорядкований ряд складається з парного числа членів, то медіаною буде середня арифметична з двох варіантів, розташованих у середині ряду.

Задача 19. Необхідно *обчислити* медіану на основі наступного розподілу 144 сімей за чисельністю у них дітей:

Таблиця 5.94

	Число дітей в сім'ї						
	1	2	3	4	5	6	Всього
Чисельність сімей	12	57	45	18	8	3	143

Рішення

Медіана характеризує значення ознаки, яке знаходиться в середині інтервалу і, таким чином, ділить ряд на дві частини. Як відомо, медіана по різному визначається для дискретного та інтервального рядів розподілу.

Для перетворення непарного ряду в парний додамо до чисельності сімей 1. Таким чином, наш непарний ряд перетвориться в парний. Позначимо номер одиниць сукупності, що знаходиться в середині ряду, через N_{Me}. Обчислимо номер серединної одиниці сукупності: $N_{\text{Me}} = \frac{n+1}{2} = \frac{143+1}{2} = 72.$ Медіанним значенням ознаки володіє сім'я № 72. Необхідно визначити число дітей в цій сім'ї. Для цього необхідно підрахувати нагромаджені підсумки (шляхом послідовного сумування чисельності кожної групи сімей). Підсумки ці наступні: 12, 69, 114, 132, 140, 143. В першому підсумку сім'ї з порядковим номером від 1 до 12, в

другому — до 69, в третьому — до 114. Нам необхідний № 72. Він в третьому накопленому підсумку. А цей підсумок припадає на третю групу сімей — з трьома дітьми. Тут всі сім'ї від № 72 до № 114 мають по троє дітей: $M_e = 3$.

Так обчислюється медіана для неінтервального ряду розподілу.

Розглянемо порядок обчислення медіани для інтервального ряду розподілу.

Задача 20. Маються наступні дані про розподіл робітників підприємства за розміром місячної заробітної плати:

Таблиця 5.95

	Розмір заробітної плати, тис. грн						
	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20	20–22	Всього
Чисельність робітників	5	7	29	35	15	9	100

Обчисліть медіану.

Рішення

Для вирішення задачі необхідно перш за все визначити інтервал, в якому заключна медіана — медіанний інтервал. Ним вважається той, до якого суму (нагромаджений підсумок) чисельності менше половини всієї чисельності ряду, а з додаванням його чисельності — більше половини. Знаходимо нагромаджені підсумки.

Таблиця 5.96

Розмір місячної заробітної плати, тис. грн	Число робітників, % до підсумку	Нагромаджені підсумки (частості)
10–12	5	5
12–14	7	12
14–16	29	41
16–18	35	76
18–20	15	
20–22	9	
Всього	100	

Визначаємо половину чисельності: $\frac{100}{2} = 50$. Сума перших трьох інтервалів дорівнює 41, тобто менше половини загальної чисельності ряду. Якщо ж ми додамо чисельність четвертого ряду, рівному 35, то

отримаємо суму, що перевищує половину. Звідси слідує, що медіанним є четвертий інтервал — 16–18 тис. грн.

Обчислюємо значення медіани:

$$Me = 16 + 2 \cdot \frac{\frac{100}{2} - 41}{35} = 16{,}5 \text{ тис. грн.}$$

Таким чином, 50 % робітників підприємства заробляють в місяць менше 16,5 тис. грн, а 50 % — понад 16,5 тис. грн.

Задачі

5.108. В результаті вибіркового обстеження були отримані наступні дані про розподіл сімей по числу дітей:

	Число дітей в сім'ї							
	0	1	2	3	4	5	5 і більше	Всього
Кількість сімей	13	26	44	28	17	12	6	146

Визначити медіану.

5.109. Маються наступні дані про розподіл підприємств харчової промисловості за обсягом реалізованої промислової продукції:

	Вартість реалізованої продукції (млн грн)							
	До 10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35 і більше	Всього
Кількість підприємств в % до підсумку	6	14	24	16	27	10	3	100

Визначити медіану.

5.110. Розподіл робітників за рівнем кваліфікації наступний:

Таблиця 5.97

Показник	Тарифний розряд					
	1	2	3	4	5	6
Чисельність робітників, осіб	25	32	36	18	11	4

Визначити моду і медіану рівня кваліфікації.

5.111. Розподіл сільськогосподарських підприємств за рівнем урожайності зернових культур області за 2021 р. характеризується наступними даними (табл. 5.98.).

Таблиця 5.98

	Групи сільськогосподарських підприємств за рівнем урожайності зернових культур, ц/га						
	До 25,0	25,0–27,5	27,5–30,0	30,0–32,5	32,5–35,0	35,0 і більше	Всього
Число сільськогосподарських підприємств, в % до підсумку	8,5	24,6	27,3	15,4	14,1	10,1	100

Визначте: а) моду; б) медіану.

5.112. Розподіл робітників підприємства за ступенем виконання норм виробітку за звітний місяць характеризується наступними даними:

Таблиця 5.99

	Групи робітників за ступенем виконання норм виробітку, %							
	80–90	90–100	100–110	110–120	120–130	130–140	140–150	Всього
Число робітників	18	59	136	142	95	42	8	500

Визначте медіану ступеня виконання норм виробітку робітниками підприємства.

5.113. В цеху машинобудівного підприємства працює 7 бригад робітників. Чисельність робітників окремих бригад складає відповідно 7, 6, 11, 10, 8, 9, і 11 осіб. Визначте медіану чисельності робітників в бригаді.

5.114. Маються наступні дані про розподіл токарів збирального цеху за розміром змінного виробітку:

Таблиця 5.100

	Змінна норма виробітку, шт.			
	20–22	22–24	24–26	26 і більше
Число робітників, осіб	5	28	17	12

Визначити медіану.

5.115. Маються наступні дані про змінний виробіток деталей (шт.) восьми робітників-відрядників бригади механічного цеху: 12, 11, 9, 12, 13, 10, 9, 8. Визначте медіану середнього змінного виробітку деталей робітниками бригади.

5.116. Розподіл робітників за продуктивністю праці за зміну наступний:

Таблиця 5.101

Показник	Випуск продукції за зміну, шт.					
	10	11	12	13	14	15
Чисельність робітників, осіб	5	7	9	11	10	8

Обчислити медіану.

5.117. Розподіл сімей за числом дітей характеризується наступними даними:

Таблиця 5.102

Група сімей за числом дітей	Число сімей
0	9
1	31
2	74
3	46
4	20
5	14
6	6
Всього	200

Обчислити медіану.

5.118. Процент виконання плану робітниками характеризується наступними даними:

Таблиця 5.103

Процент виконання плану	Число робітників
До 50	20
Від 50 до 60	23
» 60 » 70	66
» 80 » 90	94
» 90 » 100	153
» 100 » 110	216
» 110 » 120	253
» 120 » 130	274
» 130 » 140	283
» 140 » 150	231
» 150 » 160	176
» 170 » 180	102
» 180 » 190	74
» 190 » 200	32
Всього	1 997

Визначте медіану в ряду розподілу робітників за процентом виконання ними плану.

5.119. За результатами весняної екзаменаційної сесії одного курсу студентів 3-го курсу отримано наступний розподіл оцінок (за національною шкалою) за балами:

Таблиця 5.104

Бал оцінка знань студентів	2 (незадовільно)	3 (задовільно)	4 (добре)	5 (відмінно)	Всього
Число оцінок, отриманих студентами	8	75	123	90	296

Визначте медіану (медіанне значення балу).

5.9. Тести

1. Узагальнена кількісна характеристика ознаки у досліджуваній сукупності, що визначає її рівень у розрахунку на одиницю сукупності. Вона показує характерну, типову величину ознаки одиниць сукупності, що утворюється в певних умовах під впливом набору факторів:

а) абсолютна величина;

б) відносна величина;

в) середня величина;

г) величина динаміки.

2. Для визначення середнього значення ознаки, обсяг якої представлений сумою індивідуальних його значень, виражених прямими показниками, слід застосувати формулу середньої:

а) арифметичної;

б) гармонічної;

в) геометричної;

г) квадратичної.

3. Маються наступні дані про стаж п’яти робітників (років): 3, 6, 5, 12, 8. Для отримання середнього стажу слід застосувати формулу:

а) арифметичної простої;

б) арифметичної зваженої;

в) гармонічної простої;

г) гармонічної зваженої.

4. За даними про надій молока на одну корову і валовий надій молока на кожній із трьох ферм сільськогосподарського підприємства необхідно

визначити середній надій молока на одну корову в цілому по сільськогосподарському підприємству. Якого виду середню слід застосувати:

а) гармонічну;

б) геометричну;

в) квадратичну;

г) арифметичну.

5. За даними про собівартість однієї одиниці виробу і загальних витратах на її виробництво за трьома підприємствами визначити середню собівартість 1 деталі в цілому по групі підприємств. Яку форму розрахунку середньої слід застосувати:

а) гармонічну зважену;

б) гармонічну просту;

в) арифметичну зважену;

г) арифметичну просту.

6. Якщо всі індивідуальні значення ознаки зменшити на 10, то середня:

а) зменшиться на 10;

б) зменшиться в 10 разів;

в) не зміниться;

г) обчислити не можливо.

7. Якщо всі індивідуальні значення ознаки збільшити в два рази, а частоти зменшити в 2 рази, то середня:

а) не зміниться;

б) збільшиться в 2 рази;

в) зменшиться в 2 рази;

г) зміну середньої визначити не можливо.

8. Якщо всі індивідуальні значення ознаки зменшити в шість разів, а частоти збільшити в 2 рази, то середня:

а) збільшиться в 3 рази;

б) зменшиться в 3 рази;

в) збільшиться в 12 разів;

г) зменшиться в 12 разів.

9. На одному із підприємств собівартість одиниці продукції в цеху № 1 становила 120 грн, в цеху № 2 – 160 грн. Якщо обсяг продукції в цеху № 1 збільшиться в 1,2 рази, а в цеху № 2 залишиться без змін, то середня собівартість продукції:

а) збільшиться;

б) зменшиться;

в) не зміниться;

г) передбачити зміну середньої не можливо.

10. В результаті зважування великої рогатої худоби були отримані на-

ступні дані:

	Вага худоби (кг)							
	До 250	250–280	280–310	310–330	330–360	360–390	390 і більше	Всього
Кількість голів великої рогатої худоби	13	18	27	36	35	14	8	151

Визначити моду:

а) 8;

б) 35;

в) 36;

г) 27.

11. В результаті вибіркового обстеження ваги 108 деталей були отримані наступні дані:

	Вага деталі (г)							
	До 250	250–255	255–260	260–265	265–270	270–275	275 і більше	Всього
Кількість деталей, шт.	4	12	26	28	24	12	2	108

Визначити моду:

а) 2;

б) 24;

в) 28;

г) 26.

12. Маються наступні дані про розподіл 220 робітників заводу за розміром місячної заробітної плати (грн):

	Групи робітників за розміром заробітної плати (тис. грн)							Всього
	До 10	10–12	12–14	14–16	16–180	18–20	20 і більше	
Число робітників	12	128	24	22	16	14	4	220

Визначте моду:

а) 4;

б) 24;

в) 22–24;

г) 46.

13. Значення ознаки, що найчастіше зустрічається в досліджуваній сукупності (*Mo*), значення випадкової величини, при якому щільність $p(x)$ у неперервному випадку чи ймовірність $P(X = x)$ у дискретному досягає свого максимуму — це:

а) мода;
б) медіана;
в) середньоквадратичне відхилення;
г) варіація.

5.10. Питання для обговорення

1. *Охарактеризуйте* сутність середньої величини.
2. Для аналізу яких соціально-економічних процесів та явищ знайшли широке застосування середні величини?
3. Яка головна мета обчислення середніх величин?
4. Які основні правила застосування середніх в статистиці?
5. Який недолік властивий середнім величинам? До чого це може призвести на практиці?
6. Чому потрібні різні формули середніх величин і чим слід керуватися при вибору потрібної формули?
7. Які є прийоми, які спрощують техніку обчислення середньої арифметичної і середнього квадратичного відхилення?
8. Як обчислюється проста та зважена середня величина?
9. Яке значення для розуміння середньої величини мають медіана, показники асиметрії і ексцесу?
10. В чому полягають відмінності моди від медіани?
11. *Охарактеризуйте* сутність моди. *Визначте*, в яких випадках вона застосовується? В яких рядах розподілу моди не має?
12. Як розраховуються показники асиметрії та ексцесу?
13. В яких випадках обчислюється середня геометрична?
14. В чому полягає відмінність в обчислені моди в дискреційних рядах?
15. *Охарактеризуйте* наукові основи обчислення середніх показників.
16. За скількома ознаками середні дають узагальнену характеристику явищ та процесів? З якою метою рекомендується обчислювати не одну ізольовану середню, а систему середніх?

ЛІТЕРАТУРА

1. *Горкавий В. К. Статистика*: Підручник. Третє вид., переробл. і доповн. Київ: Алерта, 2019. С. 88–103.
2. Статистика: підручник / *С. І. Пирожков, В. В. Рязанцева, Р. М. Моторин* та ін. Київ: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2020. С. 105–123.

3. *Ткач Є. І.*, *Сторожук В. П.* Загальна теорія статистики: підручник. 3-тє вид. Київ: Центр учбової літератури, 2009. С. 131–155.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

Навчальні посібники, *словники*

4. *Козирєва О. В.*, *Федорова В. О.* Статистика: навчальний посібник. Харків: Видавництво Іванченка І.С., 2021. С. 54–66.
5. *Мармоза А. Т.* Теорія статистики: підручник. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: «Центр учбової літератури», 2013. С. 141–170.
6. *Опря А. Т.* Статистика (модульний варіант з програмованою формою контролю знань). Навч. посіб. Київ: Центр учбової літератури, 2012. С. 73–82.
7. *Педченко Г. П.* Статистика: Навчальний посібник. Мелітополь: Колор Принт, 2018. С. 100–108.
8. Статистичний словник / [*О. Г. Осауленко*, *О. О. Васєчко*, *М. В. Пугачова* та ін.]; за ред. д-ра держ. упр., проф., член-кор. НАН України О. Г. Осауленка; НТК статистичних досліджень. Київ: ДП «Інформ.-аналіт. агентство», 2012. 498 с.
9. *Шапочка М. К.*, *Маценко О. М.* Теорія статистики: навч. посібник. Суми: Університетська книга, 2014. С. 125–144.

Глава 6. ПОКАЗНИКИ ВАРІАЦІЇ

6.1. Визначення розмаху варіації

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Розмах варіації (R) — один із показників варіації. Він характеризує межі коливань (варіацію) індивідуальних ознак (або варіантів) ознаки (x) у статистичній сукупності (або у варіаційному ряду) і представляє собою різницю між найбільшим ($x_{\max}$) і найменшим ($x_{\min}$) значенням ознаки, тобто $R = x_{\max} - x_{\min}$. Розмах варіації характеризує межі зміни ознаки, що варіюється. Він обчислюється в тих же одиницях, що і ознака, варіацію якої він характеризує.

Обчислення розмаху варіації відрізняється простотою, що дозволяє використовувати його при дослідженні суспільних явищ і процесів. Однак величина розмаху варіації визначається лише двома крайніми значеннями, що робить певною мірою випадковою його величиною.

Задача 1. Маються наступні дані про продуктивність праці робітників в двох бригадах:

Таблиця 6.1

Табельний номер робітника	Вироблено продукції за зміну, шт.	
	1 бригада	2 бригада
1	3	6
2	5	8
3	7	9
4	13	11
5	15	12
6	17	14
–	60	60

Середній виробіток у двох бригад однаковий:

$$\bar{x}_1 = \frac{60}{6} = 10 \text{ шт.}; \quad \bar{x}_2 = \frac{60}{6} = 10 \text{ шт.}$$

Однак у першому варіанті варіація ознак значно менше, ніж у другому, і можна сказати, що перший варіант за своїм складом щодо ознаки, що вивчається, більш однорідний, ніж другий. Найбільш простим показником варіації є розмах варіації, який визначається як різниця між максимальним і мінімальним значеннями сукупності:

$$R = x_{\max} - x_{\min},$$

де R — розмах варіації;

$x_{\max}$ — найбільше значення ознаки;

$x_{\min}$ — найменше значення ознаки.

Для нашого прикладу розмах варіації продуктивності праці для першої бригади складе: 17–3=14 шт.; для другої бригади: 14–6=8 шт. Розмах варіації показує, у яких відбувається коливання ознаки, що утворює ряд розподілу, і є мірою його варіації. Але цей показник не дає уявлення про ступінь коливання всередині сукупності, тому що обчислюється на основі тільки двох крайніх значень ознаки сукупності.

Задачі

6.1. Змінний виробіток деталей токарями однієї бригади становив (шт.): 11, 13, 14, 16, 18. *Визначте* варіаційний розмах.

6.2. Маються наступні дані про продуктивність праці робітників:

Таблиця 6.2

Табельний номер робітника	Вироблено продукції за зміну, шт.	
	1 бригада	2 бригада
1	3	8
2	4	9
3	10	10
4	14	11
5	19	12
–	50	50

Визначте розмах варіації за кожною бригадою. *Зробіть* висновки.

6.3. Кваліфікація робітників однієї із бригад механічного цеху промислового підприємства характеризується наступними даними:

Розряд тарифної сітки	1	2	3	4	5	6
Число робітників	3	11	15	27	15	8

Визначте розмах варіації кваліфікації робітників бригади.

6.4. Тривалість обробки шести деталей характеризується наступними даними:

Порядковий номер деталі	1	2	3	4	5	6
Тривалість обробки, хв.	3	11	15	27	15	8

Визначте розмах варіації.

6.5. На одному підприємстві є два цехи.

Таблиця 6.3

Цех 1		Цех 2	
Ставка заробітної плат в грн	Число штатних одиниць	Ставка заробітної плат в грн	Число штатних одиниць
14 500	1	14 830	1
13 800	3	14 570	2
13 650	4	14 200	2
13 200	7	13 800	6
12 850	9	13 200	12
12 720	2	13 040	8
		12 320	6

Визначте розмах варіації заробітної плати робітників кожної бригади. *Зробіть* висновки.

6.6. Маються наступні дані про розмір заробітної плати семи робітників бригади механічного цеху:

Порядковий номер робітника	1	2	3	4	5	6	7
Розмір заробітної плати, грн	12 500	11 700	15 300	27 150	13 600	12 800	14 600

Визначте розмах варіації заробітної плати робітників бригади.

6.7. Маються наступні дані виконання норм виробітку робітників в двох бригадах:

Таблиця 6.4

Табельний номер робітника	Виконання норми виробітку, %	
	1 бригада	2 бригада
1	110	102
2	95	87
3	105	96
4	103	112
5	97	124
6	112	113

Визначте розмах варіації.

6.8. На одному підприємстві є два цехи. Кількість забракованої продукції на протязі п’яти робочих днів характеризується наступними даними (табл. 6.5). *Визначте* розмах варіації.

Таблиця 6.5

Цех 1		Цех 2	
День	Брак, шт.	День	Брак, шт.
1	12	1	10
2	3	2	2
3	14	3	13
4	17	4	16
5	11	5	12

6.2. Визначення середнього лінійного відхилення за індивідуальними даними і в рядах розподілу

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Одним із показників варіації є *середнє лінійне відхилення*. Воно представляє собою середнє значення відхилень варіантів ознаки від їх середньої величини. Оскільки алгебраїчна сума цих відхилень рівна нулю, то для обчислення середнього лінійного відхилення всі відхилення беруться без врахування знаку.

В залежності від відсутності або наявності частот обчислюють середнє лінійне відхилення незважене або зважене за формулою:

$$\overline{d} = \frac{\sum |x - \overline{x}|}{n} \qquad \text{(середнє лінійне відхилення незважене);}$$

$$\overline{d} = \frac{\sum |x - \overline{x}| f}{\sum f}, \qquad \text{(середнє лінійне відхилення зважене);}$$

де $\overline{d}$ — середнє абсолютне відхилення;

$\overline{x}$ — середнє значення ознаки;

x — значення ознаки, що коливається;

f — частота повторень окремих значень (варіантів) ознаки;

n — чисельність одиниць сукупності.

Задача 2. Маються наступні дані про обсяг виробництва продукції в збиральному цеху двома бригадами (табл. 6.6). За наведеними даними *визначте* середнє лінійне відхилення.

Рішення

Порядок розрахунку середнього лінійного відхилення наступний:

1) за індивідуальними значеннями ознаки обчислимо середню арифметичну за формулою $\overline{x} = \frac{\sum x}{n}$;

Таблиця 6.6

Табельний номер робітника	Вироблено продукції за зміну, шт.	
	1 бригада	2 бригада
1	3	6
2	5	8
3	7	9
4	13	11
5	15	12
6	17	14
–	60	60

2) визначимо відхилення кожного значення ознаки *x* від середньої арифметичної $x - \bar{x}$;

3) обчислимо суму абсолютних величин відхилень: $\sum |x - \bar{x}|$;

4) сума абсолютних відхилень ділиться на число значень: $\frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$.

Результати розрахунків занесемо в таблицю.

Таблиця 6.7

Табельний номер робітника	1-а бригада			2-а бригада		
	x_1	$x - \bar{x}$	$\lvert x - \bar{x} \rvert$	x_2	$x - \bar{x}$	$\lvert x - \bar{x} \rvert$
1	3	–7	7	6	–4	4
2	5	–5	5	8	–2	2
3	7	–3	3	9	–1	1
4	13	+3	3	11	+1	1
5	15	+5	5	12	+2	2
6	17	+7	7	14	+4	4
–	60	0	30	60	0	14

Середній виробіток у двох бригад однаковий:

$$\bar{x}_1 = \frac{60}{6} = 10 \text{ шт.}; \quad \bar{x}_2 = \frac{60}{6} = 10 \text{ шт.}$$

Розмах варіації складе:

а) 1-а бригада

$$\bar{d}_1 = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} = \frac{30}{6} = 5{,}0;$$

б) 2-а бригада

$$\bar{d}_2 = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f} = \frac{14}{6} = 2{,}3.$$

Задача 3. Маються наступні дані про розподіл робітників заводу за тарифними розрядами (станом на 1 лютого 2022 р.):

Розряд тарифної сітки	1	2	3	4	5	6	Всього
Число робітників	16	29	35	46	31	13	170

Визначте середнє лінійне відхилення.

Рішення

Середнє лінійне відхилення для дискретного ряду розподілу з частотами обчислюється за формулою:

$$\bar{d} = \frac{\sum \left| x - \bar{x} \right| f}{\sum f},$$

де $\bar{d}$ — середнє абсолютне відхилення;

$\bar{x}$ — середнє значення ознаки;

x — значення ознаки, що коливається;

f — частота повторень окремих значень (варіантів) ознаки.

Як видно, спочатку треба знайти середню величину ($\bar{x}$). Всі обчислення будемо вести в табличній формі, відводячи для кожної обчислювальної операції графу в таблиці, включив в таблицю висхідні дані:

Таблиця 6.8

Тарифний розряд, x	Число робітників, f	xf	$\left\|x - \bar{x}\right\|$	$\left\|x - \bar{x}\right\| f$
1	16	16	2,5	40,0
2	29	58	1,5	43,5
3	35	105	0,5	17,5
4	46	184	0,5	23,0
5	31	155	1,5	46,5
6	13	78	2,5	32,5
Всього	170	596	–	203,0

Середня велична складе:

$$\bar{x} = \frac{596}{170} = 3{,}5.$$

Середнє лінійне відхилення становить:

$$\bar{d} = \frac{203{,}0}{170} = 1{,}19 \text{ розряди}.$$

Задачі

6.9. Маються наступні дані, що характеризують час простою верстатів за цехами заводу:

Таблиця 6.9

Номер цеху	Час простою обладнання за зміну, хв.	Число верстатів
1	64	8
2	43	10
3	28	12
4	25	12
5	72	7
6	36	7
7	51	5

Визначити середнє лінійне відхилення. *Зробіть* висновки.

6.10. В результаті обстеження роботи верстатів з жовтень в механічному цеху заводу були отримані наступні дані:

Таблиця 6.10

Номер цеху	Відпрацьовано верстато-годин	
	токарними	фрезерними
1	2 100	800
2	1 800	500
3	2 300	900
4	2 600	800
5	1 900	900
6	2 000	1 000
7	1 700	700

Визначити середнє лінійне відхилення: 1) токарних верстат; 2) фрезерних верстат.

6.11. Для дослідження продуктивності праці робітників механічного цеху було зроблене вибіркове обстеження. За даними обстеження були встановлені наступні дані про витрати часу на оброблення деталей:

Таблиця 6.11

Групи деталей, на обробку яких витрачено часу, хв.	Кількість деталей
10–12	24
12–14	41
14–16	124
16–18	72
18–20	23
20–22	16
Всього	300

За наведеними даними *визначте* середнє лінійне відхилення.

6.12. Випуск продукції за зміну однією із бригад механічного цеху промислового підприємства характеризується наступними даними:

Табельний номер робітника	1	2	3	4	5	6
Обсяг виробленої продукції, шт.	7	11	16	27	13	18

Визначити середнє лінійне відхилення.

6.13. Маються наступні дані про витрати матеріалів на виробництво шести одиниць однорідної продукції:

Номер продукції	1	2	3	4	5	6
Витрати матеріалу, кг	2,6	2,9	3,5	4,6	3,2	3,7

Визначте середнє лінійне відхилення.

6.14. Розподіл цукрових заводів за потужністю переробки цукрових буряків характеризується наступними даними:

Групи цукрових заводів за обсягом переробки цукрових буряків, тис. т	До 1 000	1 000–1 500	1 500–2 000	2 000–2 500	2 500–3 000	3 000–3 500	3 500 і більше
Число цукрових заводів	6	12	17	25	31	19	8

Визначити середнє лінійне відхилення розміру переробки цукрових буряків.

6.15. Маються наступні дані про розподіл заводів однієї галузі переробної промисловості за вартістю основних виробничих засобів:

Таблиця 6.12

Вартість основних виробничих засобів, млн грн	Число заводів в % до підсумку
До 6	7
6–8	12
8–10	16
10–12	22
12–14	30
14–16	8
16 і більше	5
Всього	100

Обчисліть середнє лінійне відхилення.

6.16. Розподіл магазинів за обсягом товарообігу за II квартал звітного періоду характеризується наступними даними:

Розмір товарообігу на один магазин, тис. грн	До 1000	1000–1500	1500–2000	2000–2500	2500–3000	3000–3500	3500 і більше
Число магазинів	6	12	17	25	31	19	8

Визначити середнє лінійне відхилення розміру товарообігу на один магазин.

6.17. За даними лабораторії хлібозаводу відомі дані щодо аналізів % клейковини в муці:

Таблиця 6.13

Групи проб муки по % клейковини	Число проб
28,0–30,6	14
30,6–33,2	28
33,2–35,8	56
35,8–38,4	74
38,4–41,0	20
41,0–41,6	8
Всього	200

Обчисліть середнє лінійне відхилення.

6.18. Розподіл робітників-відрядників заводу за ступенем виконання норм виробітку характеризується наступними даними:

Таблиця 6.14

Групи робітників за % виконання норм виробітку	I квартал	II квартал
До 100	16	5
100–110	26	22
110–120	33	29
120–130	17	25
130–140	5	14
140 і більше	3	5
Всього	100	100

Визначте середній процент виконання норм виробітку і середнє лінійне відхилення за кожен квартал. *Зробіть* висновки.

6.3. Розрахунок дисперсії і середнього квадратичного відхилення по індивідуальним даним і в рядах розподілу

Методичні вказівки та рішення типової задачі

До основних узагальнюючих показників варіації в статистиці відносять дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Дисперсія — це середня арифметична квадратів відхилень кожного значення ознаки від загальної середньої. Позначається дисперсія σ^2. В залежності від висхідних даних дисперсія може обчислюватися за середньою арифметичною простою чи зваженою:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$ — дисперсія незважена (проста);

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}$$ — дисперсія зважена.

Середнє квадратичне відхилення — один із показників варіації, що представляє собою корінь другого ступеня із середнього квадрату відхилень значень (варіантів) ознаки від їх середньої величини. Виражається воно в тих же самих одиницях вимірювання, що й ознака (тони, кілограми, метри, гектари, проценти і т. п.). Якщо дисперсію обчислюють для всієї сукупності, то її позначають σ і називають загальною дисперсією.

Середнє квадратичне відхилення звичайно розраховується

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x - \bar{x})^2}{n}}$$ — середнє квадратичне відхилення незважене;

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x - \bar{x})^2 f}{\sum f}}$$ — середнє квадратичне відхилення зважене;

або як корінь другого ступеня із дисперсії:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2},$$

де σ — середнє квадратичне відхилення;
x — значення ознаки;
$\bar{x}$ — їх середня величина;
f — вага;
n — число членів ряду (число значень x);
σ^2 — дисперсія.

Таким чином, загальна дисперсія є середня арифметична із квадратів відхилень варіантів від їх середньої арифметичної.

Перш ніж обчислити середнє квадратичне відхилення, розраховують дисперсію. Покажемо розрахунок на прикладах.

Задача 4. Маються дані про продуктивність праці 40 робітників:

Вироблено продукції одним робітником за зміну, шт.	6	7	8	9	10
Число робітників	5	8	13	10	4

Визначити дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Рішення

Обчислимо середню продуктивність праці одного робітника за формулою середньої арифметичної зваженої:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{320}{40} = 8 \text{ шт.}$$

Значення відхилень від середньої та їх квадратів представлені в таблиці:

Таблиця 6.15

Виробництво продукції одним робітником, шт. (x варіанта)	Число робітників f	xf	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 f$
6	5	30	–2	4	20
7	8	56	–1	1	8
8	13	104	0	0	0
9	10	90	+1	1	10
10	4	40	+2	4	16
Всього	40	320			54

Обчислимо дисперсію:

$$\sigma = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} = \frac{54}{40} = 1{,}35.$$

Середнє квадратичне відхилення буде рівним:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1{,}35} = 1{,}26 \text{ шт.}$$

Якщо висхідні дані наведені у вигляді інтервального ряду розподілу, то спочатку необхідно визначити дискретне значення ознаки, а потім застосовувати той же метод, що викладений вище.

Покажемо розрахунок дисперсії та середнього квадратичного відхилення для інтервального ряду.

Задача 5. Маються наступні дані про урожайність та посівні площі соняшнику в господарствах району (табл. 6.16). *Визначити* дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Рішення

Для обчислення середньої необхідно перетворити інтервальні значення в дискретні. За кожною групою середнє значення ознаки умовно дорівнює середині інтервалу. Для інтервалу 22–24 середнє значення

Таблиця 6.16

Урожайність ячменю, ц/га	Посівна площа, га
22–24	200
24–26	600
26–28	800
28–30	400
Всього	2 000

урожайності складе 23 ц/га $\left(\frac{22+24}{2}\right)$, для інтервалу 24–26 — 25 ц/га $\left(\frac{24+26}{2}\right)$, для інтервалу 26–28 — 27 ц/га $\left(\frac{26+28}{2}\right)$, для інтервалу 28–30 — — 29 ц/га.

Для обчислення дисперсії та середнього квадратичного відхилення складемо допоміжну таблицю:

Таблиця 6.17

Урожайність ячменю, ц/га	Посівна площа, га	x	xf	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2 f$
22–24	200	23	4 600	–3,4	11,56	2 312
24–26	600	25	15 000	–1,4	1,96	1 176
26–28	800	27	21 600	+0,6	0,36	288
28–30	400	29	11 600	+2,6	6,76	2 704
Всього	2 000		52 800			6 480

Середня арифметична становить:

$$\bar{x}=\frac{\sum xf}{\sum f}=\frac{52\,800}{2\,000}=26{,}4 \text{ ц/га.}$$

Обчислимо дисперсію:

$$\sigma^2=\frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f}=\frac{6\,480}{2\,000}=3{,}24.$$

Середнє квадратичне відхилення буде рівним:

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{3{,}24}=1{,}8.$$

Розрахунок дисперсії в даному випадку здійснюється наступним чином:

1) визначають середню арифметичну зважену $\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f}$;

2) визначають відхилення від середньої $x - \bar{x}$;

3) обчислюють в квадрат відхилення кожного варіанту від середньої $(x - \bar{x})^2$;

4) множать квадрати відхилень кожного варіанту на ваги (частоти) $(x - \bar{x})^2 f$;

5) сумують отримані добутки $\sum (x - \bar{x})^2 f$;

6) отриману суму ділять на суму ваг (частот): $\frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}$.

Використовуючи частості p', можна розрахувати середнє квадратичне відхилення за такою формулою:

$$\sigma = \sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 p'}.$$

Розглянемо приклад розрахунку середнього квадратичного відхилення

Задача 6. Маються наступні дані, що характеризують розподіл робітників за обсягом виробленої продукції:

Таблиця 6.18

Вироблено продукції одним робітником за зміну, шт. (x)	Частості $\frac{f}{\sum f} = p'$
4	0,14
5	0,20
6	0,30
7	0,24
8	0,12
Всього	1,00

Визначити середнє квадратичне відхилення.

Рішення

Для обчислення середнього квадратичного відхилення складемо допоміжну таблицю (табл. 6.19).

Використовуючи у розрахунках зокрема, наведені у табл. 6.19, визначаємо середнє квадратичне відхилення за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 p'} = \sqrt{1{,}48} = 1{,}22.$$

Таблиця 6.19

Вироблено продукції одним робітником за зміну, шт. (x)	Кількість робітників (f)	Частості $\frac{f}{\sum f} = p'$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 p'$
4	7	0,14	4	0,56
5	10	0,20	1	0,20
6	15	0,30	0	0
7	12	0,24	1	0,24
8	6	0,12	4	0,48
Всього	50	1,00		1,48

Поряд із кількісною варіацією ознаки може мати місце та якісна варіація. Якщо є два варіанти, що взаємно виключають один одного, то варіація ознаки називається альтернативною.

Дисперсію альтернативної ознаки обчислюють за формулою:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} = \frac{(1-p)^2 p + (0-p)^2 q}{p+q} =$$

$$\frac{q^2 p + p^2 q}{p+q} = pq.$$

де p — частка варіантів, що мають дану ознаку;

q — частка варіантів, що не мають дану ознаку.

З дисперсії альтернативної ознаки вилучення кореня знаходиться середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{p \cdot q}.$$

Задача 7. Сукупність складається з 10 000 електричних лампочок, що включають до складу 30 бракованих. Знайти дисперсію ознаки та середнє квадратичне відхилення.

Рішення

Наявність ознаки (брак) позначимо одиницею, а його відсутність — нулем, доля бракованих екземплярів — p, доля доброякісних екземплярів — q.

Находимо долю браку і частку доброякісних лампочок:

$$p = \frac{30}{10\,000} = 0{,}003;$$

$$q = \frac{9\,970}{10\,000} = 0{,}997.$$

Складемо розрахункову таблицю:

Таблиця 6.20

x	w	xw	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2 w$
1 0	p=0,003 q=0,997	0,003 0	+0,997 –0,003	0,994009 0,000009	0,002982027 0,000008973
	$\sum w$=1,0	$\sum xw$=0,003			0,002991

$$\bar{x} = \frac{\sum xw}{\sum w} = \frac{0{,}003}{1{,}000} = 0{,}003;$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2 w}{\sum w} = \frac{0{,}002991}{1{,}00} = 0{,}002991; \quad \sigma = \sqrt{0{,}002991} = 0{,}05469.$$

Легко показати, що $\bar{x} = p$, а $\sigma^2 = pq$.

Отже, можна було б і не робити всіх цих обчислень і простіше отримати величини $\bar{x}, \sigma^2, \sigma$:

за формулою $\sigma = \sqrt{p \cdot q}$ обчислимо дисперсію:

$$\sigma^2 = 0{,}997 \cdot 0{,}003 = 0{,}002991,$$

а потім середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{0{,}002991} = 0{,}05469.$$

Задачі

6.19. За даними опитування робітники механічного цеху машинобудівного заводу розподілилися наступним чином:

Таблиця 6.21

Вік, років	Число робочих
20–25	14
25–30	18
30–35	21
35–40	28
40–45	12
45 і старше	7
Всього	100

За наведеними даними *обчисліть*: 1) дисперсію; 2) середнє квадратичне відхилення.

6.20. За даними про собівартість однорідної продукції по заводам галузі обчисліть дисперсію та середнє квадратичне відхилення:

Номер заводу	1	2	3	4	5	6
Собівартість одиниці продукції, грн	65	57	45	63	54	43

6.21. За даними про випуск продукції по заводам галузі обчисліть дисперсію та середнє квадратичне відхилення:

Номер заводу	1	2	3	4	5	6
Виробництво продукції за рік, тис. шт.	30	26	20	30	25	19

6.22. За даними Державної служби статистики України, населення країни за рівнем середньодушових еквівалентних доходів у 2020 р. розподілилося наступним чином:

Таблиця 6.22

Розподіл населення (%) за рівнем середньодушових еквівалентних загальних доходів у місяць, грн	Чисельність населення в % до підсумку
до 3000	8,3
3000,1–4000,0	17,8
4000,1–5000,0	21,6
5000,1–6000,0	17,6
6000,1–7000,0	11,5
7000,1–8000,0	7,9
8000,1–9000,0	5,1
9000,1–10000,0	2,8
10000,1–11000,0	2,2
11000,1–12000,0	1,8
понад 12000,0	3,4

Визначте: 1) середнє значення варіативної ознаки; 2) показники варіації: дисперсію, середнє квадратичне відхилення; 3) побудуйте графік варіаційного ряду.

6.23. Маються наступні дані про розподіл заводів однієї галузі переробної промисловості за вартістю основних виробничих засобів (табл. 6.23). *Визначте:* 1) середнє значення варіативної ознаки; 2) показники варіації: дисперсію, середнє квадратичне відхилення; 3) побудуйте графік варіаційного ряду. *Зробіть* висновки про стан і напрямок розвитку даного явища.

Таблиця 6.23

Вартість основних виробничих засобів, млн грн	Число заводів в % до підсумку
До 6	7
6–8	12
8–10	16
10–12	22
12–14	30
14–16	8
16 і більше	5
Всього	100

6.24. За наступними даними підрахуйте середній виробіток продукції одного робітника за зміну:

Таблиця 6.24

Виробіток продукції за зміну (шт.)	Число робітників
10	6
11	15
12	27
13	24
14	14
15	9
16	5
Всього	100

Обчисліть середнє квадратичне відхилення.

6.25. Маються результати про розподіл 100 зразків муки за процентом зольності:

Таблиця 6.25

Групи муки за процентом зольності	Число проб (одиниць)
від 1,05 до 1,15	6
1,15 » 1,25	13
1,25 » 1,35	27
1,35 » 1,45	36
1,45 » 1,55	18
Всього	100

Визначте: 1) середній процент зольності в даній партії муки;

2) середнє квадратичне відхилення звичайним способом та умовних моментів. *Зробіть* висновки на основі отриманих характеристик.

6.26. Розподіл 50 токарних верстатів за строком служби характеризується наступними даними:

Групи токарних верстатів за строком служби, років	До 1	1–3	3–5	5 років і більше
Число токарних станків	6	19	17	8

Визначити дисперсію строку служби верстатів.

6.27. За наведеними нижче даними про стаж роботи 30-ти робітників ковбасного цеху м'ясокомбінату побудуйте варіаційний ряд з рівними і закритими інтервалами. *Зобразіть* побудований ряд графічно.

Обчисліть: 1) середній стаж; 2) дисперсію та середнє квадратичне відхилення. За отриманими результатами *зробіть* висновки.

Висхідні дані про стаж роботи (років) 30-ти робітників:

Варіант 1

№ робітника	Стаж	№ робітника	Стаж	№ робітника	Стаж
1	7	11	17	21	5
2	9	12	4	22	7
3	0,5	13	5	23	2
4	1	14	11	24	3
5	4	15	1	25	12
6	6	16	4	26	15
7	8	17	6	27	6
8	7	18	8	28	8
9	9	19	9	29	7
10	14	20	13	30	3

Варіант 2

№ робітника	Стаж	№ робітника	Стаж	№ робітника	Стаж
1	9	11	16	21	5
2	7	12	4	22	6
3	0,5	13	8	23	1
4	2	14	16	24	2
5	5	15	1	25	11
6	7	16	5	26	15
7	12	17	4	27	4
8	6	18	9	28	8
9	8	19	8	29	6
10	13	20	14	30	10

Варіант 3

№ робітника	Стаж	№ робітника	Стаж	№ робітника	Стаж
1	5	11	11	21	4
2	11	12	4	22	6
3	2	13	8	23	2
4	6	14	11	24	8
5	4	15	4	25	13
6	3	16	2	26	15
7	10	17	6	27	7
8	6	18	5	28	9
9	9	19	9	29	5
10	15	20	16	30	3

6.28. За даними вибіркового обстеження сільськогосподарських підприємств були отримані наступні дані про урожайність озимої пшениці сорту Юка:

Таблиця 6.26

Урожайність (ц з га)	Посівна площа (га)
40–42	7
42–44	14
44–46	28
46–48	37
48–50	14
Всього	100

Визначити: 1) середню урожайність; 2) середнє квадратичне відхилення; 3) коефіцієнт варіації.

6.29. За результатами звіту відділу технічного контролю за звітний період отримані дані щодо груп партій за % браку:

Таблиця 6.27

Групи партій продукції за % браку	Кількість партій продукції
0,5–1,0	6
1,0–1,5	13
1,5–2,0	27
2,0–2,5	36
2,5–3,0	12
3,0–3,5	4
3,5–4,0	2
Всього	100

Визначте середній процент браку, середнє квадратичне відхилення і коефіцієнт варіації. *Використайте* при розрахунках спосіб «умовних моментів».

6.30. *Порівняйте* результати роботи двох цехів, обчисліть середній процент браку, середнє квадратичне відхилення і коефіцієнти варіації для кожного цеху, якщо відомо:

Таблиця 6.28

Групи партій продукції за % браку	Кількість партій продукції (в % до підсумку)	
	цех 1	цех 2
0,5–1,0	11	15
1,0–1,5	23	19
1,5–2,0	31	41
2,0–2,5	12	16
2,5–3,0	15	6
3,0–3,5	6	3
3,5–4,0	2	–
Всього	100	100

Дайте оцінку рівню браку продукції, виробленої в двох цехах. *Використайте* при розрахунках спосіб «умовних моментів».

6.31. Маються наступні дані про парк вантажних транспортних засобів підприємства за віковою категорією станом на 1 січня 2022 р.:

Таблиця 6.29

Групи транспортних засобів за віком	Число проб (одиниць)
До 2 років	5
2–5 років	13
5–10 років	17
10–20 років	6
20 років і більше	2
Всього	43

На основі цих даних *обчисліть*: 1) за способом «умовних моментів»: а) середній вік транспортних засобів; б) середнє квадратичне відхилення; 2) коефіцієнт варіації.

6.32. Маються наступні дані про ступінь використання енергетичного обладнання механічного цеху машинобудівного заводу (табл. 6.30). *Визначити* за кожен квартал середній коефіцієнт використання

Таблиця 6.30

I квартал		II квартал	
Коефіцієнт використання обладнання	Число одиниць обладнання	Коефіцієнт використання обладнання	Число одиниць обладнання
До 0,6	12	До 0,6	14
0,6–0,7	8	0,6–0,7	9
0,7–0,8	14	0,7–0,8	12
0,8 і вище	6	0,8 і вище	5
Всього	40	Всього	40

обладнання і середнє квадратичне відхилення. *Порівняйте* варіацію використання обладнання, *зробіть* висновки.

6.33. За даними одноразового вибіркового обстеження були отримані наступні дані щодо розподілу 80-ти робітників машинобудівного заводу за рівнем кваліфікації:

Тарифний розряд робітників	I	II	III	IV	V	VI	Всього
Число робітників	2	13	16	24	18	7	80

Визначте дисперсію тарифного розряду робітників.

6.34. На підприємстві маються дані про розподіл робітників за загальним стажем роботи:

Таблиця 6.31

Групи робітників за стажем роботи (років)	Число робітників			
	цех № 1	цех № 2	цех № 3	Всього
0–5	8	56	170	234
5–10	15	78	180	273
10–15	26	24	60	110
15–20	24	18	40	82
20–25	16	16	20	52
25–30	11	8	30	49
Всього	100	200	500	800

Проаналізуйте особливості варіації ознаки за цехами. З цією метою обчисліть: 1) внутрігрупові дисперсії (для кожного цеху); 2) середню із внутрішньогрупових дисперсій; 3) міжгрупову дисперсію; 4) загальну дисперсію.

6.35. За даними вибіркового обстеження 100 однакових по масі проб пряжі було отримано наступний розподіл нитки за міцністю:

Таблиця 6.32

	Міцність пряжі, г				
	До 190	190–210	210–230	230–250	250–270
Число проб	6	14	41	29	10

Визначити: а) середню міцність нитки; б) дисперсію; в) середньоквадратичне відхилення.

6.36. Розподіл робітників цементного заводу за віком наступний:

Таблиця 6.33

	Групи робітників за віком, років				
	До 20	20–30	30–40	40–50	50 і більше
Число робітників	52	284	430	114	22

Визначити: а) середній вік робітника звичайним способом і способом моментів; б) середньоквадратичне відхилення. Результати розрахунків *проаналізувати*.

6.37. Розподіл робітників трьох заводів за тарифними розрядами характеризується наступними даними:

Таблиця 6.34

Тарифний розряд	Чисельність робітників на заводах		
	№ 1	№ 2	№ 3
1	25	36	15
2	31	49	21
3	49	86	34
4	57	125	41
5	42	118	32
6	38	67	19

Визначити: а) дисперсію по кожному заводу (групові дисперсії); б) середню із групових дисперсій; в) міжгрупову дисперсію; г) загальну дисперсію.

6.38. Сукупність складається з 10 000 електричних лампочок, що включають до складу 20 бракованих. *Знайти* дисперсію ознаки та середнє квадратичне відхилення.

6.39. Нижче наведені дані про розподіл промислових підприємств міста за чисельністю працюючих на 1 січня 2022 р. (табл. 6.35). *Визначити*: а) середню арифметичну; б) дисперсію; г) середнє квадратичне

Таблиця 6.35

	Групи підприємств за числом робітників						
	До 10	10–50	50–100	100–500	500–1000	1000 і більше	Всього
Число підприємств, процент до підсумку	50	25	15	6	3	1	100

відхилення.

6.40. Маються дані про розподіл робітників трьох бригад за кваліфікацією станом на 1 травня 2021 р.:

Таблиця 6.36

Тарифний розряд	Число робітників по бригадам		
	№ 1	№ 2	№ 3
1	1	2	3
2	3	4	3
3	5	3	2
4	2	2	1
5	4	2	3
6	2	3	4

Визначте за цими даними: а) внутрібригадну дисперсію кваліфікації робітників по кожній бригаді; б) середню із внутрібригадних дисперсій; в) міжбригадну дисперсію; г) загальну дисперсію кваліфікації робітників. *Перевірте* правильність проведених розрахунків за допомогою теореми складання дисперсій.

6.41. Робітники механічного цеху розподіляються за рівнем виконання денного виробітку (шт.) наступним чином:

Таблиця 6.37

Групи робітників за розміром виробітку деталей, шт.	Число робітників по бригадам			Всього
	№ 1	№ 2	№ 3	
40–45	3	1	2	6
45–50	4	3	1	8
50–55	2	4	4	10
55–60	1	3	3	7
Всього	10	11	10	31

Визначити за цими даними: а) середню із групових дисперсій; б) між групову дисперсію і в) загальну дисперсію денного виробітку

робітників. *Перевірте* правильність проведених розрахунків за допомогою теореми складання дисперсій.

6.42. Маються наступні дані про розподіл промислових підприємств області за обсягом реалізації інноваційної продукції:

Таблиця 6.38

Групи підприємств за обсягом реалізації інноваційної продукції, тис. грн	Число підприємств за видами економічної діяльності			Всього
	машинобудування	виробництво основних фармацевтичних продуктів	виробництво хімічних речовин та хімічної продукції	
500–1000	25	15	6	46
1000–5000	13	8	4	25
5000–20000	9	3	3	15
20000–50000	1	1	–	2
Всього	48	27	13	88

Визначити за даними задачі: а) середню із внутрігрупових дисперсій; б) між групову дисперсію і в) загальну дисперсію обсягу інноваційної продукції промислових підприємств. *Перевірте* правильність здійснених розрахунків за допомогою теореми складання дисперсій.

6.43. Час простою верстатів за зміну характеризується наступними даними (хв.):

Таблиця 6.39

Номер верстата	Простої	
	через відсутність матеріалів	через відсутність електроенергії
1	30	22
2	26	18
3	22	20
4	20	32
5	50	28
6	28	24
7	22	15

Обчисліть за кожним видом причин простою: 1) дисперсію; 2) середнє квадратичне відхилення.

6.44. Сукупність складається з 50 000 виробів, що включають до складу 120 бракованих. *Обчислити* дисперсію ознаки та середнє квадратичне відхилення.

6.45. Маються наступні дані про урожайність та площу посіву зернових культур в сільськогосподарських підприємствах області:

Урожайність, ц з 1 га	26	28	31	34	38	40	Всього
Площа посіву в процентах до підсумку	9	21	28	27	10	5	100

Використовуючи спосіб моментів, *обчисліть*: 1) середню урожайність; 2) середнє квадратичне відхилення; 3) моду і медіану; 4) коефіцієнт асиметрії.

6.46. В результаті приймального контролю якості із 2000 готових виробів 40 виявилися бракованими. *Визначте* дисперсію долі та середнє квадратичне відхилення.

6.4. Розрахунок дисперсії по формулі $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ за індивідуальними даними і в рядах розподілу

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Дисперсію можна визначити і як різниця між середнім квадратом варіантів ознаки і квадратом їх середньої величини, тобто

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 .$$

Для визначення величини дисперсії за цією формулою необхідно обчислити середній квадрат варіантів ознаки $\overline{x^2}$. Він визначається за формулою:

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x^2 f}{\sum f}.$$

Далі обчислимо квадрат середньої величини. Розрахунок його здійснюється за формулою:

$$\bar{x}^2 = \left(\frac{\sum xf}{\sum f} \right)^2 .$$

Звідси формула розрахунку дисперсії має наступний вид:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \left(\frac{\sum xf}{\sum f} \right)^2 .$$

Обчислимо дисперсію за допомогою визначених вище формул.

Задача 8. Розглянемо розрахунок дисперсії за формулою $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$.

за індивідуальними даними.

Маються наступні дані про продуктивність праці робітників:

	Табельний номер робітника					
	1	2	3	4	5	6
Вироблено продукції, шт.	5	6	6	7	8	10

Визначимо середню та квадрат кожного варіанту. Занесемо дані в таблицю:

Таблиця 6.40

Табельний номер робітника	Вироблено продукції, шт. (варіанта x)	x^2
1	5	25
2	6	36
3	6	36
4	7	49
5	8	64
6	10	100
Всього	42	310

Здійснимо наступні розрахунки:

середня арифметична — $\bar{x} = \frac{42}{6} = 7$ шт.;

дисперсія — $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 =$

$$= \frac{310}{6} - \left(\frac{42}{6}\right)^2 = 51{,}7 - 49 = 2{,}7.$$

Наведемо приклад розрахунку за цим методом в рядах розподілу.

Задача 9. Маються наступні дані щодо продуктивності праці робітників цеху:

Таблиця 6.41

Вироблено продукції, шт. (x)	Число робітників f
6	5
7	8
8	13
9	10
10	4
6	5
Всього	40

Рішення

Для розрахунку дисперсії складемо допоміжну таблицю:

Таблиця 6.42

Виробництво продукції одним робітником, шт. (x варіанта)	Число робітників f	xf	x^2	$x^2 f$
6	5	30	36	180
7	8	56	49	392
8	13	104	64	832
9	10	90	81	810
10	4	40	100	400
Всього	40	320	330	2 614

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \left(\frac{\sum xf}{\sum f}\right)^2;$$

$$\sigma^2 = \frac{2614}{40} - \left(\frac{320}{40}\right)^2 = 65{,}35 - 64 = 1{,}35.$$

Отримали такий же результат, що при рішенні задачі 4. Покажемо тепер приклад розрахунку дисперсії в інтервальному ряду розподілу.

Задача 10. Маються наступні дані про урожайність та посівні площі соняшнику в господарствах району:

Таблиця 6.43

Урожайність ячменю, ц/га	Посівна площа, га
22–24	200
24–26	600
26–28	800
28–30	400
Всього	2 000

Визначити дисперсію урожайності соняшнику, використовуючи формулу $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$.

Рішення

Для обчислення дисперсії складемо допоміжну таблицю (табл. 6.44).

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \left(\frac{\sum xf}{\sum f}\right)^2 =$$

Таблиця 6.44

Урожайність ячменю, ц/га	Посівна площа, га	x	xf	x^2	$x^2 f$
22–24	200	23	4 600	529	105 800
24–26	600	25	15 000	625	375 000
26–28	800	27	21 600	729	583 200
28–30	400	29	11 600	841	336 400
Всього	2 000		52 800	2724	1 400 400

$$= \frac{1\,400\,400}{2\,000} - \left(\frac{52\,800}{2\,000}\right)^2 = 700{,}2 - 696{,}96 = 3{,}24.$$

Отримане значення дисперсії відповідає показнику, обчисленому в задачі 5.

Задачі

6.47. Для 10 токарів затрати робочого часу на виробництво однієї деталі (в хв.) характеризується наступними даними: 12, 13, 15, 17, 12, 16, 18, 11, 15, 18. *Визначте* середній квадрат відхилення (дисперсію) для затрат робочого часу у 10 токарів двома способами: а) звичайним способом; б) за формулою: $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$.

6.48. Маються наступні дані про діяльність підприємств однієї галузі:

Таблиця 6.45

Номер підприємства	Вартість основних виробничих засобів, млн грн	Випуск товарної продукції, млн грн	Номер підприємства	Вартість основних виробничих засобів, млн грн	Випуск товарної продукції, млн грн
1	13,0	6,2	6	9,2	3,6
2	8,1	4,1	7	11,2	4,5
3	10,4	4,6	8	13,1	6,4
4	7,1	2,5	9	10,0	4,3
5	16,4	7,1	10	14,4	7,1

Обчислити дисперсію основних виробничих засобів, використовуючи формулу $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$.

6.49. За даними задачі 6.48 обчислити дисперсію випуску продукції, використовуючи формулу $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$.

6.50. Маються наступні дані про урожайність та посівні площі озимої пшениці у господарствах району:

Таблиця 6.46

Урожайність озимої пшениці, ц/га	Посівна площа, га
26–28	100
28–30	300
30–32	400
32–34	200
Всього	1 000

Обчислити дисперсію урожайності озимої пшениці, використовуючи формулу $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$.

6.51. Затрати праці на 1 ц молока в господарствах області за звітний рік характеризуються наступними даними:

Таблиця 6.47

Групи сільськогосподарських підприємств за затратами праці на 1 ц молока, люд.-год.	Число господарств
36–38	42
38–40	96
40–42	74
42–44	62
44–46	26
Всього	300

Обчислити дисперсію затрат праці за формулою $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$.

6.52. Маються наступні дані:

Таблиця 6.48

Групи робітників за кількістю виготовленої продукції за зміну, шт.	Число робітників
6–8	10
8–10	28
10–12	42
12–14	16
14–16	4
Всього	100

Обчислити дисперсію продуктивності праці робітників за зміну, використовуючи формулою $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$.

6.53. Маються наступні дані про розподіл сімей за розміром:

	Число членів сім'ї					
	1	2	3	4	5	6
Число членів сім'ї	8	14	92	64	12	10

Середній склад сім'ї 3,4. *Визначте* за цими даними дисперсію двома способами: звичайним і за формулою $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$. Який спосіб виявився більш раціональним?

6.54. Розподіл підприємств за обсягом випуску продукції за рік характеризується наступними даними:

Таблиця 6.49

Продукція за рік, млн грн	Число підприємств
До 5	4
5–10	7
10–20	10
20–30	6
30–40	3
Всього	30

Обчислити дисперсію випуску продукції, використовуючи формулу $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$.

6.55. Розподіл підприємств за обсягом випуску продукції за рік характеризується наступними даними:

Таблиця 6.50

Групи робітників за розміром місячної заробітної плати, грн	Число робітників
11 000–12 000	10
12 000–13 000	30
13 000–14 000	50
14 000–15 000	60
15 000–16 000	145
16 000–17 000	110
17 000–18 000	80
18 000–19 000	15
Всього	500

Обчислити дисперсію заробітної плати робітників, використовуючи формулу $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$.

6.56. Розподіл урожаю на сортовипробувальній станції характеризується наступними даними:

Таблиця 6.51

Вага урожаю (в г з $м^2$)	Число ділянок (в $м^2$)
90–100	2
100–110	5
110–120	13
120–130	17
130–140	18
140–150	31
150–160	22
160–170	17
Всього	125

Обчислити дисперсію ваги урожаю на сортовипробувальній станції, використовуючи формулу $\sigma^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$.

6.5. Розрахунок дисперсії за способом моментів

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Розрахувати дисперсію можна і за способом моментів. Для цього визначаються перший (m_1) і другий (m_2) центральні моменти.

Дисперсія, обчислена за способом моментів, дорівнює квадрату величини інтервалу, помноженому на різницю моменту другого порядку та квадрата моменту першого порядку:

$$\sigma^2 = k^2(m_2 - m_1^2).$$

$$m_2 = \frac{\sum\left(\frac{x-A}{k}\right)^2 f}{\sum f}; \quad m_1 = \frac{\sum\left(\frac{x-A}{k}\right) f}{\sum f};$$

де A – довільно постійна величина.

Якщо порівняти формулу m_2 із формулою дисперсії σ^2 за способом відліку від умовного нуля. Перший член правої частини рівняння дисперсії і є другий момент.

Покажемо це на прикладі.

Задача 11. Маються наступні дані про розподіл робітників за

рівнем денної заробітної плати:

Таблиця 6.52

Денна заробітна плата, тис. грн (x)	Число робітників (f)
1,7–2,3	3
2,3–2,9	4
2,9–3,5	6
3,5–4,1	3
4,1–4,7	4
Всього	20

За наведеними даними *визначте* дисперсію способом «умовних моментів».

Рішення

Для визначення дисперсії необхідно обчислити перший (m_1) і другий (m_2) центральні моменти, а потім дисперсію за формулою:

$$\sigma^2 = k^2(m_2 - m_1^2).$$

Розрахунки зведено в розрахункову таблицю (табл. 6.53).

Таблиця 6.53

Обчислення дисперсії (σ^2) способом моментів

x	Число робітників (f)	$\frac{x-3,2}{0,6} = x'$	$x'f$	$x'^2 f$
2,0	3	–2	–6	12
2,6	4	–1	–4	4
3,2	6	0	0	0
3,8	3	+1	+3	3
4,4	4	+2	+8	16
	20		$\left.\begin{matrix}-10\\+11\end{matrix}\right\}1$	35

На основі вихідних даних обчислимо момент першого порядку:

$$m_1 = \frac{\sum x'f}{\sum f} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Для розрахунку σ^2 необхідно розрахувати момент другого порядку (m_2). Для цього потрібно x' звести до квадрату, а потім помножити на частоту (f). Розділивши цю суму на число частот, отримаємо момент

другого порядку:

$$m_2 = \frac{\sum x'^2 f}{\sum f} = \frac{35}{20} = 1{,}75.$$

Дисперсія, обчислена за способом моментів, дорівнює квадрату величини інтервалу, помноженому на різницю моменту другого порядку та квадрата моменту першого порядку:

$$\sigma^2 = k^2 (m_2 - m_1^2).$$

У нашому прикладі квадрат першого моменту дорівнює $m_1^2 = 0{,}05^2 = 0{,}0025$. Отже, $\sigma^2 = 0{,}6^2 (1{,}75 - 0{,}00250) = 0{,}36 \cdot 1{,}7475 = 0{,}6291$.

Задачі

6.57. Маються наступні дані про розмір заробітної плати персоналу підприємства:

Таблиця 6.54

Розмір заробітної плати, грн	Кількість працівників
10 000–11 000	15
11 000–12 000	26
12 000–13 000	74
13 000–14 000	56
15 000–16 000	20
16 000–17 000	9
Всього	200

За наведеними даними *визначте* дисперсію. *Використайте* спосіб «умовних моментів».

6.58. Маються наступні дані вибіркової перевірки 100 штук електричних ламп на тривалість горіння:

Таблиця 6.55

Тривалість горіння, годин	Кількість електроламп
200–400	3
400–600	7
600–800	16
800–1000	28
1 000–12 000	33
12 000–14 000	13
Всього	100

За наведеними даними *визначте* дисперсію, середнє квадратичне відхилення. *Побудуйте* графік варіаційного ряду. *Зробіть* висновки про зміну тривалості горіння електричних ламп. *Використайте* спосіб «умовних моментів».

6.59. За даними обстеження робітниць-відрядниць ткацької фабрики було отримано наступний розподіл за місячним виробітком:

Таблиця 6.56

Виробіток однієї робітниці в місяць, штук	Число робітниць
200–210	13
210–220	23
220–230	52
230–240	30
240–250	40
250–260	24
260–270	18
Всього	100

Визначте: 1) середнє значення варіативної ознаки; 2) показники варіації: дисперсію, середнє квадратичне відхилення; 3) побудуйте графік варіаційного ряду. *Зробіть* висновки про стан і напрямок розвитку даного явища. Використайте спосіб «умовних моментів».

6.60. За даними про розподіл робітників цеху за стажем роботи *обчисліть* дисперсію:

Таблиця 6.57

Стаж роботи робітника в роках	Кількість робітників в % до підсумку
До 3	7
3–6	14
6–9	27
9–12	38
12–15	10
15–18	4
Всього	100

Використайте при розрахунках спосіб «умовних моментів».

6.61. Маються наступні дані про урожайність ячменю в сільськогосподарських підприємствах району (табл. 6.58). За наведеними даними *визначте* дисперсію. *Використайте* спосіб «умовних моментів».

Таблиця 6.58

Урожайність ячменю, ц з 1 га	Площа, га
25–27	150
27–31	270
31–33	1 340
35–37	950
37–39	430
Всього	3 140

6.6. Визначення коефіцієнту варіації

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Враховуючи, що розмах варіації, середнє лінійне відхилення і середнє квадратичне відхилення представляють собою абсолютні величини, які виражені в тих же самих одиницях, що і варіанти, для характеристики коливання ознаки використовують відносний показник – коефіцієнт варіації.

Коефіцієнт варіації представляє собою відносну величину, що характеризує коливання ознаки; обчислюється як відношення варіаційного розмаху (R), середнього лінійного відхилення (d) або середнього квадратичного відхилення (σ) до середньої, вираженої в процентах (або в долях одиниці), тобто

$V_R = \frac{R}{\bar{x}} \cdot 100\ \%$ — коефіцієнт варіації за варіаційним розмахом, іноді його називають коефіцієнтом осциляції;

$V_d = \frac{\bar{d}}{\bar{x}} \cdot 100\ \%$ — коефіцієнт варіації за середнім лінійним відхиленням;

$V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\ \%$ — коефіцієнт варіації за середнім квадратичним відхиленням.

Найбільш часто вживається коефіцієнт варіації по середньому квадратичному відхиленню (V_σ).

Коефіцієнт варіації дає уявлення про ступінь однорідності статистичної сукупності. Чим менший коефіцієнт варіації, тим менші варіанти ознаки відрізняються один від одного за величиною і, отже, тим однорідніша статистична сукупність. Розглянемо приклад обчислення коефіці-

єнту варіації.

Задача 12. Маються наступні дані про вік міграційного населення країни за звітний період:

Таблиця 6.59

Групи міграційного населення за віком (інтервал)	Чисельність населення в процентах (частості)
До 5 років	4,7
Від 5 до 10	2,3
« 10 » 15	2,5
« 15 » 20	17,6
« 20 » 25	24,1
« 25 » 30	19,5
« 30 » 35	8,1
« 35 » 40	5,7
« 40 » 45	4,6
« 45 » 50	3,4
« 50 » 55	2,4
« 55 і старше	5,1
Всього	100

Визначити показники варіації ознаки: коефіцієнти варіації за варіаційним розмахом (осциляції), за середнім лінійним відхиленням і середньому квадратичному відхиленні.

Рішення

Обчислюємо варіаційний розмах (R):

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 60 - 0 = 60.$$

Для обчислення середнього лінійного відхилення та середнього квадратичного відхилення побудуємо табл. 6.60.

Обчислимо середню арифметичну:

$$\bar{x} = \frac{2524}{100} = 25{,}24.$$

Знаходимо:

$$1)\ V_R = \frac{60}{25{,}24} \cdot 100\,\% \approx 237{,}7\,\%;$$

$$2)\ \bar{d} = \frac{\sum \left| x - \bar{x} \right| f}{\sum f} = \frac{1115{,}57}{100} \approx 11{,}156,$$

а потім

Таблиця 6.60

Вік мігрантів (середина інтервалу) x	Чисельність населення в процентах (частості) w	Добуток xw, необхідний для обчислення середньої арифметичної за формулою $\bar{x} = \frac{\sum xw}{\sum w}$	Обчислення коефіцієнта варіації			
			за середнім лінійним відхиленням		за середнім квадратичним відхиленням	
			$\lvert x - \bar{x} \rvert$	$\lvert x - \bar{x} \rvert w$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 w$
2,5	4,7	11,75	22,74	106,88	517,11	2 430,406
7,5	2,3	17,25	17,74	40,80	314,71	723,827
12,5	2,5	31,25	12,74	31,85	162,31	405,769
7,5	17,6	132,00	17,74	312,22	314,71	5 538,854
22,5	24,1	542,25	2,74	66,03	7,51	180,933
27,5	19,5	536,25	2,26	44,07	5,11	99,598
32,5	8,1	263,25	7,26	58,81	52,71	426,932
37,5	5,7	213,75	12,26	69,88	150,31	856,753
42,5	4,6	195,50	17,26	79,40	297,91	1 370,375
47,5	3,4	161,50	22,26	75,68	495,51	1 684,726
52,5	2,4	126,00	27,26	65,42	743,11	1 783,458
57,5	5,1	293,25	32,26	164,53	1 040,71	5 307,609
Всього	100	2 524,00	–	1 115,57	–	20 809,240

$$V_d = \frac{\bar{d}}{\bar{x}} \cdot 100\,\% = \frac{11{,}156}{25{,}24} \cdot 100 = 44{,}2\,\%;$$

$$3)\ \sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 w}{\sum w} = \frac{20809{,}24}{100} = 208{,}09;\ \ \sigma = 14{,}43;$$

а потім

$$V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\,\% = \frac{14{,}43}{25{,}24} \cdot 100 = 57{,}2\,\%.$$

Отриманий коефіцієнт варіації свідчить про великі коливання віку мігрантів, оскільки серед мігрантів є і діти, є і старики.

Задачі

6.62. Для дослідження виробничого стажу робітників машинобудівного заводу було обстежено різні категорії працівників. Результати обстеження наведені в табл. 6.61. *Обчислити* коефіцієнти варіації стажу працівників заводу.

Таблиця 6.61

Групи робітників за стажем роботи, років	Число робітників за виробничим стажем роботи		
	основні робітники	допоміжні робітники	спеціалісти
До 2	6	1	–
2–4	12	10	3
4–6	22	21	20
6–8	31	12	10
8–10	8	4	32
Понад 10	4	8	6
	83	56	71

6.63. Випуск продукції за окремими днями декади двома цехами характеризується наступними даними (шт.):

Таблиця 6.62

Цехи підприємства	Числа декади									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Термічний	11	12	16	17	25	22	20	27	29	33
Ковальсько-пресовий	12	13	14	11	11	14	15	17	16	14

Обчисліть коефіцієнти варіації випуску: 1) по термічному цеху; 2) по ковальсько-пресовому цеху.

6.64. Маються наступні дані про виконання планових норм виробітку робітниками-відрядниками збирального цеху:

Таблиця 6.63

Групи робітників по % виконання норм	Число робітників
70–80	4
80–90	8
90–100	15
100–110	27
110–120	34
120–130	12
Всього	100

За наведеними даними *визначте* коефіцієнт варіації.

6.65. За наведеними нижче даними про виробіток 30-ти робітників механічного цеху заводу *побудуйте* варіаційний ряд з рівними і закри-

тими інтервалами. *Зобразіть* побудований ряд графічно.

Обчисліть: 1) середній виробіток за зміну на одного робітника; 2) коефіцієнт варіації. За отриманими результатами *зробіть* висновки.

Висхідні дані про змінний виробіток (шт.) 30-ти робітників:

Варіант 1

№ робітника	Виробіток за зміну	№ робітника	Виробіток за зміну	№ робітника	Виробіток за зміну
1	115	11	118	21	113
2	126	12	104	22	115
3	105	13	107	23	107
4	114	14	103	24	106
5	108	15	110	25	102
6	106	16	108	26	117
7	124	17	107	27	109
8	114	18	102	28	110
9	116	19	116	29	102
10	107	20	108	30	106

Варіант 2

№ робітника	Виробіток за зміну	№ робітника	Виробіток за зміну	№ робітника	Виробіток за зміну
1	114	11	117	21	116
2	125	12	104	22	115
3	105	13	106	23	103
4	113	14	102	24	105
5	107	15	116	25	102
6	105	16	107	26	114
7	122	17	105	27	108
8	113	18	103	28	110
9	114	19	119	29	103
10	106	20	107	30	101

6.66. Виконання норм виробітку робітниками двох бригад механічного цеху за звітний місяць характеризується наступними даними (%):

1-а бригада	112	126	93	114	102	135	98
2-а бригада	106	103	100	108	116	105	101

Визначить, в якій бригаді більші відмінності між робітниками за ступенем виконання норм виробітку.

6.67. Середня урожайність ярих зернових культур в двох районах за минулий рік характеризується наступними даними

	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.	2021 р.	2022 р.
1-й район	27	32	19	23	19	26
2-й район	30	28	27	31	29	32

Вкажіть, в якому районі урожайність зернових культур є більш стійкою.

6.68. Розподіл швейних фабрик за вартістю основних засобів наступний:

Таблиця 6.64

	Вартість основних засобів, млн грн				
	До 10	10–20	20–30	30–40	40 і більше
Число фабрик	11	51	21	10	7

Обчислити коефіцієнт варіації. *Проаналізувати* результати розрахунків, *сформулювати* висновки.

6.69. Розподіл робітників токарного цеху за рівнем виконання норм виробітку за звітний місяць характеризується наступними даними (%):

Таблиця 6.66

Виконання норм виробітку, %	90–100	100–105	105–110	110–115	115–120	120 і вище
Число робітників	6	41	25	16	8	4

На основі цих даних *визначити* звичайним способом і способом моментів: а) середній процент виконання норми виробітку усіма робітниками; б) середнє квадратичне відхилення; в) коефіцієнт варіації; г) моду і медіану. Результати розрахунків *проаналізувати*.

6.70. За зміну виробіток робітниками однорідної продукції характеризується наступними даними:

Виробіток, шт.	50	52	55	56	59	60
Число робітників з відповідним виробітком	14	25	50	64	51	28

Обчисліть: 1) середній виробіток на одного робітника за зміну; 2) коефіцієнт варіації; 3) коефіцієнт асиметрії.

6.71. Нижче наведені дані про сортам цукрового буряку:

Таблиця 6.67

Сорт	Середня урожайність, ц/га	Середнє квадратичне відхилення урожайності
Константа	400	40
Ромул	440	40

Визначте, який із двох сортів характеризується більш сильною варіацією ваги і чому. Які показники необхідно обчислити для того, щоб відповісти на це питання

6.7. Розрахунок групової, міжгрупової і загальної дисперсії (за правилом складання дисперсії)

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Із узагальнюючих показників варіації особливе значення має дисперсія, яка широко використовується при аналізі статистичних показників. Виділяють дисперсію загальну, між групову і внутрігрупову.

Величина *загальної дисперсії* характеризує варіацію ознаки під впливом всіх умов, які викликали цю варіацію. В залежності від висхідних даних загальна дисперсія може бути обчисленою як проста середня або як зважена відповідно за формулами:

проста

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n};$$

зважена

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f},$$

де x — значення ознаки;

$\bar{x}$ — їх загальна середня;

f — ваги;

n — число членів ряду.

Загальна дисперсія вимірює ступінь коливання залежної ознаки (її називають результативною ознакою), її варіацію, що породжується всією сукупністю факторів, що діють на неї.

Групова дисперсія дорівнює середньому квадрату відхилень окремих значень ознаки всередині групи від середньої арифметичної цієї групи (групової середньої). Вона обчислюється за формулою:

проста

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum (x - \bar{x}_i)^2}{n};$$

зважена

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum (x - \bar{x}_i)^2 f}{\sum f},$$

де x — значення ознаки;

Середня із групових дисперсій – це середня арифметична, зважена із дисперсій групових:

$$\overline{\sigma_i^2} = \frac{\sum \sigma_i f}{\sum f}.$$

Міжгрупова дисперсія дорівнює середньому квадрату відхилень середніх величин ознаки у кожній групі, названих середньою груповою, від середньої загальної для всієї статистичної сукупності:

$$\delta_i^2 = \frac{\sum (\bar{x}_i - \bar{x})^2}{\sum f}.$$

Між вказаними видами дисперсій існує суттєве визначене відношення: загальна дисперсія дорівнює сумі середньої із групових дисперсій і міжгруповій дисперсії:

$$\sigma^2 = \overline{\sigma_i^2} + \delta^2.$$

Це відношення називають правилом складання дисперсій. З його допомогою, знаючи два види дисперсій, можна знайти третій:

$$\delta^2 = \sigma^2 - \overline{\sigma_i^2}; \quad \overline{\sigma_i^2} = \sigma^2 - \delta^2.$$

Задача 13. Маються наступні дані про продуктивність шести токарів за час роботи:

Таблиця 6.68

Табличний номер токаря	Виготовлено деталей за 1 год., шт.	Табличний номер токаря	Виготовлено деталей за 1 год., шт.
1	21	7	27
2	22	8	28
3	23	9	31
4	26	10	29
5	22	11	33
6	24	12	32
	138		180

Обчислити: 1) групові дисперсії; 2) середню із групових дисперсій; 3) міжгрупову дисперсію; 4) загальну дисперсію.

Рішення

1. Для розрахунку групових дисперсій обчислимо середні по кожній групі:

$$x_1 = \frac{138}{6} = 23; \qquad x_2 = \frac{180}{6} = 30.$$

Розрахунок дисперсій за групами представлений в табл. 6.69.

Таблиця 6.69

Табличний номер токаря	Виготовлено деталей за 1 год., шт.	$x - \bar{x}_i$	$(x - \bar{x}_i)^2$	Табличний номер токаря	Виготовлено деталей за 1 год., шт.	$x - \bar{x}_i$	$(x - \bar{x}_i)^2$
1	21	–2	4	7	27	–3	9
2	22	–1	1	8	28	–2	4
3	23	0	0	9	31	+1	1
4	26	+3	9	10	29	–1	1
5	22	–1	1	11	33	+3	9
6	24	+1	1	12	32	+2	4
	138		16		180		28

Підставивши отримані значення в форму, отримаємо:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{16}{6} = 2{,}667 \approx 2{,}67;$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{28}{6} = 4{,}67.$$

2. Розрахуємо середню із групових дисперсій:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum \sigma_i^2 f}{\sum f} = \frac{2{,}67 \cdot 6 + 4{,}67 \cdot 6}{12} = \frac{44{,}04}{12} = 3{,}67.$$

3. Обчислимо міжгрупову дисперсію. Для цього попередньо визначимо загальну дисперсію середню як середню зважену із групових дисперсій:

$$\bar{x} = \frac{23 \cdot 6 + 30 \cdot 6}{12} = \frac{318}{12} = 26{,}5.$$

Потім визначимо міжгрупову дисперсію:

$$\delta^2 = \frac{(x - \bar{x}) f}{\sum f} = \frac{(23 - 26{,}5)^2 \cdot 6 + (30 - 26{,}5)^2 \cdot 6}{12} = \frac{147}{12} = 12{,}25.$$

4. Обчислимо загальну дисперсію за правилом складання дисперсій:

$$\sigma^2 = \overline{\sigma_i^2} + \delta^2 = 3{,}67 + 21{,}25 = 15{,}92.$$

Перевіримо отриманий результат, обчисливши загальну дисперсію звичайним способом:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{\begin{array}{l}(21-26{,}5)^2 + (22-26{,}5)^2 + (26-26{,}5)^2 + (26-26{,}5)^2 + (22-26{,}5)^2 + \\ + (24-26{,}5)^2 + (27-26{,}5)^2 + (28-26{,}5)^2 + (31-26{,}5)^2 + (29-26{,}5)^2 + \\ + (33-26{,}5)^2 + (32-26{,}5)^2\end{array}}{12} =$$

$$= \frac{191{,}0}{12} = 15{,}92.$$

Задачі

6.72. Маються наступні дані про підприємства однієї галузі:

Таблиця 6.70

Номер підприємства	Вартість основних засобів, млн грн	Випуск продукції, млн грн
1	13	6,5
2	9	4,1
3	11	4,5
4	8	2,6
5	9	3,5
6	15	7,1
7	11	4,6
8	14	6,6
9	16	7,1
10	10	4,6

За ознакою розмір основних засобів *виділіть* три групи підприємств і *обчисліть* межгрупову, внутрігрупову і загальну дисперсію.

6.73. Маються наступні дані щодо розміру денної заробітної плати 10 робітників бригади механічного цеху в залежності від стажу роботи

Таблиця 6.71

Стаж роботи, років	Денна заробітна плати, грн	Стаж роботи, років	Денна заробітна плати, грн
2	610	13	950
4	680	15	1 010
7	880	17	930
10	840	22	1 030
11	820	28	1 060

Усі робітники бригади поділені на дві групи: які пройшли і які не пройшли технічне навчання. Робітники, які пройшли технічне навчання серед 10 робітників виявилося 5 робітників із денною заробітною платою (в грн) 840, 930, 950, 1010, 1030, які не пройшли навчання — 5 робітників із денною заробітною платою 610, 680, 820, 880 і 1060 грн. *Обчисліть* для цих сукупностей загальну і групову дисперсії. *Перевірте* правильність розрахунків шляхом складання дисперсій.

6.74. Припустимо, що 125 дослідних ділянок сортодільниці знаходилися на двох різних масивах: на неудобреному масиві (55 ділянок) і на удобреному масиві (70 ділянок). Дані про урожайність на різних ділянках характеризується даними табл. 6.72.

Таблиця 6.72

Середня урожайність (в $г$ з 1 $м^2$)	Загальне число ділянок	В тому числі	
		на першому масиві (f_1)	на другому масиві (f_2)
95	2	2	–
105	5	5	–
115	13	12	1
125	17	15	2
135	18	10	8
145	31	7	24
155	22	3	19
165	12	1	11
175	5	–	5
	125	55	70

Обчислити: 1) між групові дисперсії; 2) середню із групових дисперсій; 3) між групову дисперсію; 4) загальну дисперсію.

6.75. Розподіл посівної площі озимої пшениці за урожайністю характеризується наступними даними

Таблиця 6.73

Номер ділянки поля	Урожайність, ц/га x	Посівна площа, га n
1	20	100
2	23	45
3	25	55
4	30	100
5	35	150
6	40	50
Всього		500

Площа ділянок розбита на дві групи: I група — посівні площі, на яких не здійснювався полив, II — площі, які піддавалися поливу. До I групи відносяться ділянки 1–3, до II — 4–6. За даними цих груп обчисліть: 1) групові дисперсії; 2) середню із групових дисперсій; 3) міжгрупову дисперсію; 4) загальну дисперсії (за правилом складання дисперсій та звичайним способом).

6.76. Маються наступні дані про продуктивність робітників механічного цеху заводу:

Таблиця 6.74

Табельний номер робітника	Вироблено продукції, шт.	
	в денну зміну	в нічну зміну
1	6	6
2	8	5
3	7	6
4	9	4
5	7	5
6	8	5
7	8	6
8	6	4
9	9	8

Обчисліть: 1) групові дисперсії; 2) середню із групових дисперсій; 3) міжгрупову дисперсію; 4) загальну дисперсії (за правилом складання дисперсій та звичайним способом).

6.8. Розрахунок емпіричного кореляційного відношення

Методичні вказівки та рішення типової задачі

В статистиці правило складання дисперсій використовується для вимірювання тісноти зв'язку між досліджуваними ознаками. За допомогою методу аналітичних групувань шляхом обчислення та співставлення групових середніх встановлюється зв'язок між факторною та результативною ознакою. Проте ступінь коливання результативної ознаки, її варіації, породжується всією сукупністю діючих на нього факторів. Тому наряду з виявленням взаємозв'язку між досліджуваними ознаками важливою задачею є кількісне визначення тісноти зв'язку між ними.

Тісноту зв'язку між групувальною та результативною ознакою характеризує кореляційне відношення. Відношення це позначається

грецькою буквою «*R*».

Спочатку обчислимо коефіцієнт детермінації:

$$D = \frac{\delta^2}{\sigma^2}.$$

Він представляє собою співвідношення дисперсії групових середніх до загальної дисперсії і показує, яка частина (питома вага) в загальній варіації *y* пояснюється варіацією ознаки *x*.

Кореляційне відношення як показник тісноти зв'язку є квадратним коренем із відношення дисперсії групових середніх до загальної дисперсії. Формула його розрахунку записується так:

$$R = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}},$$

де δ^2 — міжгрупова дисперсія;

σ^2 — загальна дисперсія.

Необхідно звернути увагу, що кореляційне відношення може приймати два знаки: ±. Для того, щоб вирішити питання, з яким знаком необхідно брати кореляційне відношення, необхідно мати на увазі наступне. Якщо варіація факторної і результативної ознак змінюється в одному й тому ж напрямку, тобто при збільшенні або зменшенні факторної ознаки результативна ознака відповідно збільшується або зменшується, то кореляційне відношення необхідно брати із знаком плюс. Якщо зміни факторної ознаки і результативної ознаки здійснюються у протилежних напрямках, то береться знак мінус. Розглянемо приклад розрахунку кореляційного відношення.

Задача 14. Маються наступні дані: міжгрупова дисперсія δ^2=25,4; загальна дисперсія σ^2=48,3. *Обчислити* кореляційне відношення.

Рішення

Обчислимо кореляційне відношення для нашого прикладу:

$$R = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{25,4}{48,3}} \approx 0,73.$$

Це свідчить про те, що даний фактор здійснює значний вплив на результативну ознаку.

Задача 15. Покажемо розрахунок емпіричного кореляційного відношення за даними аналітичного групування і визначимо ступінь зв'язку між розміром основних засобів і випуском продукції на один завод, використовуючи значення, наведені в таблиці.

Таблиця 6.75

Групи заводів за величиною основних засобів, млн грн	Число заводів f	Товарна продукції на один завод, млн грн $\bar{y}_i$	$\bar{y}_i - \bar{y} = \bar{y}_i - 54{,}55$	$(\bar{y}_i - \bar{y})^2 = (\bar{y}_i - 54{,}55)^2$	$(\bar{y}_i - \bar{y})^2 f = (\bar{y}_i - 54{,}55)^2 f$
11,4—25,1	3	19,00	–35,6	1 263,803	3 791,408
25,1—38,8	9	34,69	–19,9	394,420	3 549,776
38,8—52,5	5	44,18	–10,4	107,537	557,685
52,5—66,2	3	57,77	+3,2	10,368	31,105
66,2—79,9	5	75,26	+20,7	428,904	2 144,521
Всього	25	45,59	–	–	10 054,494

Спочатку обчислимо середній випуск на один завод по усім обстеженим заводам. Середній розмір товарної продукції становитиме:

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{1\,363{,}8}{25} = 54{,}55 \text{ млн грн.}$$

Визначимо дисперсію, яка характеризує варіацію випуску продукції за рахунок зміни вартості основних засобів, тобто між групову дисперсію. Міжгрупова дисперсія становитиме:

$$\delta^2 = \frac{(\bar{y}_i - \bar{y})^2 f}{\sum f} = \frac{10\,054{,}494}{25} = 402{,}18.$$

Обчислимо загальну дисперсію за індивідуальними даними табл. 6.76, використовуючи формулу:

$$\sigma^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = \frac{\sum y^2}{n} - \left(\frac{\sum y}{n}\right)^2.$$

Таблиця 6.76

Номер заводу	y	y^2	Номер заводу	y	y^2	Номер заводу	y	y^2
1	36,2	1 310,44	10	39,6	1 568,16	19	28,3	800,89
2	108,6	11 793,96	11	26,0	676,00	20	89,3	7 974,49
3	31,6	998,56	12	19,5	380,25	21	18,1	327,61
4	47,5	2 256,25	13	15,8	249,64	22	152,6	2 3286,8
5	72,3	5 227,29	14	33,9	1 149,21	23	63,4	4 019,56
6	17,1	292,41	15	28,3	800,89	24	51,6	2 662,56
7	106,2	11 278,44	16	31,6	998,56	25	52,3	2 735,29
8	134,5	18 090,25	17	40,7	1 656,49			
9	28,3	800,89	18	90,5	8 190,25			
							1 363,8	109525,10

Загальна дисперсія дорівнює:

$$\sigma^2 = \frac{109\,525{,}10}{25} - \left(\frac{1\,363{,}8}{25}\right)^2 = 4\,381{,}00 - 2\,975{,}92 = 1\,405{,}08.$$

Коефіцієнт детермінації складе:

$$D = \frac{\delta^2}{\sigma^2} = \frac{402{,}18}{1\,405{,}08} = 0{,}286.$$

Кореляційне відношення дорівнює:

$$R = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{402{,}18}{1\,405{,}08}} = \sqrt{0{,}286} = 0{,}535.$$

Отже, між основними засобами та випуском продукції існує значний зв'язок. Варіація виробництва товарної продукції на 28,6 % пояснюється варіацією основних засобів.

Задачі

6.77. Сто магазинів з річним товарооборотом до 50 млн грн розподілені на 2 групи: I група — з товарооборотом до 25 млн грн і II група — від 25 до 50 млн грн, з різним в межах кожної групи товарооборотом.

Нижче приводяться результати групування:

Таблиця 6.77

I група				II група			
Групи магазинів за величиною товарообігу, млн грн	Число магазинів	Середнє число робітників на 1 магазин	Товарооборот у розрахунку на 1 робітника, тис. грн	Групи магазинів за величиною товарообігу, млн грн	Число магазинів	Середнє число робітників на 1 магазин	Товарооборот у розрахунку на 1 робітника, тис. грн
До 5	4	2	1 500	25–30	12	8	3 500
5–10	6	3	2 200	30–35	10	8	3 900
10–15	5	4	2 800	35–40	15	9	4 200
15–20	7	5	3 300	40–45	15	10	4 200
20–25	8	6	3 700	45–50	18	11	4 500

Визначте кореляційне відношення по товарообороту у розрахунку на одного робітника.

6.78. Маються наступні дані: міжгрупова дисперсія δ^2=15,2; загальна дисперсія σ^2=46,5. *Обчислити* кореляційне відношення.

6.79. Нижче приводяться дані групування робітників-відрядників підприємства за виробничим стажем (факторна ознака) і за процентом виконання норм виробітку (результативна ознака):

Таблиця 6.78

Процент виконання норм виробітку	Число робітників зі стажем, років		
	до 5 років	5 – 10 років	10 років і більше
До 70	4	–	–
70–80	6	4	–
80–90	20	10	–
90–100	40	26	20
100–110	1 600	200	300
110–120	20	100	200
120–130	5	20	40
130–140	–	10	40
140 і більше	–	10	20

Оцініть кількісно (за допомогою кореляційного відношення) вплив виробничого стажу на ступінь виконання норм виробітку.

6.9. Розрахунок коефіцієнту асиметрії

Методичні вказівки та рішення типової задачі

У економічному аналізі статистичного матеріалу дуже важливою є визначення симетричності варіаційних рядів. Під час вивчення однорідних сукупностей маємо справу, зазвичай, з одновершинними розподілами. Багатовершинність свідчить про неоднорідність досліджуваної сукупності, що часто потребує перегрупування даних з метою виявлення однорідних груп. З'ясування загального характеру розподілу передбачає оцінку ступеня його однорідності, а також обчислення показників асиметрії та ексцесу.

Варіаційні ряди, у яких частоти варіантів, рівновіддалених від середньої, рівні між собою, називається *симетричними*. Для симетричних розподілів середня арифметична, мода та медіана рівні між собою. Якщо розташування варіантів навколо середньої неоднаково, т. е. частоти з обох боків від середньої мають неоднаковий характер зміни, то варіаційний ряд називають *асиметричним* чи *скошеним*.

В якості показнику відхилення варіаційного ряду від симетрії застосовується простий емпіричний коефіцієнт асиметрії (K_A), що є відношенням різниці між середньою арифметичною і модою до серед-

нього квадратичного відхилення:

$$K_A = \frac{\bar{x} - \text{Mo}}{\sigma}.$$

Коефіцієнт асиметрії характеризує ступінь відхилення варіаційного ряду від симетрії. Цей показник коливається у межах від –3 до +3.

Якщо >0, то скошеність правостороння (позитивна);

якщо <0, то скошеність лівостороння (негативна);

якщо =0, то варіаційний ряд симетричний.

Розглянемо порядок обчислення коефіцієнту асиметрії.

Задача 16. За наведеними нижче даними обчислити коефіцієнт асиметрії.

Маємо:

$$\bar{x}=28{,}0;\ \text{Mo}=23{,}8;\quad \sigma=12{,}77.$$

Звідси:

$$K_A = \frac{28{,}0 - 23{,}8}{12{,}77} \approx +0{,}3.$$

У разі спостерігається досить невелика правостороння скошеність.

Задачі

6.80. Розподіл міграційного населення за віком характеризується наступними даними:

Таблиця 6.79

Групи міграційного населення за віком (інтервал)	Чисельність населення (частоти)
До 5 років	4,6
5–10	2,4
10–15	2,5
15–20	17,7
20–25	24,0
25–30	19,5
30–35	8,1
35–40	5,7
40–45	4,6
45–50	3,4
50–55	2,3
55 і більше	5,2
Всього	100

Визначити коефіцієнт асиметрії.

6.81. Розподіл ділянок сортонасінневої станції за урожайністю озимої пшениці характеризується наступними даними:

Таблиця 6.80

Середня вага урожаю (в г з 1 $м^2$)	Число ділянок (частоти) (f)
105	2
115	4
125	10
135	13
145	15
155	29
165	16
175	11
Всього	100

За даними таблиці *визначити* коефіцієнт асиметрії.

6.82. На машинобудівному заводі розподіл робітників по розміру місячної заробітної плати характеризується наступними даними:

Таблиця 6.81

№ п/п	Групи робітників за розміром місячної заробітної плати (грн)	Число робітників
1	8 000–9 000	12
2	9 000–10 000	19
3	10 000–11 000	26
4	11 000–12 000	18
5	12 000–13 000	16

Визначити коефіцієнт асиметрії.

6.83. Показники варіації розподілу населення характеризується наступними даними: $\bar{x}$=22,5; Мо=18,7; σ=11,4. *Визначити* коефіцієнт асиметрії.

6.10. Тести

1. Варіація представляє собою:

а) розподіл, у якому частоти будь-яких двох варіантів, рівновіддалених в обидві сторони від центру розподілу, рівні між собою;

б) відмінності індивідуальних значень будь-якої ознаки всередині

сукупності;

в) розподіл, в якому середня арифметична, мода і медіана рівні між собою.

г) наявність декількох значень у однієї одиниці сукупності.

2. Для порівняння варіації двох ознак необхідно використати:

а) розмах варіації;

б) коефіцієнт варіації.

в) середнє лінійне відхилення;

г) середнє квадратичне відхилення;

3. Різниця між окремими значеннями ознаки в сукупності та їх середньою величиною — це:

а) відхилення від абсолютної величини;

б) відхилення від середньої;

в) середня величина ознаки;

г) відхилення від варіації.

4. Оскільки алгебраїчна сума цих відхилень дорівнює нулю, то для обчислення середнього лінійного відхилення:

а) всі відхилення перемножуються;

б) береться різниця між максимальним та мінімальним значенням ознаки;

в) береться квадратний корінь із дисперсії;

г) всі відхилення беруться не враховуючи знака.

5. Зміна значень ознаки у статистичній сукупності, тобто набуття сукупністю або групами одиниць різних значень ознаки — це:

а) розмах варіації

б) коефіцієнт варіації

в) варіація;

г) ознака варіації.

6. Абсолютний показник, характеристика варіації ознаки. Визначається за формулою:

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \overline{x} \right|}{n} = \frac{\sum \left| x_i - \overline{x} \right| \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i},$$

а) відхилення середнє лінійне;

б) коефіцієнт кореляції;

в) коефіцієнт асоціації;

г) коефіцієнт детермінації.

7. Це один з показників варіації. Є відносною мірою випадкових коливань, що обчислюється як відношення середньоквадратичного відхи-

лення до середньої величини варійованої ознаки $v = \frac{\sigma}{\bar{x}}$:

а) коефіцієнт варіації;
б) коефіцієнт асоціації;
в) коефіцієнт асиметрії;
г) коефіцієнт ексцесу.

8. Середнє квадратичне відхилення широко використовується в статистиці які міра варіації, на його основі обчислюється:

а) середнє значення ознаки статистичної сукупності;
б) розмах варіації;
в) коефіцієнт варіації;
г) дисперсія.

9. Цей показник є одним із мір щільності кореляційного зв'язку. Обчислюється як відношення факторної дисперсії до загальної:

а) коефіцієнт варіації;
б) коефіцієнт детермінації;
в) коефіцієнт асиметрії;
г) коефіцієнт ексцесу.

10. Це один із показників варіації: корінь квадратний із середнього квадрата відхилень значень (варіантів) ознаки від їхньої середньої величини. Розраховують за формулою $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 f}{\sum_{i=1}^{n} f}}$ (за формулою зваженої) або $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$ (незваженої):

а) розмах варіації;
б) відхилення вибіркове (стандартна похибка) середнє квадратичне;
в) лінійне відхилення;
г) відхилення середнє квадратичне.

11. Цей показник обчислюється як корінь із дисперсії $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$:

а) розмах варіації;
б) відхилення вибіркове (стандартна похибка) середнє квадратичне;
в) лінійне відхилення;
г) відхилення середнє квадратичне.

12. Ця дисперсія вимірює коливання залежної ознаки (її називають результативною ознакою), викликану дією на неї всіх без винятку факторів:

а) загальна дисперсія;

б) міжгрупова дисперсія;
в) внутрігрупова дисперсія;
г) середня із внутрігрупових дисперсій.

13. При порівнянні ознак, які різняться за своїм характером і розміром, необхідно міру варіації виражати:
а) в абсолютних величинах (середньому лінійному відхиленні, середньому квадратичному відхиленні);
б) в абсолютних величинах (середньому квадратичному відхиленні та дисперсії);
в) в абсолютних та відносних величинах;
г) у відносних величинах.

14. Мірою коливання групових середніх навколо загальної середньої є:
а) загальна дисперсія;
б) внутрігрупова дисперсія;
в) між групова дисперсія;
г) середня із внутрігрупових дисперсій.

15. Між загальною дисперсією, середньої із внутрігрупових дисперсій існує такий зв'язок:
а) загальна дисперсія ознаки завжди дорівнює різниці середньої внутрішньогрупових дисперсій та дисперсії групових середніх:
б) загальна дисперсія ознаки завжди дорівнює сумі середньої внутрішньогрупових дисперсій та дисперсії групових середніх;
в) загальна дисперсія ознаки дорівнює кореню квадратному із суми середньої внутрішньогрупових дисперсій та дисперсії групових середніх:
г) загальна дисперсія ознаки завжди дорівнює добутку середньої внутрішньогрупових дисперсій та дисперсії групових середніх.

16. Частіше всього в якості показника тісноти зв’язку між факторною і результативною ознаками використовують корінь другого ступеня із коефіцієнту детермінації. Формула його записується так: $\eta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}}$. Цей показник називають:
а) коефіцієнт кореляції;
б) міжгрупова дисперсія;
в) кореляційне відношення;
г) коефіцієнт асиметрії.

17. Ця дисперсія характеризує варіацію ознаки в межах групи за рахунок усіх інших факторів, крім фактору, який покладено в основу групування:
а) загальна дисперсія;

б) міжгрупова дисперсія;
в) групова дисперсія;
г) дисперсія альтернативної ознаки.

18. Якщо обчислюється середня величина із відхилень варіантів ознаки від середньої в першої ступені, то його називають:
а) середнім лінійним відхиленням;
б) дисперсією;
в) середнім квадратичним відхиленням;
г) коефіцієнтом кореляції.

19. Дисперсія альтернативної ознаки дорівнює:
а) сумі долі на доповнення її до долі;
б) добутку долі на доповнення її до долі;
в) співвідношенню долі на доповнення її до долі;
г) квадратному кореня із добутку долі на її доповнення до долі.

6.11. Питання для обговорення

1. *Охарактеризуйте* поняття варіації ознак.
2. В чому полягає особливість визначення показників варіації альтернативної ознаки?
3. Чим відрізняються дискреційні варіаційні ряди від інтервальних?
4. В чому полягає значення варіаційних рядів, як і рядів розподілу в цілому?
5. *Охарактеризуйте* розмах варіації як важливого показника варіації. Про що дає уяву розмах варіації? Чому узагальнююча характеристика, що надається розмахом варіації, досить недосконала?
6. В чому полягає відмінність лінійного відхилення від розмаху варіації?
7. Як визначається коефіцієнт варіації? В яких одиницях він обчислюється?
8. В чому полягає перевага середнього квадратичного відхилення від середнього лінійного відхилення?
9. Як обчислюється кореляційне відношення? Чи може воно мати від'ємний знак?
10. В чому полягає правило складання дисперсій? Яке воно має теоретичне та практичне значення?
11. Що таке асиметрія? Про що свідчить багатовершинність в рядах розподілу?
12. Яке відношення між середньою арифметичною, модою та меді-

аною існую при правосторонній асиметрії?

ЛІТЕРАТУРА

1. *Горкавий В. К.* Статистика: Підручник. Третє вид., переробл. і доповн. Київ: Алерта, 2019. С. 113–139.
2. Статистика: підручник / *С. І. Пирожков*, *В. В. Рязанцева*, *Р. М. Моторин* та ін. Київ: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2020. С. 130–152.
3. Статистика: Підручник / *С. С. Герасименко*, *А. В. Головач*, *А.М. Єріна* та ін.; За наук. ред. д-ра екон. наук С. С. Герасименка. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: КНЕУ, 2000. С. 60–80.
4. *Ткач Є. І.*, *Сторожук В. П.* Загальна теорія статистики: підручник. 3-тє вид. Київ: Центр учбової літератури, 2009. С. 156–170.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

Навчальні посібники, словники

5. *Козирєва О. В.*, *Федорова В. О.* Статистика: навчальний посібник. Харків: Видавництво Іванченка І.С., 2021. С. 70–79.
7. *Мармоза А. Т.* Теорія статистики: підручник. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: «Центр учбової літератури», 2013. С. 177–203.
8. *Педченко Г. П.* Статистика: Навчальний посібник. Мелітополь: Колор Принт, 2018. С. 119–133.
9. Статистичний словник / [*О. Г. Осауленко*, *О. О. Васєчко*, *М. В. Пугачова* та ін.]; за ред. д-ра держ. упр., проф., член-кор. НАН України О. Г. Осауленка; НТК статистичних досліджень. Київ: ДП «Інформ.-аналіт. агентство», 2012. 498 с.
10. *Шапочка М. К.*, *Маценко О. М.* Теорія статистики: навч. посібник. Суми: Університетська книга, 2014. С. 155–170.

Глава 7. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ЯВИЩАМИ

7.1. Розрахунок параметрів рівняння прямої за індивідуальними даними

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Дослідження взаємозв'язків — одна із важливих задач курсу загальної теорії статистики. Вирішення цієї задачі статистика здійснює за допомогою особливих методів, що змінюються в залежності від характеру вихідного матеріалу та цілей дослідження.

Загальний та всебічний зв'язок між явищами здійснюється шляхом встановлення причинно-наслідкових зв'язків. Але для встановлення причинно-наслідкових зв'язків необхідно кількісно оцінити найважливіші, основні ознаки, надають вирішальний вплив зміну суспільних явищ. У цьому має надати допомогу та статистика.

Перш ніж приступати до вивчення зв'язку між явищами, необхідно встановити характер цих зв'язків. Зв'язки між явищами та ознаками через велику їхню різноманітність класифікують у статистиці за низкою підстав.

При *функціональному зв'язку* певного значення факторного ознаки (ознак) відповідає строго певне значення результативної ознаки. Функціональні зв'язки дозволяють точно та повно описати взаємозв'язок між результативною ознакою та факторними ознаками. Таким чином, при функціональних зв'язках величина результативної ознаки повністю визначається факторними ознаками (одним чи декількома). При цьому важливо відзначити, що функціональна залежність з однаковою силою проявляється у всіх одиниць сукупності незалежно від зміни інших ознак даного явища. При *кореляційному* зв'язку одному й тому самому значенню ознаки-фактора можуть відповідати різні значення результативної ознаки (при тому самому рівні кваліфікації робочих продуктивність їх праці може мати різні значення).

При *прямому зв'язку* напрям зміни результативної ознаки збігається з напрямом зміни ознаки-фактора, тобто в міру збільшення або зменшення значення факторної ознаки значення результативної ознаки збільшуються або зменшуються. У разі *оберненого зв'язку* значення результативного ознаки змінюються під впливом факторного, але у протилежному напрямку порівняно зі зміною факторного ознаки.

Якщо статистичний зв’язок явищ може бути приблизно виражений математичним рівнянням прямої лінії, то його називають *лінійним зв’язком*, якщо ж він може бути виражений рівнянням будь-якої кривої лінії (параболи, гіперболи тощо), то *криволінійним*. Рівняння лінійної регресії знаходять широке застосування через те, що його параметри легше визначити та тлумачити. Проте в дійсності лінійний зв’язок існує відносно рідко.

Для виявлення зв’язку, його характеру, напрямку в статистиці використовуються методи приведення паралельних рядів, балансовий, аналітичних групувань, графічний.

В практиці соціально-економічних досліджень найбільш поширеним є прямолінійний зв'язок ознаками. При прямолінійному зв’язку результативна ознака (y) змінюється під впливом факторного (x) рівномірно. В цьому випадку залежність y від x може бути виражено рівнянням прямої у вигляді

$$y = a_0 + a_1 x,$$

де y — рівень результативної ознаки, знайдений за рівнянням;

a_0 і a_1 — параметри рівняння прямої (рівняння регресії);

x — індивідуальні значення факторної ознаки.

Параметри рівняння прямої a_0 і a_1 визначаються шляхом розв’язання системи нормальних рівнянь, отриманих методом найменших квадратів:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x = \sum y; \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 = \sum xy, \end{cases}$$

де n — число членів ряду.

Параметри рівняння можна визначити також за такими формулами:

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}; \qquad a_0 = \overline{y} - a_1 \overline{x}.$$

У цій системі відомо кількість спостережень, сума x і y легко обчислюються за готовими зібраними даними. Невідомо лише два параметри a_0 і a_1.

В якості прикладу вирішимо наступну задачу.

Задача 1. Маються дані, які характеризують енергоозброєність та випуск готової продукції за 10 однорідними підприємствами. *Визначити* рівняння регресії між вартістю основних виробничих засобів та товарною продукцією. Розрахувати теоретичну лінію регресії.

Номер підприємства	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Електроозброєність праці на 1 працюючого, кВт·год	5	4	6	7	3	4	6	7	5	3
Випуск готової продукції на 1 робітника за зміну, тис. грн	6,3	6,0	7,5	8,5	3,5	6,2	7,5	8,7	6,0	3,7

Рішення

Залежність між вартістю основних виробничих засобів та товарною продукцією є лінійною та виражається рівнянням прямої

$$y = a_0 + a_1 x,$$

де y_x — вартість товарної продукції;

a_0 і a_1 — параметри рівняння регресії;

x — вартість основних виробничо-промислових засобів.

Для визначення параметрів рівняння регресії будуємо розрахункову таблицю:

Таблиця 7.1

Номер заводу	Електроозброєність праці на 1 працюючого, кВт·год., x	Випуск готової продукції на 1 робітника за зміну, тис. грн y	xy	x^2	y_x
1	5	6,3	31,5	25	6,39
2	4	6,0	24,0	16	5,25
3	6	7,5	45,0	36	7,53
4	7	8,5	59,5	49	8,67
5	3	3,5	10,5	9	4,11
6	4	6,2	24,8	16	5,25
7	6	7,5	45,0	36	7,53
8	7	8,7	60,9	49	8,67
9	5	6,0	30,0	25	6,39
10	3	3,7	11,1	9	4,11
Всього	50	63,9	342,3	270	63,9
В середньому	5,0	6,39	34,23	27,0	

Підставимо в систему нормальних рівнянь фактичні дані із таблиці і отримаємо:

$$\begin{cases} 10a_0 + 50a_1 = 63{,}9; \\ 50a_0 + 270a_1 = 342{,}3. \end{cases}$$

Вирішуємо систему нормальних рівнянь у наступній послідовності:

помноживши всі члени першого рівняння на 5 (50:10), отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 50a_0 + 250a_1 = 319{,}5; \\ 50a_0 + 270a_1 = 342{,}3. \end{cases}$$

Віднімемо з другого рівняння перше і отримаємо

$$20\,a_1 = 22{,}8,$$

звідки

$$a_1 = 22{,}8:20 = 1{,}14.$$

Підставимо значення a_1 у перше рівняння та отримаємо:

$$10a_0 + 50 \cdot 1{,}14 = 63{,}9,$$

звідки

$$a_0 = \frac{63{,}9 - 50 \cdot 1{,}14}{10} = 0{,}69.$$

Таким чином, $a_0 = 0{,}69$; $a_1 = 0{,}114$. Рівняння кореляційного зв'язку приймає наступний вид:

$$y_x = 0{,}69 + 1{,}14x.$$

Параметри рівняння регресії можна визначати і за формулами:

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} = \frac{34{,}23 - 5 \cdot 6{,}39}{27 - 5 \cdot 5} = 1{,}14;$$

$$a_0 = \overline{y} - a_1\overline{x} = 6{,}39 - 1{,}14 \cdot 5 = 0{,}69.$$

Після визначення параметрів рівняння регресії розраховуємо теоретичну лінію регресії шляхом підстановки значень рівняння кореляційного зв'язку:

$$y_1 = 0{,}69 + 1{,}14 \cdot 5 = 6{,}39;$$

$$y_2 = 0{,}69 + 1{,}14 \cdot 4 = 5{,}25 \text{ і т. д.}$$

Якщо параметри рівняння зв'язку визначені правильно, то $\sum y = \sum y_x$.

Використовуючи рівняння кореляційного зв'язку $y = a_0 + a_1 x$, можна обчислити теоретичне значення y_x для будь-якої проміжної точки (теоретичне значення вартості випуску товарної продукції для будь-якого електроозброєності праці).

Коефіцієнт регресії a_1 показує, на скільки одиниць збільшиться результативна ознака при збільшенні факторної ознаки на одиницю. В нашому прикладі a_1=1,14. Отже, при збільшенні енергоозброєності праці на 1 кВт·год. випуск продукції зростає на 1,14 тис. грн.

Задачі

7.1. Маються наступні дані щодо 10 однорідних підприємств:

Випуск продукції (x), тис. шт.	10	12	15	17	20	24	26	30	32	35
Витрати матеріалу на одиницю продукції (y), грн	24	23	21	20	17	15	14	12	11	9

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку витрат матеріалу і обсягу продукції (зв'язок лінійний). *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

7.2. За 25 підприємствами однієї галузі маються дані про рівень енергоозброєності та продуктивності праці:

Таблиця 7.2

№ п/п	Енергоозброєність, кВ·год. в рік на одного робітника (x)	Виробіток виробів в рік на одного працюючого, тис. шт. (y)	№ п/п	Енергоозброєність, кВ·год. в рік на одного робітника (x)	Виробіток виробів в рік на одного працюючого, тис. шт. (y)
1	6,0	2	13	10,5	7
2	6,1	3	14	11,2	8
3	6,8	6	15	11,3	6
4	7,2	4	16	11,5	9
5	7,4	2	17	11,7	9
6	7,9	3	18	12,1	8
7	8,2	4	19	12,3	7
8	8,5	5	20	12,6	8
9	8,6	6	21	12,7	9
10	9,1	8	22	12,9	6
11	9,4	5	23	13,0	10
12	9,9	7	24	13,2	9

Складіть лінійне рівняння регресії, *обчисліть* параметри і розрахуйте коефіцієнти кореляції і кореляційне відношення. *Порівняйте* величину коефіцієнта кореляції та кореляційного відношення.

7.3. По 10 магазинам району маються наступні дані. *Знайдіть* рівняння кореляційного зв'язку товарообороту і рівня товарних запасів (зв'язок лінійний). *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

Товарооборот (x), тис. грн	6	3	25	36	45	55	63	74	83	95
Товарні запаси (y), днів	19	13	8	8	8	9	7	6	8	8

7.4. Рівень енергоозброєності 10 однорідних підприємств і продуктивність праці характеризується наступними даними:

Енергоозброєність, тис. кВт·год. за рік на одного працюючого), (x)	3	6	4	8	3	7	4	10	9	5
Продукція у розрахунку на одного працюючого, тис. шт. (y)	4	7	5	7	5	9	7	10	10	6

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку енергоозброєності та продуктивності праці (зв'язок лінійний). *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

7.5. За 10 заводами однієї галузі маються наступні дані:

Вартість основних виробничих засобів (x), млн грн	1,2	2,3	3,1	4,4	5,6	6,4	7,8	8,5	9,4	10,0
Обсяг валової продукції (y), млн грн	20	25	31	31	40	56	62	60	61	70

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку товарообороту і рівня товарних запасів (зв'язок лінійний). *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

7.6. За 10 сільськогосподарськими підприємствами району маються наступні дані:

Кількість внесених добрив на 1 га (x), кг	120	130	140	160	200	210	220	235	250	280
Урожайність (y), ц/га	20	21	23	27	34	36	37	39	40	42

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку кількості добрив і урожайністю (зв'язок лінійний). *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

7.7. За даними про вміст вуглецю та браком (на 100 шт.) деталей:

Вміст вуглецю (x), %	20	25	30	35	40	45	50
Брак деталей (y), шт.	11	9	8	7	5	5	3

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку між вмістом вуглецю і браком деталей (зв'язок лінійний).

7.8. Маються наступні дані за 10 однорідними заводами. *Знайдіть* рівняння кореляційного зв'язку між вартістю основних засобів та випуском продукції. *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

№ заводу	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Основні засоби, млн грн *x*, млн грн	2,1	2,7	4,1	4,6	5,1	5,8	6,6	7,1	7,9	8,8
Виготовлення деталей *y*, тис. шт.	210	135	240	264	300	310	365	380	440	500

7.2. Розрахунок параметрів рівняння параболи другого порядку

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Якщо зв'язок між ознаками нелінійний і зі зростанням факторної ознаки відбувається прискорене зростання або спадання результативної ознаки, то кореляційна залежність може бути виражена *параболою другого порядку*:

$$\overline{y}_t = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Параметри параболи другого порядку a_0, a_1, a_2 знаходяться із наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 = \sum y; \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 = \sum yx; \\ a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 = \sum yx^2. \end{cases}$$

Вирішуючи систему нормальних рівнянь, визначають параметри параболи другого порядку. Розглянемо порядок вирішення рівняння параболи другого порядку.

Задача 2. Маються наступні дані:

Номер робітника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Випуск продукції (*x*), тис. шт.	4	6	8	8	10	12	12	12	14	16	18	20	24	26	28
Собівартість одного виробу (*y*), грн	16	20	14	12	10	10	8	6	8	10	6	4	2	2	4

Вважаючи, що залежність між випуском продукції і собівартістю одного виробу описується рівнянням параболи другого порядку $\overline{y}_t = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, визначимо коефіцієнти a_0, a_1, a_2, а також обчислимо показник тісноти зв'язку.

Для визначення параметрів рівняння зв'язку побудуємо розрахункову таблицю:

Таблиця 7.3

Номер п/п	Випуск продукції, тис. шт. x	Собівартість одного виробу, грн y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y	$\bar{y}_x$
1	4	16	16	64	256	64	256	18,0
2	6	20	36	216	1 296	120	720	15,5
3	8	14	64	512	4 096	112	896	13,2
4	8	12	64	512	4 096	96	768	13,2
5	10	10	100	1 000	10 000	100	1 000	11,2
6	12	10	144	1 728	20 736	120	1 440	9,3
7	12	8	144	1 728	20 736	96	1 152	9,3
8	12	6	144	1 728	20 736	72	864	9,3
9	14	8	196	2 744	38 416	112	1 568	7,8
10	16	10	256	4 096	65 536	160	2 560	6,4
11	18	6	324	5 832	104 976	108	1 944	5,2
12	20	4	400	8 000	160 000	80	1 600	4,3
13	24	2	576	13 824	331 776	48	1 152	3,2
14	26	2	676	17 576	456 976	52	1 352	2,9
15	28	4	784	21 952	614 656	112	3 136	2,9
Всього	218	132	3 924	81 512	1 854 288	1 452	20 408	131,7

Підставимо в систему нормальних рівнянь дані таблиці:

$$\begin{cases} \text{I.} \quad 15a_0 + 218a_1 + 3924a_2 = 132; \\ \text{II.} \quad 218a_0 + 3924a_1 + 81\,512a_2 = 1452; \\ \text{III.} \quad 3924a_0 + 81\,512a_1 + 1854288a_3 = 20\,408. \end{cases}$$

Домножимо перше рівняння на 261,6 і вирахуємо третє рівняння із першого рівняння:

$$\text{III.} \quad 3924a_0 + 81\,512a_1 + 1854288a_2 = 20\,408$$

$$\text{I.} \quad 3924a_0 + 57028{,}8a_1 + 1026518a_2 = 34531{,}2$$

$$A \qquad 24\,483{,}2a_1 + 827770a_2 = -14123{,}2$$

Домножимо друге рівняння на 18 і вирахуємо друге рівняння із третього рівняння:

$$\text{III.} \quad 3924a_0 + 81512a_1 + 1854288a_2 = 20\,408$$

$$\text{II.} \quad 3924a_0 + 70632a_1 + 1467216a_2 = 26136$$

$$B \qquad 10\,880a_1 + 387072a_2 = -5728$$

Рівняння *B* домножимо на 2,25029 $\left(\frac{24\,483{,}2a_1}{10\,880a_1}\right)$ і вирахуємо із рівняння *B* рівняння *A*:

$$\begin{array}{ll} B & 24\,483{,}2a_1 + 871024{,}25a_2 = -12889{,}66 \\ A & \underline{24\,483{,}2a_1 + 827770a_2 = -14123{,}2} \\ & 43254{,}25a_2 = 1233{,}54 \end{array}$$

Звідси

$$a_2 = 0{,}0285.$$

Підставимо значення параметру a_2 в рівняння *A* і обчислимо параметр a_1:

$$24\,483{,}2a_1 + 827770 \cdot (0{,}0285) = -14123{,}2;$$

$$24\,483{,}2a_1 + 23591{,}45 = -14123{,}2;$$

$$a_1 = -1{,}5404.$$

Підставимо значення a_1 і a_2 в рівняння I і обчислимо параметр a_0:

$$15a_0 + 218 \cdot (-1{,}5404) + 3924 \cdot (0{,}0285) = 132;$$

$$15a_0 - 335{,}807 + 111{,}834 = 132;$$

$$15a_0 = 355{,}973;$$

$$a_0 = 23{,}73.$$

Рівняння кореляційного зв'язку між обсягом виробництва та собівартістю одиниці виробу має наступний вид:

$$y_x = 23{,}73 - 1{,}5404x + 0{,}0285x^2.$$

Підставимо в рівняння зв'язку значення ознаки фактору, розрахуємо теоретичну лінію регресії:

$$y_1 = 23{,}73 - 1{,}5404 \cdot 4 + 0{,}0285 \cdot 4^2 = 18{,}0;$$

$$y_1 = 23{,}73 - 1{,}5404 \cdot 6 + 0{,}0285 \cdot 6^2 = 15{,}5;$$

$$y_1 = 23{,}73 - 1{,}5404 \cdot 8 + 0{,}0285 \cdot 8^2 = 13{,}2 \text{ і т. д.}$$

В останніх графі табл. 7.4 наведені вирівняні дані собівартості одиниці виробу $\bar{y}_x$ для усіх значені випуску продукції. Знайдене вище теоретичне рівняння зв'язку (рівняння регресії) виражає залежність *y* від *x*.

Сума теоретичних значень $\bar{y}_x$ дорівнює сумі фактичних значень *y*, тобто $\sum y_x = \sum y$; різниця між $\bar{y}_x$ та *y* виникла за рахунок округлень.

Графічне зображення фактичних вирівняних даних наведено на

рис. 7.1. На графіку значення $\bar{y}_x$ утворюють пряму лінію, а фактичні значення зображені у вигляді ломаної кривої, яка дає графічне зображення невирівняних значень у. Такий графік сам по собі дає деяке уявлення про міру зв'язку між *x* і *y*.

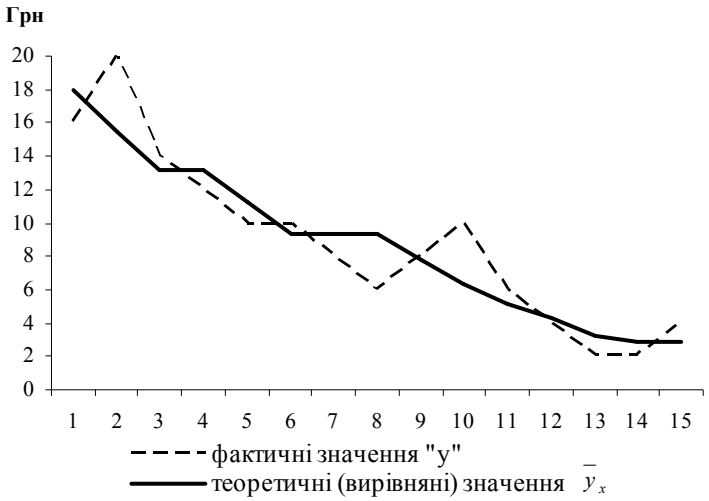

Рис. 7.1. Залежність собівартості одиниці виробу від обсягу випуску продукції.

Якщо $\sum t$ і $\sum t^3$ (як усяка сума непарних ступенів) дорівнює нулю, то система рівнянь прийме наступний вид:

$$\left.\begin{aligned} a_0 n + a_2 \sum x^2 &= \sum y; \\ a_1 \sum x^2 &= \sum yx; \\ a_0 \sum x^2 + a_2 \sum x^4 &= \sum yx^2. \end{aligned}\right\}$$

Ця система рівнянь може бути вирішена методом підстановки. Зокрема, a_1 знаходиться елементарно з другого рівняння, a_0 і a_2 легко отримати за допомогою визначників.

Якщо розрахунок здійснюється не за індивідуальними даними, а на основі аналітичного угруповання, то система рівнянь методом найменших квадратів набуває такого вигляду:

$$a_0 \sum_{j=1}^{k} f_j + a_1 \sum_{j=1}^{k} x_j f_j + a_2 \sum_{j=1}^{k} x_j^2 f_j = \sum_{j=1}^{k} y_j f_j;$$

$$a_0 \sum_{j=1}^{k} x_j f_j + a_1 \sum_{j=1}^{k} x_j^2 f_j + a_2 \sum_{j=1}^{k} x_j^3 f_j = \sum_{j=1}^{k} y_j x_j f_j;$$

$$a_0 \sum_{j=1}^{k} x_o^2 f_j + a_1 \sum_{j=1}^{k} x_j^3 f_j + a_2 \sum_{j=1}^{k} x_j^4 f_j = \sum_{j=1}^{k} y_j x_j^2 f_j.$$

Вирішуючи систему рівнянь, знаходять параметри a_0, a_1, a_2. Методику розрахунку параметрів рівняння покажемо на прикладі

Задача 3. Зв'язок між випуском виробів та витратами на упаковку характеризуються такими даними за 50 однотипними заводами:

Таблиця 7.4

Вартість упаковки, тис. грн y	Випуск виробів, тис. шт. x				Кількість заводів
	3	4	5	6	
2	1				1
4	6	5	2		13
6	3	8	7	1	20
8		2	6	6	13
10				3	3
Кількість заводів	10	15	15	10	50

Вважаючи, що залежність між випуском виробів та вартістю упаковки описується рівнянням параболи другого порядку, визначимо коефіцієнти a_0, a_1 і a_2.

Для розрахунку параметрів рівняння параболи другого порядку складемо розрахункову таблицю (табл. 7.5).

Таблиця 7.5

Кореляційна таблиця

y \ x	2	3	4	5	f_y	yf_y	xyf_y	x^2yf_{xy}
2	1				1	2	6	18
4	6	5	2		13	52	192	736
6	3	8	7	2	20	120	528	2412
8		2	6	5	13	104	544	2896
10				3	3	30	180	1080
	10	15	15	10	50			
f_x	10	15	15	10	50	308	1450	7142
xf_x	30	60	75	60	225			
x^2f_x	90	240	375	360	1065			
x^3f_x	270	960	1875	2160	5265			
x^4f_x	810	3840	9375	12960	26985			
$\bar{y}_i$	2,94	5,69	7,44	8,19				

Система рівнянь має такий вигляд:

$$50a_0 + 225a_1 + 1065a_2 = 308;$$

$$225a_0 + 1065a_1 + 5265a_2 = 1450;$$

$$1065a_0 + 5265a_1 + 26985a_2 = 7142.$$

Перетворимо систему шляхом розподілу відповідних значень на коефіцієнти за перших членів:

$$a_0 + 4{,}5a_1 + 21{,}3a_2 = 6{,}2;$$
$$a_0 + 4{,}7a_1 + 23{,}4a_2 = 6{,}4;$$
$$a_0 + 4{,}9a_1 + 25{,}3a_2 = 6{,}7.$$

Вирішуючи систему рівнянь, отримаємо:

$$a_0 = -11{,}315; \quad a_1 = 6{,}25; \quad a_2 = -0{,}5.$$

Отже, рівняння взаємозв'язку між випуском виробів та вартістю упаковки має такий вигляд:

$$\overline{y}_x = -11{,}315 + 6{,}25x - 0{,}5x^2.$$

Підставляючи значення фактора (випуску продукції) у рівняння, отримаємо теоретичні значення результативної ознаки (вартості упаковки).

Задачі

7.9. Маються наступні дані за групою робітників механічного цеху машинобудівного заводу:

Номер робітника	1	2	3	4	5
Стаж роботи (x), років	5,2	6,1	6,7	7,3	8,4
Виробіток продукції на одного робітника (y), шт.	24	29	33	38	42

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку між стажем роботи і виробітком продукції (зв'язок у вигляді параболи другого порядку). *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

7.10. Маються наступні дані за однорідними підприємствами:

Випуск продукції (x), тис. шт.	2,1	3,6	4,2	4,7	5,8	6,3
Собівартість одиниці продукції (y), грн	2,2	1,9	2,0	1,8	1,7	1,6

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку між випуском продукції і собівартістю одиниці продукції (зв'язок у вигляді параболи другого порядку). Графічно *зобразіть* кореляційний зв'язок.

7.11. За 10 торговельними підприємствами маються наступні дані:

Товарооборот (x), тис. грн	44	60,5	70,4	82,5	90,2	103,4	114,4	121	126,5	132
Товарні запаси (y), тис. грн	3,1	4,8	5,2	5,5	6,3	7,2	8,6	8,8	11,4	11,0

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку між товарооборотом і товарними запасами (зв'язок у вигляді параболи другого порядку). *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

7.12. Маються наступні дані заводської лабораторії про браковані відливи (за спіральними тріщинами) та вміст сірки в чавуні:

Номер даних	1	2	3	4	5
Вміст сірки в чавуні (x), ‰	20	23	28	34	50
Кількість забракованих відливок на 100 (y), грн	4	5	7	9	12

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку між вмістом сірки в чавуні і кількістю забракованих відливок (зв'язок у вигляді параболи другого порядку). *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

7.13. Маються наступні дані по 15 однорідними підприємствами:

Випуск продукції (x), тис. шт.	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5	6	7	7
Собівартість одного виробу (y), грн	4,8	6,0	4,2	3,6	3,0	3,0	2,4	1,8	2,4	3,0	1,8	1,2	0,6	0,6	1,2

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку між випуском продукції та собівартістю виробу (зв'язок у вигляді параболи другого порядку). *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

7.14. За 10 промисловими підприємствами маються наступні дані:

Випуск продукції (x), тис. шт.	20	23	25	24	28	26	30	27	32	35
Витрати на упаковку (y), тис. грн	74,8	95,2	110,4	102,3	136,1	118,2	154,1	126,9	174,6	205,3

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку між випуском продукції та витратами на упаковку (зв'язок у вигляді параболи другого порядку). *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

7.15. За наведеними нижче даними знайдіть рівняння кореляційного зв'язку між випуском продукції та собівартістю одиниці виробу A. (зв'язок у вигляді параболи другого порядку).

Випуск продукції (x), тис. шт.	4,2	7,2	8,4	9,4	11,6	12,7
Собівартість одиниці виробу A (y), грн	4,2	3,8	4,0	3,6	3,4	3,2

7.3. Розрахунок параметрів рівняння гіперболи

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Із нелінійних залежностей, що зустрічаються в соціально-економічних явищах і процесах, найбільш поширені такі, що описуються рівнянням *гіперболи*:

$$\bar{y}_x = a_0 + a_1 \frac{1}{x}.$$

Для гіперболічної залежності спосіб найменших квадратів дає таку систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum \frac{1}{x} = \sum y; \\ a_0 \sum \frac{1}{x} + a_1 \sum \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \sum y \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Щоб визначити параметри рівняння гіперболи методом найменших квадратів, необхідно привести його до лінійного виду. Для цього зробимо заміну змінних: $\frac{1}{x} = x_1$, отримаємо наступну систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x = \sum y; \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 = \sum xy. \end{cases}$$

Вирішуючи систему нормальних рівнянь, визначаємо параметри рівняння гіперболи.

Задача 4. Маються дані про 10 однорідним підприємствам:

Випуск продукції (x), тис. шт.	1,32	0,67	0,09	0,39	0,33	0,45	0,18	0,11	0,29	0,78
Витрати матеріалу на одиницю продукції (y), грн	2,3	1,4	12,2	7,2	6,3	2,9	8,6	10,8	5,4	2,0

Розрахунок необхідних даних для знаходження a_0 і a_1 наведемо в табл. 7.6.

Підставимо значення фактичних даних у систему нормальних рівнянь

$$10a_0 + 40{,}5547a_1 = 59{,}1;$$

$$40{,}5574a_0 + 273{,}9971a_1 = 350{,}5288.$$

Таблиця 7.6

Номер п/п	Випуск продукції, тис. шт. (x)	Витрати матеріалу на одиницю продукції, грн (y)	$\frac{1}{x} = x_1$	x_1^2	yx_1	$\bar{y}_x$
1	2	3	4	5	6	7
1	1,32	2,3	0,7576	0,5739	1,7424	2,5726
2	0,67	1,4	1,4925	2,2277	2,0896	3,3163
3	0,09	12,2	11,1111	123,4568	135,5556	13,0493
4	0,39	7,2	2,5641	6,5746	18,4615	4,4006
5	0,33	6,3	3,0303	9,1827	19,0000	4,8724
6	0,45	2,9	2,2222	4,9383	6,4444	4,0547
7	0,18	8,6	5,5556	30,8642	47,7778	7,4277
8	0,11	10,8	9,0909	82,6446	98,1818	11,0051
9	0,29	5,4	3,4483	11,8906	18,6207	5,2953
10	0,78	2,0	1,2821	1,6437	2,5641	3,1033
Всього	4,61	59,1	40,5547	273,9971	350,5288	59,0973

Обчислимо параметри рівняння:

$$a_1 = \frac{\sum yx_1 - \frac{\sum x_1 \sum y}{n}}{\sum x_1^2 - \frac{\left(\sum x_1\right)^2}{n}} = \frac{350{,}5288 - \frac{40{,}5574 \cdot 59{,}1}{10}}{273{,}9971 - \frac{40{,}5547 \cdot 40{,}5547}{10}} = 1{,}0119;$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x} = \frac{59{,}1}{10} - 1{,}0119 \cdot \frac{40{,}5574}{10} = 1{,}8060.$$

Рівняння гіперболи зв'язку між випуском продукції та витратами матеріалу на одиницю продукції буде мати наступний вид:

$$y_x = 1{,}806 + 1{,}0119\frac{1}{x}.$$

Підставивши в рівняння гіперболи конкретні значення x за кожним підприємством, знаходимо теоретичні значення $\bar{y}_x$ (гр. 7). Так,

$$\bar{y}_1 = 1{,}806 + 1{,}0119\frac{1}{1{,}32} = 2{,}5726;$$

$$\bar{y}_2 = 1{,}806 + 1{,}0119\frac{1}{0{,}67} = 3{,}3163 \text{ і т. д.}$$

Підсумки $\bar{y}_x$ і y не співпадають за рахунок округлень.

Задачі

7.16. Маються наступні дані щодо 10 однорідних підприємств:

Випуск продукції (x), тис. шт.	1,0	0,5	0,07	0,3	0,25	0,34	0,13	0,08	0,22	0,58
Витрати матеріалу на одиницю продукції (y), грн	1,7	1,1	8,6	5,1	4,5	2,1	6,1	7,6	3,9	1,5

За даними про випуск продукції та витрати матеріалу *необхідно визначити* рівняння зв'язку і тісноту зв'язку. Зв'язок передбачається гіперболічний.

7.17. Рівень енергоозброєності 10 однорідних підприємств і продуктивність праці характеризується наступними даними:

Енергоозброєність, тис. кВт·год. за рік на одного працюючого), (x)	6,1	6,2	6,9	7,3	7,5	8,0	8,3	8,6	8,7	9,2
Продукція у розрахунку на одного працюючого, тис. шт. (y)	2,2	3,1	4,6	4,9	5,1	3,2	4,5	6,1	7,9	8,4

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку енергоозброєності та продуктивності праці (зв'язок гіперболічний). *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

7.18. По 10 магазинам району маються наступні дані:

Товарооборот (x), тис. грн	6	3	25	36	45	55	63	74	83	95
Товарні запаси (y), днів	19	13	8	8	8	9	7	6	8	8

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку товарообороту і рівня товарних запасів (зв'язок гіперболічний). *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

7.19. Маються дані по 10 магазинам району:

Товарооборот (x), млн грн	8	11	16	21	30	46	62	86	104	120
Рівень витрат обігу (y) в процентах до товарообороту	10	9,1	7,4	6,1	6,2	5,7	5,4	5,2	5,1	4,9

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку товарообороту і рівня витрат обігу (зв'язок гіперболічний). *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

7.20. По 8 однорідним підприємствам району маються наступні дані:

Основні засоби (x), млн грн	54	62	75	90	112	141	190	224
Випуск продукції (y), тис. т	5	7	8	10	14	22	25	31

Знайдіть рівняння кореляційного зв'язку основних засобів та випуском продукції (зв'язок гіперболічний). *Зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

7.21. Надої молока і собівартість 1 кг його по 12 сільськогосподарським підприємствам характеризується наступними даними:

Собівартість 1 кг (y), грн	41	36	32	30	30	28	26	25	23	22	20	18
Надій молока (x), тис. ц	0,8	1,4	1,9	3,1	2,4	4,1	5,7	7,4	8,1	9,8	11,3	14,1

Побудуйте рівняння гіперболи, *обчисліть* параметри, *розрахуйте* кореляційне відношення.

7.4. Розрахунок параметрів степеневої функції

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Степенева функція виду $y = a_0 x^{a_1}$ застосовується в економічних дослідженнях для характеристики слабо лінійного зв'язку між результативними та факторними ознаками. Параметри a_1 мають економічний сенс. Він показує, що зі збільшенням ознаки на 1% результативна ознака збільшується на a_1 процентів. Параметр a_1 є коефіцієнтом еластичності.

Для визначення параметрів ступеневої функції методом найменших квадратів ступеневу функцію необхідно привести до лінійного виду шляхом логарифмування.

В результаті логарифмування отримаємо рівняння виду:

$$\lg y = \lg a_0 + a_1 \lg x.$$

Замінимо

$$\lg y = y_1; \quad \lg a_0 = b; \quad \lg x = x_1.$$

Запишемо перше рівняння в нових позначеннях:

$$y = b + a_1 x.$$

Будуємо систему нормальних рівнянь для попереднього рівняння

$$\sum y = nb + a_1 \sum x;$$
$$\sum xy = b\sum x + a_1 \sum x^2.$$

Вирішуючи систему нормальних рівнянь, визначаємо параметри a_1 і b рівняння (7.14).

Переходячи до початкових позначень $\lg a_0 = b,$ визначаємо параметри a_0.

Задача 5. Маються такі дані щодо 13 підприємств:

Номер підприємства	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Випуск продукції (x), млн грн	152	116	100	108	129	141	147	156	156	163	170	178	187
Собівартість одиниці виробу (y), грн	47,6	34,8	31,6	32,6	38,2	42,1	45,0	47,3	47,4	49,0	51,5	53,2	55,6

Залежність між випуском продукції та собівартістю одиниці виробу виражається ступеневою функцією виду:

$$y = a_0 x^{a_1}.$$

Для визначення параметрів степеневої функції методом найменших квадратів шляхом логарифмування наведемо її до лінійного вигляду:

$$\lg y = \lg a_0 + a_1 \lg x.$$

та побудуємо систему нормальних рівнянь:

$$\sum \lg y = n \lg a_0 + a_1 \sum \lg x;$$
$$\sum \lg y \lg x = \lg a_0 \sum \lg x + a_1 \sum (\lg x)^2.$$

Замінимо: $\lg y = y_1;$ $\lg a_0 = b;$ $\lg x = x_1.$

Запишемо систему нормальних рівнянь у нових позначеннях:

$$\sum y_1 = nb + a_1 \sum x_1;$$
$$\sum x_1 y_1 = b\sum x_1 + a_1 \sum x_1^2.$$

Для визначення параметрів рівняння (7.13) побудуємо розрахункову таблицю (7.7).

Підставимо значення фактичних даних у систему нормальних рівнянь:

$$21{,}31528 = 13b + 28{,}05799a_1;$$
$$46{,}08632 = 28{,}05799b + 60{,}64215a_1.$$

Таблиця 7.7

Номер п/п	Випуск продукції, тис. шт. (x)	Собівартість одиниці виробу (y), грн	$\lg x = x_1$	$\lg y = y_1$	$x_1 y_1 = \lg y \lg x$	$(\lg x)^2 = x_1^2$
1	152	47,6	2,18184	1,67761	3,66028	4,76044
2	116	34,8	2,06446	1,54158	3,18253	4,26199
3	100	31,6	2,00000	1,49969	2,99937	4,00000
4	108	32,6	2,03342	1,51322	3,07701	4,13481
5	129	38,2	2,11059	1,58206	3,33909	4,45459
6	141	42,1	2,14922	1,62428	3,49094	4,61914
7	147	45,0	2,16732	1,65321	3,58304	4,69726
8	156	47,3	2,19312	1,67486	3,67318	4,80980
9	156	47,4	2,19312	1,67578	3,67519	4,80980
10	163	49,0	2,21219	1,69020	3,73903	4,89377
11	170	51,5	2,23045	1,71181	3,81810	4,97490
12	178	53,2	2,25042	1,72591	3,88403	5,06439
13	187	55,6	2,27184	1,74507	3,96453	5,16126
Всього			28,05799	21,31528	46,08632	60,64215
В середньому			2,15831	1,63964	3,54510	4,66478

Параметри рівняння (7.13) визначимо за формулами:

$$a_1 = \frac{\overline{x_1 y_1} - \bar{x}_1 \bar{y}_1}{\overline{x^2} - (\bar{x}_1)^2} = \frac{3{,}54510 - 1{,}63964 \cdot 2{,}15831}{4{,}66478 - (2{,}15831)^2} = 0{,}96459;$$

$$b = \bar{y}_1 - a_1 \bar{x}_1 = 1{,}63964 - 0{,}96459 \cdot 2{,}15831 = -0{,}44224;$$

$$b = \lg a, \quad \lg a_0 = -0{,}44224, \quad \text{звідси} \quad a_0 = 0{,}3612.$$

Підставимо значення параметрів у шукане рівняння, тоді рівняння 2 набуде вигляду:

$$\lg y = \lg 0{,}3612 + 0{,}96459 \lg x,$$

або

$$\lg y = 0{,}3612 + 0{,}96459 \lg x.$$

Рівняння кореляційного зв'язку набуде вигляду:

$$y = 0{,}3612 x^{0{,}96459}.$$

Параметр a_1 показує збільшення собівартості продукції на 0,96 % зі збільшенням випуску продукції на 1 %.

Задачі

7.22. Маються дані за 24 підприємствами однієї галузі:

Таблиця 7.8

Номер підприємства	Фонд заробітної плати, тис. грн	Випуск продукції, тис. т	Номер підприємства	Фонд заробітної плати, тис. грн	Випуск продукції, тис. т
1	1,9	9,4	13	4,0	20,0
2	2,8	9,5	14	4,2	19,1
3	2,1	12,5	15	3,3	22,0
4	3,5	10,7	16	6,1	22,6
5	4,1	13,1	17	4,0	22,8
6	2,3	14,0	18	5,4	26,0
7	4,3	14,1	19	7,8	26,5
8	3,0	15,1	20	6,7	26,5
9	3,2	16,9	21	4,8	27,8
10	4,1	17,3	22	5,9	34,1
11	3,2	18,3	23	7,6	36,1
12	4,3	19,0	23	6,6	40,2

Для дослідження залежності фонду заробітної плати від випуску продукції *обчисліть* і *проаналізуйте* параметри степеневої функції. *Побудуйте* графік.

7.23. Маються дані за 24 підприємствами галузі *A*:

Таблиця 7.9

Номер підприємства	Основні засоби, млн грн x	Випуск продукції, млн грн y	Номер підприємства	Основні засоби, млн грн x	Випуск продукції, млн грн y
1	4,5	41,1	13	6,8	109,0
2	3,6	27,1	14	6,6	123,1
3	1,8	51,4	15	9,1	183,6
4	2,4	49,9	16	11,7	134,9
5	4,8	55,1	17	6,7	188,8
6	11,6	56,4	18	10,8	191,2
7	2,9	60,5	19	10,6	195,3
8	6,3	73,2	20	13,5	210,4
9	10,5	75,1	21	14,7	195,4
10	5,6	77,3	22	8,5	234,3
11	3,1	94,7	23	14,4	282,8
12	8,9	106,6	23	21,5	296,3

Для визначте залежності фонду заробітної плати і випуску продукції *обчисліть* і *проаналізуйте* параметри степеневої функції. *Побудуйте* графік.

7.24. Маються наступні дані про 12 однорідним підприємствам:

Номер підприємства	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Випуск продукції (x), млн грн	76	58	50	54	64	71	73	78	78	31	85	89
Собівартість одиниці продукції (y), грн	23,8	17,5	15,7	16,2	19,1	21,2	22,5	23,6	23,7	24,5	25,8	26,6

Для визначення залежності собівартості одиниці виробу від випуску продукції *обчисліть* параметри степеневої функції, *розрахуйте* теоретичну функцію регресії, *зобразіть* графічно кореляційний зв'язок.

7.25. Маються дані за 13 підприємствами галузі *B*:

Таблиця 7.10

Номер підприємства	Основні засоби, тис. грн x	Випуск продукції, млн грн y	Номер підприємства	Основні засоби, млн грн x	Випуск продукції, млн грн y
1	165	4,9	8	425	6,7
2	200	5,4	9	435	6,8
3	240	5,7	10	470	6,9
4	275	6,1	11	510	7,2
5	300	6,2	12	515	7,1
6	350	6,4	13	600	7,2
7	375	6,6	14	625	7,8

Для дослідження залежності основних засобів і випуску продукції *обчисліть* і *проаналізуйте* параметри степеневої функції. *Побудуйте* графік.

7.5. Вирівнювання за показовою (експонентною) кривою

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Вирівнювання за показовою (*експонентною*) *кривою* здійснюється у випадку, коли ряди динамічного ряду змінюються з більш або менш постійним відносним приростом (за правилом складних процентів). Вирівнювання здійснюється за наступною формулою:

$$\overline{y}_t = a_0 a_1^t,$$

де a_0 і t мають попереднє значення, a_1 — темп зростання за одиницю часу.

Параметри a_0 і a_1 визначаються методом найменших квадратів від-

хилень логарифмів шляхом вирішення системи нормальних рівнянь.

$$\begin{cases} n \cdot \lg a_0 + \lg a_1 \sum t = \sum \lg y \\ \lg a_0 \cdot \sum t + \lg a_1 \cdot \sum t^2 = \sum t \cdot \lg y \end{cases}$$

Техніка вирівнювання показової кривої, вираженої в логарифмах, аналогічна викладеної вище техніки вирівнювання по прямій, за винятком того, що вирівнюванню тут піддаються не самі члени ряду, а їх логарифми.

При способі відліку t таким чином, щоб $\sum t = 0$ ми отримуємо:

$$n \lg a_0 = \sum \lg y,$$

звідки

$$\lg a_0 = \frac{\sum \lg y}{n};$$

і

$$\lg a_1 \sum t^2 = \sum t \lg y,$$

звідки

$$\lg a_1 = \frac{\sum t \lg y}{\sum t^2}.$$

Порядок розрахунку параметрів показової кривої розглянемо на наступному прикладі.

Задача 6. Маються наступні дані, що характеризуються виробництво виробу *А* за 2013–2021 рр.:

Таблиця 7.11

Рік	Виробництво виробу А, тис. шт. (y)	$\lg y$	t	t^2	$t \cdot \lg y$	$\bar{y}_t = 64{,}39 \cdot 1{,}5^t$
1	2	3	4	5	6	7
2013	7	0,84510	–4	16	–3,38039	12,7
2014	24	1,38021	–3	9	–4,14063	19,1
2015	36	1,55630	–2	4	–3,11261	28,6
2016	50	1,69897	–1	1	–1,69897	42,9
2017	84	1,92428	0	0	0	64,4
2018	101	2,00432	+1	1	2,00432	96,6
2019	139	2,14301	+2	4	4,28603	144,9
2020	202	2,30535	+3	9	6,91605	217,3
2021	264	2,42160	+4	16	9,68642	325,9
Всього	907	16,27915	0	60	10,56022	–

Отримаємо:

$$\lg a_0 = \frac{\sum \lg y}{n} = \frac{16{,}27915}{9} = 1{,}80879;$$

$$\lg a_1 = \frac{\sum t \lg y}{\sum t^2} = \frac{10{,}56022}{60} = 0{,}17600.$$

Звідки

$$a_0 \approx 64{,}39; \quad a_1 \approx 1{,}5.$$

Аналітичне рівняння показової кривої набуде вигляду:

$$\overline{y}_t = 64{,}39 \cdot 1{,}5^t.$$

Підставляємо значення t в отримане рівняння показової кривої і отримуємо (див. колонку 7 табл. 7.13):

$$\overline{y}_{t=-4} = 64{,}39 \cdot 1{,}5^{-4} = \frac{64{,}39}{1{,}5^4} = \frac{64{,}39}{5{,}0625} \approx 12{,}7;$$

$$\overline{y}_{t=-3} = 64{,}39 \cdot 1{,}5^{-3} = \frac{64{,}39}{1{,}5^3} = \frac{64{,}39}{3{,}375} \approx 19{,}1;$$

$$\overline{y}_{t=-2} = 64{,}39 \cdot 1{,}5^{-2} = \frac{64{,}39}{1{,}5^2} = \frac{64{,}39}{2{,}25} \approx 28{,}6;$$

$$\overline{y}_{t=-1} = 64{,}39 \cdot 1{,}5^{-1} = \frac{64{,}39}{1{,}5} \approx 42{,}9;$$

$$\overline{y}_{t=0} = 64{,}39 \cdot 1{,}5^0 \approx 64{,}4;$$

$$\overline{y}_{t=1} = 64{,}39 \cdot 1{,}5^1 = 64{,}39 \cdot 1{,}5 \approx 96{,}6;$$

$$\overline{y}_{t=2} = 64{,}39 \cdot 1{,}5^2 = 64{,}39 \cdot 2{,}25 \approx 144{,}9;$$

$$\overline{y}_{t=3} = 64{,}39 \cdot 1{,}5^3 = 64{,}39 \cdot 3{,}375 \approx 217{,}3;$$

$$\overline{y}_{t=3} = 64{,}39 \cdot 1{,}4^4 = 64{,}39 \cdot 5{,}0625 \approx 325.9.$$

Тепер можна побудувати графік, зобразивши фактичні дані та вирівняні дані показової (експонентної) функції аналогічно тому, як це було показано при аналітичному вирівнюванні параболі другого порядку.

Задачі

7.26. Виробництво виробу *A* за 2014–2022 рр. характеризується наступними даними:

Таблиця 7.12

Показник	Роки								
	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Виробництво виробу *A*, тис. шт.	1,3	11,1	6,5	5,7	2,6	7,8	9,8	4,9	1,8

Здійсніть аналітичне вирівнювання обсягу виробництва виробу *А* за показовою (експонентною) кривою.

7.27. Видобування вугілля за 2014–2022 рр. характеризується наступними даними:

Таблиця 7.13

Показник	Роки								
	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Видобування вугілля, тис. т	3	10	15	21	36	43	58	81	110

Здійсніть аналітичне вирівнювання за показовою (експонентною) кривою динамічного ряду.

7.6. Розрахунок параметрів рівняння множинної регресії

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Суспільні явища складаються під впливом не одного, а багатьох самих різноманітних факторів. У зв'язку з цим в практиці кореляційного аналізу часто приходиться мати справу з багатьма факторами, які визначають той чи інший результат. В силу цього статистики стикаються з необхідністю займатися не стільки парною, стільки множинною кореляцією. Множинною кореляцією називається така кореляція, за допомогою якої досліджується залежність результативної ознаки від ряду факторних. Зв'язок між результативною ознакою і двома і більше факторами прийнято виражати рівнянням множинної регресії. *Рівняння множинної регресії* можуть бути *лінійні* та *криволінійні*.

На практиці найбільшого поширення набули лінійні форми зв'язку, оскільки такі моделі простіші, легко інтерпретуються і вимагають меншого обсягу обчислень. Крім того, нерідко криволінійну залежність можна порівняно точно описати у вигляді прямолінійної залежності, при цьому крива лінія може бути замінена ламаною.

Спочатку розглянемо лінійну залежність результативної ознаки (y) від факторіальних (x, z). Рівняння зв'язку у разі визначається формулою:

$$\overline{y}_{xz} = a_0 + a_1 x + a_2 z.$$

Параметри цього рівняння знаходяться під час вирішення системи

нормальних рівнянь, одержуваних для способу найменших квадратів:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum x + a_2 \sum z = \sum y; \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum xz = \sum yx; \\ a_0 \sum z + a_1 \sum xz + a_2 \sum z^2 = \sum zy, \end{cases}$$

де n — число одночасних спостережень за трьома ознаками;
$\sum x, \sum y, \sum z$ — суми відповідних значень за цими ознаками.

Порядок розрахунку параметрів рівняння множинної регресії розглянемо на наступному прикладі.

Задача 7. Взаємозв'язок між середньорічною вартістю основних виробничих фондів (x), відносним рівнем витрат на реалізацію (z) та вартістю реалізованої продукції (y) характеризується такими даними:

Таблиця 7.14

Номер підприємства	Середньорічна вартість основних виробничих засобів, млн грн	Рівень витрат за реалізацію (в % до вартості реалізованої продукції)	Обсяг реалізованої продукції, млн грн
1	4,2	4	10
2	4,2	3	13
3	7,1	3	10
4	8,4	6	15
5	9,8	10	16
6	8,4	11	13
7	11,2	12	15
8	12,6	11	19
9	12,8	15	18
10	14,3	16	20

Рішення

Вважаючи залежність між цими показниками лінійною, визначимо параметри рівнянь регресії a_1, a_1, a_2 та обчислимо множинні та приватні коефіцієнти кореляції. Складемо допоміжну таблицю для розрахунку коефіцієнтів регресії та кореляції (табл. 7.15).

Для складання системи рівнянь використаємо результати допоміжних обчислень:

$$10a_0 + 93a_1 + 91a_2 = 149;$$
$$93a_0 + 975{,}38a_1 + 985{,}3a_2 = 1483{,}4;$$
$$91a_0 + 985{,}3a_1 + 1037a_2 = 1481.$$

Для вирішення системи нормальних рівнянь розділимо всі члени рівнянь на коефіцієнти при a_0:

Таблиця 7.15

№ п/п	Висхідні дані			y^2	x^2	z^2	yx	yz	xz	y_{xz}	$y - y_{xz}$	$(y - y_{xz})^2$
	x	z	y									
1	4,2	4	10	100	17,64	16	42,0	40	16,8	13,8	–3,8	14,44
2	4,2	3	13	169	17,64	9	54,6	39	12,6	13,3	–0,3	0,09
3	7,1	3	10	100	50,41	9	71,0	30	21,3	12,4	–2,4	5,76
4	8,4	6	15	225	70,56	36	126,0	90	50,4	13,5	+1,5	2,25
5	9,8	10	16	256	96,04	100	156,8	160	98	15,2	+0,8	0,64
6	8,4	11	13	169	70,56	121	109,2	143	92,4	16,2	–3,2	10,24
7	11,2	12	15	225	125,44	144	168,0	180	134,4	15,8	–0,8	0,64
8	12,6	11	19	361	158,76	121	239,4	209	138,6	14,9	+4,1	16,8
9	12,8	15	18	324	163,84	225	230,4	270	192	16,9	+1,1	1,21
10	14,3	16	20	400	204,49	256	286,0	320	228,8	17	+3,0	9,00
$\sum$	93	91	149	2 329	975,38	1 037	1 483,4	1 481	985,3	149	–	61,08

$$a_0 + 9{,}3a_1 + 9{,}1a_2 = 14{,}9;$$
$$a_0 + 10{,}49a_1 + 10{,}59a_2 = 15{,}95;$$
$$a_0 + 10{,}83a_1 + 11{,}4a_2 = 16{,}27.$$

Віднімемо з другого рівняння перше та з третього рівняння друге:

$$1{,}19a_1 + 1{,}49a_2 = 1{,}05;$$
$$0{,}34a_1 + 0{,}81a_2 = 0{,}32.$$

Розділимо кожен член обох рівнянь на коефіцієнти при a_1 віднімемо від другого рівняння перше:

$$\begin{array}{r} a_1 + 2{,}382a_2 = 0{,}941 \\ — \\ a_1 + 1{,}252a_2 = 0{,}882 \\ \hline 1{,}13a_2 = 0{,}059 \end{array}$$

$$a_2 = \frac{0{,}059}{1{,}13} = 0{,}522.$$

Підставимо значення параметра a_2 до рівняння, отримаємо параметри a_0 і a_1:

$$a_0 = 12{,}96; \quad a_1 = -0{,}302; \quad a_2 = 0{,}522.$$

Рівняння множинної регресії, що виражає залежність обсягу реалізованої продукції y від середньорічної вартості основних виробничих засобів x і рівню витрат на реалізацію z прийме вид:

$$y_{xz} = 12{,}96 - 0{,}302x + 0{,}522z.$$

Обчислимо за ним теоретичний обсяг реалізованої продукції та за-

несемо дані до табл. 7.15. Аналіз коефіцієнтів рівняння множинної регресії дозволяє зробити висновок про ступінь впливу кожного із факторів на обсяг реалізованої продукції. Так, із збільшенням вартості основних виробничих засобів на 1 тис. грн обсяг реалізації може збільшитися на 302 грн; із зростанням рівню витрат на реалізацію продукції на 1 % обсяг реалізації скорочується на 522 тис. грн.

Задачі

7.28. В результаті вибіркового обстеження декількох сімей були отримані наступні дані:

Дохід на душу за місяць (x), грн	9 000	11 000	12 000	13 000	18 000	20 000	28 000
Число членів сім'ї (z)	1	1	2	2	3	3	4
Витрати на купівлю непродовольчих товарів (y), грн	1 800	2 200	3 200	3 800	4 600	6 200	8 200

Знайдіть параметри множинної регресії, що виражає залежність витрат на покупку непродовольчих товарів від доходу та розміру сім'ї (зв'язок лінійний).

7.29. Взаємозв'язок між середньорічною вартістю основних виробничих фондів (x), відносним рівнем витрат на реалізацію (z) і вартістю реалізованої продукції (y) характеризується наступними даними:

Таблиця 7.16

Номер підприємства	Середньорічна вартість основних виробничих фондів, млн грн x	Рівень витрат за реалізацію (в % до вартості реалізованої продукції) z	Обсяг реалізованої продукції, млн грн y
1	7	3	21
2	7	2	26
3	11	2	21
4	13	4	31
5	15	10	34
6	13	12	25
7	17	12	29
8	19	11	38
9	19	14	37
10	2	15	41

Вважаючи залежність між цими показниками лінійною, *визначте*

параметри рівнянь регресії a_1, a_1, a_2. *Проаналізуйте* параметри рівняння множинної регресії.

7.29. По 6 сільськогосподарським підприємствам району маються наступні дані:

Номер підприємства	1	2	3	4	5	6
Посівна площа (x), тис. га	560	710	860	910	1150	1360
Число корів (z), голів	60	140	120	100	100	80
Дохід підприємства (y), млн грн	8	12	14	9	13	11

Знайдіть рівняння множинної регресії, що виражає залежність доходу сільськогосподарського підприємства від розміру посівної площі та числа корів (зв'язок лінійний). *Проаналізуйте* параметри рівняння множинної регресії.

7.30. За 25 підприємствами однієї галузі маються наступні дані:

Таблиця 7.17

Номер підприємства	Випуск продукції (y), тис. т	Основні засоби (x), млн грн	Фонд заробітної плати (z), млн грн	Номер підприємства	Випуск продукції (y), тис. т	Основні засоби (x), млн грн	Фонд заробітної плати (z), млн грн
1	27,1	38,4	5,5	14	123,3	74,4	6,7
2	41,1	49,2	4,1	15	134,9	127,2	10,1
3	50,1	26,4	2,2	16	182,7	99,6	6,2
4	51,5	19,2	4,8	17	188,6	73,2	5,3
5	55,2	168,0	6,5	18	191,4	117,6	8,4
6	23,7	126,0	8,9	19	196,3	115,2	20,4
7	60,5	31,2	2,4	20	195,8	159,6	10,1
8	73,3	68,4	4,8	21	210,3	147,6	11,0
9	75,4	114,0	5,0	22	234,3	92,4	9,4
10	77,9	60,0	3,8	23	282,9	157,2	15,6
11	94,8	33,6	4,8	24	282,8	234,0	12,7
12	106,9	97,2	5,5	25	296,3	258,0	18,7
13	109,2	72,0	3,6				

Знайдіть рівняння множинної регресії, що виражає кореляційний зв'язок між випуском продукції, розміром основних засобів і фондом заробітної плати. *Проаналізуйте* параметри рівняння множинної регресії (зв'язок лінійний).

7.31. По 6 заводам галузі маються наступні дані:

Номер підприємства	1	2	3	4	5	6
Випуск виробу A (x), тис. шт.	4	8	6	10	4	4
Випуск виробу $Б$ (z), м^2	3	2	1	3	2	1
Витрати електроенергії (y), кВт	25	29	23	32	30	16

Знайдіть рівняння множинної регресії, що виражає залежність між витратами електроенергії і випуском виробів *А* і *Б* (зв'язок лінійний). *Проаналізуйте* параметри рівняння множинної регресії.

10.7. Розрахунок теоретичного кореляційного відношення та індексу кореляції

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Для оцінки тісноти зв'язку при лінійній і криволінійні залежності між ознаками використовується показник — *теоретичного кореляційного відношення*, або *індексу кореляції*.

Розрахунок теоретичного кореляційного відношення проводиться за допомогою теореми складання дисперсій. Зв'язок ознаки *y* і *x* можна виміряти відношенням факторної дисперсії до загальної дисперсії. Корінь квадратний із цього відношення називається індексом кореляції, або теоретичним кореляційним відношенням.

Теоретичне кореляційне відношення обчислюється за формулою:

$$R = \sqrt{\frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_y^2}},$$

де σ_{yx}^2 — характеризує варіацію результативної ознаки під впливом варіації ознаки фактора;

σ_y^2 — характеризує варіацію результативної ознаки під впливом усіх факторів.

Виходячи з правила складання дисперсій ($\delta_x^2 = \sigma_y^2 - \sigma_{(y-\bar{y}_x)}^2$) індекс кореляції, або теоретичне кореляційне відношення, можна представити у вигляді

$$R = \sqrt{\frac{\sigma_y^2 - \sigma_{(y-\bar{y}_x)}^2}{\sigma_y^2}}, \quad \text{або} \quad R = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{(y-\bar{y}_x)}^2}{\sigma_y^2}},$$

де $\sigma_{y-\bar{y}_x}^2$ — характеризує варіацію результативної ознаки під впливом інших неврахованих факторів.

Величина кореляційного відношення може приймати значення від нуля (відсутність зв'язку) до одиниці (зв'язок функціональний). Напрям зв'язку (позитивне чи від'ємне) установлюється на основі теоретичного аналізу залежності між ознаками.

Підкореневий вираз кореляційного відношення представляє показ-

ник, який носить назву *коефіцієнту детермінації*. Формула коефіцієнту детермінації:

$$D = \frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_y^2}.$$

Коефіцієнт детермінації показує долю варіації результативної ознаки під впливом варіації ознаки фактору.

Дуже важливо, що кореляційне відношення придатне для вимірювання тісноти зв'язку будь-якої форми.

Задача 8. Маються такі дані про електроозброєність праці робітників та випуск продукції (на 1 робітника):

Номер підприємства	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Електроозброєність праці на 1 працюючого, кВт·год.	5	4	6	7	3	4	6	7	5	3
Випуск готової продукції на 1 робітника за зміну, тис. грн	6,3	6,0	7,5	8,5	3,5	6,2	7,5	8,7	6,0	3,7

Рішення

Для розрахунку кореляційного відношення необхідно насамперед встановити кореляційну залежність та розрахувати параметри рівняння регресії. Раніше при вирішенні завдання цієї глави (задачі 7.1) було встановлено, що зв'язок між електроозброєністю та випуском продукції на одного працюючого носить лінійний характер і виражається рівнянням прямої $\bar{y}_x = 0{,}69 + 1{,}14x.$ Для розрахунку кореляційного відношення та індексу кореляції будуємо розрахункову таблицю (табл. 7.18).

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{63{,}9}{10} = 6{,}39.$$

Кореляційне відношення обчислимо за формулою:

$$R = \sqrt{\frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_y^2}},$$

Дисперсія факторної ознаки (міжгрупова) $\sigma_{\bar{y}_x}^2$ обчислюється за формулою:

$$\sigma_{\bar{y}_x}^2 = \frac{\sum (y_x - \bar{y})^2}{n} = \frac{25{,}992}{10} = 2{,}5992.$$

Дисперсія результативної ознаки σ_y^2 визначається за формулою:

Таблиця 7.18

Номер п/п	Електроозброєність праці на 1 працюючого (x), кВт·год.	Випуск готової продукції на 1 працюючого за зміну (y), тис. грн	$y_x = 0{,}69 + 1{,}14x$	$y_x - \bar{y}$	$(y_x - \bar{y})^2$	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$	$y - y_x$	$(y - y_x)^2$
1	5	6,3	6,39	—	—	–0,09	0,0081	–0,09	0,0081
2	4	6,0	5,25	–1,14	1,300	–0,39	0,1521	+0,75	0,5625
3	6	7,5	7,53	+1,14	1,300	+1,11	1,2321	–0,03	0,0009
4	7	8,5	8,67	+2,28	5,198	+2,11	4,4521	–0,17	0,0289
5	3	3,5	4,11	–2,28	5,198	–2,89	8,3521	–0,61	0,3721
6	4	6,2	5,25	–1,14	1,300	–0,19	0,0361	+0,95	0,9025
7	6	7,5	7,53	+1,14	1,300	+1,11	1,2321	–0,03	0,0009
8	7	8,7	8,67	+2,28	5,198	+2,31	5,3361	+0,03	0,0009
9	5	6,0	6,39	—	—	–0,39	0,1521	–0,39	0,1521
10	3	3,7	4,11	–2,28	5,198	–2,69	7,2361	–0,41	0,1681
Всього	50	63,9	63,9	—	25,992	—	28,189	—	2,1970
В середньому	—	6,39	—	—	—	—	—	—	—

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n} = \frac{28{,}189}{10} = 2{,}8189.$$

Кореляційне відношення становитиме:

$$R = \sqrt{\frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{\frac{2{,}5992}{2{,}8189}} = \sqrt{0{,}992} = 0{,}96.$$

Кореляційне відношення дорівнює 0,96. Величина 0,96 свідчить про тісну залежність виробітку на одного робітника від електроозброєності праці.

Індекс кореляції розрахуємо за формулою:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{(y - \bar{y}_x)}}{\sigma_y^2}},$$

Залишкова дисперсія обчислюється за формулою:

$$\sigma^2_{y - \bar{y}_x} = \frac{\sum (y - \bar{y}_x)^2}{n} = \frac{2{,}1970}{10} = 0{,}2197.$$

Обчислимо кореляційне відношення:

$$R = \sqrt{1 - \frac{0{,}2197}{2{,}8189}} = \sqrt{0{,}922} \approx 0{,}96.$$

Розрахуємо коефіцієнт детермінації за формулою:

$$D = \frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_y^2} = \frac{2{,}5992}{2{,}8189} = 0{,}92.$$

Коефіцієнт детермінації, рівний 0,92, свідчить, що питома вага впливу енергоозброєності праці в загальній сумі факторів, що визначають випуск продукції, складає 92 %. Решта частина зростання випуску продукції (доповнення до 100 %) пояснюється дією інших факторів.

Обчислимо кореляційне відношення за даними прикладу з випуском продукції та собівартістю одиниці виробу 15 робітників (задача 2 глави 7). Розрахунок σ_x і σ_y здійснюється за формулами $\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$; $\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2}$ — див. главу шість. Для розрахунків за відповідними формулами необхідно знайти $\overline{x}, \overline{y}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_y^2, \sigma^2_{(y-\overline{y}_x)}$. Дані, необхідні для обчислення, представимо в табл. 7.19.

Таблиця 7.19

x	y	x^2	y^2	xy	$\overline{y}_x$	$y - \overline{y}_x$	$(y - \overline{y}_x)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8
4	16	16	256	64	18,0	–2	4
6	20	36	400	120	15,5	+4,5	20,25
8	14	64	196	112	13,2	+0,8	0,64
8	12	64	144	96	13,2	–1,2	1,44
10	10	100	100	100	11,2	–1,2	1,44
12	10	144	100	120	9,3	+0,7	0,49
12	8	144	64	96	9,3	–1,3	1,69
12	6	144	36	72	9,3	–3,3	10,89
14	8	196	64	112	7,8	+0,2	0,04
16	10	256	100	160	6,4	+3,6	12,96
18	6	324	36	108	5,2	+0,8	0,64
20	4	400	16	80	4,3	–0,3	0,09
24	2	576	4	48	3,2	–1,2	1,44
26	2	676	4	52	2,9	–0,9	0,81
28	4	784	16	112	2,9	+1,1	1,21
$\sum$ 218	132	3 924	1 536	1 452	131,7	×	58,03

Звідси

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{218}{15} = 14{,}53 \text{ тис. шт.};$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x^2}{n} = \frac{3924}{15} = 216{,}6;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{132}{15} = 8{,}8;$$

$$\overline{y^2} = \frac{\sum y^2}{n} = \frac{1536}{15} = 102{,}4;$$

$$\bar{x}^2 = 14{,}53^2 = 211{,}12; \quad \bar{y}^2 = 8{,}8^2 = 77{,}44;$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum xy}{n} = \frac{1452}{15} = 96{,}8;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \sqrt{216{,}6 - 211{,}12} = \sqrt{5{,}48} \approx 2{,}34;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = \sqrt{102{,}4 - 77{,}44} = \sqrt{24{,}96} \approx 4{,}996;$$

$$\sigma_y^2 = 4{,}996^2 = 24{,}960016;$$

$$\sigma^2_{(y-\bar{y}_x)} = \frac{\sum (y - \bar{y}_x)^2}{n} = \frac{58{,}03}{15} = 3{,}86867.$$

Нарешті, підставимо отримані висхідні дані в формулу кореляційного відношення:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{(y-\bar{y}_x)}}{\sigma_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{3{,}86867}{24{,}960016}} = \sqrt{1 - 0{,}154995} =$$

$$= \sqrt{0{,}845005} \approx 0{,}92.$$

Задачі

7.32. За даними задачі 7.1. гл. 7 *розрахуйте* індекс кореляції і коефіцієнт детермінації.

7.33. За даними задачі 7.2 гл. 7 *розрахуйте* теоретичне кореляційне відношення.

7.34. За даними задачі 7.3 гл. 7 *розрахуйте* теоретичне кореляційне відношення і коефіцієнт детермінації.

7.35. За даними задачі 7.4 гл. 7 *розрахуйте* індекс кореляції та коефіцієнт детермінації.

7.36. За даними задачі 7.5 гл. розрахуйте теоретичне кореляційне відношення.

7.37. За даними задачі 7.6 гл. 7 розрахуйте теоретичне кореляційне відношення.

7.8. Розрахунок коефіцієнту кореляції за незгрупованими даними

Методичні вказівки та рішення типової задачі

При лінійній залежності між ознаками для визначення тісноти кореляційного зв'язку застосовується коефіцієнт кореляції. За величиною коефіцієнта кореляції можна будувати висновки про ступеня впливу ознаки результативний показник.

Для розрахунку лінійного коефіцієнту кореляції використовується наступна формула:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

де

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}};$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}};$$

де $\overline{xy}$ — середнє значення добутку ознаки x на ознаку y;

$\bar{x}$ і $\bar{y}$ — середні значення відповідних ознак;

σ_x і σ_y — середні квадратичні відхилення ознак x і y:

Лінійний коефіцієнт кореляції може бути обчислений і за формулою:

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \sum (y - \bar{y})^2}},$$

де n — число спостережень.

Найбільш зручною формулою для розрахунку коефіцієнту кореляції є наступна:

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{\sum (x)^2}{n}\right)\left(\sum y^2 - \frac{\sum (y)^2}{n}\right)}}.$$

Наведена формула дозволяє спростити розрахунок лінійного коефіцієнта кореляції.

Коефіцієнт кореляції змінюється від – 1 до +1 і показує напрям кореляційного зв'язку. У разі лінійного функціонального зв'язку між залежними величинами коефіцієнт кореляції дорівнює +1 при прямому

зв'язку залежності та –1 при зворотному зв'язку. За відсутності зв'язку коефіцієнт кореляції дорівнює 0. Отже, що ближче коефіцієнт кореляції до 1, то тісніша залежність між x і y. Знак (+) за коефіцієнта кореляції означає пряму залежність, знак (–) — зворотну. Якщо $r>0$, то при збільшенні значень однієї та величин друга має тенденцію до збільшення Якщо $r<0$, то при збільшенні значень однієї величини друга має тенденцію до зменшення.

Якщо визначена форма кореляційного зв'язку і обчислений коефіцієнт регресії a_1, то коефіцієнт кореляції можна визначити за формулою:

$$r = a_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

Покажемо порядок розрахунку коефіцієнту кореляції на наступному прикладі.

Задача 9. Розрахуємо величину лінійного коефіцієнта кореляції за даними залежності врожаю сої y від кількості внесених добрив x. Для розрахунку коефіцієнта кореляції збудуємо розрахункову таблицю, в якій введемо і необхідні для розрахунку додаткові графи (табл. 7.20).

Таблиця 7.20

x	y	yx	x^2	y^2
0,3	12	3,6	0,09	144
0,4	14	5,6	0,16	196
0,5	13	6,5	0,25	169
0,6	15	9	0,36	225
0,7	16	11,2	0,49	256
2,5	70	35,9	1,35	990

Звідси

$$\overline{yx} = \frac{\sum yx}{n} = \frac{35,9}{5} = 7,18;$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2,5}{5} = 0,5;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{70}{5} = 14;$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x^2}{2} - \bar{x}^{-2} = \frac{1,35}{5} - 0,5^2 = 0,02; \quad \sigma_x = \sqrt{0,02} = 0,1414;$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum y^2}{n} - \bar{y}^{-2} = \frac{990}{5} - 14^2 = 198 - 196 = 2; \quad \sigma_y = \sqrt{2} = 1,4142;$$

$$r = \frac{7{,}18 - 0{,}5 \cdot 14}{0{,}1414 \cdot 1{,}4142} = \frac{1{,}18}{0{,}2} = 0{,}9, \text{ або } 90\ \%.$$

Лінійний коефіцієнт кореляції показує тісний зв'язок між кількістю внесених добрив (x) і урожайністю (y).

Обчислимо лінійний коефіцієнт кореляції за найбільш зручною формулою. Всі дані для розрахунку коефіцієнта кореляції для нашого прикладу за цією формулою ми вже є.

$$\sum xy = 35{,}9;$$

$$\frac{\sum x \cdot \sum y}{n} = \frac{2{,}5 \cdot 70}{5} = 35;$$

$$\frac{\left(\sum x\right)^2}{n} = \frac{(2{,}5)^2}{5} = 1{,}25;$$

$$\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n} = 1{,}35 - 1{,}25 = 0{,}1;$$

$$\sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n} = 990 - \frac{(70)^2}{5} = 990 - 980 = 10.$$

Обчислимо лінійний коефіцієнт кореляції за наведеною вище формулою:

$$r = \frac{35{,}9 - 35}{\sqrt{0{,}1 \cdot 10}} = \frac{0{,}9}{\sqrt{1}} = 0{,}9.$$

Значення коефіцієнта кореляції співпадає з раніше обчисленим.

В табл. 7.21 обчислимо коефіцієнт кореляції за другою формулою.

Таблиця 7.21

Номер п/п	Кількість добрив (x), ц	Урожайність сої (y), ц	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$	$(y - \bar{y}) \cdot (x - \bar{x})$
1	0,3	12	–0,2	0,04	–2	4	0,4
2	0,4	14	–0,1	0,01	0	0	0
3	0,5	13	0	0	–1	1	0
4	0,6	15	+0,1	0,01	+1	1	0,1
5	0,7	16	+0,2	0,04	+2	4	0,4
Всього	2,5	70		0,10		10	0,9
В середньому	0,5	14					

Підставимо дані із таблиці в формулу коефіцієнта кореляції:

$$r = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum (x-\bar{x})^2 \sum (y-\bar{y})^2}} = \frac{0{,}9}{\sqrt{0{,}1 \cdot 10}} = 0{,}9.$$

І так, показник тісноти зв'язку між кількістю добрив та урожайністю сої становить 0,9. Ця величина свідчить про досить тісний прямий зв'язок між досліджуваними ознаками.

Задачі

7.38. Розрахуйте коефіцієнт кореляції: 1) за даними умови задачі 7.1 гл. 7; 2) за даними задачі 7.2. гл. 7; 3) за даними задачі 7.3. гл. 7; 4) за даними задачі 7.4 гл. 7; 5) за даними задачі 7.5 гл. 7; 6) за даними задачі 7.6 гл. 7.

7.9. Розрахунок множинного коефіцієнту кореляції

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Множинний коефіцієнт кореляції характеризує інтенсивність впливу результативний ознака кількох чинників. Формула множинного коефіцієнта кореляції має вигляд:

$$r_{yxz} = \sqrt{\frac{r_{yz}^2 + r_{yx}^2 - 2r_{yx} \cdot r_{yz} \cdot r_{xz}}{1 - r_{xz}^2}},$$

де r_{xy}, r_{yz}, r_{xz} — парні коефіцієнти кореляції.

Розглянемо приклад розрахунку множинного коефіцієнту кореляції.

Задача 10. Маються такі дані про витрати та доходи 7 сімей:

Дохід на душу за рік (x), тис. грн	90	110	120	130	180	200	280
Число членів сім'ї (z)	1	1	2	2	3	3	4
Витрати сім'ї на товар A за рік (y), тис. грн	8	10	15	18	22	30	40

Відомо, що витрата сім'ї на промислові товари залежить від доходу та розміру сім'ї. Потрібно визначити тісноту зв'язку між витратою, доходом та розміром сім'ї.

Перш ніж розрахувати множинний коефіцієнт кореляції, необхідно

розрахувати парні коефіцієнти кореляції r_{xy}, r_{yz}, r_{xz}, які визначаються за формулами:

$$r_{xy} = \frac{n\sum yx - \sum y\sum x}{\sqrt{\left(n\sum x^2 - (\sum x)^2\right)\left(n\sum y^2 - (\sum y)^2\right)}};$$

$$r_{xy} = \frac{n\sum yz - \sum y\sum z}{\sqrt{\left(n\sum z^2 - (\sum z)^2\right)\left(n\sum y^2 - (\sum y)^2\right)}};$$

$$r_{xz} = \frac{n\sum xz - \sum x\sum z}{\sqrt{\left(n\sum z^2 - (\sum z)^2\right)\left(n\sum x^2 - (\sum x)^2\right)}};$$

Для обчислення цих коефіцієнтів складаємо розрахункову таблицю (табл. 7.22).

Підставимо обчислені значення формули парних коефіцієнтів кореляції:

$$r_{xy} = \frac{189840 - 143\cdot 1110}{\sqrt{\left[1416100 - (1110)^2\right]\left[25879 - (143)^2\right]}} = 0{,}984;$$

$$r_{yz} = \frac{2800 - 143\cdot 16}{\sqrt{\left[308 - (16)^2\right]\left[25879 - (143)^2\right]}} = 0{,}964;$$

$$r_{xz} = \frac{20720 - 1110\cdot 16}{\sqrt{\left[308 - (16)^2\right]\left[1416100 - (1110)^2\right]}} = 0{,}957.$$

Підставляючи значення парних коефіцієнтів у формулу, розрахуємо множинний коефіцієнт кореляції:

$$r_{yxz} = \sqrt{\frac{0{,}984^2 + 0{,}964^2 - 2\cdot 0{,}984\cdot 0{,}964\cdot 0{,}957}{1 - 0{,}957^2}} = 0{,}987.$$

Значення множинного коефіцієнта кореляції, що дорівнює 0,987, говорить про тісний зв’язок між витратами на покупку товару *A*, доходом та розміром сім’ї.

Таблиця 7.22

Номер сім'ї	Дохід на душу за рік (x), тис. грн	Число членів сім'ї (z)	Витрати сім'ї на товар A за рік (y), тис. грн	y^2	z^2	x^2	yx	yz	xz
1	90	1	8	64	1	8 100	720	8	90
2	110	1	10	100	1	12 100	1 100	10	110
3	120	2	15	225	4	14 400	1 800	30	240
4	130	2	18	324	4	16 900	2 340	36	260
5	180	3	22	484	9	32 400	3 960	66	540
6	200	3	30	900	9	40 000	6 000	90	600
7	280	4	40	1 600	16	78 400	11 200	160	1 120
Всього	1110	16	143	3 967	44	202 300	27 120	400	2 960
В середньому	158,571	2,286	20,429	528,1429	6,286	28 900	—	—	—

Задачі

7.39. Маються наступні дані про витрати і доходи 10 сімей:

Таблиця 7.23

Номер п/п	Витрати сім'ї на товар *A* за місяць, грн (*y*)	Дохід сім'ї за місяць, тис. грн (*x*)	Розмір сім'ї (*z*)	Номер п/п	Витрати сім'ї на товар *A* за місяць, грн (*y*)	Дохід сім'ї за місяць, тис. грн (*x*)	Розмір сім'ї (*z*)
1	204,9	9,0	2	6	187,6	15,2	3
2	214,2	10,1	2	7	369,6	15,8	3
3	141,8	12,1	1	8	297,3	16,9	2
4	232,9	12,6	3	9	446,8	19,5	4
5	277,4	13,4	2	10	474,1	21,1	4

Визначити множинний коефіцієнт кореляції.

7.40. *Визначити* множинний коефіцієнт кореляції: 1) за даними задачі 7.28 гл. 7; 2) за даними задачі 7.29 гл. 7; 3) за даними задачі 7.30 гл. 7; 4) за даними задачі 7.31 гл. 7.

7.10. Розрахунок коефіцієнта асоціації та контингенції

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Крім рангових коефіцієнтів кореляції тісноту зв'язку між атрибутивними ознаками можна виміряти за допомогою спеціальних коефіцієнтів. Якщо варіації обох атрибутивних ознак обмежена двома групами (тобто має альтернативний характер), то дані можуть бути зображені у вигляді наступної чотирьох клітковой комбінаційної таблиці:

Таблиця 7.24

Значення другої ознаки	Значення першої ознаки		
	1-е	2-е	Всього
1-е	a	b	$a+b$
2-е	c	d	$c+d$
Всього	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

Тут a, b, c, d — частоти співставлених ознак.

Тіснота зв'язку двох атрибутивних ознак, які мають по два варіанти, визначається за допомогою коефіцієнтів асоціації та контингенції.

Коефіцієнт асоціації — показник оцінки тісноти зв'язку між двома альтернативними ознаками. Коефіцієнт асоціації обчислюють за такою формулою:

$$K_a = \frac{ad - bc}{ad + bc},$$

де a, b, c і d — число одиниць одноразової появи альтернативних ознак.

Коефіцієнт контингенції може бути обчислений за такою формулою:

$$K_к = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}.$$

Ці коефіцієнти за своїм змістом і числовим значенням, які вони можуть приймати, подібні лінійному і ранговому коефіцієнтам. Коефіцієнт контингенції завжди менше коефіцієнта асоціації. Зв'язок вважається підтвердженим, якщо $K_a \geq 0{,}5$, або $K_к \geq 0{,}3$. Розглянемо приклад обчислення коефіцієнту асоціації та контингенції.

Задача 11. Досліджувався зв'язок між виконанням норм виробітку робітниками та рівнем їх освіти. Результати обстеження характеризуються наступними даними:

Таблиця 7.25

Групи робітників	Виконують норми	Не виконують норми	Всього
Закінчили професійно-технічні училища	82	18	100
Не закінчили професійно-технічні училища	36	64	100
Всього	118	82	200

Обчислити коефіцієнти асоціації та контингенції.

Рішення

Розрахуємо коефіцієнт асоціації:

$$K_a = \frac{82 \cdot 64 - 36 \cdot 18}{82 \cdot 64 + 36 \cdot 18} = \frac{4600}{5896} = 0{,}78.$$

Обчислимо коефіцієнт контингенції:

$$K_к = \frac{82 \cdot 64 - 36 \cdot 18}{\sqrt{(82+18)(18+64)(82+36)(36+64)}} = \frac{5248 - 648}{\sqrt{96760000}} = 0{,}47.$$

Отже, коефіцієнт асоціації становить 0,78, а коефіцієнт контингенції 0,47. Це значить, що між рівнем продуктивності праці робітників та проходженням ними підвищення кваліфікації існує тісний взаємозв'язок.

Задачі

7.41. Група робітників заводу, що обстежувалася за станом здоров'я, булла поділена на дві підгрупи: практично здорові робітники та робітники, які потребують лікування. Результати обстеження наведені в табл. 7.26.

Таблиця 7.26

Група робітників	Практично здорові	Потребують лікування	Всього
Сильні	178	79	257
Несильні	92	131	223
Всього	270	210	480

Обчислити коефіцієнти контингенції та асоціації.

7.42. Масову продукцію, що випускається заводом, можна поділити на дві групи: надійну, якість якої дорівнює гарантійному або вище його, і ненадійну. Для характеристики продукції складена табл.:

Таблиця 7.27

Результат експлуатації / Результат контролю	Надійна	Ненадійна	Всього
Придатна	187	19	206
Брак	23	31	223
Всього	210	50	480

Обчислити коефіцієнти контингенції та асоціації.

7.43. Метою обстеження було виявлення зв'язку між привичками проти ящуру і захворюваністю ящуром у дітей в одному із районів. Результати обстеження наведені в табл. 7.28. *Обчислити* коефіцієнти асоціації.

Таблиця 7.28

Група дітей	Захворіло	Не захворіло	Всього
Привиті	57	6 757	6 814
Не привиті	271	11 398	11 669
Всього	328	18 155	18 483

7.44. Маються наступні дані про розподіл 100 робітників за виконанням норм виробітку:

Таблиця 7.29

Групи робітників за статтю	Групи робітників за виконанням норм		
	виконують норми	не виконують норми	Всього
Чоловіки	65	5	70
Жінки	26	4	30
Всього	91	9	100

Обчислити коефіцієнти асоціації та контингенції.

7.11. Розрахунок коефіцієнта взаємної сполученості А. А. Чупрунова та Пірсона

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Коефіцієнти взаємно сполученості є мірами тісноти зв'язку між варіюванням двох атрибутивних ознак, коли це варіювання утворює декілька (три і більше) груп.

Коефіцієнт взаємної сполученості А. А. Чупрова ($K_{\text{сопр. Чупр}}$) застосовується для вимірювання тісноти зв'язку атрибутивних показників і розраховується за формулою:

$$K_{\text{сопр. Чупр}} = \sqrt{\frac{\varphi^2}{(m_1 - 1)(m_2 - 1)}},$$

де m_1 — позначає кількість можливих значень першої статистичної величини (кількість груп);

m_2 — кількість можливих значень другої статистичної величини;

φ^2 — показник взаємної спряженості, який визначається як сума відношень квадратів частот кожної клітини таблиці розподілу до добутку підсумкових частот відповідного стовпця та рядка. Віднімаючи з цієї суми одиницю, отримаємо величину φ^2.

Коефіцієнт взаємної сполученості Пірсона ($K_{\text{сопр. Пирс}}$) розраховується за формулою:

$$K_{\text{сопр. Пірс}} = \sqrt{\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}}.$$

Методику розрахунку коефіцієнтів Чупрова і Пірсона розглянемо на наступному прикладі.

Задача 12. Дослідимо тісноту зв'язку між заняттям фізичною культурою та успішністю 100 студентів економічного факультету вузу. Відомості про розподіл студентів по поєднанню відповідних значень приведені в табл. 7.30.

Таблиця 7.30

Групи студентів за інтенсивністю заняття фізкультурою	Групи студентів за успішністю			
	слабка	середня	хороша	Всього
Мало або зовсім не займаються	3 (9) 0,9	14 (196) 3,56	– – –	17 – 4,46 0,262
Займаються помірно	7 (49) 4,9	26 (676) 12,29	10 (100) 2,86	43 – 20,05 0,466
Займаються посилено	– – –	15 (225) 0,27	25 (625) 17,86	40 – 18,13 0,453
Всього	10	55	35	100; 1,182

Обчислювальна робота провадиться за наступною схемою.

1. У верхній частині кожної клітини цієї схеми записуються частоти.

2. Частоти зводяться в квадрат, результат записується внизу в скобках.

3. Зведені у квадрат частоти поділяються на підсумки частот відповідного стовпця (наприклад, 9:10, 196:55 і т. д.). Отримані результати записуються у нижній частині відповідних клітин.

4. Числа, записані внизу кожної клітини, підсумовуються для кожного рядка; суми записуються у нижній частині клітин підсумкового стовпця (0,9+3,56=4,46).

5. Вказані в підсумковому стовбцю суми ділять на відповідні частоти, які записані в тих же клітках (4,46:17, 20,05:43, 18,13:40); результати ділення проставляються тут же рядом із сумами, обчисленими відповідно по п. 4.

6. Суми цих чисел за підсумковому стовбцю (1,182) без одиниці і представляють собою φ^2:

$$\varphi^2 = 1{,}182 - 1{,}000 = 0{,}182.$$

Число груп по стовбцям нашої таблиці (m_1) складає 3, за строчками (m_2) — відповідно 3.

Підставляючи ці значення в наведені вище формули коефіцієнтів взаємної сполученості:

$$K_{\text{сопр. Чупр}} = \sqrt{\frac{\varphi^2}{(m_1 - 1)(m_2 - 1)}} = \sqrt{\frac{0{,}182}{(3-1)(3-1)}} =$$

$$\sqrt{0{,}0455} = 0{,}213.$$

$$K_{\text{сопр. Пірс}} = \sqrt{\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}} = \sqrt{\frac{0{,}182}{1+0{,}182}} = \sqrt{0{,}15398} \approx 0{,}392.$$

Значення коефіцієнта Пірсона та Чупрова свідчать про значний зв’язок між заняттям фізкультурою та успішністю студентів. Коефіцієнт А. Чупрова є більш гнучким, оскільки він враховує число утворених за кожною ознакою груп. Тому результат 0,213 є більш точним порівняно з обчисленим коефіцієнтом взаємної сполученості за формулою К. Пірсона.

Задачі

7.45. Розподіл студентів за інтенсивністю заняттям фізкультури та успішністю приведені в табл. 7.31. *Обчислити* коефіцієнти взаємної сполученості Чупрова та Пірсона.

Таблиця 7.31

Групи студентів за інтенсивністю заняття фізкультурою	Групи студентів за успішністю			
	слабка	середня	хороша	Всього
Мало або зовсім не займаються	2	13	–	15
Займаються помірно	8	27	10	45
Займаються посилено	–	15	25	40
Всього	10	55	35	100

7.46. За умовами задач 7.41, 7.42 і 7.43 *обчисліть* коефіцієнти взаємної спряженості А. Чупрова і Пірсона.

7.47. Розподіл ділянок сортової станції за урожайністю та поливом приведені в табл. 7.32.

Таблиця 7.32

Групи ділянок за урожайністю	Групи ділянок за поливом			
	слабкий	середній	хороший	Всього
Низька	30	42	2	74
Середня	83	247	48	348
Висока	2	54	22	78
Всього	85	343	72	500

Обчислити коефіцієнти взаємної сполученості Чупрова та Пірсона.

7.12. Розрахунок коефіцієнту кореляції рангів

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Для вимірювання тісноти кореляційної залежності використовуються рангові коефіцієнти кореляції. Одним із таких показників є коефіцієнт кореляції рангів К. Спірмена.

Коефіцієнт кореляції рангів (коефіцієнт Спірмена) розраховується за значеннями двох взаємозалежних ознак, а, по їх рангами за наступною формулою:

$$\rho_{x/y} = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)},$$

де $\rho_{x/y}$ — коефіцієнт кореляції рангів;

d_i^2 — квадрати різниць рангів;

n — число спостережень (число пар рангів).

Величина коефіцієнту кореляції ранків змінюється від +1 до –1; зміст його такий же, як і r. Ранговий коефіцієнт кореляції має перевагу над лінійним. Він може бути обчислений при любій формі розподілу досліджуваних ознак, тоді як r пристосований і дає добрі результати лише при нормальному розподілі.

Розрахунок коефіцієнта Спірмена здійснюється у такій послідовності:

1) проводять ранжування значень обох змінних;

2) для кожного значення віднімають із значень рангу х значення у;

3) зводять отримані значення різниць квадрат;

4) знаходять суму квадратів різниць.

Методику розрахунку коефіцієнту кореляції рангів покажемо на наступному прикладі.

Задача 13. По 10 підприємствам маються дані про розмір випуску продукції (факторна ознака) і витрат на збут (результативна ознака):

Випуск продукції (x), млн грн	14,5	32,5	13,3	21,3	18,5	26,5	16,3	40,2	27,9	22,6
Витрати на збут (y), тис. грн	476	1096	522	832	720	776	895	1155	895	729

Визначити коефіцієнт кореляції рангів.

Рішення

Розташуємо індивідуальні величини обсягу випущеної продукції в порядку зростання (або спадання) і встановлюємо ранг (порядкові номери величин ознаки):

Випуск продукції (x), млн грн	13,3	14,5	16,3	18,5	21,3	22,6	26,5	27,9	32,5	40,2
Ранги R_x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Розташуємо індивідуальні величини витрат на збут у порядку зростання та визначаємо ранги (порядкові номери) величин отриманого ряду:

Витрати на збут (y), тис. грн	476	522	720	729	776	832	895	895	1096	1155
Ранги R_y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Складемо розрахункову таблицю для обчислення рангового коефіцієнта кореляції.

Таблиця 7.33

Номер підприємства	x	y	Ранжування				Порівняння рангів		Різниця рангів $d_i = R_x - R_y$	d_i^2
			x	y	ранг					
					R_x	R_y	R_x	R_y		
1	14,5	476	13,3	476	1	1	2	1	1	1
2	32,5	1 096	14,5	522	2	2	9	9	0	0
3	13,3	522	16,3	720	3	3	1	2	–1	1
4	21,3	832	18,5	729	4	4	5	6	–1	1
5	18,5	720	21,3	776	5	5	4	3	1	1
6	26,5	776	22,6	832	6	6	7	5	2	4
7	16,3	895	26,5	895	7	7	3	7	–4	16
8	40,2	1 155	27,9	895	8	8	10	10	0	0
9	27,9	895	32,5	1 096	9	9	8	8	0	0
10	22,6	729	40,2	1 155	10	10	6	4	2	4
										$\sum = 28$

Коефіцієнт кореляції рангів обчислимо за такою формулою:

$$\rho_{x/y} = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \cdot 28}{10(10^2-1)} = 1 - \frac{168}{990} = 0{,}830.$$

Величина коефіцієнт кореляції рангів свідчить про наявність прямого тісного зв'язку між обсягом реалізованої продукції та витратами на збут.

Задачі

7.48. Маються наступні дані по 10 підприємствам:

Середньооблікова чисельність робітників (x), осіб	200	230	500	650	1000	150	450	550	400	800
Випуск продукції (y), млн грн	250	524	612	325	160	240	156	108	86	105

Розрахуйте рангові коефіцієнти кореляції.

7.49. Маються наступні дані про успішність по загальноекономічним дисциплінам і статистичним дисциплінам у 8 студентів. *Обчислити* коефіцієнт кореляції рангів Спірмена.

Середній бал успішності по загальноекономічним дисциплінам	3,0	3,6	3,8	3,9	4,1	4,3	5,0	5,0
Середній бал успішності по статистичним дисциплінам	3,1	3,5	4,0	4,0	4,5	4,5	5,0	5,0

7.50. Маються наступні дані по 7 підприємствам:

Розмір основних засобів (x), млн грн	7	9	10	6	11	12	8
Випуск продукції (y), млн грн	19	22	23	16	14	20	22

Розрахуйте рангові коефіцієнти кореляції.

7.51. Маються наступні дані по 8 підприємствам:

Валова продукція (x), млн грн	410	628	970	860	830	840	340	620
Адміністративні витрати (y), млн грн	620	740	450	480	680	800	510	420

Розрахуйте рангові коефіцієнти кореляції.

7.52. Маються наступні дані по 10 торговельним підприємствам:

Товарооборот (x), млн грн	660	550	570	620	600	640	510	490	560	470
Витрати обігу (y), млн грн	34	26	29	40	35	30	27	30	25	70

Розрахуйте рангові коефіцієнти кореляції.

7.13. Розрахунок коефіцієнту Фехнера

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Другий, такий же простий, показник, що вимірює тісноту зв'язку, пов'язаний із іменем відомого німецького вченого — психофізика Фехнера. Цей показник ґрунтується на обліку збігів знаків порівнюваних ознак. від їх середніх арифметичних.

Коефіцієнт Фехнера ($K_ф$) обчислюється за такою формулою

$$K_ф = \frac{C - H}{C + H},$$

де C — число випадків збігів знаків відхилень індивідуальних значень від середньої;

H — число випадків незбігів знаків відхилень індивідуальних знаків від середньої.

Коефіцієнт Фехнера змінюється від +1 до –1. Якщо $K_ф$ дорівнює +1, то, отже, є повний прямий зв'язок, при $K_ф$=0 мінливість повністю не узгоджується, при $K_ф$=1 мається повний зворотний зв'язок. Проміжні значення характеризує рівень близькості зв'язку до функціональної.

Розглянемо порядок обчислення коефіцієнту Фехнера на наступному прикладі.

Задача 14. Визначимо тісноту зв'язку за допомогою коефіцієнта знаків Фехнера залежність між машиноозброєністю праці та виробленням будівельної цегли на 24 однотипних заводах. Висхідні дані наведені в перших трьох стовпчиках табл. 7.34.

Таблиця 7.34

№ п/а	Машино-озброєність, тис. грн/осіб.	Вироблення будівельної цегли на 1 робітника за місяць, шт.	Знаки відхилень індивідуальної величини від середньої		Збіг (*a*) і незбіг знаків (*b*)
			для *x*	для *y*	
1	2	3	4	5	6
1	5,4	700	–	–	*a*
2	5,8	750	–	–	*a*
3	6,0	830	–	–	*a*
4	6,4	910	–	–	*a*
5	7,1	980	–	–	*a*
6	8,2	1 010	–	–	*a*
7	8,8	1 160	–	–	*a*
8	9,0	1 080	–	–	*a*
9	9,3	1 150	–	–	*a*
10	9,6	1 070	–	–	*a*
11	9,9	1 200	–	–	*a*
12	10,5	1 150	–	–	*a*
13	10,8	1 280	–	+	*b*
14	11,5	1 300	–	+	*b*
15	12,9	1 220	+	+	*a*
16	13,0	1 350	+	+	*a*
17	14,7	1 290	+	+	*a*
18	15,4	1 380	+	+	*a*
19	16,2	1 350	+	+	*a*
20	17,4	1 460	+	+	*a*
21	17,8	1 440	+	+	*a*
22	18,1	1 520	+	+	*a*
23	18,2	1 560	+	+	*a*
24	19,4	1 680	+	+	*a*

Рішення

Розрахуємо середні арифметичні. Середня машиноозброєність праці ($\bar{x}$) становитиме 11,7 (281,4:24); середній виробіток будівельної цегли на 1 робочої ($\bar{y}$) — 1200,8 (28820:24). Обчислимо суму знаків відхилень значень ознак середніх арифметичних. Ці знаки відхилень за ознаками *x* і *y* (див. табл. 7.34) наведено у графах 4 та 5 табл. 7.34. Знак мінус означає, що значення ознаки менше середньої, знак плюс — більше. Збіг знаків за обома ознаками означає узгоджену варіацію, розбіжність — порушення узгодженості.

Коефіцієнт Фехтера складе:

$$K_{\text{ф}} = \frac{C - H}{C + H} = \frac{22 - 2}{22 + 2} = \frac{20}{24} = 0{,}833.$$

В розглянутому прикладі між машиноозброєністю та виробітком продукції існує достатньо тісний прямий зв'язок.

Задачі

7.53. Маються наступні дані:

Товарообіг за місяць (*x*), тис. грн	480	510	540	570	600	630	650	660	660	670
Витрати обігу магазину (*y*), тис. грн	30	24	31	27	29	32	35	35	37	40

Обчислити коефіцієнт Фехнера.

7.54. Маються наступні дані:

Випуск продукції (*x*), тис. шт.	240	255	270	285	295	310	320	325	330	
Витрати упаковку (*y*), тис. грн	60	50	62	56	58	64	73	73	74	77

Обчислити коефіцієнт Фехнера.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Горкавий В. К.* Статистика: Підручник. Третє вид., переробл. і доповн. Київ: Алерта, 2019. С. 239–87.
2. Статистика: Підручник / *С. С. Герасименко, А. В. Головач, А.М. Єріна* та ін.; За наук. ред. д-ра екон. наук С. С. Герасименка. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: КНЕУ, 2000. С. 100–120.
3. *Ткач Є. І., Сторожук В. П.* Загальна теорія статистики: підручник. 3-тє

вид. Київ: Центр учбової літератури, 2009. С. 196–241.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

Навчальні посібники, словники

4. *Мармоза А. Т.* Теорія статистики: підручник. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: «Центр учбової літератури», 2013. 333–396.
5. *Педченко Г. П.* Статистика: Навчальний посібник. Мелітополь: Колор Принт, 2018. С. 32–57.
6. Статистичний словник / [*О. Г. Осауленко*, *О. О. Васєчко*, *М. В. Пугачова* та ін.]; за ред. д-ра держ. упр., проф., член-кор. НАН України О. Г. Осауленка; НТК статистичних досліджень. Київ: ДП «Інформ.-аналіт. агентство», 2012. 498 с.
7. *Шапочка М. К.*, *Маценко О. М.* Теорія статистики: навч. посібник. Суми: Університетська книга, 2014. С. 203–218.

Глава 8. РЯДИ ДИНАМІКИ

8.1. Встановлення виду ряду динаміки

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Ряди динаміки — ряди статистичних даних, що характеризують розвиток явища у часі. Динамічні ряди дозволять встановити закономірності та тенденції зміни явищ, полегшує зіставлення та аналіз показників. За допомогою динамічних рядів досліджується інтенсивність зміни аналізованих показників (зростання, зменшення, стабільність); вивчається середній рівень показника та середня інтенсивність зміни; визначаються тенденція у зміні показників.

Залежно від цього вони поділяються на *моментні*, чи *інтервальні* ряди динаміки. Залежно від способу вираження рівнів ряди динаміки поділяється на ряди *абсолютних*, *відносних* і *середніх* величин.

При побудові рядів динаміки слід звернути увагу до порівнянність показників їх змісту, одиницям виміру, території, методу обчислення, а при побудові інтервальних рядів враховувати порівнянність тривалості тих періодів, яких належить даний ряд.

Визначення ряду динаміки має важливе значення для їх дослідження. Вибір відповідних прийомів і способів обробки даних в значній мірі визначається характером висхідних даних і залежить від цілей дослідження. Тому, перед обробкою та аналізом рядів динаміки, важливо правильно віднести їх до того чи іншого виду.

Задача 1. Чисельність населення області характеризується наступними даними (на початок року; тис. осіб):

1980 р.	1990 р.	2000 р.	2010 р.	2020 р.
1 542,4	1 562,7	1 578,3	1 564,9	1 612,3

Це моментний ряд динаміки абсолютних величин з рівновіддаленими рівнями у часі. Його рівня характеризують узагальнені підсумки обліку станом на визначені дати (на 1 січня відповідного року). Оскільки окремі особи, які обліковувалися, наприклад, при обліку в 1980 р. живуть і в теперішній час, то вони є одночасно одиницями різних сукупностей. Тому окремі рівні моментного ряду містять окремі елементи, які враховуються два рази і більше. Це робить беззмістовним їх сумування.

Прикладом моментного ряду абсолютних величин з нерівновідда-

лениими інтервалами у часі може слугувати ряд динаміки, яких показує чисельність платників єдиного податку в області (на кінець року):

	2010 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Тис.	24,2	25,7	27,4	31,9	36,3

Рівні цього ряду — узагальнені підсумки числа платників єдиного податку станом на визначену дату (на 31 грудня). Окремі рівні динаміки містять елементи повторного рахунку, наприклад, платник єдиного податку в 2017 р. обліковується також і в 2018 р. і т. п. Все це робить безмістовним сумування рівнів моментного ряду.

Задача 2. Виробництво мінеральних добрив на хімічному заводі характеризується наступними даними (тис. т):

2000 р.	2005 р.	2010 р.	2015 р.	2020 р.
114,2	122,7	127,4	136,9	141,3

Наведений ряд динаміки — інтервальний, рівні цього ряду — узагальнені підсумки вироблення мінеральних добрив за чітко визначені проміжки часу (за кожен рік з 1 січня по 31 грудня). Оскільки первинні дані інтервального ряду динаміки не містять повторного рахунку, то їх елементи можна сумувати.

Задача 3. Розмір середньої заробітної плати в Україні за окремими видами економічної діяльності в 2021 р. (грн):

Таблиця 8.1

Види економічної діяльності	Січень	Лютий	Березень
Промисловість	13 374	13 197	14 995
Сільське господарство, лісове господарство та рибне господарство	9 565	9 596	10 685
Оптова та роздрібна торгівля; ремонт автотранспортних засобів і мотоциклів	11 898	12 246	13 854

Це ряд динаміки середніх величин. Він характеризує середній розмір заробітної плати робітників за кожним видом економічної діяльності. Подібно інтервальним рядам, вони характеризують періоди часу (місяць), але сумування цих рівнів самостійного значення не має.

Задачі

8.1. За матеріалами статистичного щорічника «Статистичний щорічник України за 2020 рік» (м. Київ, 2021) *установіть*, до якого виду від-

носяться ряди динаміки: 1) чисельність наявного населення України (с. 29); 2) кількість живонароджених, померлих та природний приріст (скорочення) населення (с. 36); 3) споживання продуктів харчування у домогосподарствах із різними середньодушовими еквівалентними загальними доходами (с. 96); 4) мережа та заклади охорони здоров'я (с. 125); 5) структура валової доданої вартості за видами економічної діяльності в обсязі валового внутрішнього продукту (с. 186).

8.2. Використовуючи матеріали статистичного щорічника «Статистичний щорічник за 2020 рік» (м. Київ, 2021), *установіть*, до якого виду відносяться ряди динаміки: 1) індекси фізичного обсягу валового регіонального продукту (с. 200); 2) кредити, надані депозитними корпораціями (банками) резидентам (с. 207); 3) індекс споживчих цін та виробників (с. 209); 4) ступінь зносу основних засобів за видами економічної діяльності (с. 227); 5) виробництво окремих видів продукції добувної промисловості і розроблення кар'єрів (с. 245); 6) рухомий склад за видами транспорту та призначенням (с. 349).

8.3. За матеріалами статистичного щорічника «Статистичний щорічник за 2020 рік» (м. Київ, 2021), *установіть*, до якого виду відносяться ряди динаміки: 1) виробництво хліба та виробів хлібобулочних, нетривалого зберігання за регіонами (с. 267); 2) індекси сільськогосподарської продукції за категоріями господарств (с. 271); 3) структура продукції сільського господарства за категоріями виробників (с. 273); 4) середні ціни продукції сільського господарства, реалізованої підприємствами та господарствами населення (с. 279); 5) урожайність сільськогосподарських культур (с. 296); 6) перевезення вантажів за видами транспорту.

8.4. Маються наступні дані, що характеризують питому вагу чисельності міського і сільського населення області в загальній чисельності населення (на початок року, %):

Таблиця 8.2

Рік	Все населення	В тому числі	
		міське	сільське
2018	100	63,4	36,6
2019	100	64,1	35,9
2020	100	64,3	35,7
2021	100	65,2	34,8

Установіть, до якого виду відноситься наведений ряд динаміки. *Дайте відповідь*, чи можна сумувати рівні даного ряду.

8.5. За матеріалами статистичного щорічника «Статистичний щорі-

чник за 2020 рік» (м. Київ, 2021), *установіть*, до якого виду відносяться ряди динаміки: 1) середня відстань перевезення одного пасажира окремими видами транспорту (с. 352); 2) зовнішня торгівля товарами за країнами (с. 353); 3) роздрібний товарооборот підприємств роздрібної торгівлі за товарними групами (с. 376); 4) кількість працівників, задіяних у виконанні наукових досліджень і розробок, за категоріями персоналу (с. 417); 5) структура грошових доходів домогосподарств (с. 89).

8.2. Приведення рядів динаміки до співставного виду

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Ряди динаміки отримують на основі даних статистичного спостереження за певні проміжки часу. Отримані в результаті спостереження дані групують у хронологічній послідовності. Проте на протязі певного проміжку часу можуть відбуватися зміни, які викликають неспівставність рівнів ряду. Це робить ряди динаміки непридатними для подальшої обробки та аналізу. Тому важливою умовою підготовки рядів динаміки для подальшої обробки та аналізу є встановлення у відповідності до задач дослідження причин, які викликають неспівставність статистичних даних, та подальша обробка матеріалів для досягнення співставності ряду динаміки.

Наведемо характерні приклади для приведення рядів динаміки до співставного ряду.

Задача 4. Маються наступні дані про виробництво м’яса (у вазі живої худоби) в сільськогосподарських підприємствах району, тис. ц:

В межах	2017	2018	2019	2020	2021	2022
старих	213,1	224,5	231,7	–	–	–
нових	–	–	351,6	362,8	375,1	389,2

Приведіть рівні ряду до співставного виду.

Рішення

Для приведення ряду динаміки до співставного виду визначимо для 2019 р. коефіцієнт співвідношення рівнів двох видів:

$$351{,}6 : 231{,}7 = 1{,}52.$$

Помножуючи цей коефіцієнт рівні 1-го ряду, отримаємо їх співставність з рівнями 2-го ряду, тис. ц:

2017 р. — 213,1·1,52=323,9;
2018 р. — 224,5·1,52=341,2.

Отримаємо співставний ряд динаміки виробництва м'яса (в живій вазі худоби) в сільськогосподарських підприємствах району (в нових межах):

2017	2018	2019	2020	2021	2022
323,9	341,2	351,6	362,8	375,1	389,2

Головною причиною неспівставності рядів динаміки в даному випадку виникла в результаті територіальних змін площ районів.

Другий спосіб змикання рядів динаміки полягає в тому, що рівня року, в якому відбулися зміни (в нашому прикладі 2019 р.) приймається за 100 %. Інші рівні ряду перераховуються в процентах по відношенню до даного рівня ряду. В результаті отримується зімкнутий ряд.

Взявши висхідні дані нашого прикладу, отримаємо наступний зімкнутий ряд:

Таблиця 8.3

	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Виробництво м'яса в нових межах району (в % до 2019 р.)	60,6	63,9	100,0	103,2	106,7	110,7

Неспівставність рядів динаміки може виникнути і в тому випадку, коли вони складені із рівновеликих за тривалістю періодів часу.

Задача 5. Маються наступні дані про виробництво продукції в механічному цеху за кварталами (шт.):

I	II	III	IV
2236	2275	2160	2392

Приведіть рівні ряду до співставного виду.

Рішення

Для приведення цього ряду динаміки до співставного виду визначимо щоденний обсяг виробництва продукції в цеху з урахуванням числа робочих днів за кварталами:

I 2236:83=26;
II 2275:91=25;
III 2160:90=24;
IV 2392:92=26.

В результаті перетворень був отриманий ряд динаміки рівнів виробництва продукції механічного цеху за кварталами (щоденний обсяг виробництва продукції; шт.):

I	II	III	IV
26	25	24	26

Задачі

8.6. Маються наступні дані про виробництво овочем в сільськогосподарських підприємствах району, тис. ц:

В межах	2017	2018	2019	2020	2021	2022
старих	41,6	43,2	45,7	–	–	–
нових	–	–	63,1	62,8	65,6	68,2

Укажіть на неспівставність рівнів ряду динаміки. *Приведіть* рівні ряду до співставного виду. *Встановіть* вид ряду динаміки і зобразіть виробництво овочем в сільськогосподарських підприємствах району у вигляді лінійної діаграми.

8.7. Обсяг валового регіонального продукту області за роками характеризується наступними даними (млрд грн):

Межі області	2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.
Стара	23,4	25,7	26,8	–	–
Нова	–	–	23,5	24,6	24,9

Привести ряд динаміки до співставного виду; *обчислити* щорічні темпи зростання, темпи приросту, середньорічний темп зростання і приросту; щорічні темпи зростання; *представити* на графіку.

8.8. Маються наступні дані про вартість основних виробничих засобів підприємства, млн грн:

Показник	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Середньорічна вартість	13,8	15,6	16,8	15,3	–	–	–	–
Вартість на кінець року	–	–	–	16,8	17,5	18,4	19,2	20,9

Укажіть на неспівставність рівнів ряду динаміки. *Здійсніть* приведення ряду динаміки до співставного виду.

8.9. Маються наступні дані про роздрібну реалізацію ковбасних виробів в торговельній мережі міста за кварталами (кг):

I	II	III	IV
11760	13050	13156	12960

Кількість робочих днів за квадратами: I — 84; II — 90; III — 92; IV — 90. *Укажіть* на неспівставність рівнів ряду динаміки. *Приведіть* рівні ряду до співставного виду.

8.3. Визначення середнього рівня динаміки

Методичні вказівки та рішення типової задачі

В процесі аналізу рядів динаміки виникає необхідність отримання узагальнюючої величини його абсолютних рівнів. З цією метою обчислюють середній рівень ряду як середню величину рядів динаміки. Порядок розрахунку середніх величин залежить в значній мірі від виду ряду динаміки і способів отримання статистичних даних.

Середній рівень інтервального ряду принципово можна розрахувати за формулою:

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{\sum t},$$

де y — рівні;

t — тривалість окремих інтервалів часу.

В моментних рядах динаміки з *рівновіддаленими датами* середній рівень ряду динаміки визначають за формулою середньої хронологічної моментного ряду динаміки:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + \frac{1}{2}y_n}{n-1}.$$

Середня хронологічна із *різновіддалених рівнів* моментного ряду динаміки обчислюється за формулою:

$$\bar{y} = \frac{(y_1 + y_2)t_1 + (y_2 + y_3)t_2 + (y_3 + y_4)t_3 + \ldots + (y_{n-1} + y_n)t_{n-1}}{2\sum t_{n-1}}.$$

Розглянемо порядок розрахунку середніх рівнів ряду динаміки.

Задача 6. Маються наступні дані про обсяг виробництва соняшни-

ку в Україні за 2016–2020 рр.:

Таблиця 8.4

	2014 р.	2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Виробництво соняшнику, тис. т	10134	11184	13627	12236	14165	15254	13110

Обчисліть середньорічний рівень виробництва соняшнику: 1) за 2015–2017 рр.; 2) за 2018–2020 рр. *Визначте*, на скільки тис. т рівень виробництва соняшнику за 2018–2020 рр. перевищував середній рівень за 2015–2017 рр. і рівень 2014 р.

Рішення

Середній рівень виробництва соняшнику обчислюється за формулою простої середньої арифметичної:

$$\bar{y}_{2015-2017} = \frac{11184 + 13627 + 12236}{3} = \frac{37047}{3} = 12349{,}0 \text{ тис. т;}$$

$$\bar{y}_{2018-2020} = \frac{14165 + 15254 + 13110}{3} = \frac{42529}{3} = 14176{,}3 \text{ тис. т.}$$

Середній рівень виробництва соняшнику за 2018–2020 рр. перевищує середній рівень виробництва за 2015–2017 рр. на 1827,3 тис. т (14176,3 – 12349), або на 14,8 % $\left(\frac{1827{,}3 \times 100}{12349{,}0}\right)$.

Задача 7. Вартість основних засобів підприємства на протязі звітного року характеризується наступними даними (млн грн):

Таблиця 8.5

01.01.2021	01.04.2021	01.09.2021	01.11.2022
25,4	26,8	27,1	28,6

Визначити середньорічну вартість основних виробничих засобів.

Рішення

Середньорічну вартість основних виробничих засобів знаходимо за формулою середньої арифметичної зваженої:

$$\bar{y} = \frac{\sum yt}{t},$$

де y — рівні ряду;

t — час.

Підставивши дані задачі, отримаємо середньорічну вартість основних виробничих засобів:

$$\bar{y} = \frac{25{,}4 \cdot 3 + 26{,}8 \cdot 5 + 27{,}1 \cdot 2 + 28{,}6 \cdot 2}{12} = \frac{321{,}6}{12} = 26{,}8 \text{ тис. грн.}$$

Задача 8. Первісна вартість основних фондів (на 1-е число) за місяцями звітного року характеризується наступними даними:

Первісна вартість основних фондів (на 1 число місяця)

Таблиця 8.6

	Назва місяця												
	січень	лютий	березень	квітнень	травень	червень	липень	серпень	вересень	жовтень	листопад	грудень	січень
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	I
Вартість основних фондів, млн грн	13,5	13,3	14,7	14,6	14,2	13,6	15,1	15,4	15,8	16,9	16,8	16,1	16,4

Визначити: середньорічну вартість основних фондів.

Рішення

Якщо на підприємстві основні фонди обліковуються на кінець кожного місяця, то зазвичай для визначення середньорічної (планової, фактичної) вартості основних засобів застосовують формулу середньої хронологічної моментного ряду динаміки.

Середньорічна (планова, фактична) вартість основних виробничих фондів складе:

$$\bar{F} = \left(\frac{13{,}5}{2} + 13{,}3 + 14{,}6 + 14{,}7 + 14{,}2 + 13{,}6 + 15{,}1 + 15{,}4 + 15{,}8 + 16{,}9 + 16{,}8 + \right.$$

$$\left. + 16{,}1 + \frac{16{,}4}{2} \right) : (13 - 1) = \frac{181{,}5}{12} = 15{,}1 \text{ млн грн.}$$

Задача 9. Товарні запаси цукру в торгівлі склали:

на 1 січня — 560 т;
на 1 лютого — 520 т;
на 1 березня ——405 т;
на 1 квітня — 470 т.

Визначте середньоквартальний запас цукру в торгівлі.

Рішення

Оскільки за умови задачі ряд динаміки запасу цукру є моментним, то середній запас цукру за квартал обчислимо за допомогою формули середньої хронологічної:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n-1},$$

де $y_1, y_2 \ldots, y_n$ — показники ряду динаміки;

n — число рівновіддалених один від іншого рівнів ряду динаміки.

Середньоквартальний запас цукру в торгівлі становитиме:

$$\frac{\frac{560}{2} + 520 + 410 + \frac{470}{2}}{4-1} = 480 \text{ т.}$$

Задачі

8.10. Маються наступні дані про вартість основних засобів на машинобудівному заводі (на початок відповідного місяця; млн грн):

Таблиця 8.7

Місяці	Січень 2021 р.	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Червень	Липень	Серпень	Вересень	Жовтень	Листопад	Грудень	Січень 2022 р.
Основні засоби	48,4	49,2	47,6	49,2	49,6	52,3	52,1	53,6	54,7	53,8	53,8	54,3	52,7

Обчисліть середню вартість основних засобів: а) за кожен квартал; б) за кожне півріччя; в) за рік. Яку середню слід застосувати при рішенні цієї задачі?

8.11. Залишки коштів на розрахунковому рахунку підприємства в банку склали на 1 вересня 220 тис. грн, 17 вересня надійшло на розрахунковий рахунок 110 тис. грн, а 20 вересня надходження склали 50 тис. грн. З 26 вересня було сплачено рахунок за поставлені матеріали на суму 76 тис. грн. *Визначити* середній за місяць залишок коштів на розрахунковому рахунку підприємства, якщо з 26 вересня і до кінця місяця ніяких надходжень або вибуття коштів не було.

8.12. Маються наступні дані про рух робітників на заводі за травень. На 1-е число їх було 73 чоловік, 7 травня було прийнято 8 осіб,

11 травня було звільнено 6 осіб, 26 травня було прийнято 4 чоловік. Визначте середню чисельність робітників на заводі за травень. Який вид середньої слід застосувати?

8.13. Маються наступні дані про рух робітників на заводі за жовтень. На 1-е число їх було 67 чоловік, 8 жовтня було прийнято 4 особи, 13 жовтня було звільнено 2 осіб, 14 жовтня — звільнено 3 осіб, 2, жовтня було прийнято 5 чоловік. Визначте середню чисельність робітників на заводі за жовтень. Який вид середньої слід застосувати?

8.14. Залишки коштів на розрахунковому рахунку підприємства в банку склали на 1 вересня 220 тис. грн, 17 вересня надійшло на розрахунковий рахунок 110 тис. грн, а 20 вересня надходження склали 50 тис. грн. З 26 вересня було сплачено рахунок за поставлені матеріали на суму 76 тис. грн. *Визначити* середній за місяць залишок коштів на розрахунковому рахунку підприємства, якщо з 26 вересня і до кінця місяця ніяких надходжень або вибуття коштів не було.

8.15. Маються наступні дані про рух робітників на заводі за травень. На 1-е число їх було 73 чоловік, 7 травня було прийнято 8 осіб, 11 травня було звільнено 6 осіб, 26 травня було прийнято 4 чоловік. Визначте середню чисельність робітників на заводі за травень. Який вид середньої слід застосувати?

8.16. Маються наступні дані про рух робітників на заводі за жовтень. На 1-е число їх було 67 чоловік, 8 жовтня було прийнято 4 особи, 13 жовтня було звільнено 2 осіб, 14 жовтня — звільнено 3 осіб, 2, жовтня було прийнято 5 чоловік. Визначте середню чисельність робітників на заводі за жовтень. Який вид середньої слід застосувати?

8.17. Залишки товарно-матеріальних цінностей на складах підприємства характеризується наступними даними:

Таблиця 8.8

Роки	На 1 січня	На 1 квітня	На 1 липня	На 1 жовтня
2017	485	510	512	524
2018	536	523	548	540
2019	529	509	490	504
2020	515			

Визначити, на скільки гривен і на скільки процентів змінилася середня сума залишків товарно-матеріальних цінностей на складах підприємства в 2018 р. порівняно з 2017 р. і в 2019 р. порівняно з 2017 р. і 2018 р.

8.18. Запаси матеріалів на складі швейної фабрики склали на почa-

ток відповідного місяця, тис. грн:

Таблиця 8.9

Місяці	Січень 2021 р.	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Червень	Липень	Серпень	Вересень	Жовтень	Листопад	Грудень	Січень 2022 р.
Тис. грн	186	175	186	197	261	276	264	252	278	250	263	285	289

Обчисліть середній запас матеріалів: а) за кожен квартал; б) за кожне півріччя; в) за рік. Яку середню слід застосувати при рішенні цієї задачі?

Примітка. 1. Середній запас матеріалів за кожне півріччя визначте за обчисленими показниками середнього запасу за окремими кварталами перового і другого півріччя і безпосередньо за допомогою формули хронологічної середньої.

2. Середній запас матеріалів за рік визначте за показниками середнього запасу за перше і друге півріччя і безпосередньо за формулою середньої хронологічної.

8.19. Запаси палива на автотранспортному підприємстві склали на початок відповідного кварталу, тис. грн:

Таблиця 8.10

1 січня 2021 р.	1 березня 2021 р.	1 липня 2021 р.	1 жовтня 2021 р.	1 січня 2022 р.
548,6	672,8	824,7	793,1	856,4

Визначте середній запас матеріалів: а) за перше і друге півріччя; б) за рік (безпосередньо за висхідними даними і за обчисленими піврічними даними).

8.20. Обсяг перевезених вантажів в Україні характеризується наступними даними (млн т):

Таблиця 8.11

	2014 р.	2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.
Обсяг перевезених вантажів, млн т	1 543	1 474	1 543	1 582	1 643	1 679

Визначте середньорічний рівень обсягу перевезених вантажів: 1) за 2014–2016 рр.; 2) 2017–2019 рр. *Розрахуйте*, на скільки млн т середній

рівень обсягів перевезення за 2017–2019 рр. перевищує середній рівень за 2014–2016 рр.

8.21. З метою виявлення загальної тенденції валового збору зернових в Україні (в усіх категоріях) за 2001–2015 рр. (в тис. т) замініть ряд показників щорічних валових борів рядом середньорічних розмірів валового збору за п'ятиріччям:

Таблиця 8.12

Роки	Валовий збір	Роки	Валовий збір	Роки	Валовий збір
2001	39 706	2006	34 258	2011	56 747
2002	38 804	2007	29 295	2012	46 216
2003	20 234	2008	53 290	2013	63 051
2004	41 809	2009	46 028	2014	63 859
2005	38 016	2010	39 271	2015	60 126

8.22. Маються наступні дані про залишки товарів на складах торговельного підприємства (тис. грн):

Таблиця 8.13

Роки	На 1 січня	На 1 квітня	На 1 липня	На 1 жовтня
2019	480	495	500	515
2020	530	520	540	530
2021	510	525	560	540
2022	520			

Визначити, на скільки гривен і на скільки процентів змінилася середня вартість залишків товарів на складі в 2021 р. порівняно з 2019 р. та з 2020 р.

8.23. Залишки запасів матеріалів в складі на 1-е число місяця склали (тис. грн):

Січень 2021 р.	540
Квітень 2021 р.	586
Липень 2021 р.	564
Жовтень 2021 р.	542
Січень 2022 р.	573

Визначте середній річний залишок запасів матеріалів на складі.

8.24. Чисельність робітників в інструментальному цеху за I півріччя характеризується наступними даними (на початок місяця) (табл. 8.14). *Визначити* середньооблікову чисельність робітників за I та II квартали і за півріччя.

Таблиця 8.14

01.01	01.02	01.03	01.04	05.06	01.06	01.07
28	29	29	32	30	28	31

8.25. Вартість основних засобів характеризується наступними даними (млн грн):

Таблиця 8.15

01.01.2021	01.04.2021	01.09.2021	01.01.2022
28,4	29,3	33,8	32,7

Визначити середньорічну вартість основних виробничих засобів.

8.26. Залишки запасів матеріалу на складі характеризується наступними даними (млн грн):

Таблиця 8.16

01.01.2021	01.04.2021	01.10.2021	01.01.2022
12,5	14,7	15,6	16,8

Визначити середньорічну вартість запасів матеріалів.

8.27. Вартість незавершеного виробництва машинобудівного заводу характеризується наступними даними (тис. грн):

Таблиця 8.17

01.01.2021	01.03.2021	01.08.2021	01.01.2022
126,1	135,2	142,8	138,8

Визначити середньорічну вартість незавершеного виробництва.

8.4. Визначення показників зміни рівнів ряду динаміки. Визначення середнього абсолютного приросту

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Суспільні явища та процеси постійно перебувають у русі. Тому важливим напрямом аналізу рядів динаміки є дослідження особливостей розвитку явищ за окремі проміжки часу.

В статистиці для характеристики розвитку явищ за окремі проміжки часу використовують абсолютні та відносні показники рядів динаміки: *абсолютні та відносні прирости*, темпи зростання та темпи приросту, *абсолютне значення одного проценту.*

Задача 9. Виробництво соняшнику в Україні за 2016–2020 рр. характеризується наступними даними:

Таблиця 8.18

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Обсяг виробництва соняшнику, тис. т	13627	12236	14165	15254	13110

Визначити: абсолютні прирости, темпи зростання і приросту за роками і до 2016 р.; абсолютне значення одного проценту приросту; середній рівень ряду, середній абсолютний приріст, середній темп зростання і приросту.

Рішення

Абсолютні прирости (ланцюгові) Δy знаходимо за формулою:

$$\Delta y = y_i - y_{i-1},$$

де y_i — рівень звітного періоду;

y_{i-1} — рівень попереднього періоду.

1. Ланцюгові абсолютні прирости виробництва соняшнику:

$$\Delta y_{2017} = y_{2017} - y_{2016} = 12236 - 13627 = -1391 \text{ (тис. т)};$$

$$\Delta y_{2018} = y_{2018} - y_{2017} = 14165 - 12236 = 1929 \text{ (тис. т)};$$

$$\Delta y_{2019} = y_{2019} - y_{2018} = 15254 - 14165 = 1089 \text{ (тис. т)};$$

$$\Delta y_{2020} = y_{2020} - y_{2019} = 13110 - 15254 = -2144 \text{ (тис. т)}.$$

Ланцюгові темпи зростання в процентах знаходимо наступним чином:

$$T_{зр} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \times 100,$$

Ланцюгові темпи зростання виробництва соняшнику:

$$T_{зр\,2017} = \frac{y_{2017}}{y_{2016}} \times 100 = \frac{12236}{13627} \times 100 = 89{,}8\,\%;$$

$$T_{зр\,2018} = \frac{y_{2018}}{y_{2017}} \times 100 = \frac{14165}{12236} \times 100 = 115{,}8\ \%;$$

$$T_{зр\,2019} = \frac{y_{2019}}{y_{2018}} \times 100 = \frac{15254}{14165} \times 100 = 107{,}7\ \%;$$

$$T_{зр\,2020} = \frac{y_{2020}}{y_{2019}} \times 100 = \frac{13110}{15254} \times 100 = 85{,}9\ \%.$$

Ланцюгові темпи приросту в процентах обчислюємо за формулою:

$$T_{пр} = \frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} \times 100, \quad \text{або} \quad T_{пр} = T_{зр} - 100.$$

Для обчислення темпів приросту використаємо першу формулу.

Темп приросту виробництва соняшнику:

$$T_{пр\,2017} = \frac{y_{2017} - y_{2016}}{y_{2016}} \times 100 = \frac{12\,236 - 13\,627}{13\,627} \times 100 = -10{,}2\ \%;$$

$$T_{пр\,2018} = \frac{y_{2018} - y_{2017}}{y_{2017}} \times 100 = \frac{14\,165 - 12\,236}{12\,236} \times 100 = 15{,}8\ \%;$$

$$T_{пр\,2019} = \frac{y_{2019} - y_{2018}}{y_{2018}} \times 100 = \frac{15\,254 - 14\,165}{14\,165} \times 100 = 7{,}7\ \%;$$

$$T_{пр\,2020} = \frac{y_{2020} - y_{2019}}{y_{2019}} \times 100 = \frac{13\,110 - 15\,254}{15\,254} \times 100 = -14{,}1\ \%.$$

2. Для знаходження базисних абсолютних приростів використаємо формулу:

$$\Delta y = y_i - y_0,$$

де y_0 — рівень базисного або початкового періоду.

Базисні абсолютні прирости виробництва соняшнику:

$$\Delta y_{2017} = y_{2017} - y_{2016} = 12\,236 - 13\,627 = -1\,391 \text{ (тис. т)};$$

$$\Delta y_{2018} = y_{2018} - y_{2016} = 14\,165 - 13\,627 = +538 \text{ (тис. т)};$$

$$\Delta y_{2019} = y_{2019} - y_{2016} = 15\,254 - 13\,627 = +1\,627 \text{ (тис. т)};$$

$$\Delta y_{2020} = y_{2020} - y_{2016} = 13\,110 - 13\,627 = -517 \text{ (тис. т)}.$$

Для знаходження базисних темпів зростання використаємо формулу:

$$T_{зр} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \times 100.$$

Базисні темпи зростання виробництва соняшнику:

$$T_{зр\,2017} = \frac{y_{2017}}{y_{2016}} \times 100 = \frac{12\,236}{13\,627} \times 100 = 89{,}8\ \%;$$

$$T_{зр\,2018} = \frac{y_{2018}}{y_{2016}} \times 100 = \frac{14\,165}{13\,627} \times 100 = 103{,}9\ \%;$$

$$T_{зр\,2019} = \frac{y_{2019}}{y_{2016}} \times 100 = \frac{15\,254}{13\,627} \times 100 = 111{,}9\ \%;$$

$$T_{зр\,2020} = \frac{y_{2020}}{y_{2016}} \times 100 = \frac{13\,110}{13\,627} \times 100 = 96{,}2\ \%.$$

Базисні темпи приросту в процентах можна обчислити наступним чином:

$$T_{пр} = \frac{y_i - y_0}{y_0} \times 100, \quad \text{або} \quad T_{пр} = T_{зр} - 100.$$

Використавши першу формулу, обчислимо базисні темпи приросту:

$$T_{пр\,2017} = \frac{y_{2017} - y_{2016}}{y_{2016}} \times 100 = \frac{12\,236 - 13\,627}{13\,627} \times 100 = -10{,}2\ \%;$$

$$T_{пр\,2018} = \frac{y_{2018} - y_{2016}}{y_{2016}} \times 100 = \frac{14\,165 - 13\,627}{13\,627} \times 100 = 3{,}9\ \%;$$

$$T_{пр\,2019} = \frac{y_{2019} - y_{2016}}{y_{2016}} \times 100 = \frac{15\,254 - 13\,627}{13\,627} \times 100 = 11{,}9\ \%;$$

$$T_{пр\,2020} = \frac{y_{2020} - y_{2016}}{y_{2016}} \times 100 = \frac{13\,110 - 13\,627}{13\,627} \times 100 = -3{,}8\ \%.$$

Далі знаходимо абсолютне значення одного проценту (тис. т):

$$A_з = \frac{\Delta y}{T_{пр}}, \quad \text{або} \quad A_з = \frac{\Delta y_{i-1}}{100}.$$

Згідно з другої формули,

$$\frac{13\,627}{100} = 136{,}27; \quad \frac{12\,236}{100} = 122{,}36;$$

$$\frac{14\,165}{100} = 141{,}65; \quad \frac{15\,254}{100} = 152{,}54.$$

Середній абсолютний приріст

$$\overline{\Delta y} = \frac{-1\,391 + 1\,929 + 1\,089 + (-2\,144)}{5} = \frac{-517}{5} = -103{,}4 \text{ тис. т.}$$

Всі показники ряду динаміки приводимо в таблиці:

Таблиця 8.19

Рік	Обсяг виробництва соняшнику, тис. т	Абсолютний приріст, тис. т		Темпи зростання, %		Темпи приросту, %		Абсолютне значення одного проценту приросту, тис. т
		ланцюговий	базисний (до рівня 2016 р.)	ланцюговий	базисний (до рівня 2016 р.)	ланцюговий	базисний (до рівня 2016 р.)	
2016	13 627	–	–	–	–	–	–	–
2017	12 236	–1 391	–1 391	89,8	89,8	–10,2	–10,2	136,27
2018	14 165	+1 929	+538	115,8	103,9	+15,8	3,9	122,36
2019	15 254	+1 089	+1 627	107,7	111,9	+7,7	11,9	141,65
2020	13 110	–2 144	–517	85,9	96,2	–14,1	–3,8	152,54

Задача 10. Виробництво пральних машин та машин для сушіння одягу в Україні за 2012–2018 рр. характеризується наступними даними (тис. шт.):

Таблиця 8.20

	2012 р.	2018 р.
Обсяг виробництва пральних машин, млн шт.	297	341

Визначити середньорічний абсолютний приріст.

Рішення

Середньорічний абсолютний приріст $\left(\overline{П}\right)$ визначається за формулою:

$$\overline{П} = \frac{y_n - y_1}{n-1},$$

де y_1 — рівень базисного року, що передує початку того періоду, за яким обчислюється середній приріст;

y_n — кінцевий рівень;

$n-1$ — тривалість періоду, за який обчислюється середній приріст.

Звідси

$$\overline{П} = \frac{341-297}{7-1} = \frac{44}{6} = 7{,}33 \text{ (тис. шт.)}.$$

Задачі

8.28. За 2010–2018 рр. виробництво продукції на підприємстві зросло в 1,6 рази, в 2019 р. — на 12 %, в 2020 р. скоротилося на 4,3 %. *Визначте* темп зростання виробництва продукції в цілому за 2010–2020 рр.

8.29. Зміна собівартості однієї конусної шестерні на машинобудівному заводі характеризується наступними даними (в процентах до 2020 р.):

2020 р.	2021 р.	2022 р.
100	106,8	102,5

Визначити, на скільки знизилася собівартість шестерні в 2022 р. порівняно з 2021 р.

8.30. Маються наступні дані про обсяг виробництва пшеничного борошна в Україні:

Таблиця 8.21

	2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.
Борошно пшеничне та пшенично-житнє, тис. т	2056,4	1974,0	3 1991,0	1746,0	1737,6

Визначте на їх основі абсолютний приріст, темп зростання і темпи приросту виробництва борошна в кожному році порівняно з попереднім роком: 1) в 2016–2019 рр. порівняно з попереднім роком (цепні показники); 2) в 2016–2019 рр. порівняно з 2015 р. (базисні показники).

8.31. Маються наступні дані про обсяг виробництва пшеничного борошна в Україні:

Таблиця 8.22

	2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.
Борошно пшеничне та пшенично-житнє, тис. т	2056,4	1974,0	3 1991,0	1746,0	1737,6

Визначте на їх основі абсолютний приріст, темп зростання і темпи приросту виробництва борошна в кожному році порівняно з попереднім роком: 1) в 2016–2019 рр. порівняно з попереднім роком (цепні показники); 2) в 2016–2019 рр. порівняно з 2015 р. (базисні показники).

8.32. За п’ять років (2016–2020 рр.) виробництво овочів у фермерських господарствах області зросло на 25 %. Абсолютне значення 1 % приросту виробництва овочів становить 10 тис. ц. *Визначити* середній

річний абсолютний приріст виробництва овочів за 2016–2020 рр. (тис. ц).

8.33. За п’ять років (2016–2020 рр.) виробництво овочів у фермерських господарствах області зросло на 25 %. Абсолютне значення 1 % приросту виробництва овочів становить 10 тис. ц. *Визначити* середній річний абсолютний приріст виробництва овочів за 2016–2020 рр. (тис. ц).

8.34. Маються наступні дані про виплавку чавуну в Україні за роками:

2015 р.	21,9 млн т
2016 р.	23,6 » »
2017 р.	19,8 » »
2018 р.	20,5 » »
2019 р.	20,1 » »

Визначте за 2016–2019 рр. абсолютні прирости, темпи зростання і темпи приросту (базисні і ланцюгові), абсолютну величину 1 % приросту виплавки чугунку в кожному році; середній рівень ряду, середній абсолютний приріст, середній темп зростання і приросту.

8.35. Маються наступні дані про обсяг виробництва харчових продуктів в Україні:

Таблиця 8.23

Харчові продукти	Виробництво (млн л)	
	2018 р.	2019 р.
Сік томатний	47,3	45,4
Сік яблучний	105,9	100,6
Суміші соків фруктових та овочевих	184,3	188,6
Сік якогось одного фрукта або овочу, незброджений та без додання спирту неконцентрований	75,8	70,8

Визначити показники динаміки виробництва харчових продуктів.

8.36. Виробництво кам’яного вугілля в Україні характеризується наступними даними:

Таблиця 8.24

	2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.
Добуто, млн т	30,2	31,6	24,2	26,3	25,5

Визначте на їх основі абсолютний приріст, темп зростання і темп

приросту добування кам'яного вугілля: 1) в 2015–2019 рр. порівняно з попередніми роками (ланцюгові показники); 2) послідовно в 2016–2019 рр. порівняно з 2015 р. (базисні).

8.37. Маються наступні дані про зміну обсягу виробництва продукції за період 2015–2020 рр.:

Таблиця 8.25

Роки	Обсяг випуску продукції, тис. грн	Зміна порівняно з попереднім роком			
		приріст (тис. грн)	темп зростання, %	темп приросту, %	абсолютне значення 1 % (тис. грн)
2015	145	×	×	×	×
2016			109,4		
2017				7,2	
2018	185,4				
2019				8,7	
2020				5,6	1,742

Розрахуйте і *проставте* в таблицю недостаючи дані за 2015–2020 рр.

8.38. Маються наступні дані про обсяг випуску продукції підприємством за 2016–2020 рр.:

Таблиця 8.26

	2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.
Випуск продукції, млн грн	106	108	112	109	115

Визначте значення 1 % приросту продукції за роками і в цілому за весь період.

8.39. Маються наступні дані про виробництво окремих видів промислової продукції в Україні в натуральному вираженні:

Таблиця 8.27

Роки	Чавун переробний і дзеркальний у чушках, болванках чи формах первинних інших, млн т	Нафта сира (млн т)	Газ природний скраплений або в газоподібному стані, млрд $м^3$	Борошно пшеничне та пшенично-житнє, тис. т
2015	21,9	2,5	19,9	96,6
2016	23,6	2,3	20,0	86,5
2017	19,8	2,2	20,5	94,3
2018	20,5	2,3	20,8	97,0
2019	20,1	2,4	20,5	86,1

Визначте за кожним видом продукції абсолютний приріст, темп зростання і темп приросту: 1) в 2016–2019 рр. порівняно з попередніми роками (цепні показники); 2) послідовно 2016–2019 рр. порівняно з 2015 р. (базисні показники).

8.40. Використовуючи умову задачі 8.39, *визначте* середньорічний рівень виробництва: 1) за 2016–2019 рр.; 2) на скільки млн т (млрд $м^3$, тис. т) буде збільшуватися виробництво в середньому щорічно за 2015–2019 рр. *Проаналізуйте* динаміку виробництва продукції за кожним видом.

8.41. Темпи зростання вартості основних засобів на підприємстві склали (в процентах до минулого року):

2018 р.	2019 р.	2020 р.	2021 р.	2022 р.
5,6	6,4	4,8	7,1	6,1

Обчислити за наведені роки базисні темпи динаміки по відношенню до 2018 р. і середньорічний темп приросту за 2018–2022 р.

8.42. Обсяг виробництва сталі в Україні та Німеччині характеризується наступними даними (млн т):

Таблиця 8.28

	1990 р.	2000 р.	2010 р.	2015 р.	2020 р.
Німеччина	45,2	49,5	50,6	51,3	56,1
Україна	10,5	10,8	11,3	11,4	11,6

Для порівняльного аналізу виробництва сталі в Україні та Німеччині: 1) *привести* ряди динаміки до однієї основи; 2) *визначити* за тридцять років: а) середньорічні темпи зростання; б) середньорічні абсолютні прирости; 3) *визначити* середньорічні абсолютні прирости; 4) зробити висновки.

8.43. Маються наступні дані про сукупні витрати у розрахунку на одне домогосподарство в Україні за 2016-2020 рр.:

Таблиця 8.29

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Сукупні витрати в середньому за місяць у розрахунку на одне домогосподарство, грн	5 720,4	7 139,4	8 308,6	9 670,2	9 523,6

Визначте: 1) базисні і ланцюгові показники динаміки: абсолютні прирости, темпи зростання, темпи приросту. Результати розрахунків

оформіть у вигляді таблиці; 2) середньорічні абсолютні прирости.

8.44. Динаміка заробітної плати в Україні та деяких розвинених країнах світу становили (в дол. США):

Таблиця 8.30

Роки	Україна	Іспанія	Німеччина	Франція
2000	42,3	1 435,0	2 154,3	1 963,3
2005	157,3	2 271,8	3 159,0	3 086,8
2010	283,5	2 988,5	3 620,0	3 746,9
2015	192,0	2 606,9	3 476,1	3 367,9
2017	267,1	2 642,0	3 713,6	3 541,8

Визначити: 1) ланцюгові темпи зростання заробітної плати; 2) базисні темпи зростання заробітної плати. За базисний рік прийняти 2000 р. *Проаналізувати* особливості динаміки заробітної плати в кожній країні.

8.45. Використовуючи взаємозв'язок між показниками динаміки, *визначте* рівні ряду виробництва продукції (в тис. т) і відсутні в таблиці ланцюгові показники динаміки.

Таблиця 8.31

Роки	Обсяг виробництва продукції, тис. т	Ланцюгові показники динаміки			
		абсолютний приріст, тис. т	темп зростання, %	темп приросту, %	абсолютне значення 1 % приросту, тис. т
2013	200	×	×	×	×
2014		16			
2015			103,7		
2016				7,5	
2017		24			3,85
2018			106,8		
2019				4,7	
2020		15			3,87

8.46. Ланцюгові темпи приросту реальних доходів населення області склали (%, умовні дані):

2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.	2021 р.	2022 р.
5,4	6,5	2,7	3,8	1,5	6,8

Визначте темп зростання реальних доходів населення за 2017–2022 рр. і середній річний темп приросту за цей період.

8.47. Капітальні вкладення підприємств промисловості області в

2015 р. склали 245,8 млн грн, а за 2021 рр. — 362,4 млн грн. *Визначити* середній приріст капітальних за 2016–2021 рр.

8.48. Використовуючи взаємозв'язок показників динаміки, *визначте* рівні ряду (виробництво тканини в 2010–2019 рр., млн $м^2$) і відсутні в таблиці базисні показники динаміки.

Таблиця 8.32

Роки	Виробництво тканини з ниток синтетичних, млн $м^2$	Базисні показники динаміки		
		абсолютний приріст, млн $м^2$	темп зростання, %	темп приросту, %
2011	540	×	×	×
2012		20		
2013			114,2	
2014				24,1
2015			132,6	
2016		48		
2017			148,5	
2018				54,1
2019		45		
2020			165,8	

8.49. Завод виготовив в 2022 р. продукції на 45,6 млн грн. Який був обсяг виробленої заводом продукції в 2019 р., якщо середній річний темп приросту продукції за 2019–2022 рр. склав по заводу 21 %? Який був середній річний абсолютний приріст продукції заводу за 2019–2022 рр.?

8.50. Маються наступні дані про обсяг виробництва сталі на металургійному заводі (млн т):

2000	2005	2010	2020
4,5	6,1	7,3	8,6

Визначити середній абсолютний приріст, середньорічні темпи зростання і приросту за 2001–2005 рр., 2006–2010 рр., 2011–2020 рр., 2001–2020 рр. *Порівняйте* отримані результати, зробіть висновки.

8.51. Маються наступні дані про обсяг виробництва валової продукції машинобудівного заводу, млн грн:

2016	2017	2018	2019	2020
24,3	26,8	27,3	26,5	28,1

Визначити середній рівень ряду і абсолютне значення одного проценту приросту.

8.5. Визначення в рядах динаміки середнього темпу зростання і приросту

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Серед статистичних показників набув широкого поширення середній темп зростання. Для визначення середнього темпу зростання або приросту розраховують середню геометричну.

Середня геометрична — одна із форм середньої величини. Обчислюється як корінь *n*-го ступеня із добутку окремих значень — варіантів ознаки:

$$\overline{x} = \sqrt[n]{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \ldots K_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} K_i},$$

де $\overline{T}_p$ — середній темп зростання;

K — коефіцієнт зростання (відношення рівня кожного періоду до попереднього періоду);

$\prod$ — знак добутку;

n — число ланцюгових темпів зростання.

Розглянемо порядок розрахунку середнього темпу зростання.

Задача 11. Виробництво пральних машин та машин для сушіння одягу в Україні за 2012–2018 рр. характеризується наступними даними (тис. шт.):

Таблиця 8.33

	2012 р.	2018 р.
Обсяг виробництва пральних машин, млн шт.	297	341

Визначити середньорічні темпи зростання і темп приросту за 2012–2018 рр.

Рішення

Середньорічний темп зростання ($\overline{T}_{зр}$) обчислюється за формулою:

$$\overline{T}_{зр} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}},$$

де y_1, y_n і $n - 1$ мають ті ж значення, що при обчисленні середньорічного абсолютного приросту.

Середньорічний темп зростання виробництва пральних машин становитиме:

$$\overline{T}_{зр} = \sqrt[7-1]{\frac{y_{2018}}{y_{2012}}} = \sqrt[6]{\frac{341}{297}} = \sqrt[6]{1{,}148} = 1{,}023, \text{ або } 102{,}3\ \%.$$

Середньорічний темп приросту ($T_{пр}$) обчислюється шляхом віднімання 100 % із відповідного значення середнього темпу зростання:

$$T_{пр} = 102{,}3 - 100 = 2{,}3\ \%.$$

Задача 12. Середні темпи зростання продукції рослинництва і тваринництва в Україні за 2017–2020 рр. становили відповідно 103,6 та 100,2 %. Валова продукція рослинництва у 2020 р. склала 473,4 млрд грн, тваринництва — 138,7 млрд грн (у цінах 2016 р.). *Визначити* середні річні темпи зростання валової продукції сільського господарства України в цілому за 2017–2020 рр. Яку середню необхідно застосувати при вирішення даної задачі?

Рішення

Для обчислення середніх темпів зростання валової продукції застосовуємо формулу середньої геометричної:

$$\sqrt[4]{\frac{473{,}4 + 138{,}7}{\frac{473{,}4}{1{,}036^4} + \frac{138{,}4}{1{,}002^4}}} = 1{,}028, \text{ або } 102{,}8\ \%.$$

Задача 13. За 5 років собівартість продукції на підприємстві знизилася на 23 %. *Визначити* середній річний темп зниження собівартості продукції.

Рішення

Розрахунок середнього темпу зниження собівартості продукції здійснюється за формулою середньої геометричної.

Темп зміни (зростання) собівартості продукції у вигляді коефіцієнта складе 0,77 $\left(\frac{100-23}{100}\right)$.

Розрахунок середнього темпу зниження такий:

$$\sqrt[5]{0{,}77} \approx 0{,}949, \text{ або } 94{,}9\ \%.$$

Це значить, що собівартість продукції за останні 5 років щорічно знижувалася в середньому на 5,1 %.

Задача 14. За даними звітності підприємства обчислити середній коефіцієнт зростання:

Таблиця 8.34

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Обсяг будівельних робіт, млн грн	1,2	1,7	1,8	2,1	2,4

Рішення

Для розрахунку середнього темпу зростання використаємо формулу середньої геометричної:

$$\overline{x} = \sqrt[n]{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot \ldots \cdot K_n},$$

де $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n$ — коефіцієнти зростання (відношення рівня кожного періоду до рівня попереднього періоду.

Обчислимо коефіцієнти зростання:

$$K_{2017} = \frac{1,7}{1,2} = 1,417; \quad K_{2018} = \frac{1,8}{1,7} = 1,059;$$

$$K_{2019} = \frac{2,1}{1,8} = 1,167; \quad K_{2020} = \frac{2,4}{2,1} = 1,143.$$

Середній річний коефіцієнт зростання обсягу будівельно-монтажних робіт рівний:

$$\overline{T} = \sqrt[4]{1,417 \cdot 1,059 \cdot 1,167 \cdot 1,143} = \sqrt[4]{2,0016} = 1,189,$$

тобто, обсяг будівельно-монтажних робіт в середньому зростав на 18,9 % щорічно.

При повторюваності варіант застосовують середню геометричну виважену. Оскільки повторювані варіанти виявляються під коренем помноженими на власну величину, це означає їх зведення у відповідний ступінь, і чисельні значення вагою виявляться рівними чисельним значенням показників ступеня, тобто:

$$K_p = \sqrt[\sum y]{\prod (x^y)}.$$

де y — ознака, що служить вагою.

Задача 15. Середньорічний темп зростання виробництва продукції за перші п’ять років становили 110 %, за три наступні роки — 115 %, а за а за два останні роки — 125 %. Потрібно обчислити середній річний темп зростання виробництва продукції за всі 10 років.

Рішення

У цьому випадку слід застосувати формулу середньої виваженої геометричної, так як наведені відсотки зростання відносяться до різних

за тривалістю періодів часу і вимагають зважування: 110% на 5 років, 115% на 3 роки і 125% на 2 роки. Отже[1]:

$$K_p = \sqrt[10]{110^5 \cdot 115^3 \cdot 125^2};$$

$$\lg K_p = \frac{1}{10}(5\lg 110 + 3\lg 115 + 2\lg 125) = \frac{1}{10}(5 \cdot 2{,}0414 + 3 \cdot 2{,}0607 +$$

$$+ 2 \cdot 2{,}0969) = \frac{1}{10}(10{,}2070 + 6{,}1821 + 4{,}1938) =$$

$$\frac{1}{10} \cdot 20{,}5829 = 2{,}0583.$$

Звідки K_p=114,4 %.

Задачі

8.52. Населення Харківської області за 10 років (2011–2020 рр.) скоротилося на 109,3 тис. осіб або на 4,0 %. *Визначте*, на скільки тисяч осіб і на скільки процентів скорочувалося населення за цей період в середньому щорічно.

8.53. Виробництво окремих видів промислової продукції в Україні за 2011–2020 рр. складало:

Таблиця 8.35

Роки	Аміак безводний (тис. т)	Циліндри гідравлічні (тис. шт.)	Електроенергія (млрд кВт·год.)
2011	4 321	46,5	197,9
2012	4 148	59,7	198,9
2013	3 480	110,0	194,4
2014	2 419	89,3	182,8
2015	2 168	82,3	163,7
2016	1 678	113	164,6
2017	979	157	156,0
2018	801	168	159,8
2019	1 502	189	154,1
2020	2 304	187	147,8

8.60. За 10 років (з 2011–2020 рр.) виробництво виробу *А* на підприємстві зросло на 25 тис. шт., або на 15,3 %. *Визначте*, на скільки штук і на скільки процентів зростало виробництво продукції в середньому

[1] Приклад запозичений в кн.: *Гранков В. П.* Средние величины в статистике. М., 1957, с. 47.

щорічно. *Визначте* середньорічні темпи виробництва окремих видів промислової продукції: 1) за 2011–2015 рр.; 2) за 2016–2020 рр. Використовуючи виведені показники, *проаналізуйте* динаміку середньорічних темпів виробництва продукції за 2011–2015 рр. та 2016–2020 рр.

8.61. За 2010–2015 рр. виробництво продукції на підприємстві зросло в 1,8 рази, а за 2015–2020 р. — на 30 %. *Визначте* темп зростання виробництва продукції в цілому за 2010–2020 рр.

8.62. Темпи зростання виробництва продукції сільського господарства господарств усіх категорій в Україні в процентах до попереднього року склали:

Таблиця 8.36

Рік	Продукція сільського господарства	В тому числі	
		продукція рослинництва	продукція тваринництва
2011	120,2	128,7	99,8
2012	96,1	93,3	104,9
2013	113,6	117,1	103,9
2014	102,2	103,1	99,5
2015	95,2	94,8	96,4
2016	106,3	109,1	97,3
2017	97,8	97,1	100,2
2018	108,2	110,2	101,2
2019	101,4	101,8	100,2
2020	89,9	87,9	97,5

Визначити середньорічні темпи зростання і приросту за 2011–2020 рр., і за 2016–2020 рр. продукції сільського господарства і за окремими видами.

8.63. Виробництво м’яса в районі за 2016–2020 рр. зросла в 1,5 рази. Визначте середньорічний темп зростання виробництва м’яса.

8.64. Ланцюгові темпи приросту реального валового внутрішнього продукту області склали (%, умовні дані):

2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.	2021 р.	2022 р.
6,4	5,2	1,7	5,6	4,3	5,8

Визначте темп зростання валового внутрішнього продукту за 2017–2022 рр. і середній річний темп приросту за цей період. *Вкажіть*, яку функцію доцільно використати для описання тенденції зміни валового внутрішнього продукту.

8.65. Виробництво продукції на заводах нафтохімічної промислово-

сті за 2016–2020 рр. зросла на 17 %. *Визначте* середньорічний темп зростання виробництва нафтохімічної продукції.

8.66. Середньорічні темпи зростання обсягу виробництва м'яса птиці на птахофабриці становили: за 2018–2020 рр. — 4 %, за 2021–2022 р. — 2 %. *Обчисліть* середньорічний темп зростання виробництва м'яса птиці за 2018–2022 рр.

8.67. Обсяг виданих банком споживчих кредитів становив в 2000 р. 200 млн грн. За 2001–2010 рр. видача споживчих кредитів збільшилася в 2,7 рази, а за 2011–2020 рр. – на 45 %. *Визначте* середній річний приріст видачі споживчих кредитів за 2001–2010 рр. і 2011–2020 рр.

8.69. Темпи приросту валової продукції (у порівняних цінах) на підприємстві склали в процентах до попереднього року:

2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
6,1	2,1	3,5	4,5	2,7	3,8

Визначити середні річні темпи зростання і приросту виробництва валової продукції за 2016–2020 рр.

8.70. Темпи зростання виробництва продукції сільського господарства в підприємствах в Україні в процентах до попереднього року склали:

Таблиця 8.42

Рік	Продукція сільського господарства	В тому числі	
		продукція рослинництва	продукція тваринництва
2011	128,3	134,9	104,5
2012	94,1	91,0	108,1
2013	120,5	123,6	108,6
2014	103,8	103,9	103,4
2015	94,8	94,5	96,5
2016	109,7	112,4	97,5
2017	97,0	96,2	101,0
2018	112,0	113,6	104,5
2019	102,7	102,5	103,8
2020	88,0	85,8	99,3

Визначити: а) середньорічні темпи зростання і приросту за 2011–2020 рр., і за 2016–2020 рр. продукції сільського господарства і за окремими видами.

8.71. Середній річний приріст виробничої потужності машинобудівного заводу з виробництва верстатів за 2016–2020 рр. становив 500 од.

Визначте середній річний темп приросту виробничої потужності підприємства за п’ять років, якщо виробнича потужність заводу на кінець 2020 р. склала 4000 од.

8.72. Темпи зростання продуктивності праці на підприємстві склали в процентах до попереднього року:

2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
104,1	98,6	103,4	104,7	102,1	103,8

Визначити середні річні темпи зростання і приросту продуктивності праці за 2016–2020 рр.

8.73. Валова продукція рослинництва у 2019 р. склала 538,7 млрд грн, тваринництва **—** 142,3 млрд грн (у цінах 2016 р.). Середні темпи зростання продукції рослинництва і тваринництва в Україні за 2016–2019 рр. становили відповідно 104,2 та 100,8 %. *Визначити* середні річні темпи зростання валової продукції сільського господарства України в цілому за 2016–2019 рр. Яку середню необхідно застосувати при вирішення даної задачі?

8.74. Середній річний темп зростання основних виробничих засобів на підприємстві склав за п’ятиріччя 2011–2015 рр. 103,7 %, а за п’ятиріччя 2016–2020 рр. **—** 105,7 %. *Визначте* середній річний темп приросту основних виробничих засобів на підприємстві за 2011–2020 рр.

8.75. Середній річний темп приросту валового внутрішнього продукту області склав за п’ятиріччя 2011–2015 рр. 4,6 %, а за п’ятиріччя 2016–2020 рр. **—** 2,1 %. *Визначте* середній річний темп приросту валового внутрішнього продукту області за 2011–2020 рр.

8.76. Маються наступні дані про середній річний виробіток одного робітника на промисловому підприємству, тис. грн:

Таблиця 8.43

	2010 р.	2013 р.	2019 р.
Річний виробіток одного робітника, тис. грн	456,7	538,6	610,8

Визначте: а) середній річний темп зростання виробітки на одного робітника за 2011–2013 рр., 2014–2019 рр., 2011–2019 рр.; б) середній річний абсолютний приріст виробітку за ці ж роки.

8.77. Згідно з даними бізнес-плану за п’ять років (2016–2020 рр.) передбачалося збільшення обсягу виробництва продукції на 28 %. Фак-

тичний середній річний темп приросту виробництва продукції за п'ятиріччя склав 5,9 %. *Визначте*, на скільки процентів був виконаний п'ятирічний план підприємства по виробництву продукції.

8.78. Згідно «Стратегії сталого розвитку Україна 2020» на 2016–2020 рр. передбачалося збільшення реальних доходів в розрахунку на душу населення на 20–22 %. *Визначте* середній річний темп зростання реальних доходів у розрахунку на душу населення, що передбачено програмою розвитку.

8.79. За 4 роки собівартість продукції на підприємстві знизилася на 18 %. *Визначити* середній річний темп зниження собівартості продукції.

8.80. За 3 роки трудомісткість виробу знизилася на 16 %. *Визначити* середній річний темп зниження трудомісткості продукції.

8.81. Темп зростання валової продукції сільського господарства області (у всіх категоріях господарств) склала в 2015 р. порівняно з 2010 р. 138 %, а в 2022 р. порівняно з 2015 р. 145 %. *Визначити* середній річний темп зростання валової продукції сільського господарства за 2010–2022 рр.

8.6. Приведення рядів динаміки загальної основи

Методичні вказівки та рішення типової задачі

При дослідженні рядів динаміки нерідко виникає необхідність порівняти швидкість та інтенсивність зміни явищ, які одночасно змінюються в часі. Ця задача вирішується за допомогою приведення рядів динаміки до загальної (єдиної) основи.

Для приведення рядів динаміки до загальної (єдиної) основи за вихідними даними ряду обчислюють відносні показники — *базисні темпи зростання* чи *темпи приросту*. За базу порівняння приймають період часу (дату) для кожного ряду динаміки.

Задача 16. Виробництво соняшнику в Україні та Болгарії характеризується наступними даними (тис. т):

Рік	Україна	Болгарія
2000	3 457,4	18 441,4
2005	4 706,1	18 652,6
2010	6 771,5	17 985,6
2015	11 181,1	19 245,1
2020	13 110,4	19 236,5

Різні значення абсолютних рівнів приведених вище рядів ускладнюють виявлення особливостей зміни обсягу видобування вугілля в Україні та в Болгарії. Для приведення абсолютних рівнів рядів динаміки до спільної (єдиної основи) приймемо за базу порівняння 2016 р. та обчислимо базисні темпи зростання:

Країна	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Україна	100,0	136,1	195,9	323,4	379,2
Болгарія	100,0	101,1	97,5	104,4	104,3

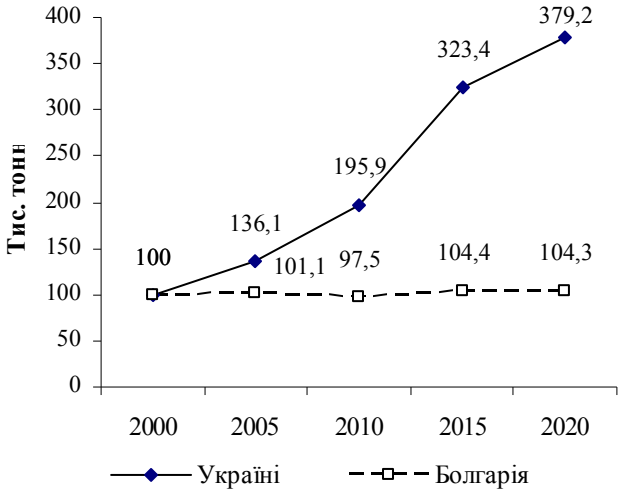

Рис. 8.1. Темпи зростання виробництва соняшнику в Україні та Болгарії (в процентах до 2000 р.)

На основі даних можна зробити висновок, що в Україні виробництво соняшнику зростало постійно. В той час як в Болгарії зростання виробництва соняшнику відбувалося значно повільнішими темпами. Якщо в 2020 р. виробництво соняшнику в Україні зросло в 3,8 рази, тоді як в Болгарії — відповідно на 4,3 %.

Для порівняння рядів динаміки обчислюють коефіцієнти випередження.

Співставимо базисні темпи зростання виробництва соняшнику в Україні та в Болгарії, отримаємо коефіцієнт випередження:

$$K_{\text{випередження}} = \frac{379{,}2}{104{,}3} = 3{,}6 \text{ рази},$$

тобто виробництво соняшнику в Україні зростало за період 2000–2020 рр. в 3,6 рази швидше, ніж в Болгарії.

Задачі

8.82. Обсяг перевезених вантажів за окремими видами наземного транспорту в Україні складало (млн т):

Таблиця 8.44

	2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.
Залізничний	350	343	339	322	313
Автомобільний	1 021	1 086	1 122	1 206	1 147
Трубопровідний	97	107	115	109	113

Приведіть ряди динаміки до однієї основи.

8.83. Середньомісячна заробітна плата та валовий внутрішній продукт в Україні та Австрії характеризується наступними даними:

Таблиця 8.45

Роки	Середньомісячна заробітна плата (дол. США)		Валовий внутрішній продукт (млрд дол. США; за паритетом купівельної спроможності 2010 р.)	
	Україна	Австрія	Україна	Австрія
2008	268,4	3 768,1	724,6	326,8
2009	276,5	3 984,5	736,5	331,4
2010	283,5	4 047,2	747,7	335,5
2011	330,5	4 335,3	765,9	339,8
2012	378,5	4 101,5	773,4	342,4
2013	408,5	4 335,5	789,7	347,8
2014	292,7	3 761,0	738,0	350,1
2015	192,0	3 788,1	666,3	353,6
2016	202,8	3 873,3	682,5	361,0
2017	267,1	4 034,2	699,4	370,0

Приведіть абсолютні рівня рядів до загальної (єдиної) основи, взявши за постійну базу порівняння рівні 2008 р. *Зобразіть* відносні величини динаміки зміни заробітної плати і валового внутрішнього продукту у вигляді лінійного графіку. *Визначте* коефіцієнт випередження зростання заробітної плати в Україні та в Австрії.

8.84. Виробництво цементу в Україні та в Туреччині характеризуються наступними даними, млн т:

Країна	2000 р.	2005 р.	2010 р.	2015 р.	2020 р.
Україна	27,3	35,4	64,8	79,6	94,2
Туреччина	75,1	76,9	83,5	81,3	86,4

Для порівняльного аналізу виробництва цементу в Україні та Туреччині: 1) *приведіть* ряди динаміки до загальної основи; 2) *зобразіть* відносні величини динаміки у вигляді лінійного графіку; 3) *визначте* за двадцятиріччя в цілому: а) середньорічні темпи зростання; б) середньорічні абсолютні прирости; 4) *визначте* коефіцієнт випередження виробництва цементу в Україні порівняно із Туреччиною.

8.85. Маються наступні дані про випуск інженерів в Україні та в Казахстані, осіб:

Країна	2000 р.	2005 р.	2010 р.	2015 р.	2020 р.
Україна	2 540	2 480	2 560	2 640	2 590
Казахстан	4 250	4 650	4 510	5 760	6 850

Для порівняльного аналізу даних про випуск інженерів в Україні та Казахстані: 1) приведіть ряди динаміки до загальної основи; 2) *зобразіть* відносні величини динаміки у вигляді лінійного графіку; 3) *визначте* за двадцятиріччя в цілому: а) середньорічні темпи зростання; б) середньорічні абсолютні прирости; 4) *визначте* коефіцієнт випередження підготовки інженерів в Україні порівняно із Казахстаном; 5) *зробіть* висновки.

8.7. Визначення в рядах динаміки загальної тенденції розвитку

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Важливою задачею статистики при аналізі рядів динаміки є визначення основної тенденції розвитку, що характері тому чи іншому ряду динаміки. Наприклад, за коливаннями рівнів роздрібного товарообороту в окремі роки тенденція зростання товарообороту може не бути визначеною безпосередньо і тому повинна бути виявлена статистичними методами. На динаміку розвитку того чи іншого явища здійснюють вплив різні фактори. Одні із них здійснюють суттєвий вплив на характер розвитку явища та формують основну тенденцію розвитку, інші — носять випадковий та короткочасний характер.

При виявленні в рядах динаміки загальної тенденції застосовують різні прийоми і методи. Один із найбільш поширений і простих методів є метод *укрупнення інтервалів*. Сутність цього методу полягає в укрупненні періодів, до яких відносяться рівні ряду динаміки. Розглянемо приклад дослідження загальної тенденції.

Задача 17. Маються наступні дані про обсяг товарообороту магазину за місяцями 2022 р., тис. грн:

січень	24,3	липень	29,3
лютий	20,1	серпень	25,2
березень	23,4	вересень	27,4
квітень	26,2	жовтень	30,2
травень	25,6	листопад	31,4
червень	28,4	грудень	27,6

Із щомісячних даних про обсяг товарообороту складно визначити загальну тенденцію розвитку торгівлі. З метою виявлення загальної тенденції обсягу товарообороту здійснимо укрупнення інтервалів. Для цієї мети висхідні (місячні) дані про обсяг товарообороту об’єднаємо в ква-

ртальні та отримаємо показники товарообороту за кварталами 2022 р.:

I	II	III	IV
67,8	80,2	81,9	89,2

В результаті укрупнення інтервалів більш наглядно проявляється загальна тенденція до зростання обсягу товарообороту.

$$67,8<80,2<81,9<89,2.$$

Виявлення загальної тенденції в рядах динаміки можна здійснити за допомогою *методу ковзної середньої*. Сутність його полягає в заміні фактичних даних середніми арифметичними із декількох рівнів рядів динаміки (трьох, п'яти, шести і т. д. — інтервал ковзання). При цьому методі в згладжуванні емпіричних даних беруть участь усі члени ряду динаміки, відбувається виключення випадкових коливань і визначаються значення, які відповідають постійно діючих факторів.

Інтервал ковзання може включати парне і непарне число рівнів ряду. В залежності від цього дещо змінюється порядок і техніка згладжування ряду динаміки. Розглянемо приклад виявлення основної тенденції у випадку непарного число рівнів ряду.

Задача 18. На основі даних про денний виробіток деталі *А* заводом за 15 днів необхідно *зробити* згладжування ряду методом п'ятичленної ковзної середньої:

Таблиця 8.46

День місяця	Виробіток деталі, шт.	День місяця	Виробіток деталі, шт.
1	40	9	43
2	41	10	41
3	41	11	41
4	42	12	43
5	40	13	42
6	40	14	43
7	42	15	44
8	41		

Рішення

Для виявлення загальної тенденції в рядах динаміки обчислюємо п'ятирічні ковзні середні:

$$\text{перша середня } \bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5};$$

$$\text{друга середня } \bar{y}_2 = \frac{y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6}{5};$$

і т. п.

Взяв дані за перші п’ять днів, обчислимо п’ятиденні суми, а потім і середню:

$$\bar{y}_1 = \frac{40+41+41+42+40}{5} = \frac{204}{5} = 40{,}8;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{41+41+42+40+40}{5} = \frac{204}{5} = 40{,}8 \text{ і т. п.}$$

Занесемо отримані дані в таблицю:

Таблиця 8.47

День місяця	Виробіток деталі, шт.	П’ятиденні ковзні суми	П’ятиденні ковзні середні	День місяця	Виробіток деталі, шт.	П’ятиденні ковзні суми	П’ятиденні ковзні середні
1	40	—	—	9	43	206	41,6
2	41	—	—	10	41	207	41,8
3	41	—	40,8	11	41	535	42,0
4	42	—	40,8	12	43	209	42,0
5	40	204	41,0	13	42	210	42,6
6	40	204	41,0	14	43	210	—
7	42	205	41,2	15	44	213	—
8	41	205	41,4				

При використанні ковзної середньої згладжений ряд вийшов у нас коротше фактичного числа членів на два члени ряду на початку та на два – наприкінці. Інтервал у п’ять років нами обрано довільно. Можна згладжувати середніми за два, три, шість тощо. Чим більший інтервал, протягом якого обчислюється середня, тим паче згладжений ряд осереднює конкретний ряд і більше втрачається інформації.

Виявлення загальної тенденції ряду динаміки, який складається із парного числа рівнів, має певні особливості. Особливість згладжування по парному числу рівнів полягає в тому, що кожна із обчислених середніх припадає на проміжок між двома суміжними датами. Щоб ліквідувати це зрушення, застосовується центрування, тобто знаходження середньої із середніх для віднесення отриманого рівня до певної дати. При парному інтервалі ковзання необхідно також знаходити ковзні суми, середні ковзні за цими сумами і ковзні з середніх.

Задача 19. Маються наступні дані про обсяг товарообороту овочевого відділу магазину за 2022 р. (виручка за квартал; тис. грн):

Квартал	2018	2019	2020	2021
I	176	243	414	419
II	259	282	433	441
III	323	365	454	479
IV	294	338	395	460

Необхідно *визначити* загальну тенденцію зміни товарообороту методом ковзної середньої (інтервал взяти із чотирьох рівнів ряду).

Рішення

Для визначення загальної тенденції зміни товарообороту методом ковзної середньої необхідно перш за все визначити по емпіричним (фактичним) даним *рухливі* (*ковзні*) *середні*.

Стосовно до висхідних даних отримаємо тринадцять середніх:

$$\text{перша } \bar{y}_1 = \frac{176+259+323+294}{4} = 263{,}0;$$

$$\text{друга } \bar{y}_2 = \frac{259+323+294+243}{4} = 279{,}75;$$

$$\text{третя } \bar{y}_3 = \frac{323+294+243+282}{4} = 285{,}5;$$

. . . . . .

$$\text{тринадцята } \bar{y}_{13} = \frac{419+441+479+460}{4} = 449{,}75.$$

Так, для визначення згладженого середнього рівня III кварталу 2018 р. здійснимо центрування першої середньої $\bar{y}_1$ та другої середньої $\bar{y}_2$:

$$\bar{y}_{c\,\text{III кв.}} = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} = \frac{263{,}0 + 279{,}75}{2} = 271{,}38.$$

Для визначення згладженого середнього рівня IV кварталу 2018 р. здійснимо центрування другої середньої $\bar{y}_2$ та третьої середньої $\bar{y}_3$:

$$\bar{y}_{c\,\text{IV кв.}} = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} = \frac{279{,}75 + 285{,}5}{2} = 282{,}63.$$

Хід розрахунку згладжених середніх наведено в табл. 8.48.

Таблиця 8.48

Період	Висхідні рівні	Середня із суми чотирьох рівнів ряду	Згладжений середній рівень (з центруванням, $\bar{y}_c$)
1	2	3	4
2018 р. I	176	–	
II	259	–	
		1 052:4=263,0	
III	323		271,38
		1 119:4=279,75	
IV	294		282,63
		1 142:4=285,5	

Продовження табл. 8.48

1	2	3	4
2019 р. I	243		290,75
		1 184:4=296,0	
2019 р. II	282		301,50
		1 228:4=307,0	
2019 р. III	365		328,38
		1 399:4=349,75	
2019 р. IV	338		368,63
		1 550:4=287,5	
2020 р. I	414		398,63
		1 639:4=409,75	
2020 р. II	433		416,88
		1 696:4=424,0	
2020 р. III	454		424,63
		1 701:4=425,25	
2020 р. IV	395		426,25
		1 709:4=427,25	
2021 р. I	419		430,38
		1 734:4=433,5	
2021 р. II	441		441,63
		1 799:4=449,75	
2021 р. III	479		
		–	
2021 р. IV	460	–	

На основі даних таблиці видно чітку тенденцію до зростання обсягу товарообороту овочевого відділу продовольчого магазину.

Більш досконалим способом дослідження загальної тенденції в рядах динаміки є *аналітичне вирівнювання*. При дослідженні загальної тенденції рядів динаміки виходять із того, що зміна рівнів рядів може бути з достатньої точністю визначена на основі математичної функції. Метод аналітичного вирівнювання полягає в побудові рівняння регресії, що характеризує залежність рівнів ряду динаміки від часової змінної. Рівняння регресії представляє собою математичну модель розвитку явища і дає вираження статистичної закономірності, яка проявляється в рядах динаміки. На основі теоретичного аналізу та графічного методу вибирають ту чи іншу функцію. Аналітичне вирівнювання рядів динаміки здійснюють за прямою, параболою другого порядку, гіперболою, показною (логарифмічною) кривою та ін.

Розглянемо застосування методу аналітичного вирівнювання за прямою для вираження загальної тенденції на наступному прикладі.

Задача 20. Вирівняємо ряд виробництва м’яса (у забійній вазі) за 2016–2020 роки. (див. табл. 8.49).

Таблиця 8.49

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Виробництво м'яса (у забійній вазі), тис. т	795	852	912	973	1034

Спосіб найменших квадратів дає систему двох нормальних рівнянь для надходження параметрів a_0 і a_1:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum t = \sum y; \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum yt, \end{cases}$$

де y — висхідні (емпіричні) рівні ряду динаміки;

n — число членів ряду;

t — час.

Для вирівнювання всіх необхідних вихідних даних збудуємо розрахункову таблицю (див. табл. 8.50).

Таблиця 8.50

Рік	Виробництво м'яса, тис. т (y)	t *	t^2	$t \cdot y$	$\bar{y}_t$ =733,5+ +59,9 t	$y - \bar{y}_t$
1	2	3	4	5	6	7
2016	795	1	1	795	793,4	+1,6
2017	852	2	4	1704	853,3	–1,3
2018	912	3	9	2 736	913,2	–1,2
2019	973	4	16	3 892	973,1	–0,1
2020	1 034	5	25	5 170	1 033,0	+1,0
Всього	4 566	15	55	14 297	4 566	0

* Для заповнення колонки 3 із значеннями t робимо нумерацію дат. Так, якби в прикладі були дні тижня (понеділок, вівторок і т. д.), ми, вдаючись до нумерації, вели відлік з першої дати, приймаючи рівним одиниці, двом і т. п.

** Підсумок колонки 3 може бути знайдений без підсумовування за формулою:

$$\sum t = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Перевіримо наш приклад:

$$\sum t = \frac{5(5+1)}{2} = 15.$$

*** Підсумок колонки 4 можна визначити за формулою і без попереднього зведення квадрат всіх значень t

$$\sum t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{5(5+1)(2 \cdot 5+1)}{6} = 55.$$

Складаємо систему нормальних рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{l} 5a_0 + 15a_1 = 4\,566 \\ 15a_0 + 55a_1 = 14\,297 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} -3 \\ \\ \end{array}\right|$$

Зрівнюємо коефіцієнти при a_0

$$+\left\{\begin{array}{l} -15a_0 - 45a_1 = -13698 \\ 15a_0 + 55a_1 = 14297 \end{array}\right.$$

$$10a_1 = 599$$

Отже, a_1=59,9.

З першого рівняння знаходимо a_0:

$$5a_0 + 15 \cdot 59{,}9 = 4566;$$

$$5a_0 = 3667{,}5$$

$$a_0 = \frac{3667{,}5}{5} = 733{,}5.$$

Після визначення a_0 і a_1 та складаємо аналітичне рівняння:

$$y_t = 733{,}5 + 59{,}9t.$$

Підставляючи значення t, отримуємо:

$y_1 = 733{,}5 + 59{,}9 \cdot 1 = 793{,}4;$

$y_2 = 733{,}5 + 59{,}9 \cdot 2 = 853{,}3;$

$y_3 = 733{,}5 + 59{,}9 \cdot 3 = 913{,}2,$

і т. д. (див. колонку 6 табл. 8.50).

Правильність розрахунку підтверджується рівністю $\sum y_i = 4566 = \sum y_t.$

Рішення системи рівнянь дозволяє отримати вираження для параметрів a_0 і a_1:

$$a_0 = \frac{\sum t^2 \sum y - \sum t \sum ty}{n\sum t^2 - \sum t \cdot \sum t};$$

$$a_1 = \frac{n\sum ty - \sum t \sum y}{n\sum t^2 - \sum t \cdot \sum t}.$$

Спрощений метод вирівнювання прямої лінії. У рядах динаміки техніка розрахунку параметрів рівняння прямої лінії може бути спрощена. Для цієї мети показникам часу надають такі значення, щоб їхня сума була рівною нулю, тобто $\sum t$=0. Ліворуч значення часу приймаються негативними, праворуч позитивними.

За умови, що $\sum t = 0$, вихідні нормальні рівняння набудуть наступного вигляду

$$na_0 = \sum y;$$
$$a_1 \sum t^2 = \sum ty,$$

Звідси:

$$a_0 = \frac{\sum y}{n}; \qquad a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2}.$$

Що стосується даного прикладу, у якому число вихідних (емпіричних) рівнів ряду — непарне (n=5), це виконуються за наступних позначень:

2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
–2	–1	0	+1	+2

З наведених формул видно, що знаходження параметрів рівняння прямої необхідно знайти величини $\sum y$, $\sum t^2$ і $\sum ty$. Для обчислення всіх необхідних вихідних даних збудуємо розрахункову таблицю (див. табл. 8.51).

Таблиця 8.51

Рік	Виробництво м'яса, тис. т	t	t^2	ty	$\bar{y}_t$	$y - \bar{y}_t$	$(y - \bar{y}_t)^2$
А	1	2	3	4	5	6	7
2016	795	–2	4	–1 590	793,4	1,6	2,56
2017	852	–1	1	–852	853,3	–1,3	1,69
2018	912	0	0	0	913,2	–1,2	1,44
2019	973	+1	1	973	973,1	–0,1	0,01
2020	1 034	+2	7	2 068	1 033,0	1,0	1,00
Всього	4 566		10*	599	4 566	0	6,70

* Математично доведено, що у таких рядах $\sum t^2 = \frac{n\,(n^2-1)}{12}$.

Підставивши знайдені значення формулу для a_0 і a_1, отримуємо:

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} = \frac{4566}{5} = 913{,}2;$$
$$a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2} = \frac{599}{10} = 59{,}9.$$

В результаті отримуємо наступне рівняння основної тенденції виробництва м'яса за 2016–2020 рр.:

$$y_t = 913{,}2 + 59{,}9t.$$

Підставляючи рівняння y_t=913,2+59,9t прийняті позначення t, обчислимо вирівняні (теоретичні) рівні низки динаміки:

2016 р. $y_{t=-2}$=913,2 + 59,9 (–2)=793,4;

2017 р. $y_{t=-1}$=913,2 + 59,9 (–1)=853,3;

2018 р. $y_{t=0}$=913,2 + 59,9 (0)=913,2;

2019 р. $y_{t=+1}$=913,2 + 59,9 (+1)=973,1;

2020 р. $y_{t=+2}$=913,2 + 59,9 (+2)=1033,0.

Для перевірки розрахунку значень y_i використовується формула

$$\sum y_i = \sum y_t.$$

У прикладі $\sum y_i = 4566 = \sum y_t$; отже , значення y_t визначені правильно.

Збіг результатів фактичних даних (гр. 1) та теоретичних рівнів (гр. 5) свідчить про правильність проведених обчислень. Зіставлення гр. 1 та гр. 5 таблиці кожного року показує незначні відхилення розрахункових рівнів від фактичних, що підтверджує правильність вибору математичного рівняння.

Однак якщо кількість рівнів у ряді динаміки парна, то умовне позначення показника часу набуває наступного вигляду:

2015	2016	2017	2018	2019	2020
–5	–3	–1	+1	+3	+5

Величину $\sum t^2$ можна шукати за формулами:

а) при непарному числі рівнів — $\sum t^2 = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{12}$;

б) при парному — $\sum t^2 = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}$.

Якщо за звичайному вирівнюванні a_0 — це початковий рівень, то за спрощеному методі вирівнювання – це середній рівень явища.

Задачі

8.86. Виробництво зернових та зернобобових культур в Україні за 2006–2020 рр. характеризується наступними даними:

Таблиця 8.52

Роки	Валовий збір, тис. т	Роки	Валовий збір, тис. т	Роки	Валовий збір, тис. т
2006	34 258	2011	56 747	2016	66 088
2007	29 295	2012	46 216	2017	61 917
2008	53 290	2013	63 051	2018	70 057
2009	46 028	2014	63 859	2019	75 143
2010	39 271	2015	60 126	2020	64 933

З метою виявлення загальної тенденції валового збору зернових та зернобобових культур в Україні (у всіх категоріях господарств) за 2006–2020 рр. (в тис. т) *замініть* ряд показників щорічних валових зборів рядом середньорічних розмірів валового збору за п’ятиріччям.

8.87. Маються наступні дані про обсяг випічки хліба на хлібозаводі за вересень звітного року:

Таблиця 8.53

Число	Фактичні дані, кг	Число	Фактичні дані, кг
1	2 011	16	1 904
2	2 026	17	2 276
3	2 041	18	2 298
4	1 912	19	2 346
5	1 957	20	2 339
6	2 104	21	2 364
7	2 055	22	2 347
8	2 132	23	2 380
9	2 154	24	2 380
10	2 104	25	2 394
11	2 083	26	2 456
12	2 190	27	2 427
13	2 207	28	2 469
14	2 238	29	2 504
15	1 982	30	2 507

Зробіть вирівнювання динамічного ряду за допомогою ковзної середньої (за п’ятиденкам).

8.88. Маються первинні дані про обсяг роздрібного товарообігу підприємства за 2013–2022 рр. (тис. грн):

2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
470	485	510	523	564	578	581	594	602	615

Для дослідження загальної тенденції зміни роздрібного товарообо-

роту: 1) *зобразити* ряд динаміки у вигляді лінійного графіку; 2) *здійснити* аналітичне вирівнювання рівнів ряду по прямої та *виразити* загальну тенденцію зростання відповідним математичним рівнянням; 3) *визначити* вирівняні (теоретичні) рівні ряду динаміки і нанести їх на графік з висхідними (емпіричними) даними); 4) *зробити* висновок.

8.89. Маються висхідні дані про обсяг продажів м'яса та ковбасних виробів в місті *N* за п'ять років (млн грн):

Таблиця 8.54

Рік, квартали		Продаж м'яса	Продаж ковбасних виробів
1-й рік	I	42,5	43,2
	II	44,1	39,1
	III	46,6	42,8
	IV	55,2	52,6
2-й рік	I	57,8	46,1
	II	47,4	43,5
	III	43,2	43,0
	IV	53,4	50,4
3-й рік	I	54,6	45,2
	II	43,1	47,7
	III	53,5	48,6
	IV	57,1	54,8
4-й рік	I	56,3	47,6
	II	47,6	51,3
	III	45,9	51,9
	IV	67,2	59,4
5-й рік	I	58,8	54,2
	II	51,4	55,6
	III	45,7	57,1
	IV	69,2	60,2
Всього		1 042,4	994,3

Визначте загальну тенденцію зміни обсягів продажу м'яса та ковбасних виробів способом механічного вирівнювання.

8.90. Урожайність зернових у фермерському господарстві представлена наступним динамічним рядом:

Таблиця 8.55

	1990 р.	2000 р.	2010 р.	2015 р.	2020 р.	2021 р.	2022 р.
Урожайність, ц/га	18,6	19,8	8,4	20,6	20,4	19,3	22,1

Здійснити аналітичне вирівнювання даного ряду по прямої і використати отримане математичне рівняння для екстраполяції рівнів на 2023–2024 рр. *Побудуйте* графік первинного і вирівняного рядів.

8.91. Роздрібний товарообіг магазину склав за окремими місяцями (тис. грн):

Таблиця 8.56

Місяці	Товарооборот	Місяці	Товарооборот
Січень	584	Липень	616
Лютий	593	Серпень	627
Березень	601	Вересень	675
Квітень	597	Жовтень	618
Травень	614	Листопад	634
Червень	624	Грудень	652

З метою виявлення загальної тенденції *замініть* ряд показників щомісячного товарообороту рядом середньомісячного товарообороту за кварталами.

8.92. Виробництво електроенергії за 2015–2022 рр. характеризується наступними даними (млрд кВт·год.):

2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
218	229	238	244	256	268	278	286

Провести вирівнювання ряду динаміки по параболі другого порядку і *зробити* висновки.

8.93. Роздрібний товарооборот магазину роздрібної торгівлі склав за місяцями (тис. грн):

Таблиця 8.57

Місяці	Товарооборот	Місяці	Товарооборот
Січень	384,5	Липень	446,9
Лютий	389,9	Серпень	467,9
Березень	405,6	Вересень	472,4
Квітень	435,6	Жовтень	498,7
Травень	441,6	Листопад	486,4
Червень	431,7	Грудень	512,6

З метою встановлення загальної тенденції зміни роздрібного товарообороту *замініть* ряд показників щомісячного товарообороту рядом середньомісячного обороту за кварталами.

8.94. Динаміка виробництва силікатної цегли цегляним заводом характеризується наступними даними (тис. шт.):

2001	27,1	2011	43,2
2002	27,2	2012	45,2
2003	28,2	2013	48,6
2004	29,8	2014	51,7
2005	31,7	2015	56,2
2006	33,5	2016	59,0
2007	35,5	2017	61,9
2008	37,4	2018	64,4
2009	39,1	2019	66,0
2010	41,3	2020	67,8

Тенденцію зміни виробництва цегли *опишіть* лінійним рівнянням тренду. Припускаючи, що виявлена тенденція збережеться в майбутньому, *визначте* прогнозований обсяг зростання цегли в 2021 р.

8.95. Маються наступні дані про обсяг виробництва овочевих культур в Україні:

Таблиця 8.58

Рік	Тис. т	Рік	Тис. т
1995	5 879,8	2008	7 965,1
1996	5 070,2	2009	8 341,0
1997	5 168,1	2010	8 122,4
1998	5 492,2	2011	9 832,9
1999	5 323,9	2012	10 016,7
2000	5 821,3	2013	9 872,6
2001	5 906,8	2014	9 637,5
2002	5 827,1	2015	9 214,0
2003	6 538,2	2016	9 414,5
2004	6 963,9	2017	9 286,3
2005	7 295,0	2018	9 440,2
2006	8 058,0	2019	9 687,6
2007	6 835,2	2020	9 652,8

Зробіть вирівнювання динамічного ряду за допомогою ковзної середньої (за п’ятирічкам).

8.96. Маються наступні дані про обсяг роздрібного товарообороту району за 2016–2022 рр. (млн грн):

2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
476	503	546	573	585	597	614

Для дослідження загальної тенденції розвитку роздрібного товарообороту: 1) *зобразіть* ряд динаміки у вигляді лінійного графіку;

2) *здійсніть* аналітичне вирівнювання рівнів ряду за прямою і виразіть загальну тенденцію зростання відповідним математичним рівнянням; 3) *визначне* вирівняні (теоретичні) рівні ряду динаміки і *нанесіть* їх на графік з висхідними (емпіричними) даними; 4) *зробіть* висновки.

8.97. Маються наступні дані про обсяг реалізації шерсті сільськогосподарськими підприємствами району за 2013–2021 рр., тонн:

2013	50,0	2018	130,5
2014	61,5	2019	100,0
2015	60,0	2020	124,0
2016	80,0	2021	140,0
2017	100,0		

Для дослідження загальної тенденції виробництва шерсті: 1) *зобразіть* ряд динаміки у вигляді лінійного графіку; 2) *здійсніть* аналітичне вирівнювання рівнів ряду за прямою і виразіть загальну тенденцію зростання відповідним математичним рівнянням; 3) *визначне* вирівняні (теоретичні) рівні ряду динаміки і *нанесіть* їх на графік з висхідними (емпіричними) даними; 4) *зробіть* висновки.

8.98. Динаміка реалізації кондитерських виробів в магазинах району характеризується наступними даними, тис. т:

2013	22,4	2018	32,7
2014	24,1	2019	34,8
2015	27,3	2020	37,6
2016	30,6	2021	38,2
2017	31,5		

Для дослідження загальної тенденції реалізації кондитерських виробів: 1) *зобразіть* ряд динаміки у вигляді лінійного графіку; 2) *здійсніть* аналітичне вирівнювання рівнів ряду за прямою і виразіть загальну тенденцію зростання відповідним математичним рівнянням; 3) *визначне* вирівняні (теоретичні) рівні ряду динаміки і *нанесіть* їх на графік з висхідними (емпіричними) даними; 4) *зробіть* висновки.

8.8. Визначення в рядах внутрішньорічної динаміки індексів сезонності

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Сезонністю називають більш менш стійні внутрішньорічні коливання в явищах, які пов’язані із зміною сезонів (заготівля сільськогос-

подарської продукції, перевезення водним транспортом, споживання електроенергії). Сезонність негативно відображається на результатах виробничої діяльності сільськогосподарських підприємств, промислових підприємств, що переробляють сільськогосподарську сировину, роботі торгівлі, транспорту, зв'язку, будівництві, видобутку корисних копалин відкритим способом, процесах міграції населення, розвитку епідемій, повторюваності надзвичайних метеорологічних та гідрологічних явищ та ін.

Обчислення показників сезонності залежить від характеристики рівня ряду динаміки.

Якщо ряд містить визначену тенденцію до зростання або убування, то перш ніж обчислити сезонну хвилю, необхідно на основі емпіричних (фактичних) даних визначити основну тенденцію. Це здійснюється за допомогою аналітичного вирівнювання динамічного ряду. Потім фактичні дані обчислюються в процентах до вирівняних, а індекси сезонності будуть дорівнювати середнім по однойменним місяцям із цих процентних чисел за роки, взяти за період дослідження. Формула розрахунку індексу сезонності має наступний вид:

$$I_s = \left[\sum \frac{y_i}{y_t} \cdot 100 \right] : n ,$$

де I_s — індекс сезонності;

y_i — фактичні рівні ряду динаміки;

y_t — згладжені (вирівняні, інакше теоретичні) рівні внутрішньорічних періодів;

n — число років.

Якщо ряд динаміки стабільний, в ньому не має яскраво вираженої тенденції до зростання або убування, коли внутрішньорічні коливання відбуваються навколо деякого постійного рівня, то розрахунок показників сезонності обчислюється за емпіричними (фактичними) даними без вирівнювання. Розрахунок здійснюється за наступною формулою:

$$I_s = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}_0} \times 100,$$

де $\bar{y}_0$ — середня величина із рівнів ряду динаміки.

Задача 21. Покажемо розрахунок сезонної хвилі в стабільному ряді динаміки, в якому не має яскраво вираженої тенденції до зростання або убування, коли внутрішньорічні коливання відбуваються навколо деякого середнього рівня (табл. 8.59).

В перших трьох стовпчиках наведені фактичні (емпіричні) дані, що

Таблиця 8.59

Закупка молока в одному із районів за три роки

Місяць	Закуплено молока, т					Місячні дані в процентах до середньорічної ($\bar{y}_i : \bar{y}_0$)
	перший рік (y_i)	другий рік (y_i)	третій рік (y_i)	всього за три роки (гр. 1 + гр. 2 + гр. 3) ($\sum y_i$)	в середньому за 3 роки ($\bar{y}_i$)	
А	1	2	3	4	5	6
Січень	1 551	1 609	1 785	4 945	1 648	63,2
Лютий	1 945	2 468	2 587	7 000	2 333	89,5
Березень	2 785	3 403	3 254	9 442	3 147	120,7
Квітень	3 297	3 616	4 051	10 964	3 655	140,1
Травень	2 772	3 995	4 037	10 804	3 601	138,1
Червень	3 305	3 301	4 502	11 108	3 703	142,0
Липень	2 614	2 862	3 175	8 651	2 884	110,6
Серпень	2 173	2 293	2 567	7 033	2 344	89,9
Вересень	2 278	2 557	2 682	7 517	2 506	96,1
Жовтень	1 896	2 305	2 237	6 438	2 146	82,3
Листопад	1 513	1 964	1 668	5 145	1 715	65,8
Грудень	1 479	1 817	1 548	4 844	1 615	61,9
Всього за рік	27 608	32 190	34 093	93 891	2 608	100,0

характеризують обсяг закупок молока в одному із районів за три роки (y_i). Для початку обчислимо суму помісячних даних за три роки ($\sum y_i$). Результати розрахунків наведено в графі 4. В цих сумах випадкові особливості кожного окремого року погашаються. Виходячи із цих даних обчислюють середні за три роки обсяги закупівель молока за окремими місяцями.

Для отримання значень $\bar{y}_i$ здійснимо по способу середньої простої (незваженої) усереднення рівнів однойменних періодів:

$$\text{січень } \bar{y}_1 = \frac{y_{\text{січ. 2020}} + y_{\text{січ. 2021}} + y_{\text{січ. 2022}}}{3},$$

$$\text{лютий } \bar{y}_2 = \frac{y_{\text{лют. 2020}} + y_{\text{лют. 2021}} + y_{\text{лют. 2022}}}{3},$$

. . . . . .

Визначимо усереднені значення рівнів ряду $\bar{y}_i$ для кожного місяця річного циклу:

$$\text{січень } \bar{y}_1 = \frac{1\,551 + 1\,609 + 1\,785}{3} = \frac{4\,945}{3} = 1\,648;$$

$$\text{лютий } \bar{y}_2 = \frac{1\,945 + 2\,468 + 2\,587}{3} = \frac{7\,000}{3} = 2\,333 \text{ і т. п.}$$

Результати розрахунків наведено в графі 5. В приведеному прикладі середній рівень ряду становить: ($\bar{y}_0 = \frac{\sum \bar{y}_t}{n} = \frac{93891}{36}$=2608). В графі 6 розраховуються відносні величини (проценти) помісячних даних середньорічного обсягу закупівель ($\bar{y}_i : \bar{y}_0$):

$$\text{січень:} \quad \frac{1\,648}{2\,608} \cdot 100 = 63{,}2\ \%;$$

$$\text{лютий:} \quad \frac{2\,333}{2\,608} \cdot 100 = 89{,}5\ \%;$$

$$\text{березень:} \quad \frac{3\,147}{2\,608} \cdot 100 = 120{,}7\ \% \text{ і т. п.}$$

Обчислені показники і є індексами сезонності, або показниками сезонної хвилі.

Такий спосіб застосовується в стабільних рядах динаміки, для яких відсутня тенденції до зростання або убування. Якщо для ряду динаміки є характерною яскраво виражена тенденція розвитку, то для виявлення сезонності необхідно застосувати попередньо вирівнювання фактичних даних, і лише після цього обчислювати індекси сезонності.

Покажемо розрахунок сезонної хвилі на наступному прикладі. В табл. 8.61 в перших трьох колонках наведені фактичні дані про продаж овочів і фруктів за три роки в одному із районів. Можна відмітити, що обсяги продажів мають тенденцію до зростання. Тому спосіб розрахунку сезонної хвилі на основі середньої не придатний. Для виявлення сезонності необхідно спочатку застосувати попереднє вирівнювання фактичних даних. Здійснимо аналітичне вирівнювання фактичних даних по прямої (табл. 8.61).

Здійснюємо розрахунок параметрів прямої:

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} = \frac{2\,588}{36} = 72;$$

$$a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2} = \frac{7728}{3885} = 2{,}0.$$

Таким чином, рівняння прямої має наступний вид:

$$y_t = 72 + 2t.$$

Підставляючи значення t в рівняння прямої, отримаємо вирівняні дані:

$y_{-17,5}$=72+2·(–17,5)=37;

Таблиця 8.61

Реалізація овочів та фруктів в магазинах району за місяцями і роками (т)

Місяці	Фактичні дані			Вирівняні дані			Фактичні дані в процентах до вирівняних			Індекси сезонності
	2019 р.	2020 р.	2021 р.	2019 р.	2020 р.	2021 р.	2019 р.	2020 р.	2021 р.	
А	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Січень	39	52	72	37	61	85	113,5	90,2	88,2	97,3
Лютий	34	46	59	39	63	87	94,9	76,2	72,4	81,2
Березень	33	44	54	41	65	89	87,8	72,3	64,0	74,7
Квітень	29	40	46	43	67	91	74,4	65,7	53,8	64,6
Травень	26	42	57	45	69	93	62,2	65,2	66,7	64,7
Червень	42	50	69	47	71	95	95,7	74,6	75,8	82,1
Липень	56	74	94	49	73	97	118,4	106,8	101,0	108,7
Серпень	89	98	123	51	75	99	180,4	136,0	127,3	147,9
Вересень	96	119	148	53	77	101	186,8	158,4	150,5	165,2
Жовтень	84	106	134	55	79	103	158,2	138,0	133,0	143,1
Листопад	79	98	125	57	81	105	143,9	124,7	121,9	130,2
Грудень	54	79	98	59	83	107	96,6	98,8	95,3	96,9

На основі цих параметрів обчислимо вирівняні дані (табл. 8.62).

Таблиця 8.62

Вирівнювання по прямої реалізації овочів та фруктів

t	y	t^2	yt	y_t	t	y	t^2	yt	y_t
–17,5	39	306,25	–682,5	37	0,5	74	0,25	37	73
–16,5	34	272,25	–561	39	1,5	98	2,25	147	75
–15,5	33	240,25	–511,5	41	2,5	119	6,25	297,5	77
–14,5	29	210,25	–420,5	43	3,5	106	12,25	371	79
–13,5	26	182,25	–351	45	4,5	98	20,25	441	81
–12,5	42	156,25	–525	47	5,5	79	30,25	434,5	83
–11,5	56	132,25	–644	49	6,5	72	42,25	468	85
–10,5	89	110,25	–934,5	51	7,5	59	56,25	442,5	87
–9,5	96	90,25	–912	53	8,5	54	72,25	459	89
–8,5	84	72,25	–714	55	9,5	46	90,25	437	91
–7,5	79	56,25	–592,5	57	10,5	57	110,25	598,5	93
–6,5	54	42,25	–351	59	11,5	69	132,25	793,5	95
–5,5	52	30,25	–286	61	12,5	94	156,25	1175	97
–4,5	46	20,25	–207	63	13,5	123	182,25	1660,5	99
–3,5	44	12,25	–154	65	14,5	148	210,25	2146	101
–2,5	40	6,25	–100	67	15,5	134	240,25	2077	103
–1,5	42	2,25	–63	69	16,5	125	272,25	2062,5	105
–0,5	50	0,25	–25	71	17,5	98	306,25	1715	107
						2588	3885,0	7728	2592

$y_{-16,5}=72+2\cdot(-16,5)=39$ . . . і т. п.

Результати розрахунків наведено в графах 4–6. В наступних трьох графах (7–9) фактичні дані обчислені в процентах до вирівняних. Індекс сезонності для січня 2019 р. становить $\frac{39}{37}\times 100=113,5\,\%;$ для лютого — $\frac{34}{39}\times 100=94,5\,\%$ і т. п.

В останніх графі обчислені середні за три роки із процентних чисел.

$$I_{січень}=\frac{113,5+90,2+88,2}{3}=97,3\ \%;$$

$$I_{лютий}=\frac{94,9+76,2+72,4}{3}=81,2\ \%$$ і т. п.

Це і є помісячні індекси сезонності, або показники сезонної хвилі.

Таким чином, якщо у першому прикладі ми обчислювали індекси сезонності на основі трьохрічної середньої, то в даному випадку ми обчислюємо до вирівняних даних, а потім із процентних чисел обчислюємо трьохрічні місячні середні.

Задачі

8.99. Чисельність робітників по місяцям характеризується наступними даними:

Таблиця 8.63

Місяць	Середньомісячна чисельність робітників		
	1-й рік	2-й рік	3-й рік
Січень	80	90	120
Лютий	82	93	120
Березень	84	100	140
Квітень	90	120	150
Травень	100	130	160
Червень	120	150	170
Липень	130	170	180
Серпень	170	170	180
Вересень	160	170	170
Жовтень	130	150	170
Листопад	100	120	160
Грудень	100	120	160

Для аналізу внутрішньорічної динаміки: 1) *визначте* індекси сезонності методом постійної середньої; 2) *представте* у вигляді лінійного

графіку сезонну хвилю досліджуваного явища за роками; 3) *зробити* висновок.

8.100. Кількість відпрацьованих робітниками фермерського господарства людино-днів за місяцями року характеризується наступними даними:

Таблиця 8.64

Місяць	2020 р.	2022 р.
Січень	85	87
Лютий	83	94
Березень	95	97
Квітень	106	105
Травень	131	106
Червень	168	106
Липень	161	105
Серпень	163	100
Вересень	144	98
Жовтень	121	96
Листопад	84	91
Грудень	79	84

Розрахуйте індекс сезонності відпрацьованого часу. *Визначити*, як змінилася сезонність праці працівників фермерського господарства.

8.101. На основі наведених даних *зробіть* аналіз внутрішньорічної динаміки реалізації кондитерських виробів і *виявіть* сезонність купівельного попиту цих товарів, попередньо вирівнявши ряд за прямою:

Місяць	2018 р.	2019 р.	2020 р.	2021 р.
Січень	6,7	7,0	8,6	10,8
Лютий	6,6	6,4	9,1	11,0
Березень	7,5	8,1	10,2	11,5
Квітень	9,4	5,8	11,5	12,8
Травень	6,5	5,0	9,6	11,1
Червень	7,8	4,6	10,1	11,4
Липень	7,8	8,1	9,2	11,8
Серпень	7,4	8,0	8,9	11,0
Вересень	7,4	7,8	9,2	10,6
Жовтень	7,1	8,8	10,4	11,2
Листопад	7,8	9,4	11,0	11,5
Грудень	9,6	11,3	13,3	13,8

8.102. Середньомісячний обсяг закупівель кондитерських виробів характеризується наступними даними: січень — 91 т, лютий — 95, березень — 110, квітень — 112, травень — 136, червень — 148,

липень — 130, серпень — 123, вересень — 113, жовтень — 95, листопад — 84, грудень — 96. *Обчислити* індекс сезонності обсягів закупівель кондитерських виробів.

8.103. Маються наступні про чисельність робітників заводу за місяцями року (чол.):

Таблиця 8.65

Місяці	Чисельність робітників	Місяці	Чисельність робітників
Січень	621	Липень	995
Лютий	642	Серпень	982
Березень	713	Вересень	976
Квітень	731	Жовтень	878
Травень	884	Листопад	743
Червень	923	Грудень	630

Визначити індекс сезонності зміни робітників заводу.

8.9. Інтерполяція та екстраполяція рівнів ряду динаміки

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Інтерполяцією називається знаходження проміжних невідомих рівнів ряду динаміки при наявності відомих сусідніх рівнів. Основна ідея інтерполяції полягає в заміні функції, для якої відома таблиця значень, інтерполяційним многочленом, який розглядається як наближене аналітичне вирівнювання для фактору-аргументу.

В залежності від кількості відомих сусідніх рівнів інтерполяція може проводитися різними способами: 1) шляхом співставлення двох рівнів та 2) шляхом використання декількох рівнів. Різні припущення про динаміку розвитку явища призводять, природно, до різних результатів. Тому при виборі того чи іншого способу інтерполяції необхідно визначити тенденцію розвитку низки динаміки.

Знаходження значень невідомих рівнів у значній мірі залежить від вибору тієї чи іншої тенденції розвитку явищ або процесів. Як правило, динамічний ряд розглядають до і після інтерпольованого періоду.

Розглянемо застосування інтерполяції на конкретних прикладах.

Задача 22. Маються висхідні дані про випуск продукції за 2020 та 2022 рр. (табл. 8.66). Необхідно *провести* інтерполяцію в обчислити ймовірний рівень 2021 р.

Таблиця 8.66

Роки	Випуск продукції (в млн грн)	t	y
2020	14,0	1	y_1
2021	?	2	y_2
2022	25,0	3	y_3

Рішення

При виборі того чи іншого методу перед інтерполяцією необхідно попередньо встановити характер зміни тенденції ряду динаміки.

Розглянемо знаходження невідомих значень ряду динаміки двома способами.

А. Розрахунок невідомих значень ряду динаміки на основі середнього приросту.

Передбачається, що випуск продукції збільшується з постійним приростом. Визначимо середній приріст:

$$\overline{\Delta} = \frac{y_3 - y_1}{3-1} = \frac{25-14}{2} = 5{,}5.$$

Додаємо до першого рівня величину приросту і отримаємо невідоме значення обсягу продукції за 2021 р.

$$y_2 = y_1 + \overline{\Delta} = 14{,}0 + 5{,}5 = 19{,}5.$$

Невідоме значення обсягу випуску продукції за 2021 р. можна знайти і як середнє значення рядів динаміки 2022 р. і 2020 р.:

$$y_2 = \frac{14{,}0 + 25{,}0}{2} = 19{,}5.$$

Б. Розрахунок невідомих значень ряду динаміки на основі середнього темпу зростання.

Припустимо, що обсяг випуску продукції за ці роки зростав з постійним (середнім) коефіцієнтом зростання. Визначимо його значення:

$$\overline{K}_p = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} = \sqrt[3-1]{\frac{y_3}{y_1}} = \sqrt{\frac{25{,}0}{14{,}0}} = \sqrt{1{,}7857} \approx 1{,}34.$$

Звідси:

$$y_2 = y_1 \cdot \overline{K}_p = 14{,}0 \cdot 1{,}34 = 18{,}8.$$

На практиці часто зустрічаються випадки, коли відомі декілька рівнів ряду динаміки.

Задача 22. Припустимо, що поряд із двома відомими рядами дина-

міки випуску продукції за 2020 і 2022 р. нам відомий ще один рівень, за 2019 р., величина якого становить 6 млн грн (табл. 8.67). Припустимо, що зміна випуску продукції здійснюється за параболою другого порядку.

Таблиця 8.67

Роки	t	Виробництво виробу A (млн грн) (y)	$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$
2017	1	6	$\bar{y}_t = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1$
2018	2	14	$\bar{y}_t = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 4$
2019	3	?	$\bar{y}_t = a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 9$
2020	4	25	$\bar{y}_t = a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 16$

Рішення

Складаємо систему трьох рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 = 6 \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 4 = 14 \\ a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 16 = 25 \end{array} \right. \\ \text{II} & \\ \text{III} & \end{array}$$

Віднімаючи з другого рівняння перше, отримаємо нове рівняння вже не з трьома, а з двома невідомими:

$$\begin{array}{rl} & \text{I} \quad a_0 + a_1 + a_2 = 6 \\ - & \text{II} \quad a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 14 \\ \hline & a_1 + 3a_2 = 8 \end{array}$$

Віднімемо з третього рівняння друге:

$$\begin{array}{rl} & \text{II} \quad a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 14 \\ - & \text{III} \quad a_0 + 4a_1 + 16a_2 = 25 \\ \hline & 2a_1 + 12a_2 = 11 \end{array}$$

В результаті перетворень маємо систему двох рівнянь їх двома невідомими:

$$\left\{ \begin{array}{rl} a_1 + 3a_2 = 8 & \left| \begin{array}{l} -2 \\ +1 \end{array} \right. \\ 2a_1 + 12a_2 = 11 & \end{array} \right.$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь:

$$\begin{array}{rl} & \left\{ \begin{array}{l} -2a_1 - 6a_2 = -16 \\ 2a_1 + 12a_2 = 11 \end{array} \right. \\ + & \\ \hline & 6a_2 = -5 \end{array}$$

$$a_2 \approx -0{,}83.$$

Тоді

$$a_1 + 3a_2 = 8;$$

$$a_1 = 8 - 3 \cdot (-0{,}83) \approx 10{,}49;$$

Підставляючи значення a_1 і a_2 перше рівняння, отримуємо:

$$a_0 + 10{,}49 - 0{,}83 = 6;$$

$$a_0 = -3{,}66.$$

Отже, $\overline{y}_{t=3} = -3{,}66 + 10{,}49 \cdot 3 - 0{,}83 \cdot 9 \approx 20{,}3$ млн грн.

Екстраполяцією називають знаходження наступних рівнів динамічного ряду, коли відомі попередні рівні ряду. Визначення невідомих членів динамічного ряду може здійснюватися за допомогою способу найменших квадратів шляхом підстановки в аналітичне рівняння відповідних значень t.

Так, наприклад, в попередній задачі на основі даних за три роки ми знайшли невідомий член динамічного ряду (2019 р.) за допомогою параболи другого порядку:

$$\overline{y}_{t=3} = -3{,}66 + 10{,}49 \cdot t - 0{,}83 \cdot t^2.$$

Якщо в нас є підстави припускати, що на найближчу перспективу тенденція збережеться, то підставивши в аналітичне рівняння значення Підставляючи t, рівні 5 і 6, отримаємо ймовірні значення випуску продукції за 2021 і 2022 рр.:

за 2021 р. — $\overline{y}_{t=5} = -3{,}66 + 10{,}49 \cdot 5 - 0{,}83 \cdot 5^2 = 28{,}0;$

за 2022 р. — $\overline{y}_{t=6} = -3{,}66 + 10{,}49 \cdot 6 - 0{,}83 \cdot 6^2 = 29{,}4.$

Задачі

8.104. Маються висхідні дані про випуск виробу А за 2020 та 2022 рр.

Таблиця 8.68

Роки	Випуск продукції (в млн грн)	t	y
2020	7,0	1	y_1
2021	?	2	y_2
2022	18,0	3	y_3

Необхідно *провести* інтерполяцію та обчислити ймовірний рівень 2021 р. різними способами.

8.105. Припустимо, що поряд із двома відомими рядами динаміки випуску продукції за 2020 і 2022 р. нам відомий ще один рівень, за 2019 р., величина якого становить 6 млн грн.

Таблиця 8.69

Роки	*t*	Виробництво виробу *A* (млн грн) (*y*)
2017	1	3
2018	2	7
2019	3	?
2020	4	18

Визначити рівень обсягу виробництва продукції за 2019 р., якщо припустимо, що зміна випуску продукції здійснюється за параболою другого порядку.

8.106. За даними задачі 8.105 гл. 8 визначити рівень виробництва виробу за 2021 та 2022 рр.

8.107. Чисельність населення району характеризується наступними даними:

Таблиця 8.70

	2020 р.	2021 р.	2022 р.
Обсяг виробництва, млн грн	60	?	164

Необхідно *обчислити* ймовірний рівень 2021 р. різними способами.

8.108. Припустимо, що обсяг виробництва виробу Б характеризується наступними даними:

Таблиця 8.71

Роки	*t*	Виробництво виробу *A* (млн грн) (*y*)
2017	1	8
2018	2	16
2019	3	?
2020	4	45

Визначити рівень обсягу виробництва продукції за 2019 р., якщо припустимо, що зміна випуску продукції здійснюється за параболою другого порядку.

8.10. Тести

1. Середньорічний темп приросту безпосередньо із річних темпів приросту:
   а) обчислюється шляхом взяття кореня ступеня числа років із добутку темпів приросту за відповідні роки;
   б) обчислюється шляхом ділення суми річних темпів приросту на кількість років;
   в) обчислюється шляхом ділення суми річних темпів приросту на кількість років (за мінусом 1);
   г) обчислити не можна.
2. Темп приросту обчислюється як:
   а) різниця між рівнем ряду;
   б) як відношення абсолютного приросту до темпу приросту;
   в) як відношення абсолютного приросту до рівня ряду, взятого за базу порівняння;
   г) як різниця між кінцевим і початковим значенням рівня ряду.
3. Базисний абсолютний приріст рівний:
   а) різниці між темпом зростання і 100 %;
   б) відношенню абсолютного приросту до темпу приросту;
   в) різниці абсолютних приростів;
   г) сумі ланцюгових абсолютний приростів.
4. При розрахунку середнього темпу зростання за періодом з різною тривалістю використовується середня:
   а) арифметична проста;
   б) арифметична зважена;
   в) геометрична проста;
   г) геометрична зважена.
5. За 2010–2015 рр. виробництво продукції на підприємстві зросло в 1,5 рази, а за 2015–2020 р. — на 40 %. Визначте темп зростання виробництва продукції в цілому за 2010–2020 рр.
   а) 107,1 %;
   б) 110 %;
   в) 210 %;
   г) 93,3 %.
6. Зміна фондовіддачі на підприємстві характеризується наступними даними (в процентах до 2020 р.):

2020 р.	2021 р.	2022 р.
100	106,1	107,2

В 2022 р. фондовіддача порівняно з 2021 р. зросла на:

а) 1,1 %;

б) 7,2 %;

в) 13,3 %;

г) 6,1 %.

7. Зміна собівартості одного верстату на машинобудівному заводі характеризується наступними даними (в процентах до 2020 р.):

2020 р.	2021 р.	2022 р.
100	105,6	102,4

В 2022 р. собівартість верстата порівняно з 2021 р. зменшилася на:

а) 2,4 %;

б) 3,2 %;

в) 5,6 %;

г) 8,0 %.

8. Ціна на капусту на ринку змінювалася за місяцями наступним чином в процентах до попереднього місяця):

лютий	березень	квітень
+4	–2	+1

В квітні порівняно з груднем ціна на капусту збільшилася на:

а) 2,0 %;

б) 2,9 %;

в) 3,0 %;

г) 7,1 %.

9. Обсяг товарної продукції в 2011 р. становив 20 млн грн, в 2020 р. 50 млн грн. Середньорічний темп зростання товарної продукції за 2010–2020 рр. становив:

а) $\sqrt{\frac{50}{20}}$;

б) $\frac{50-20}{10}$;

в) $\sqrt[9]{\frac{50}{20}}$;

г) $\sqrt[10]{\frac{50}{20}}$.

10. Продуктивність праці на заводі становила (виробіток на одного працівника за рік): в 2011 р. — 460 тис. грн, в 2020 р. — 690 тис. грн. Визначте середньорічний темп зростання продуктивності праці:

а) $\sqrt{1{,}5}$;

б) $\sqrt[9]{1{,}5}$;

в) $\sqrt[9]{150}$;

г) $\sqrt{\frac{690}{460}}$.

11. За наявністю усіх рівнів ряду і, отже, ланцюгових абсолютних приростів, середній абсолютний приріст визначається за формулою:

а) середньої арифметичної простої;

б) середньої геометричної;

в) середньої хронологічної;

г) середньої арифметичної зваженої.

12. Цей показник обчислюється як різниця рівнів ряду і виражається в одиницях вимірювання показника ряду:

а) темп зростання;

б) темп приросту;

в) абсолютний приріст динаміки;

г) значення 1 % абсолютного приросту динаміки.

13. Якщо відомі всі рівні ряду, середній темп зростання визначається за формулою:

а) середньої арифметичної простої;

б) середньої геометричної;

в) середньої хронологічної;

г) середньої арифметичної зваженої.

14. Показник, що розраховується як середня арифметична проста з ланцюгових абсолютних приростів $\overline{\Delta} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \Delta t}{n}$:

а) абсолютний приріст;

б) середній абсолютний приріст;

в) темп зростання;

г) темп приросту.

15. Різниця абсолютних ланцюгових приростів $\Delta = \Delta_t - \Delta_{t-1}$ характеризує:

а) абсолютне прискорення (+) чи уповільнення (–) динаміки;

б) співвідношення рівнів динамічного ряду *y(t)*; виражається коефіцієнтом або процентом;

в) середній абсолютний приріст за ряд періодів;

г) на скільки процентів рівень більше (менше) рівня, взятого за базу порівняння.

16. Ряд динамічний, рівні якого фіксують стан явища на певні моменти

часу, певні дати — це:

а) ряд динамічний моментний;

б) ряд динамічний інтервальний;

в) ряд розподілу;

г) ряд часовий.

17. Цей показник показує, на скільки процентів рівень більше (менше) рівня, взятого за базу порівняння. Його можна визначити як відношення абсолютного приросту до бази порівняння або безпосередньо на основі темпу зростання:

а) темп зростання;

б) темп приросту;

в) середньорічний темп приросту;

г) абсолютний приріст.

18. Ряд динамічний, рівні якого характеризують явище за певні проміжки часу — це:

а) ряд динамічний моментний;

б) ряд динамічний інтервальний;

в) ряд динаміки хронологічний;

г) ряд динаміки часовий.

19. Рівні цього ряду не залежать від періодичності спостереження не залежать:

а) моментного ряду;

б) інтервального ряду;

в) ряду середніх величин;

г) багатомірного ряду.

20. При використанні ковзної середньої число знову знайдених значень (рівнів) виявляється меншою від початкового числа членів ряду. Якщо середня розраховується за п'ятьма показниками, то ряд виходить коротшим:

а) на один член (з початку);

б) на два члени (один з початку і один з кінця);

в) на чотири члени (два з початку та два з кінця) тощо.

г) на шість членів (три з початку і три з кінця).

8.11. Питання для обговорення

1. З яких елементів складається ряд динаміки?

2. Яка різниця між поняттям «інтервал» в моментних та інтервальних рядах динаміки?

3. Ряди динаміки в залежності від виду наведених в них узагальне-

них показників можна поділити на ряди динаміки абсолютних, відносних та середніх величин. Якими серед них є висхідними, первісними ряди динаміки?

4. Чи можна підсумовувати показники в моментних рядах динаміки?

5. Яка основна передумова аналізу рядів динаміки?

6. Охарактеризуйте початковий, кінцевий та середній рівень ряду динаміки.

7. Чи можна обчислити середньорічний темп приросту безпосередньо із річних темпів приросту?

8. Яка специфіка розрахунку середнього темпу зростання за даними рівнів динаміки, які різко коливаються?

9. В чому полягає сутність та відмінність між екстраполяцією та інтерполяцією? Якою є принципова умова для застосування?

10. В який сферах застосовується екстраполяція рядів динаміки?

11. Як визначається середній темп приросту? Які недоліки має середній темп приросту як узагальнюючий показник?

12. Як визначається сезонність зміни рядів динаміки? В чому відмінність цих розрахунків для тривалого періоду часу (для трьохрічних періодів)?

13. В чому особливість методу укрупнення інтервалів? В яких випадках він застосовується?

ЛІТЕРАТУРА

1. *Горкавий В. К.* Статистика: Підручник. Третє вид., переробл. і доповн. Київ: Алерта, 2019. С. 288–320.
2. Статистика: підручник / *С. І. Пирожков*, *В. В. Рязанцева*, *Р. М. Моторин* та ін. Київ: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2020. С. 235–256.
3. Статистика: Підручник / *С. С. Герасименко*, *А. В. Головач*, *А.М. Єріна* та ін.; За наук. ред. д-ра екон. наук С. С. Герасименка. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: КНЕУ, 2000. С. 121–138.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

Навчальні посібники, словники

4. *Козирєва О. В.*, *Федорова В. О.* Статистика: навчальний посібник. Харків: Видавництво Іванченка І.С., 2021. С. 83–111.
5. *Мармоза А. Т.* Теорія статистики: підручник. – 2-е вид. перероб. та доп. Київ: Центр учбової літератури, 2013. С. 409–479.
6. *Педченко Г. П.* Статистика: Навчальний посібник. Мелітополь: Колор Принт, 2018. С. 92–99.

7. Статистичний словник / [*О. Г. Осауленко*, *О. О. Васєчко*, *М. В. Пугачова* та ін.]; за ред. д-ра держ. упр., проф., член-кор. НАН України О. Г. Осауленка; НТК статистичних досліджень. Київ: ДП «Інформ.-аналіт. агентство», 2012. 498 с.
8. *Шапочка М. К.*, *Маценко О. М.* Теорія статистики: навч. посібник. Суми: Університетська книга, 2014. С. 221–238.

Глава 9. ІНДЕКСИ

9.1. Розрахунок індивідуальних індексів обсягу виробництва, товарообігу, цін, якості та собівартості продукції

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Індекс індивідуальний — відносна величина, яка характеризує зміну в часі окремих елементів складного соціально-економічного явища. Індивідуальний індекс (i) визначається шляхом ділення величини цього елемента у звітному періоді (x_1) на величину його в базовому періоді (x_0):

$$i = \frac{x_1}{x_0}.$$

Розрахунок індивідуальних індексів здійснюється шляхом обчислення двох індексованих величин. Проте індивідуальні індекси можуть обчислюватися у вигляді індексного ряду для декількох періодів. При цьому існує два способи обчислення індивідуальних індексів: ланцюговий та базисний. При ланцюговому способу за базу відношення приймається рівень ознаки попереднього періоду. При обчислення індексного ряду за декілька періодів індексована величина постійно змінюється. При базисному способу розрахунку за базу приймається індексована величина якого-небудь одного періоду. Індекси, розраховані ланцюгових способом, називаються *ланцюговими*, а розраховані базисним способом — *базисні*. Між ланцюговими та базисними індексами існує взаємозв'язок: добуток ланцюгових індексів дорівнює базисному індексу; частка від ділення двох базисних індексів дорівнює значенню ланцюгового індексу. Тому, знаючи ланцюгові індекси, можна визначити базисний індекс, а маючи базисні, — ланцюговий індекс.

У практиці розрахунку індивідуальних індексів найбільшого поширення набули індексі фізичного обсягу виробництва, товарообігу, цін та собівартості. Розглянемо порядок розрахунку перерахованих індексів.

Індивідуальний індекс фізичного обсягу продукції (i_q) визначається за формулою:

$$i_q = \frac{q_1}{q_0},$$

де q_1 — обсяг продукції в натуральному вираженні в поточному періоді;

q_0 — обсяг продукції в натуральному вираженні в базисному періоді.

Індивідуальний індекс цін (i_p) характеризує зміни ціни окремого товару в поточному періоді порівняно з базисним, визначається за формулою:

$$i_p = \frac{p_1}{p_0},$$

де p_1 — ціна товару в поточному періоді;

p_0 — ціна товару в базисному періоді.

Індивідуальний індекс якості ($i_к$) характеризує зміну якості кожного представника продукції і обчислюється за формулою:

$$i_к = \frac{Q_1}{Q_0},$$

де Q_1 — рівень якості представника продукції в поточному періоді;

Q_0 — рівень якості представника продукції в базисному періоді.

Індивідуальний індекс собівартості продукції (i_z) визначається за формулою:

$$i_z = \frac{z_1}{z_0},$$

де z_1 — собівартість одиниці продукції в поточному періоді;

z_0 — собівартість одиниці продукції в базисному періоді.

Індивідуальний індекс товарообороту визначається за формулою:

$$i_m = \frac{w_1}{w_0},$$

де w_1 — товарооборот в поточному періоді;

w_0 — товарооборот в базисному періоді.

Розглянемо приклад розрахунку індивідуальних індексів.

Задача 1. Маються наступні дані:

Таблиця 9.1

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Обсяг виробництва продукції, т	200	220	235	286	315

Обчислити ланцюгові та базисні індивідуальні індекси.

Рішення

І. Обчислимо ланцюгові індекси фізичного обсягу виробництва продукції:

індекс 2017 р. до 2016 р.

$$i_{2017/2016} = \frac{i_{2017}}{i_{2016}} = \frac{220}{200} = 1{,}1, \text{ або } 110\ \%;$$

індекс 2018 р. до 2017 р.

$$i_{2018/2017} = \frac{i_{2018}}{i_{2017}} = \frac{235}{220} = 1{,}068, \text{ або } 106{,}8\ \% \text{ і т. п.}$$

В результаті розрахунків отримаємо індивідуальні ланцюгові індекси обсягу виробництва:

Таблиця 9.2

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Коефіцієнти	–	1,100	1,068	1,217	1,101
Проценти	–	110,0	106,8	121,7	110,1

II. Обчислимо базисні індекси. За базу розрахунку приймемо 2016 р.

Базисний індекс 2017 р. до 2016 р.

$$i_{2017/2016} = \frac{i_{2017}}{i_{2016}} = \frac{220}{200} = 1{,}1, \text{ або } 110\ \%;$$

базисний індекс 2018 р. до 2016 р.

$$i_{2018/2017} = \frac{i_{2018}}{i_{2016}} = \frac{235}{200} = 1{,}175, \text{ або } 117{,}5\ \%;$$

базисний індекс 2019 р. до 2016 р.

$$i_{2019/2016} = \frac{i_{2019}}{i_{2016}} = \frac{286}{200} = 1{,}430, \text{ або } 143{,}0\ \%;$$

базисний індекс 2020 р. до 2016 р.

$$i_{2020/2016} = \frac{i_{2020}}{i_{2016}} = \frac{315}{200} = 1{,}575, \text{ або } 157{,}5\ \%.$$

Перевіримо наш розрахунок обчисленням базисного індексу 2020 р. до 2016 р. прямим способом: 315:200=1,575, або 157,5 %. Таким способом можна обчислити базисний індекс і для іншого року.

Аналогічним чином здійснюються розрахунки індивідуальних індексів фізичного обсягу товарообороту, цін, якості та собівартості продукції.

Задачі

9.1. Виробництво шоколадних цукерок в Україні характеризується наступними даними:

Таблиця 9.3

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Обсяг вироблених шоколадних цукерок, тис. т	52,3	53,3	53,4	66,6	70,7

Визначте ланцюгові індекси обсягу вироблених шоколадних цукерок в коефіцієнтах і процентах. На основі ланцюгових індексів обчисліть базисні індекси. При обчисленні базисних індексів за базу прийміть 2016 р. Для 2020 р. перевірте правильність розрахунку базисного індексу прямим способом. Вирішення *оформіть* в таблиці.

9.2. Маються наступні дані про обсяг продажу і цінах на ринку міста:

Таблиця 9.4

Тканини	Продано, тис. кг		Ціна за 1 кг	
	2020 р.	2021 р.	2020 р.	2021 р.
Картопля	5,1	6,2	8	9,5
Капуста	2,3	2,6	5	6
Морква	0,8	0,9	10	12
Цибуля	3,1	2,9	5	4

Визначте базисні індекси (в коефіцієнтах і процентах) фізичного обсягу, цін, вартості.

9.3. Верстатобудівний завод реалізував у 2022 р. фрезерних 5-ти осьових верстатів 17 К 500 шт., в тому числі в I кварталі — 100 шт., в II — 110 шт., в III кварталі — 137 шт., в IV кварталі — 153 шт. *Обчисліть* базисні індекси реалізації верстатів на верстатобудівному заводі. За базу порівняння прийміть I квартал.

9.4. Обсяг виробництва керамічної плитки в Україні за 2016–2020 рр. характеризується наступними даними:

Таблиця 9.5

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Обсяг виробництва керамічної плитки, млн $м^2$	45,4	52,3	54,5	49,9	46,6

Обчисліть базисні індекси (в коефіцієнтах і процентах) випуску плитки, за базу прийміть 2016 р. На основі базисних індексів *розрахуйте* ланцюгові індекси для 2018, 2019 та 2020 рр.

9.5. Виробництво цукру (білого рафінованого у твердій формі) склало (млн. т):

2014 р.	2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
2,1	1,5	2,0	2,0	1,8	1,5	1,0

Обчисліть базисні і ланцюгові індекси (в коефіцієнтах і процентах) виробництва цукру в Україні. При обчисленні базисних індексів прийміть за базу 2014 р.

9.6. Маються наступні дані про кількість перевезених пасажирів автомобільним транспортом за I квартал 2021 р.: січень — 80,5 млн, лютий — 86,2 млн, березень — 92,0 млн, квітень — 78,3 млн, травень — 89,9 млн, червень — 97,3 млн пасажирів. *Обчисліть* базові індекси кількості перевезених пасажирів автомобільним транспортом. За базу прийміть обсяг перевезених пасажирів за січень.

9.7. Обсяг виробництва будівельної цегли за заводі характеризується наступними даними:

Таблиця 9.6

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Обсяг виробництва цегли, тис. шт.	6 500	6 580	6 670	6 680	6 900

Обчисліть базисні індекси випуску цегли, за базу прийміть 2016 р.

9.8. Виробництво бензолу в Україні характеризується наступними даними:

Таблиця 9.7

	2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.
Бензол, чистотою 95 мас. % і більше, тис. т	42,1	32,5	75,5	108,6	92,9

Обчисліть базисні індекси виробництва бензолу в Україні. За базу порівняння слід прийняти 2015 р. На основі отриманих базисних індексів *визначте* цепні індекси.

9.9. Відомі наступні дані про обсяг перевезених вантажів залізничним транспортом України за 2016–2020 рр. (табл. 9.8). *Обчисліть* базові індекси обсягу перевезених вантажів залізничним транспортом. Рішення *оформіть* в таблиці.

Таблиця 9.8

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Обсяг перевезених вантажів, млн т	341,1	339,5	322,3	312,9	305,5

9.10. Виробництво електроенергії в Україні складає (млрд кВт·год.):

2014 р.	2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
182,8	163,7	164,6	156,0	159,8	154,1	147,8

Обчисліть базисні та ланцюгові індекси виробництва електроенергії. При обчисленні базисних індексів прийміть за базу 2014 р.

9.11. Індивідуальні індекси виробництва продукції сільського господарства підприємств України (в процентах до попереднього року) характеризується даними наступної таблиці:

Таблиця 9.9

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Індекси	109,7	97,0	112,0	102,7	88,0

Визначте базисні індекси зростання обсягу валової продукції сільського господарства підприємств за 2016-2020 рр. (за базу прийміть 2016 р.). Яку властивість індивідуальних індексів було використано при вирішенні задачі?

9.12. Споживання найважливіших продуктів харчування на душу населення області характеризується наступними даними:

Таблиця 9.10

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Цукор	24	23	25	31	30
Риба і рибопродукти	4	6	11	17	16
Фрукти і ягоди	11	16	24	38	54
Картопля	240	250	248	249	231
Хліб і хлібопродукти	200	190	185	170	145

Визначте базисні індекси (в коефіцієнтах і процентах) обсягу споживання продукції, прийнявши за базу 2016 р., *нанесіть* значення отриманих базисних індексів на графік і на основі базисних індексів *обчисліть* ланцюгові індекси для 2017, 2018, 2019 і 2020 рр.; 1) за цукром;

2) за рибою і рибопродуктами; 3) за фруктами і ягодами; 4) за картоплею; 5) за хлібом і хлібопродуктами.

9.13. Маються наступні дані про індекси цін за окремими групами товарів (в процентах до 2015 р.):

Таблиця 9.11

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
М’ясо та птиця	105	116	127	136	141
Масло тваринне	102	106	134	130	134
Цукор	98	104	108	121	126
Картопля	132	133	133	134	138
Хліб і хлібопродукти	107	112	124	121	125

Визначте індекси цін в процентах до 2016 р., 2017 і 2020 рр.; використовуючи наведені дані, розрахуйте середньорічні ціна в 2016 р., 2018 р., 2020 р.: 1) на м’ясо та птицю, якщо в 2020 р. середньорічна ціна склала 87 грн; 2) на цукор, якщо середньорічна ціна в 2020 р. становила 24 грн; 2) на картоплю в 2017, 2019 та 2020 рр., якщо середньорічна ціна склала 12 грн.

9.14. Маються наступні дані про обсяг виробництва мінеральних добрив за 2016–2020 р. (*в умовних одиницях, тис. т*)

Таблиця 9.12

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Мінеральні добрива	3 247	5 489	12 815	24 652	31 854

Визначте: 1) ланцюгові індекси виробництва мінеральних добрив; 2) базисні індекси виробництва мінеральних добрив, прийняв за базу 2016 р.

9.15. Маються наступні дані про випуск продукції і ціни на неї на підприємстві за відповідні періоди:

Таблиця 9.13

Види продукції	Виробництво, шт.		Оптова ціна за 1 шт., грн	
	Базисний	Звітний	Базисний	Звітний
Електродвигуни	5 200	5 430	3 500	3 760
Кондиціонери	840	825	6 540	6 780

Визначити індивідуальні індекси фізичного обсягу продукції і цін. *Перевірити* співвідношення взаємопов’язаних індексів.

9.16. Маються наступні дані про зростання обсягів капітальних вкладень підприємств промисловості України:

Таблиця 9.14

	2015 р.	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Індекси	100,0	134,3	163,5	228,0	290,0	206,0

Визначте індекси капітальних вкладень в процентах до попереднього року і *здійсніть* аналіз отриманих даних. Які індекси наведені в умовах задачі? Які індекси обчислені вами?

9.17. Виробництво окремих видів продукції області характеризується наступними даними:

Таблиця 9.15

	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Мінеральні добрива (в перерахунку на 100 % споживчих речовин), тис. т	248,5	267,1	295,3	308,4	332,4
Шоколадні конфетки, тис. т	24,7	26,1	26,5	25,4	31,6
Хімічні волокна і нитки, тис. т	1156	1214	1234	1342	1402
Нафта, тис. т	547	556	578	596	612
Кальцинована сода, тис. т	24	23	26	27	28

Визначте ланцюгові та базисні індекси виробництва кожного виду продукції. *Перевірити* взаємозв'язок між ланцюговими та базисними індексами.

9.18. Ланцюгові індекси фізичного обсягу продукції підприємства склали: в 2016 р. — 105,3 %, 2017 р. — 104,3 %, 2018 р. — 102,8 %, 2019 р. — 107,1 %, 2020 р. — 98,6 %. *Визначте* базисні індекси фізичного обсягу.

9.19. Маються наступні дані:

Таблиця 9.16

Типи батарей	2016 р.	2017 р.	2018 р.	2019 р.	2020 р.
Термін служби акумуляторної батареї до повного вибуття (в циклах)					
марка А	101	95	118	97	104
марка Б	96	104	81	83	112

Обчислити індивідуальні індекси якості продукції.

9.2. Розрахунок агрегатних загальних і групових індексів обсягу виробництва (товарообігу), цін, собівартості і продуктивності праці

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Основною формою будь-якого індексу є агрегатна форма. *Агрегатними* називаються індекси, у чисельнику та знаменнику дроби яких є з'єднання (латинське «aggrego» — приєдную) рівнів явища у вигляді їх суми, добутку або суми добутку. Особливістю агрегатних індексів полягає в тому, що загальний індекс утворюється в результаті співвідношення абсолютних рівнів складного явища, елементи якого безпосередньо непорівнянні. Агрегатний індекс застосовують у тих випадках, коли важливо знати загальну (середню) відносну зміну всього агрегату $\sum p_i q$ або $\sum q_i p$, взятого в цілому.

Агрегатна формула індексу складається з двох елементів: індексованої величини та співвимірника або ваг. *Індексованої величиною* називаються абсолютні рівні явищ, зміна яких ми вивчаємо, а співвимірником — абсолютний рівень того постійного явища, за допомогою якого можна перейти від несумірного до порівнянного.

Агрегатний індекс є основною формою зведених та групових індексів обсягу виробництва (товарообігу), цін, собівартості та продуктивності праці. При побудові агрегатного індексу необхідно правильно визначити ваги індексу. Так як вагами служать показники, які тісно пов'язані з індексованими величинами, то отримані добутки утворюють визначені економічні категорії. Так, в *індексах обсягу виробництва* (*товарообороту*) індексованою величиною є фізичний обсяг *q* виробленої (реалізованої) продукції, а в якості ваг беруться ціни *p*, а отриманий добуток *qp* утворює вартість продукції . В індексах цін індексуються ціни, а в якості ваг виступає натуральна кількість виробленої (реалізованої продукції. В *індексах собівартості* індексованою величиною виступає собівартість одиниці продукції *z*, а в якості ваг — фізичний обсяг виробленої (реалізованої) продукції *q*, а отриманий добуток утворює *zq*. І, нарешті, в *індексах продуктивності праці* індексованою величиною виступає затрати праці на виробництво одиниці продукції *t*, в якості ваг береться фізичний обсяг виробленої продукції, а отриманий добуток *tq* утворює загальні затрати праці на виробництво продукції.

Агрегатний індекс характеризує відносні зміни індексованої величини в поточному періоді в порівнянні з базисним періодом, а ваги

беруться незмінні (відносяться до будь-якого одного періоду). При побудові агрегатних індексів дотримуються загального правила: індекси кількісних показників розраховуються за вагами базисного періоду, а індекси якісних показників (собівартості, цін і т. п.) — за вагами звітного періоду.

Розглянемо приклад розрахунку агрегатних індексів цін та фізичного обсягу продукції.

Задача 2. Припустимо, що ми маємо відомості про кількість реалізованих товарів та ціни на ці товари за два суміжні періоди:

Таблиця 9.17

Виріб	Одиниця виміру	Базисний період		Звітний період	
		кількість виробів (q_0)	ціна за одиницю в грн (p_0)	кількість виробів (q_1)	ціна за одиницю в грн (p_1)
А	кг	200	60	210	65
Б	шт.	500	30	600	27
В	м	1 000	25	900	20

Розрахуйте загальний індекс цін та фізичного обсяг товарообороту.

Рішення

Загальний індекс цін складе:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{65 \cdot 210 + 27 \cdot 600 + 20 \cdot 900}{60 \cdot 210 + 30 \cdot 600 + 25 \cdot 900} = \frac{47\,850}{53\,100} = 0{,}901, \text{ або } 90{,}1\ \%.$$

Таким чином, ціни в середньому знизилися на 9,9 %. В чисельнику індексу — вартість товарів, проданих в звітному періоді, за цінами звітного року, а в знаменнику, вартість цих же товарів, але за цінами базисного року. Різниця між чисельником і знаменником характеризує зміну товарообороту за рахунок зміни цін. В нашому прикладі обсяг товарообороту скоротився за рахунок зниження цін на 5 250 грн (47 850 – 53 100).

Використовуючи умови задачі, обчислимо індекс фізичного обсягу товарообороту:

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{210 \cdot 60 + 600 \cdot 30 + 900 \cdot 250}{200 \cdot 60 + 500 \cdot 30 + 1000 \cdot 25} = \frac{53\,100}{52\,000} = 1{,}021, \text{ або } 102{,}1\ \%.$$

Таким чином, фізичний (натуральний) обсяг товарообороту, оцінений в цінах базисного періоду, збільшився з 52 000 грн до 53 100, або зріс в цілому (в середньому для окремих компонентів продукції) на

2,1 %; приріст продукції за цей час (різниця між чисельником і знаменником агрегатного індексу) склала за цими ж цінами 1 100 грн.

Задача 3. Маються наступні дані про затрати праці на одиницю продукції на машинобудівному заводі:

Таблиця 9.18

Виріб	Затрати праці на одиницю продукції, год.		Вироблено продукції у звітному періоді, тис. од.
	базисний період	звітний період	
А	2,4	2,2	1 000
Б	0,4	0,3	3 500
В	3,4	3,1	500
Г	1,6	1,3	4 000

Обчисліть груповий індекс продуктивності праці (за трудовими затратами): 1) для продукції *А* і *Б*; 2) для продукції *В* і *Г*.

Рішення

Індекс продуктивності праці може бути обчислений за формулою:

$$I_w = \frac{\sum t_0 q_1}{\sum t_1 q_1}.$$

Груповий індекс продуктивності праці складе:

для продукції *А* і *Б* — $I_w = \frac{2{,}4 \cdot 1000 + 0{,}4 \cdot 3500}{2{,}2 \cdot 1000 + 0{,}3 \cdot 3500} = \frac{3800}{3250} = 1{,}169$, або 116,9 %;

для продукції *В* і *Г* — $I_w = \frac{3{,}4 \cdot 500 + 1{,}6 \cdot 4000}{3{,}1 \cdot 500 + 1{,}3 \cdot 4000} = \frac{8100}{6750} = 1{,}2$, або 120,0 %.

Задачі

9.20. Маються наступні дані по одному із магазинів:

Таблиця 9.19

Тканини	Реалізовано, тис. м^2		Ціна за 1 м^2	
	2020 р.	2021 р.	2020 р.	2021 р.
Атлас	4,2	4,8	15	16
Кашемір	1,6	1,8	85	94
Лляна тканина	7,1	6,8	62	60
Креп-шифон	5,6	6,2	128	135

Визначте: 1) індивідуальні індекси фізичного обсягу, цін, вартості; 2) загальні індекси фізичного обсягу реалізації, цін і товарообігу у фак-

тичних цінах; 3) абсолютну зміну товарообігу в результаті зміни цін і фізичного обсягу реалізованих товарів.

9.21. Маються наступні дані про обсяг продажу і цінах на ринку міста *N*:

Таблиця 9.20

Тканини	Продано, тис. кг		Ціна за 1 кг	
	2020 р.	2021 р.	2020 р.	2021 р.
Картопля	5,1	6,2	8	9,5
Капуста	2,3	2,6	5	6
Морква	0,8	0,9	10	12
Цибуля	3,1	2,9	5	4

Визначте: 1) агрегатні індекси фізичного обсягу реалізації, цін і товарообігу у фактичних цінах. Індекс товарообороту обчисліть способом взаємозв'язку між індексами; 2) абсолютну суму економії (переплати) грошових коштів населення від зниження (зростання) цін.

9.22. Представлені наступні дані про ціни і обсяги реалізації продуктів на ринку:

Таблиця 9.21

Продукти	Ціни на ринках, грн за од.			Реалізовано на ринках		
	1	2	3	1	2	3
Базисний період:						
Молоко, л	20	21	20,5	4 200	2 800	1 800
Яйця, шт.	3	3,1	2,9	1 900	1 500	2 400
Картопля, кг	8,5	9	10,5	2 500	3 600	1 500
Звітний період:						
Молоко, л	21	20,4	22	4 700	3 100	2 400
Яйця, шт.	3,2	3,3	2,9	2 100	1 800	2 600
Картопля, кг	8,3	9,4	7,8	2 200	3 600	1 500

Обчисліть агрегатний індекс цін.

9.23. Маються наступні дані про ціни і кількість товарів, проданих на ринку:

Таблиця 9.22

Товари	Продано			Середньорічна ціна, грн		
	2020	2021	2022	2020	2021	2022
М'ясо, т	700	600	680	125 000	137 000	148 000
Молоко, тис. л	12 300	14 000	15 000	20 000	21 000	24 000
Яйця, тис. дес.	50	60	80	30 000	29 500	31 000

Обчислити індекси цін: 1) 2021 р. до 2020 р.; 2) 2022 р. до 2021 р.; 3) 2022 р. до 2020 р. Поясність розбіжність між добутком перших двох індексів і індексом цін 2022 р. до 2020 р.

9.23. Маються наступні дані про обсяг продажу і цінах на ринку:

Таблиця 9.23

Номер п/п	Товари	Одиниця виміру	Продано в натуральних одиницях		Ціна за 1 кг	
			базисний період	звітний період	базисний період	звітний період
1	Картопля	кг	40 000	50 000	16	15
2	Капуста свіжа	»	25 000	30 000	10	11
3	Морква	»	7 000	8 000	14	13
4	Молоко	»	12 000	10 000	20	22
5	Сир	»	500	600	180	215
6	Сметана	»	200	500	45	53

Обчислити: а) загальний індекс цін; б) індекс фізичного обсягу товарообороту; в) індекс цін за товарами овочевої групи; г) індекс цін за товарами молочної групи.

9.24. Маються наступні дані про собівартість виробленої продукції на підприємстві:

Таблиця 9.24

Виріб	Собівартість одиниці продукції, грн		Вироблено продукції у звітному періоді, тис. грн
	базисний період	звітний період	
А	29	28	6 000
Б	58	54	10 000
В	16	11	2 000
Г	85	80	5 000
Д	68	71	8 000

Обчисліть груповий індекс собівартості продукції: 1) виробів *А* і *Б*; 2) виробів *Б* і *В*; 3) виробів *В* і *Г*; виробів *Г* і *Д*.

9.25. На основі наведених даних *обчисліть* індивідуальні індекси та груповий індекс фізичного обсягу продукції взуттєвої фабрики:

Таблиця 9.25

Виріб	Виготовлено пар взуття		Оптова ціна за одну пару, грн
	квітень	травень	
Дитяче взяття	5 400	5 600	350
Жіноче взуття	8 500	9 640	680
Чоловіче взуття	7 500	7 600	590

9.26. За даними верстатобудівного заводу маються наступні дані про ціни на продукцію, а також плановий та фактичний обсяг випуску основних видів продукції:

Таблиця 9.26

Види продукції	Одиниця виміру	Випуск		Оптова ціна (грн)
		за планом	фактично	
Верстати «КР-100»	шт.	400	406	25 600
Верстати «Р-12»	»	300	290	64 300
Верстати «Т-200К»	»	630	680	12 700
Чавунне лиття	т	300	330	6 400
Листова оцинкована сталь	$м^2$	5 000	4 900	50

Обчисліть індивідуальні індекси та груповий індекс виконання плану. Рішення *оформіть* в таблиці.

9.27. Меблева фабрика випускає столи письмові, аудиторні, стільці, шафи книжні. Маються наступні дані про роботу фабрики за квітень і травень 2022 р.

Таблиця 9.27

Види продукції	Виробництво, шт.		Оптова ціна за 1 шт., грн	
	квітень	травень	квітень	травень
Столи письмові двухтумбові 29/135	300	330	6 450	6 620
Столи тумбові кутові 29/102	250	220	2 840	2 650
Столи комп'ютерні кутові Т45	500	480	5 120	4 900
Шафи для офісу 29-31	170	160	8 640	9 150
Високі офісні шафи з антресолями	800	880	12 400	13 100
Стільці				

Обчисліть: 1) індивідуальні та групові індекси обсягу виробництва продукції; 2) індивідуальні та групові індекси цін; 3) індивідуальні та групові індекси загальної вартості продукції; Рішення представте у формі таблиці.

9.28. Маються наступні дані:

Таблиця 9.28

Найменування продукції	Вироблено продукції, тис. т		Собівартість 1 т, тис. грн	
	червень	липень	червень	липень
Сталь вуглеводна	25	26	12,4	13,8
Сталь легована	12	18	8,7	8,5

Визначте загальний індекс собівартості.

9.30. Маються наступні дані по одному із цехів заводу:

Таблиця 9.29

Найменування продукції	Кількість виробленої продукції, шт.		Затрати праці на виготовлення 1 деталі, люд.-год.	
	I квартал	II квартал	I квартал	II квартал
Деталь КП-100	1 000	1 100	5,4	5,2
Деталь МР-200	200	190	18,4	19,8

Визначте загальний індекс трудомісткості.

9.31. Маються наступні дані про випуск продукції і ціни на неї на хімічному заводі за відповідні періоди:

Таблиця 9.30

Види продукції	Виробництво, т		Оптова ціна за 1 т, грн	
	Базисний	Звітний	Базисний	Звітний
Смола	1 500	1 600	2 500	2 400
Сульфат аммонія	40	35	6 400	7 500

Визначити: а) індивідуальні індекси фізичного обсягу продукції і цін; б) загальні індекси фізичного обсягу продукції, цін і вартості. Перевірити співвідношення взаємопов'язаних індексів.

9.32. Маються наступні дані про випуск продукції на цементному заводі за перше та друге півріччя 2022 р.:

Таблиця 9.31

Марки цементу	Кількість виробленої продукції, т		Оптова ціна за одиницю, грн
	перше півріччя	друге півріччя	
М-200	2 500	2 400	2 000
М-300	3 200	3 400	2 500
М-400	5 000	5 500	3 200
М-500	2 000	2 400	4 500

Обчисліть індивідуальні та груповий індекс обсягу виробництва продукції. Рішення *представте* в табличній формі.

9.33. На основі нижченаведених даних про виробництво продукції на машинобудівному заводі *визначте*: 1) індивідуальні індекси цін і фізичного обсягу продукції (базисні та ланцюгові); 2) загальні індекси вартості продукції; 3) загальний індекс цін і фізичного обсягу продукції

(у відпускних цінах базисного року. При обчисленні базисних індексів за базу порівняння прийміть випуск продукції в I кварталі.

Таблиця 9.32

Види продукції	Вироблено продукції (тис. шт.)		Відпускна ціна за 1 т (грн)	
	базисний період	звітний період	базисний період	звітний період
А	14	13	1 500	1 650
Б	30	27	800	760
В	500	550	1 200	1 170

9.33. Маються наступні дані про обсяг реалізації продукції підприємством:

Таблиця 9.33

Товар	Одиниця виміру	Кількість реалізованої продукції, тис. од.		Ціна за одиницю продукцію, грн	
		базисний період	звітний період	базисний період	звітний період
А	т	130	110	60	70
Б	м	1 000	900	20	25
В	шт.	40	45	200	300

Визначити: 1) індивідуальні та загальні індекси кількості реалізованої продукції, ціни і виручки від реалізації продукції. *Побудуйте* відповідну систему індексів; 2) абсолютну зміну виручки від реалізації всього і в тому числі за рахунок зміну обсягу реалізації та цін. *Зробіть* висновки.

9.34. Маються наступні дані про облікову чисельність та фонд заробітної плати трьох підприємств:

Таблиця 9.34

Номер підприємства	Базисний період		Звітний період	
	середньооблікове число робітників	місячний фонд заробітної плати (тис. грн)	середньооблікове число робітників	місячний фонд заробітної плати (грн)
№ 1	70	724,5	68	712,6
№ 2	60	55,4	64	58,7
№ 3	200	1 642,5	220	1 865,4

Обчисліть: 1) індивідуальні індекси середніх заробіток по кожному підприємству; 2) груповий індекс середньої заробітної плати в цілому по трьом підприємствам.

9.3. Розрахунок агрегатних індексів із постійними та змінними вагами, ланцюгових та базисних агрегатних індексів

Методичні вказівки та рішення типової задачі

При побудові індексів дуже важливий правильний вибір бази порівняння, оскільки вона значною мірою впливає значення результату, що визначається при розрахунку індексу. В залежності від прийнятої бази розраховують індекси з постійними та змінними вагами.

Індекси з постійними вагами — система індексів одного і того ж явища, обчислених з вагами, що не змінюються від одного індексу до іншого. Необхідно звернути увагу на те, що індекси з постійними і змінними вагами мають неоднакову властивість. Індекси з постійними вагами мають ту перевагу, що для них діє правило, згідно з яким добуток ланцюгових індексів дорівнює базовому індексу.

Вибір ваг індексів визначається теоретичним аналізом явища, що вивчається.

Задача 4. Маються наступні дані, що характеризуються обсяг виробництва та вартість продукції машинобудівного заводу:

Таблиця 9.35

Вид продукції	Одиниця виміру	Вироблено продукції			Ціна в 2018 р., грн, грн	Вартість продукції в незмінних цінах 2017 р., тис. грн		
		2018	2019	2020		2018	2019	2020
А *Б*	т тис. шт.	50 10	53 11	57 13	5 000 1 000	250 10	265 11	285 13
Всього		–	–	–	–	260	276	298

Необхідно розрахувати індекси фізичного обсягу продукції з постійними вагами.

Обчислимо індекси з постійною базою (базисні):

$$I_{\frac{2019}{2018}} = \frac{276}{260} = 1{,}062; \quad I_{\frac{2020}{2018}} = \frac{298}{260} = 1{,}146.$$

Обчислимо індекси зі змінною базою (ланцюгові):

$$I_{\frac{2019}{2018}} = \frac{276}{260} = 1{,}062; \quad I_{\frac{2020}{2019}} = \frac{298}{276} = 1{,}079.$$

Добуток ланцюгових індексів дає індекс базисний:

$$1{,}062 \cdot 1{,}079 = 1{,}146.$$

Інше положенні з вагами при розрахунку індексів зі змінними вагами. *Індекси зі змінними вагами* — система зведених індексів одного і того ж явища, послідовно обчислених з вагами, що змінюються від одного індексу до іншого. Змінні ваги — це ваги звітного періоду. Індексний ряд із змінними вагами не відчиняється правилу, згідно з яким добуток ланцюгових індексів дає базисний індекс.

Візьмемо систему індексів зі змінною вагою:

$$\frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_1 q_2} \times \frac{\sum p_3 q_3}{\sum p_2 q_3} \times \frac{\sum p_4 q_4}{\sum p_3 q_4} \neq \frac{\sum p_4 q_4}{\sum p_1 q_4}.$$

Зважаючи на те, що тут у кожному індексі різні ваги, вони не дають можливості перейти від ланцюгових до базисних індексів.

В якості прикладу розберемо індекси собівартості із змінними вагами.

Задача 5. В механічному цеху маються наступні дані про обсяг та собівартість продукції:

Таблиця 9.36

Вид продукції	Одиниця виміру	Вироблено продукції за квартал			Собівартість продукції в кварталі, грн		
		I	II	III	I	II	III
А	кг	1 300	1 320	1 350	2,5	2,4	2,3
Б	шт.	200	240	300	45	45	48
В	»	600	620	640	10	11	12

Необхідно розрахувати індекси собівартості із змінними вагами:

$$I_{\frac{II\ кв.}{I\ кв.}} = \frac{2{,}4 \cdot 1\,320 + 45 \cdot 240 + 11 \cdot 620}{2{,}5 \cdot 1\,300 + 45 \cdot 200 + 10 \cdot 600} = \frac{3\,168 + 10\,800 + 6\,820}{3\,250 + 9\,000 + 6\,000} = \frac{20\,788}{18\,250} = 1{,}139;$$

$$I_{\frac{III\ кв.}{II\ кв.}} = \frac{2{,}3 \cdot 1\,350 + 48 \cdot 300 + 12 \cdot 640}{2{,}4 \cdot 1\,320 + 45 \cdot 240 + 11 \cdot 620} = \frac{3\,105 + 14\,400 + 7\,680}{3\,168 + 10\,800 + 6820} = \frac{25\,185}{20\,788} = 1{,}216;$$

Обчислимо добуток ланцюгових індексів:

$$1{,}139 \cdot 1{,}216 = 1{,}385.$$

Розрахуємо базисний індекс за III квартал:

$$I_{\frac{III\ кв.}{I\ кв.}} = \frac{2{,}3 \cdot 1\,350 + 48 \cdot 300 + 12 \cdot 640}{2{,}5 \cdot 1\,300 + 45 \cdot 200 + 10 \cdot 600} = \frac{3\,105 + 14\,400 + 7\,680}{3\,250 + 9\,000 + 6000} = \frac{25\,185}{18\,250} = 1{,}380.$$

Як бачимо, індексний ряд не відчиняється правилу, згідно з яким

добуток ланцюгових індексів дає базисний:

$$1{,}385 \neq 1{,}380.$$

Задачі

9.35. Маються наступні дані:

Таблиця 9.37

Продукція	Одиниця виміру	Обсяг реалізації			Ціна реалізації, грн		
		2020	2021	2022	2020	2021	2022
А	шт.	300	340	400	25	23	20
Б	т	500	520	570	12	14	18
В	»	20	18	22	600	640	660

Обчисліть індекс цін: 1) 2021 р. до 2020 р.; 2) 2022 р. до 2021 р.; 3) 2022 р. до 2020 р. Поясність розбіжність між добутком перших двох індексів та індексом цін 2022 р.

9.36. Маються наступні дані про ціни та кількість товарів, проданих на ринку:

Таблиця 9.38

Продукція	Одиниця виміру	Обсяг реалізації			Ціна реалізації, грн		
		2020	2021	2022	2020	2021	2022
Картопля	кг	600	640	700	15	13	16
Капуста	кг	500	520	570	9	11	8
Молоко	л	20	18	22	35	33	40

Обчисліть індекс цін: 1) 2021 р. до 2020 р.; 2) 2022 р. до 2021 р.; 3) 2022 р. до 2020 р. Поясність розбіжність між добутком перших двох індексів та індексом цін 2022 р.

9.37. Маються наступні дані про обсяг та собівартість реалізованої продукції:

Таблиця 9.38

Продукція	Одиниця виміру	Обсяг реалізації			Собівартість одиниці продукції, грн		
		2020	2021	2022	2020	2021	2022
А	шт.	100	120	140	25	23	22
Б	т	200	220	270	12	15	19
В	»	620	600	640	20	18	16

Обчисліть індекс собівартості продукції: 1) 2021 р. до 2020 р.; 2) 2022 р. до 2021 р.; 3) 2022 р. до 2020 р. Поясність розбіжність між добутком перших двох індексів та індексом цін 2022 р. Обчисліть суму економії (або перевитрат) від зміни собівартості продукції.

9.38. Маються наступні дані про ціни та кількість товарів, проданих овочевим магазином:

Таблиця 9.39

Продукція	Обсяг реалізації			Ціна реалізації, грн		
	2020	2021	2022	2020	2021	2022
Молоко, л	700	600	500	35	38	38
Капуста, кг	1 300	1 400	1 500	10	11	14
Яйця, тис. десятків	60	65	70	32	34	33
Груші	2 400	2 300	2 500	24	28	31

Обчисліть індекс цін: 1) 2021 р. до 2020 р.; 2) 2022 р. до 2021 р.; 3) 2022 р. до 2020 р. Поясність розбіжність між добутком перших двох індексів та індексом цін 2022 р.

9.4. Розрахунок середніх арифметичних індексів обсягу виробництва продукції та продуктивності праці

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Крім агрегатних індексів у статистиці набули широкого поширення середні індекси (середньозважені) — середні арифметичні і середні гармонійні індекси. Середні форми індексу мають самостійний економічний характер.

Індекс середній арифметичний — одна з основних форм індексу зведеного. Обчислюється як середня арифметична, виважена з індексів індивідуальних.

Будь-який агрегатний індекс може бути перетворений в середній арифметичний із індивідуальних індексів шляхом заміни індексованої величини періоду поточного добутком значень індексу індивідуального та значень індексованої величини базисного періоду.

Так, агрегатний індекс цін (I_p) можна розрахувати за наступною формулою:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1},$$

де p — ціна товару;

q — натуральна кількість продукції;

0 и 1 — позначення відповідно базисного і поточного періодів.

Так, індивідуальний індекс цін (i_p) рівний $i_p = \frac{p_1}{p_0}$, звідси $p_1 = i_p p_0$. Таким чином, перетворення агрегатного індексу в середній арифметичний має наступний вид:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{\sum i_p p_0 q_1}{\sum p_0 q_1}.$$

Аналогічно індивідуальний індекс фізичного обсягу продукції рівний $i_q = \frac{q_1}{q_0}$, звідси $q_1 = i_q q_0$. Отже, середній арифметичний індекс фізичного обсягу складе:

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{\sum i_q q_0 p_0}{\sum q_0 p_0}.$$

Індивідуальний індекс продуктивності рівний $i_t = \frac{t_0}{t_1}$, звідси $t_0 = i_t t_1$. Отже середній арифметичний індекс продуктивності праці складе:

$$I_t = \frac{\sum t_0 q_1}{\sum t_0 q_1} = \frac{\sum i_t t_1 q_1}{\sum t_1 p_1}.$$

Індекс середній агрегатний застосовується у тих випадках, коли пряме використання індексованої величини поточного періоду в агрегатному індексі утруднено з будь-яких причин.

Розглянемо порядок розрахунку арифметичного індексу фізичного обсягу реалізації продукції на наступному прикладі.

Задача 6. За наступними даними необхідно *розрахувати* індекс фізичного обсягу реалізації:

Таблиця 9.40

Товар	Товарооборот, тис. грн		Індивідуальні індекси	
	базисного періоду $q_0 p_0$	звітного періоду $q_1 p_1$	фізичного обсягу реалізації i_q	цін i_p
А	1 000	1 120	0,8	1,4
Б	3 200	3 696	1,05	1,1
В	640	760	1,25	0,95

Індекс фізичного обсягу складе:

$$I_q = \frac{\sum iq_0p_0}{\sum q_0p_0} = \frac{0{,}8 \times 1\,000 + 1{,}05 \times 3\,200 + 1{,}25 \times 640}{1\,000 + 3\,200 + 640} = \frac{4\,960}{4\,840} = 1{,}025, \text{ або } 102{,}5\ \%.$$

Отже, фізичний обсяг розглянутої товарної групи зріс на 2,5 %.

Задача 7. Розглянемо порядок розрахунку середнього арифметичного індексу продуктивності праці на наступному прикладі. Маються наступні дані:

Таблиця 9.41

Вид продукції	Затрати праці на одиницю продукції, люд.-год.		Індивідуальний індекс продуктивності праці (i_t)	Обсяг продукції, виробленої у звітному періоді, шт. (q_1)
	базисний період (t_0)	звітний період (t_1)		
А	5,94	5,41	1,10	100
Б	7,89	7,62	1,04	200
В	1,12	1,22	0,92	300

Обчислити індекс продуктивності праці за трьома видами.

Рішення

Обчислимо індивідуальні індекси продуктивності праці:

товару *А* — $i_t = \frac{5{,}94}{5{,}41} = 1{,}10$;

товару *Б* — $i_t = \frac{7{,}89}{7{,}62} = 1{,}04$;

товару *В* — $i_t = \frac{1{,}12}{1{,}22} = 0{,}92$.

Розрахуємо арифметичний індекс продуктивності праці за трьома видами продукції:

$$I_t = \frac{\sum i_t t_1 q_1}{\sum t_1 p_1} = \frac{1{,}1 \cdot 5{,}41 \cdot 100 + 1{,}04 \cdot 7{,}62 \cdot 200 + 0{,}92 \cdot 1{,}22 \cdot 300}{5{,}41 \cdot 100 + 7{,}62 \cdot 200 + 1{,}22 \cdot 300} = \frac{2\,508}{2\,431} =$$

$$= 1{,}031, \text{ або } 2103{,}1\ \%.$$

Задачі

9.39. Маються наступні дані (табл. 9.42). *Обчислити* середній арифметичний індекс продуктивності праці за трьома видами продукції.

Таблиця 9.42

Вид продукції	Затрати праці на одиницю продукції, люд.-год.		Питома вага затрат праці на виробництво окремих видів продукції у звітному періоді, % (T_1)
	базисний період t_0	звітний період t_1	
А	5,97	5,62	20
Б	8,76	8,13	30
В	3,12	3,04	50
Г	1,25	1,21	60

9.40. Маються наступні дані:

Таблиця 9.43

Галузь виробництва	Вартість продукції в базисному періоді, млн грн	Індекси фізичного обсягу продукції в звітному році (базисний рік=1)
Мукомельна	30,6	1,28
М'ясопереробна	40,4	1,56
Цукрова	23,1	1,24
Макаронна	15,6	2,15
Всього	109,7	–

Розрахуйте середній арифметичний індекс фізичного обсягу за чотирма галузями переробної промисловості.

9.41. Маються наступні дані:

Таблиця 9.44

Вид продукції	Ціна за одиницю продукції, грн		Обсяг продукції, виробленої у звітному періоді, шт. (q_1)
	базисний період (p_0)	звітний період (p_1)	
А	15	20	200
Б	42	40	300
В	84	95	500
Г	35	42	900
Д	27	25	100

Визначте середній арифметичний індекс цін.

9.42. Маються наступні дані (табл. 9.45). *Визначте* середній арифметичний індекс собівартості за трьома видами продукції.

Таблиця 9.45

Вид продукції	Собівартість одиниці продукції, грн		Обсяг продукції, виробленої у звітному періоді, шт. (q_1)
	базисний період z_0	звітний період z_1	
А	14,92	15,62	100
Б	48,78	37,12	200
В	3,14	3,02	300
Г	85,15	83,62	500

9.5. Розрахунок середніх гармонійних індексів цін і собівартості

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Індекс середній гармонійний — одна з основних форм індексу зведеного. Обчислюється як середня гармонійна, виважена з індивідуальних індексів.

Будь-який агрегатний індекс може бути перетворений в середній гармонійний із індивідуальних індексів. Для цього індексована величина базисного періоду заміняється відношенням значень індексованої величини поточного періоду до значень індивідуального індексу.

Так, агрегатний індекс (*I*) представити у вигляді загальної формули:

$$I = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1},$$

де x — значення індексованої величини;

f — вага індексу;

0 и 1 — позначення відповідно базисного і поточного періодів.

Визначимо індивідуальний індекс (*i*): $i = \frac{x_1}{x_0}$, звідси $x_0 = \frac{x_1}{i} = \frac{1}{i} x_1$. Отже середній гармонійний індекс має наступний вид:

$$I = \frac{\sum x\ f_1}{\sum \frac{1}{i} x_1 f_1}.$$

Так, індивідуальний індекс цін рівний $i_p = \frac{p_1}{p_0}$, звідси $p_0 = \frac{p_1}{i_p} = \frac{1}{i_p} p_1$. Таким чином індекс гармонійний середній цін матиме вид:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum \frac{1}{i_p} p_1 q_1}.$$

Аналогічно індивідуальний індекс собівартості складає $i_z = \frac{z_1}{z_0}$, звідси $z_0 = \frac{z_1}{i_z} = \frac{1}{i_z} z_1$. Отже, середній гармонійний індекс собівартості має вид:

$$I_z = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_1} = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum \frac{1}{i_z} z_1 q_1}.$$

Індивідуальний індекс продуктивності праці (за трудомісткістю) становить $i_t = \frac{t_0}{t_1}$, звідси $t_1 = \frac{t_0}{i_t} = \frac{1}{i_t} t_0$. Отже, середній гармонійний індекс продуктивності праці має вид:

$$I_t = \frac{\sum t_0 q_1}{\sum t_1 q_1} = \frac{\sum t_0 q_1}{\sum \frac{1}{i_t} t_0 q_1}.$$

Із наведених формул середніх гармонічних індексів видно, що зважування проводиться добутком відповідних (в залежності від конкретного значення індексу) значень індексованої величини поточного періоду і значень показника, що служить в агрегатному індексі вагами.

Індекс середній гармонійний застосовується у тих випадках, коли пряме використання базисної індексованої величини в агрегатному індексі ускладнено з будь-яких причин або взагалі застосування індексу середнього гармонійного виявляється більш доцільним, дає економію сил та засобів, необхідних для обчислення індексу.

Для розрахунку індексів фізичного обсягу та продуктивності праці середні гармонійні індекси не застосовуються, оскільки для їх розрахунку необхідно мати базисні та поточні значення фізичного обсягу та трудомісткості виготовлення одиниці продукції. При наявності цих значень більш доцільним є проведення розрахунків із застосуванням агрегатних індексів. Покажемо розрахунок середнього гармонійного індексу цін на прикладі.

Задача 8. Оборот магазину за травень становив: за продажем молока — 15 000 грн, масла — 12 500 грн, яєць — 9 400 грн. Відомо також, що ціни у травні порівняно з квітнем на молоко зросли на 5 %, на масло не змінилися, на яйця знизилися на 15 %. *Обчисліть* гармонійний індекс цін.

Рішення

В тих випадках, коли використання базисної індексованої величини

в агрегатному індексі ускладено за якими-небудь причинами в агрегатному індексі, тоді застосовуються середній арифметичний та гармонійний індекс.

Для обчислення середнього гармонійного індексу обчислимо індивідуальні індекси фізичного обсягу та індивідуальні індекси цін. Встановлюємо, що індивідуальні індекси дорівнюють: масла 1,05 $\left(\frac{100+5}{100}\right)$, масла 1,0, яєць — 0,85 $\left(\frac{100-15}{100}\right)$.

Обчислимо середній гармонійний індекс цін:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum \frac{1}{i} p_1 q_1} = \frac{15\,000 + 12\,500 + 9\,400}{\frac{1}{1{,}05}15\,000 + \frac{1}{1}12\,500 + \frac{1}{0{,}85}9\,400} = \frac{36\,900}{14\,285{,}7 + 12\,500 + 11\,058{,}8} =$$

$$\frac{36\,900}{37\,844{,}5} = 0{,}975, \text{ або } 97{,}5\ \%.$$

Задача 9. За приведеними даними *визначте* загальний індекс собівартості та суму економії від її зниження:

Таблиця 9.46

Виріб	Затрати на виробництво виробів у звітному році, тис. грн	Зміна собівартості одиниці виробу порівняно з минулим роком, %
А	200	+6,4
Б	140	–1,5
В	300	–8,5

Рішення

Оскільки чисельник агрегатного індексу нам відомий, то знаменний може бути визначений шляхом ділення затрат на виробництво виробів на індекс цін. Таким чином, для визначення загального індексу цін скористаємося формулою середньої гармонійної:

$$I_p = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum \frac{1}{i} z_1 q_1}.$$

Оскільки за умови задачі $z_1 q_1$ відомі, то підставивши дані таблиці, отримаємо

$$I_p = \frac{200 + 140 + 300}{\frac{200}{1{,}064} + \frac{140}{0{,}985} + \frac{300}{0{,}915}} = \frac{640}{658} = 0{,}973, \text{ або } 97{,}3\ \%.$$

Сума економії від зниження собівартості складе:

$\sum z_1 q_1 - \sum z_0 q_1 = 640 - 658 = -18$ тис. грн.

Задачі

9.43. Маються наступні дані по заводу за 2022 р.:

Таблиця 9.47

Вид виробів	Затрати на виробництво у звітному році, тис. грн	Зміна собівартості одиниці виробу порівняно з минулим роком, %
Конічні шестерні	200	+4
Косозубі шестерні	140	–2
Прямозубі шестерні	300	+8

Відомо, що затрати на купівлю шестерень в 2021 р. склали 500 тис. грн. *Визначити*: 1) як змінилися витрати на виробництво в цілому по заводу; 2) як змінилися затрати на виробництво під впливом зміни собівартості окремих видів випущеної продукції.

9.44. Маються наступні дані по роботу ткацької фабрики:

Таблиця 9.48

Вид тканей	Затрати на виробництво за минулий рік, тис. грн	Збільшення обсягу виробництва у звітному році (%)
Батист	400	+5
Атлас	260	+3
Бязь	170	+15

Затрати на виробництво у звітному році в цілому по фабриці склали 900 тис. грн. *Визначити*: 1) індекс загальних витрат на виробництво; 2) індекс фізичного обсягу виробництва; 3) абсолютну суму зміну витрат на виробництво за рахунок зміни обсягу випущеної продукції.

9.45. Маються наступні дані про вартість виробленої продукції:

Таблиця 9.49

Виріб	Вартість продукції, тис. грн	Зміна цін у звітному періоді порівняно з базисним, %
А	600	–1,6
Б	940	+2,4
В	1 760	–1,2

Визначити середній гармонійний індекс цін.

9.46. Маються наступні дані про уцінку товарів у звітному періоді по одному із магазинів міста:

Таблиця 9.50

Вид продукції	Товарообіг у звітному періоді, тис. грн	Розмір зниження роздрібних цін у звітному періоді порівняно з базисним періодом, %
Взуття жіноче	625,4	–16,5
Взуття чоловіче	412,8	–25,0

Визначте середній гармонійний індекс цін.

9.47. У звітному періоді оборот магазину становив: за продажем металічної посуди — 8 000 грн, керамічної посуди — 6500 грн. Обчисліть загальний індекс на ці товари, якщо відомо, що ціни зросли на металічну посуду на 4,6 %, на керамічну посуду — на 6,8 %.

9.48. У звітному періоді було продано молока на 3600 грн, м'яса — 18700 грн, яєць — на 2 700 грн. Обчисліть загальний індекс цін на ці товари, якщо відомо, що ціни на молоко і м'ясо зросли відповідно на 12,4 % та 6,2 %, а ціни на яйця знизилися на 2,1 %.

9.49. Маються наступні дані про зміну собівартості продукції за окремими видами собівартості і про суму затрат на виробництва:

Таблиця 9.51

Вид виробів	Затрати на виробництво у звітному періоді, млн грн	Зміна собівартості одиниці виробу порівняно з минулим роком, %
1	15,4	+4,6
2	10,6	–2,1
3	21,7	+15,3
4	5,6	+8,2

Обчислити індекс собівартості: 1) за продукцією 1 і 2 разом; 2) за продукцією 2 і 3 разом; 3) за продукцією 3 і 4 разом.

9.50. У звітному періоді спортивним магазином було продано жіночих спортивних костюмів на 240 тис. грн, кросівок — на 15 700 грн. Обчисліть загальний індекс цін на ці товари, якщо відомо, що ціни зросли на спортивні костюми на 6,2 %, а на кросівки — на 12,8 %.

9.51. На основі нижченаведених даних *визначте* загальний індекс планового завдання по випуску продукції:

Таблиця 9.52

Вид продукції	Фактичний випуск продукції в 2020 р. (тис. грн)	Планове зростання (+) або зменшення (–) випуску продукції в 2021 р. порівняно з 2020 р. (в процентах)
Деталь № 45	350	+6
Деталь № 56	420	–2
Деталь № 64	100	+9

9.52. *Визначте* середній процент виконання плану за обсягом реалізації продукції трьох підприємств разом на основі наведених даних:

Таблиця 9.53

Завод	Фактичний випуск продукції, (тис. грн)	Виконання плану, %
1	1 420	103
2	620	95
3	1 100	107

9.54. Маються дані, що характеризують товарооборот магазину:

Таблиця 9.54

Товарні групи	Товарооборот звітного періоду, тис. грн	Індекси цін
Тканини:		
шовк	240	0,987
шифон	760	1,102
габардин	124	0,950
замша	236	1,124
Швейні вироби	24	0,996
Галантерея	12	1,264

Визначити середній гармонійний індекс цін.

9.6. Розрахунок за допомогою індексних систем відсутніх індексів

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Численні економічні індекси тісно пов’язані між собою і утворюють індексні системи. *Взаємозв’язок індексів* — зв’язок між певними

індексами, обумовлений як реальними зв'язками соціально-економічних явищ, що відображаються ними, так і математичними властивостями індексів. Так, індекс цін пов'язаний із індексом фізичного обсягу товарообороту (якщо мова йде про підприємства торгівлі) або фізичного обсягу продукції (якщо мова йде про підприємства виробничої сфери), утворюють індексну систему:

$$\underbrace{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}_{\text{індекс цін}} \times \underbrace{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}}_{\text{індекс фізичного обсягу}} = \underbrace{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}}_{\text{показник динаміки загальної вартості}},$$

Добуток індексу цін на індекс фізичного обсягу продукції або товарообороту дає індекс фізичного обсягу товарообороту в фактичних цінах або індекс вартості продукції.

Звідси індекс цін можна визначити за формулою:

$$I_{\text{цін}} = \frac{I_{\text{вартості}}}{I_{\substack{\text{фізичного} \\ \text{обсягу}}}}.$$

Відношення індексу загальної вартості (товарообороту) на індекс фізичного обсягу дає індекс цін.

Між індексом витрат виробництва, індексом кількості виробленої продукції та індексом собівартості існує наступне співвідношення:

$$\underbrace{\frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_1}}_{\substack{\text{індекс} \\ \text{собівар-} \\ \text{тості}}} \times \underbrace{\frac{\sum q_1 z_0}{\sum q_0 z_0}}_{\substack{\text{індекс} \\ \text{кількості} \\ \text{виробленої} \\ \text{продукції}}} = \underbrace{\frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_0}}_{\substack{\text{показник} \\ \text{динаміки} \\ \text{виробничих} \\ \text{затрат}}}.$$

Добуток індексу собівартості на індекс кількості виробленої продукції дає індекс динаміки виробничих затрат.

Звідси індекс собівартості можна визначити за формулою:

$$I_{\text{собівартості}} = \frac{I_{\substack{\text{виробничих} \\ \text{витрат}}}}{I_{\substack{\text{фізичного} \\ \text{обсягу}}}}.$$

Відношення індексу виробничих витрат на індекс кількості виробленої продукції (фізичного обсягу) дає індекс собівартості продукції.

Індекс продуктивності праці (по трудомісткості) пов'язаний з індексом фізичного обсягу продукції утворюють наступну індексну систе-

му:

$$\frac{\sum q_1 t_0}{\sum q_0 t_0} \times \frac{\sum t_1 q_1}{\sum t_0 q_1} = \frac{\sum t_1 q_1}{\sum t_0 q_0}.$$

індекс фізичного обсягу продукції	індекс продуктивності праці (за трудовими затратами)	показник динаміки трудових затрат

Добуток індексу фізичного обсягу продукції на індекс продуктивності праці (за трудовими затратами) утворює індекс трудових затрат.

Звідси відношення індексу динаміки трудових затрат до індексу фізичного обсягу продукції дає індекс продуктивності праці:

$$I_{\substack{\text{продуктивності} \\ \text{праці}}} = \frac{I_{\substack{\text{трудових} \\ \text{витрат}}}}{I_{\substack{\text{фізичного} \\ \text{обсягу}}}}.$$

Використовуючи взаємозв'язок між індексами, можна за двома відомими індексами знайти третій, невідомий.

Задача 9. Відомо, у звітному періоді фізичний обсяг виробленої продукції зріс на 7,8 %, а середня облікова чисельність персоналу — на 4,5 %. Визначити, які змінилася продуктивність праці.

Рішення

Взаємозв'язок між обсягом виробництва, чисельністю персоналу і продуктивністю праці можна виразити наступним чином:

$$I_q = I_ч \times I_п.$$

Використовуючи взаємозв'язок індексів, обчислимо індекс продуктивності праці:

$$I_п = I_q : I_ч = 1{,}078 : 1{,}045 = 1{,}032, \text{ або } 103{,}2\ \%.$$

Отже, продуктивність праці зросла на 3,2 %.

Задача 10. Маються наступні дані про продаж товарів в овочевому магазині:

Таблиця 9.55

Види продукції	Реалізовано товарів, кг		Ціна за 1 кг, грн	
	базисний період	звітний період	базисний період	звітний період
М'ясо	340	350	95	115
Морква	124	146	12	11
Капуста	260	284	9	13

Визначте індекс цін, індекс фізичного обсягу товарообороту і товарообороту у фактичних цінах за трьома товарами разом. Використовуючи взаємозв'язок між індексами, *перевірте* отримані результати.

Рішення

Розрахуємо індекс цін:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{115 \cdot 350 + 11 \cdot 146 + 13 \cdot 284}{95 \cdot 350 + 12 \cdot 146 + 9 \cdot 284} = \frac{40250 + 1606 + 3692}{33250 + 1752 + 2556} = \frac{45548}{37558} = 1{,}2127.$$

Ціни зросли на 21,27 %, додаткових дохід магазину від зростання цін склав 7990 грн (45548 – 37558).

Визначимо індекс фізичного обсягу товарообороту:

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{350 \cdot 95 + 146 \cdot 12 + 284 \cdot 9}{340 \cdot 95 + 124 \cdot 12 + 260 \cdot 9} = \frac{33\,250 + 1\,752 + 2\,556}{32\,300 + 1\,488 + 2\,340} = \frac{37\,558}{36\,128} = 1{,}0396.$$

Товарообіг у незмінних цінах зріс на 3,96 %, абсолютний приріст товарообороту в незмінних цінах склав 1430 грн (37558 – 36128).

Визначимо індекс товарообороту у фактичних цінах:

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{115 \cdot 350 + 11 \cdot 146 + 13 \cdot 284}{95 \cdot 340 + 12 \cdot 124 + 9 \cdot 260} = \frac{45\,548}{36\,128} = 1{,}2607.$$

Товарооборот у звітному періоді порівняно з базисним періодом зріс на 26,07, %, що в абсолютному значенні становить 9 420 грн (45 548 – 36 128).

Взаємозв'язок між індексом цін, фізичного обсягу товарообороту та індексом вартості продукції наступний: добуток індексу цін на індекс фізичного обсягу товарообороту дає індекс вартості продукції:

$$I_p \cdot I_q = I_{pq};\ \ 1{,}2127 \cdot \cdot 1{,}0396 = 1{,}2607.$$

Загальний приріст товарообороту становив 9 420 (45 548 – 36 128), що відповідає зміні обсягу товарообороту за рахунок зміни ціни та фізичного обсягу, тобто

$$7\,990 + 1\,430 = 9\,420.$$

Задачі

9.55. Обсяг виробленої продукції збільшився на 8 %. Вартість продукції зросла на 6 %. *Визначте*, як змінились ціни.

9.56. Ціна на продукцію знизилася на 4 %. Обсяг продукції збільшився на 8 %. *Визначте*, як змінилась загальна вартість виготовленої продукції.

9.57. У звітному періоду порівняно з базисним чисельність працівників підприємства зросла на 14 %, при цьому продуктивність праці в середньому підвищилася на 7 %. Як змінився обсяг виробництва продукції?

9.58. Вартість основних виробничих засобів у звітному періоді порівняно з базисним періодом зросла на 8,5 %, при цьому фондовіддача в середньому знищилася на 4,2 %. Як змінився обсяг випуску продукції?

9.59. Кількість виробленої товарної продукції у звітному періоді збільшилася на 15 %, а вартість продукції зросла на 7,5 %. *Визначте*, які змінилися відпускні ціни на продукцію.

9.60. На скільки процентів зміниться товарообіг, якщо ціни зросли на 4 %, а фізичний обсяг товарообігу збільшився на 8 %?

9.61. На скільки зміниться товарообіг, якщо ціни знизилися на 6 %, а фізичний обсяг товарообігу збільшився на 2 %?

9.62. Як зміняться затрати на виробництво продукції, якщо обсяг індекс фізичного обсягу продукції склав 5,2 %, а ціни зросли на 6,8 %?

9.63. Обсяг виробництва продукції збільшився на 12,4 %, а вартість основних виробничих фондів зросла на 5,1 %. Як змінилася фондовіддача?

9.64. Маються наступні дані про обсяг реалізованої продукції та ціни на окремі товари:

Таблиця 9.56

Види продукції	Реалізовано продукції		Ціна реалізації, грн	
	базисний рік	звітний рік	базисний рік	звітний рік
Молоко, л	254	248	21	23
М'ясо, кг	486	512	125	114
Яйця, дес. шт.	65	76	32	33

Визначте індекс цін, індекс фізичного обсягу та індекс загальної вартості. *Перевірте* отримані результати.

9.65. На скільки процентів зміниться товарообіг, якщо ціни зросли на 4 %, а фізичний обсяг товарообігу збільшився на 8 %?

9.66. Обсяг виробництва продукції збільшився на 12,4 %, а вартість основних виробничих фондів зросла на 5,1 %. Як змінилася фондовіддача?

9.67. На скільки зміниться товарообіг, якщо ціни знизилися на 6 %, а фізичний обсяг товарообігу збільшився на 2 %?

9.68. Як зміняться затрати на виробництво продукції, якщо обсяг індекс фізичного обсягу продукції склав 5,2 %, а ціни зросли на 6,8 %?

9.69. Відомі наступні дані по промисловому підприємству:

Таблиця 9.57

Категорії робітників	Індекси, %	
	середньої заробітної плати	фонду заробітної плати
Робітники основні	109,4	105,6
Робітники допоміжні	105,6	98,5
Інженерно-технічні робітники	107,6	104,3
Службовці	103,3	101,7
Молодший обслуговуючий персонал	102,4	101,5
Робітники охорони	102,0	92,0
Всього	107,8	103,1

Визначити індекси чисельності окремих категорій робітників підприємства та індекс чисельності всіх робітників підприємства. Яку властивість індивідуальних індексів було використано при рішенні цієї задачі?

9.70. Як зміниться вартість затрат у виробництві при зростанні фізичного обсягу продукції на 6 % і зниженні собівартості на 5 %?

9.7. Арифметичне розкладення за допомогою індексних систем абсолютних приростів за факторами

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Однією із задач, які вирішуються за допомогою індексів, є вивчення впливу окремих взаємопов'язаних факторів (показників) на загальний результат. Взаємозв'язок економічних індексів дозволяє обчислити вплив окремих факторів у зміні аналізованого явища. Особливо важливим є визначення ролі екстенсивних та інтенсивних факторів в цьому приросту. Так, якщо значення результативної ознаки пов'язано із ознаками-факторами зв'язком типу $y = xz$, то можна говорити про те, що зміна кожного з них призведе до зміни ознаки y. За допомогою індексного методу можна здійснити арифметичний розкладення загального приросту за факторами і визначення долі того чи іншого фактору в утворення загального приросту. Проілюструємо це на прикладі.

Задача 11. Маються наступні дані (табл. 9.58). *Визначити* вплив середньорічної чисельності робітників та виробітку на одного робітника на зміну обсягу виробленої продукції.

Таблиця 9.58

	Позначення	Базисний період	Звітний період	Індивідуальний індекс
Середньорічна чисельність робітників, осіб	T	800	830	1,038
Продуктивність праці (виробіток на одного робітника), тис. грн	q	350	375	1,071
Обсяг виробленої продукції, млн грн	N	280,0	311,3	1,112

Рішення

Загальна зміна випуску однойменної продукції можна розглядати в залежності від зміни чисельності робітників і зміни їх середньої виробітки.

Позначимо середній виробіток через q, а чисельність робітників — через T. Взаємозв'язок між середньою чисельністю робітників, продуктивністю праці та обсягом виробленої продукції має наступний вид:

$$N = T \cdot q.$$

Як видно із наведених даних, обсяг виробленої продукції у звітному періоду порівняно із базисним періодом збільшився на:

$$\Delta N = N_1 - N_0 = 311{,}3 - 280{,}0 = 31{,}3 \text{ млн грн.}$$

Цей приріст продукції відбувся за рахунок зміни як чисельності робітників, так і продуктивності праці.

Зміна обсягу виробництва продукції за рахунок зміни чисельності робітників становить:

$$\Delta N_T = T_1 q_0 - T_0 q_0 = 830 \cdot 350 - 800 \cdot 350 = 290{,}5 - 280{,}0 =$$

$$= 10{,}5 \text{ млн грн,}$$

тобто внаслідок збільшення чисельності робітників при базовому рівні продуктивності праці обсяг продукції збільшився на 10,5 млн грн, або на 3,8 %.

Зміна обсягу виробництва продукції за рахунок зміни продуктивності праці складе:

$$\Delta N_q = T_1 q_1 - T_0 q_1 = 830 \cdot 375 - 830 \cdot 350 = 311{,}3 - 290{,}5 =$$

$$20{,}8 \text{ млн грн,}$$

тобто в результаті підвищення продуктивності праці при звітній чисельності робітників обсяг виробленої продукції збільшився на 20,8 млн грн.

Таким чином, загальний приріст продукції, рівний 31,3 млн грн,

складається із загального приросту в результаті збільшення чисельності робітників — на 10,5 млн грн та із приросту в результаті зростання продуктивності праці – на 20,8 млн грн, тобто

$$\Delta N_T = \Delta N_T - \Delta N_q = 10{,}5 + 20{,}8 = 31{,}3 \text{ млн грн.}$$

Задача 12. Маються наступні дані виробництво продукції на машинобудівному заводі за відповідні періоди:

Таблиця 9.59

Види продукції	Вироблено продукції, шт.		Ціна за одиницю продукції, грн	
	базисний рік	звітний рік	базисний рік	звітний рік
А	10 000	12 000	40,0	47,5
Б	30 500	34 200	12,5	16,4
В	20 000	24 000	25,6	24,8

Визначити зміну вартості обсягу виробництва продукції в результаті зміни обсягу виробленої продукції та цін.

Рішення

Загальний (агрегатний) індекс фізичного обсягу продукції обчислимо наступним чином:

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{12\,000 \cdot 40{,}0 + 34\,200 \cdot 12{,}5}{10\,000 \cdot 40{,}0 + 30\,500 \cdot 12{,}5} = \frac{907\,500}{781\,250} = 1{,}162, \text{ або } 116{,}2\ \%.$$

Різниця між чисельником і знаменником індексу фізичного обсягу продукції характеризує збільшення обсягу виробництва продукції в абсолютному вираженні:

$$\sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0 = 907\,500 - 781\,250 = 126\,250 \text{ грн.}$$

Загальний (агрегатний) індекс цін визначаємо із співвідношення

$$I_q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{47{,}5 \cdot 12\,000 + 16{,}4 \cdot 34\,200}{40{,}0 \cdot 12\,000 + 12{,}5 \cdot 34\,200} = \frac{1\,130\,880}{907\,500} = 1{,}246, \text{ або } 124{,}6\ \%.$$

Економія від зниження цін отримаємо як різниця між чисельником і знаменником загального індексу цін:

$$\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 1\,130\,880 - 907\,500 = 223\,380 \text{ грн.}$$

Загальний індекс вартості знаходимо згідно формули:

$$I_q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{47{,}5 \cdot 12\,000 + 16{,}4 \cdot 34\,200}{40{,}0 \cdot 10\,000 + 12{,}5 \cdot 30\,500} = \frac{1\,130\,880}{781\,250} = 1{,}448, \text{ або } 144{,}8\ \%.$$

Визначимо абсолютний приріст (зменшення) вартості продукції:

$\sum q_1 p_1 - \sum q_0 p_0 = 1\ 130\ 880 - 781\ 250 = 349\ 630$ грн.

Взаємозв'язок індексів:

$$I_q I_p = I_{qp}, \quad \text{або} \quad \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \cdot \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_1}, \quad 1{,}162 \cdot 1{,}246 = 1{,}448.$$

Для простоти ми взяли явище, яке визначалося двома факторами, один із яких завжди буде первинною ознакою, другий — вторинною. Але на практиці переважають багатофакторні моделі, в яких результативний показник визначається дією трьох та більше факторів.

Розглянемо визначення впливу на результативний фактор чотирьох факторів.

Задача 13. Наприклад, по підприємству відомі такі наступні дані:

Таблиця 9.60

Показник	Період	
	базисний	звітний
Середня годинний виробіток одного робітника, грн	205	230
Середня фактична тривалість робочого дня, год.	7,9	8,0
Середнє число днів роботи одного робітника за місяць, днів	20,3	20,5
Доля робітників у загальній чисельності працівників	0,77	0,75

За приведеними даними *необхідно оцінити* вплив зміни середньої годинної виробітки, середньої тривалості робочого дня, середньої фактичної тривалості робочого місяця і долі робітників в загальній чисельності працівників на зміну середньої місячної виробітки.

Рішення

Місячний виробіток продукції на одного працівника підприємства може бути обчислений у вигляді наступних факторів-співмножників:

$$W_{\text{Т}} = w_{\text{ч}} \cdot ч \cdot д \cdot d_{\text{р}}.$$

$d_{\text{р}}$ — доля робітників у всіх чисельності промислово-виробничого персоналу підприємства;

$д$ — середнє число днів роботи одного робітника за місяць;

$w_{\text{ч}}$ — середній годинний виробіток одного робітника;

$ч$ — середня тривалість робочого дня.

Попередньо обчислимо рівні місячної виробітки у звітному і базисному періодах:

$\Delta W_0 = w_0 ч_0 д_0 d_0 = 205 \cdot 7{,}9 \cdot 20{,}3 \cdot 0{,}77 = 25314{,}4$ грн.

$\Delta W_1 = w_1 ч_1 д_1 d_1 = 230 \cdot 8{,}0 \cdot 20{,}5 \cdot 0{,}75 = 28290{,}0$ грн.

Загальний приріст середньої місячної виробітки одного працівника підприємства складе:

$$\Delta W_т = W_1 - W_0 = 28\,290{,}0 - 25\,314{,}4 = 2\,975{,}6 \text{ грн},$$

або на 11,8 % $\left(I_W = \frac{28\,290{,}0}{25\,314{,}4} = 1{,}118, \text{ або } 11{,}8\,\% \right)$.

Визначимо зміну середньої місячної виробітки одного робітника за рахунок зміни середньої годинної виробітки робітників:

$$\Delta W_w = w_1 ч_1 д_1 d_1 - w_0 ч_1 д_1 d_1 = 230 \cdot 8{,}0 \cdot 20{,}5 \cdot 0{,}75 - 205 \cdot 8{,}0 \cdot 20{,}5 \cdot 0{,}75 =$$

$$= 28\,290{,}0 - 25\,215{,}0 = 3\,075{,}0 \text{ грн}.$$

Відносна величина приросту середньої місячної виробітки одного робітника за рахунок зростання середньої годинної виробітки робітників визначається відношенням абсолютного приросту цього фактору до базисного рівня середньої місячної виробітки. Так, за рахунок зміни середнього годинного виробітку місячний виробіток робітників збільшився на 12,1 % $\left(\frac{3\,075{,}0}{25\,314{,}4} \times 100 \right)$.

Визначаємо зміну середнього місячного виробітку одного працівника за рахунок зміни фактичної тривалості робочого дня:

$$\Delta W_ч = w_{ч0} ч_1 д_1 d_1 - w_0 ч_0 д_1 d_1 = 205 \cdot 8{,}0 \cdot 20{,}5 \cdot 0{,}75 - 205 \cdot 7{,}9 \cdot 20{,}5 \cdot 0{,}75 =$$

$$= 25\,536{,}0 - 24\,899{,}8 = 315{,}2 \text{ грн},$$

тобто за рахунок покращення використання внутрішньозмінного робочого часу виробіток одного працівника збільшився на 315,2 грн, або на 1,2 % $\left(\frac{315{,}2}{25\,314{,}4} \times 100 \right)$.

Визначимо зміну середнього місячного виробітку одного працівника за рахунок зміни тривалості робочого місяця:

$$\Delta W_д = w_{ч0} ч_0 д_1 d_1 - w_{ч0} ч_0 д_0 d_1 = 205 \cdot 7{,}9 \cdot 20{,}5 \cdot 0{,}75 - 205 \cdot 7{,}9 \cdot 20{,}5 \cdot 0{,}75 =$$

$$= 24\,899{,}8 - 24\,656{,}9 = 242{,}9 \text{ грн},$$

тобто за рахунок збільшення тривалості робочого місяця середній місячний виробіток одного працівника підвищився на 242,9 грн, або на 1,0 % $\left(\frac{242{,}9}{25\,314{,}4} \times 100 \right)$.

Визначимо зміну середнього місячного вироблення одного працівника за рахунок зміни частки робітників у загальній чисельності працівників підприємства:

$$\Delta W_д = w_{ч0} ч_0 д_0 d_1 - w_0 ч_0 д_0 d_0 = 205 \cdot 7{,}9 \cdot 20{,}5 \cdot 0{,}75 - 205 \cdot 7{,}9 \cdot 20{,}5 \cdot 0{,}77 =$$

$$=24\,656{,}9 - 25\,314{,}4 = -657{,}5 \text{ грн},$$

тобто за рахунок зменшення частки робітників у загальній чисельності працівників середньомісячний виробіток одного працівника скоротився на 657,5 грн, або на 2,6 % $\left(\frac{-657{,}5}{25\,314{,}4}\times 100\right)$.

Таким чином, загальний приріст виробітку одного працівника за рахунок усіх факторів склала:

$$\Delta W_m = \Delta W_{w_ч} + \Delta W_ч + \Delta W_д + \Delta W_d =$$

$$= 3\,075{,}0 + 315{,}2 + 242{,}9 + (-657{,}5) = 2\,975{,}6 \text{ грн},$$

що співпадає із загальною величиною фактичної зміни.

Слід зазначити, що при побудові багатофакторних моделей дуже важливо дотримуватися послідовності у підстановці факторів. В основі повинно бути покладено економічний зміст добутку двох суміжних факторів.

Задачі

9.71. Маються наступні дані по фермерському господарству:

Таблиця 9.61

Види продукції	Вироблено продукції, ц		Собівартість 1 ц, грн	
	базисний рік	звітний рік	базисний рік	звітний рік
Яловичина	1 800	1 950	8 500	9 100
Свинина	560	610	6 500	6 300
Баранина	25	20	11 000	13 000

Обчисліть: 1) індивідуальні індекси фізичного обсягу, собівартості та грошових витрат на виробництво; 2) загальні індекси собівартості продукції, фізичного обсягу і затрат на виробництво; 3) абсолютну зміну (економію чи перевитрати) грошових коштів на виробництво продукції у звітному періоді порівняно з базовим в результаті зміни собівартості одиниці продукції і фізичного обсягу виробництва. *Проаналізуйте* отримані результати.

9.72. Маються наступні дані по одному із цементних заводів, що виготовляє три марки цементу (табл. 9.62). *Визначте*: 1) загальні індекси трудомісткості продукції, фізичного обсягу виробництва і загальних витрат робочого часу; 2) абсолютну зміну загальних витрат робочого часу і розкладіть її за факторами (за рахунок зниження трудомісткості продукції і зростання її фізичного обсягу). *Проаналізуйте* отримані ре-

зультати.

Таблиця 9.62

Марка цементу	Затрати робочого часу, тис. люд.-год.		Зміна трудомісткості одиниці у звітному році порівняно з базисним, %
	базисний період	звітний період	
300	187,2	190,6	–5,2
400	54,8	56,5	–2,1
600	35,6	37,2	–1,6

9.73. Маються наступні дані про товарообіг базисного періоді та індивідуальні індекси товарообігу та цін:

Таблиця 9.63

Марка цементу	Товарообіг базисного періоду, тис. грн	Індекс	
		товарообігу у фактичних цінах	цін
300	1 250	1,08	1,05
400	2 345	1,17	1,13
600	1 680	1,12	1,01

Обчисліть: 1) загальні індекси товарообігу у фактичних цінах, цін і фізичного обсягу товарообігу; 2) абсолютну зміну товарообігу, що обумовлені зміною цін. *Проаналізуйте* отримані результати.

9.74. Маються наступні дані по машинобудівному заводу:

Таблиця 9.64

Найменування виробу	Кількість виробленої продукції, шт.		Собівартість одиниці виробу, грн	
	базисний період	звітний період	базисний період	звітний період
Деталь АР-10	100	105	15,6	17,2
Деталь КН-20	200	190	28,2	29,8

Визначте абсолютну зміну затрат (економію чи перевитрати) на виробництво продукції вказаних виробів за рахунок зниження (зростання) ціни одиниці виробу (тис. грн).

9.75. Маються наступні дані про випуск продукції та її собівартість на підприємстві за відповідні періоди (табл. 9.65).

Таблиця 9.65

Види продукції	Виробництво, шт.		Собівартість одиниці продукції, грн	
	Базисний	Звітний	Базисний	Звітний
Вентилятори	7 250	7 400	2 300	2 170
Кондиціонери	3 124	3 680	850	780

Обчислити індивідуальні та загальні індекси фізичного обсягу продукції, собівартості та затрат на виробництво продукції. *Визначити* абсолютну зміну фізичного обсягу продукції у звітному періоді порівняно з базисним періодом, а також абсолютну суму економію, отриману в результаті зниження собівартості. *Перевірити* співвідношення взаємопов'язаних індексів.

9.76. Маються наступні дані про випуск продукції та її собівартість на хімічному заводі за відповідні періоди:

Таблиця 9.66

Види продукції	Виробництво, шт.		Собівартість одиниці продукції, грн	
	Базисний	Звітний	Базисний	Звітний
А	7 250	7 400	2 300	2 170
Б	3 124	3 680	850	780

Визначити: 1) індивідуальні та загальні індекси фізичного обсягу продукції, собівартості та затрат на виробництво продукції; 2) абсолютну зміну фізичного обсягу продукції у звітному періоді порівняно з базисним періодом; 3) абсолютну суму економію, отриману в результаті зниження собівартості продукції. *Перевірити* співвідношення взаємопов'язаних індексів.

9.77. Маються наступні дані про виробництва зерна в сільськогосподарському підприємстві:

Таблиця 9.67

Вид культури	Валовий збір зерна, тис. ц		Зміна урожайності у звітному періоді, %
	базисний рік	звітний рік	
Пшениця	50	55	+2
Ячмінь	12	10	+6
Овес	24	28	+1

Обчислити зведені індекси валового збору і урожайності. *Визначте*, скільки додаткового зерна було отримано в результаті підвищення урожайності і скільки в результаті зміни площ посіву.

9.78. Маються наступні дані по чотирьом сільськогосподарським підприємствам:

Таблиця 9.68

Показник	Період	Номер сільськогосподарського підприємства			
		А	Б	В	Г
Валовий збір, тис. ц	базисний	39 000	88 400	18 900	61 200
	звітний	46 400	99 900	19 800	70 000
Посівна площа, га	базисний	1 500	2 600	900	1700
	звітний	1 600	2 700	990	1750

Визначте питому вагу приросту валового збору за рахунок урожайності (інтенсивний фактор) і зростання посівних площ (екстенсивний фактор): 1) по підприємстві *А*; 2) по підприємству *Б*; 3) по підприємству *В*; 4) по підприємству *Г*.

9.79. Маються наступні дані про чисельність та оплату праці робітників цеху:

Таблиця 9.69

Показник	Базисний період	Звітний період
Фонд заробітної плати, тис. грн	1220,5	1287,4
Чисельність робітників, осіб	120	127

Розрахуйте показники приросту фонду заробітної плати в результаті: а) зміни чисельності робітників; б) зміни рівня оплати праці.

9.8. Розрахунки індексів змінного та постійного складу

Методичні вказівки та рішення типової задачі

На зміну середнього значення показника здійснюють вплив як зміна значень досліджуваної ознаки, так і зміна ваг. Так, середня урожайність зернових культур відображає зміну не лише урожайності окремих зернових культур, але й зміни структури посівних площ. Середня собівар-

тість продукції якого-небудь виробу може змінюватися не лише в результаті змани собівартості цього виробу на окремому заводі, але й в результаті зміни питомої ваги заводів із різною величиною собівартості виробу. Середня продуктивність праці може змінюватися не лише під впливом зміни трудомісткості виробництва окремих видів продукції, але й внаслідок зміни питомої ваги окремих видів продукції.

Для визначення впливу структури на зміну середньої величини досліджуваного показника розраховують індекси змінного складу, індекси постійного складу та індекси структури. *Індекс змінного складу* — індекс, що виражає співвідношення середніх рівнів явища, що вивчається, що відноситься до різних періодів часу або різних територій. Наприклад, індекс змінного складу фондовіддачі (I_F) може бути виражено наступним відношенням:

$$I_F = \frac{f_1^0}{f_0^0} = \frac{\sum f_1^0 d_1}{\sum d_1} : \frac{\sum f_0^0 d_0}{\sum d_0},$$

де f_0^0 і f_1^0 — середня фондовіддача продукції відповідно в базисному і у звітному періодах;

d_0 і d_1 — питома вага основних виробничих засобів галузі в загальному їх обсязі по народному господарстві відповідно у базисному та звітному періодах

Індекс змінного складу виражає зміну не лише індексованої величини, але й ваг.

Індекс постійного (*фіксованого*) *складу* — індекс, обчислений з вагами, що фіксуються на рівні одного будь-якого періоду і що показує зміну тільки індексованої величини. При розрахунку фондовіддачі індекс постійного складу може бути обчислений за формулою:

$$I_f = \frac{\sum f_1^0 d_1}{\sum f_0^0 d_1}.$$

Індекс фіксованого складу показує, як змінилася б фондовіддача при фіксованій (постійній) структурі основних засобів.

Індекс структурних зрушень — індекс, що характеризує вплив структурних зрушень (зміни структури досліджуваного явища) на динаміку середнього рівня цього явища. Обчислюється за формулою:

$$I_c = \frac{\sum f_0^0 d_1}{\sum d_1} : \frac{\sum f_0^0 d_0}{\sum d_0}.$$

Часто індекс структурних зрушень обчислюється як окреме розподіл індексу змінного складу на індекс постійного (фіксованого) складу.

Задача 14. Розглянемо методику розрахунку індексів постійного і

змінного складу на прикладі індексу продуктивності праці. Маються дані за двома підприємствами за відповідні періоди:

Таблиця 9.70

Підприємства	Чисельність робітників, осіб		Товарна продукція у співставних цінах, тис. грн	
	базисний рік	звітний рік	базисний рік	звітний рік
I	152	145	20 180	20 470
II	248	255	63 600	69 200
Всього	400	400	83 780	89 670

Обчислити індекси продуктивності праці за кожним підприємством; за двома підприємствами разом змінного і постійного складу, а також структурних зрушень.

Рішення

1. Визначимо індекси продуктивності праці:

за підприємством 1

$$I_w = w_1 : w_0 = \frac{20\,470}{145} : \frac{20\,180}{152} = 141{,}2 : 132{,}8 = 1{,}063.$$

за підприємством 2

$$I_w = w_1 : w_0 = \frac{69\,200}{255} : \frac{63\,600}{248} = 271{,}4 : 256{,}4 = 1{,}059.$$

Індекс змінного складу за обома підприємствами становить:

$$I_з = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum T_1} : \frac{\sum q_0 p_0}{\sum T_0},$$

або

$$I_з = \frac{89\,670}{400} : \frac{83\,780}{400} = 224{,}2 : 209{,}4 = 1{,}071.$$

Індекс продуктивності праці фіксованого складу визначається зі співвідношення:

$$I_п = \frac{\sum w_1 T_1}{\sum w_0 T_1} = \frac{145 \cdot 141{,}2 + 255 \cdot 271{,}4}{132{,}8 \cdot 141{,}2 + 256{,}4 \cdot 271{,}4} = \frac{89\,861}{88\,338{,}3} = 1{,}015.$$

Індекс структурних зрушень в чисельності робітників може бути обчислений шляхом співвідношення індексу змінного складу та індексу фіксованого складу:

$$I_с = I_з : I_п = 1{,}071 : 1{,}015 = 1{,}055.$$

Задача 15. Необхідно *обчислити* вплив структури посівних площ

на зміну урожайності зернових культур за наступними даними:

Таблиця 9.71

Зернові культури	Посівна площа, тис. га		Урожайність, ц з 1 га	
	минулий рік	звітний рік	минулий рік	звітний рік
Пшениця	2,7	7,4	35	30
Ячмінь	7,3	2,6	22	22,5

Рішення

За зміну загальної середньої урожайності вплинуло зміна двох факторів — власне урожайності і структури посівних площ.

Індекс урожайності змінного складу:

$$I_{У_{з.с}} = \frac{\sum У_1 П_1}{\sum П_1} : \frac{\sum У_0 П_0}{\sum П_0} = \frac{30 \cdot 7{,}4 + 22{,}5 \cdot 2{,}6}{7{,}4 + 2{,}6} : \frac{35 \cdot 2{,}7 + 22 \cdot 7{,}3}{2{,}7 + 7{,}3} = \frac{280{,}5}{10{,}0} : \frac{255{,}1}{10{,}0} = 1{,}100.$$

Отже, внаслідок зниження урожайності зернових культур і зміни структури посівів урожайність знизилась на 19,0 %.

Індекс урожайності фіксованого складу:

$$I_{У_{ф.с}} = \frac{\sum У_1 П_1}{\sum У_0 П_1} = \frac{30 \cdot 7{,}4 + 22{,}5 \cdot 2{,}6}{35 \cdot 7{,}4 + 22 \cdot 2{,}6} = \frac{280{,}5}{316{,}2} = 0{,}887.$$

Оскільки зміна урожайності в цілому по підприємству визначається зміною власне урожайності та структури посівів, то можна записати:

$$I_{У_{з.с}} = I_{У_{п.с}} \cdot I_{\text{стр}},$$

звідси

$$I_{\text{стр}} = \frac{I_{У_{з.с}}}{I_{У_{п.с}}} = \frac{1{,}100}{0{,}887} = 1{,}240, \text{ або } 124{,}0\ \%.$$

Отже, внаслідок зміни структури посівних площ зернових культур середня урожайність зросла на 24 %.

Індекс структури посівних площ характеризує відношення умовної урожайності минулого року в структурі площ поточного року до фактичної середньої урожайності минулого року.

За висхідними формулами $I_{У_{з.с}}$ та $I_{У_{п.с}}$ можна вивести формулу індексу структури.

Індекс зміни структури:

$$I_{У_{стр}} = \left(\frac{\sum У_1 П_1}{\sum П_1} : \frac{\sum У_0 П_0}{\sum П_0} \right) : \frac{\sum У_1 П_1}{\sum У_0 П_1} = \frac{\sum У_0 П_1}{\sum П_1} : \frac{\sum У_0 П_0}{\sum П_0}.$$

Користуючись отриманими вище даними, обчислимо індекс струк-

тури для нашого прикладу за виведеними формулами:

$$I_{У_{стр}} = \frac{\sum У_0 П_1}{\sum П_1} : \frac{\sum У_0 П_0}{\sum П_0} = \frac{316{,}2}{10{,}0} : \frac{255{,}1}{10{,}1} = 1{,}24, \text{ або } 124{,}0\ \%.$$

Задачі

9.80. Індекс цін змінного складу рівний 1,07, а індекс фіксованого складу **—** 0,95. *Визначте* індекс структурних зрушень і дайте інтерпретацію отриманого результату.

9.81. Індекс урожайності зернових культур фіксованого складу склав 97 %, а індекс структурних зрушень – 154 %. *Визначте*, як змінилася урожайність зернових культур під впливом зміни урожайності окремих культур і зміни структури посівних площ.

9.82. Маються данні про роботу підприємств об'єднання:

Таблиця 9.72

Підприємства	Чисельність робітників, осіб		Продуктивність праці (вироблено товарної продукції на одного працівника), тис. грн	
	базисний рік	звітний рік	базисний рік	звітний рік
I	224	218	450,5	462,7
II	156	173	408,4	395,2
III	110	115	365,1	357,6

Визначити: 1) індивідуальні індекси продуктивності праці робітників підприємства; 2) індекси середньої по об'єднанню продуктивності праці змінного складу, постійного складу та структурних зрушень. *Напишіть* аналітичну записку про зміну продуктивності праці.

9.83. Маються данні про виробництво молока в сільськогосподарських підприємствах району:

Таблиця 9.73

Підприємства	Кількість корів		Середньорічний надій молока на одну корову, кг	
	2021 р.	2022 р.	2021 р.	2022 р.
I	1 000	1 100	3 650	3 720
II	425	410	4 280	4 360
III	137	126	2 800	2 700

Визначити: 1) індивідуальні індекси середньорічного надою молока на одну корову; 2) індекси продуктивності змінного складу, постійного

складу і структурних зрушень. *Перевірте* ув'язку їх в систему. *Напишіть* аналітичну записку про зміну продуктивності корів в 2022 р. порівняно з 2021 р.

9.84. Маються наступні дані про продаж яловичини на 3 ринках:

Таблиця 9.74

Ринки	Липень		Серпень	
	ціна за 1 кг, грн	продано, ц	ціна за 1 кг, грн	продано, ц
I	125	13,5	148	16,7
II	140	10,8	137	6,8
III	120	6,1	124	14,8

Розрахуйте: а) індекси змінного складу; б) індекс фіксованого складу; в) індекс структурних зрушень. *Проаналізуйте* отримані результати.

9.75. По сільськогосподарському підприємству «Маяк» маються наступні дані:

Таблиця 9.75

Вид сільськогосподарської культури	2021 р.			2022 р.		
	посівна площа, га	урожайність, ц/га	собівартість 1 ц, грн	посівна площа, га	урожайність, ц/га	собівартість 1 ц, грн
Озима пшениця	250	28,2	345	280	27,4	356
Ячмінь	120	25,6	280	115	26,8	314
Овес	360	32,8	312	370	33,6	304
Горох	40	16,5	415	20	12,9	438

Обчислити: 1) індекс середньої урожайності зернових культур змінного складу, фіксованого складу та індекс впливу структурних зрушень. Перевірте взаємозв'язок між індексами; 2) індекс середньої собівартості зернових культур змінного складу, фіксованого складу та індекс структурних зрушень. *Перевірте* взаємозв'язок між індексами; 3) загальні факторні індекси (посівної площі, урожайності та собівартості) послідовно ланцюговим методом; розложіть на складові абсолютні зміни загальних витрат на виробництво зернових культур за рахунок кожного із факторів. *Проаналізуйте* отримані результати.

9.76. Маються наступні дані про випуск продукції та її собівартість на цукрових заводах за відповідні періоди (табл. 9.76). *Визначити*: 1) індекси вартості цукру за кожним заводом; 2) загальні індекси змінного і фіксованого складів; 3) індекс впливу структурних зрушень на середню собівартість цукру.

Таблиця 9.76

Завод	Виробництво цукру, т		Собівартість 1 т цукру, грн	
	Базисний	Звітний	Базисний	Звітний
1	5 800	6 200	15 400	18 600
2	15 400	16 700	14 650	15 720
3	28 600	27 400	13 860	13 640

9.77. Маються наступні дані про випуск продукції та її собівартість на машинобудівних заводах однієї галузі за відповідні періоди:

Таблиця 9.77

Завод	Базисний період		Звітний період	
	Кількість продукції, шт.	Собівартість одиниці продукції, тис. грн	Кількість продукції, шт.	Собівартість одиниці продукції, тис. грн
1	11 685	75,6	12 547	73,2
2	7 524	68,2	10 126	65,8
3	6 521	64,2	5 321	64,0

Визначити: 1) індекси собівартості одиниці продукції за кожним підприємством; 2) індекси змінного і фіксованого складів по трьом підприємства в цілому; в) індекс структурних зрушень. *Обчислити* зміну затрат в цілому за трьома підприємствами за рахунок зміни собівартості продукції на кожному підприємстві та її випуску.

9.78. Маються наступні дані про чисельність працівників та розмір їх заробітної плати на машинобудівному заводі за відповідні періоди (табл. 9.78).

Таблиця 9.78

Групи робітників	Середня місячна чисельність робітників, осіб		Місячний фонд заробітної плати, тис. грн	
	в базисному періоді	в звітному періоді	в базисному періоді	в звітному періоді
Кваліфіковані робітники	100	140	1040	1582
Некваліфіковані робітники	100	80	920	760
Всього	200	220	1960	2342

Визначити: 1) індекс заробітної плати змінного складу; 2) індекс

заробітної плати постійного складу; 3) індекс структурних зрушень. *Визначте* зміну фонду заробітної плати за рахунок: зміни чисельності робітників; зміни середньої заробітної плати.

9.79. Маються наступні дані за двома промисловими підприємствами, які виробляють однакову продукцію:

Таблиця 9.79

Підприємства	Вироблено продукції (тис. шт.) в періоді		Затрати робочого часу (тис. люд.-год.) в періоді	
	базисному	звітному	базисному	звітному
1	400	450	250,6	239,2
2	600	640	481,7	462,5
3	100	110	123,9	116,3

Визначити на основі прямих показників продуктивності праці загальні індекси: а) індекс постійного складу; б) індекс змінного складу; в) індекс структури. *Визначити* індекси продуктивності праці на основі показників трудомісткості одиниці продукції.

9.80. Маються наступні дані про валовий збір, посівні площі та урожайність зернових культур (табл.. 9.80). *Визначте* індекс структурних зрушень.

Таблиця 9.80

Вид сільськогосподарської культури	2021 р.			2022 р.		
	Валовий збір, ц	Посівна площа, га	Урожайність, ц/га	Валовий збір, ц	Посівна площа, га	Урожайність, ц/га
Озима пшениця	41 600	1 600	26	43 200	1 600	27
Ячмінь	10 800	400	27	6 000	200	30
Овес	32 000	2 000	16	33 000	2 200	15
Всього	84 400	4 000	21,1	82 200	4 000	20,55

9.81. Маються наступні дані:

Таблиця 9.81

Вироби	Собівартість, грн		Вироблено, тис. шт.	
	базисний період	звітний період	базисний період	звітний період
А	2,3	2,1	97	138
Б	1,8	2,1	46	58
В	8,7	8,2	50	55
Г	3,5	3,2	13	8

За наступними даними необхідно *розрахувати* вплив структурних зрушень на зміну середньої собівартості чотирьох однотипних виробів.

9.82. Маються дані по двом заводам щодо обсягу виробленої продукції на собівартості одиниці продукції чотирьох виробів:

Таблиця 9.82

Вироби	Завод 1				Завод 2			
	собівартість одиниці продукції, грн		вироблено продукції, тис. шт.		собівартість одиниці продукції, грн		вироблено продукції, тис. шт.	
	базисний період	звітний період	базисний період	звітний період	базисний період	звітний період	базисний період	звітний період
А	15	14	200	240	12	13	100	120
Б	243	248	400	380	227	239	700	800
В	6	7	800	900	8	9	200	300
Г	86	89	600	700	87	94	400	200

Визначити індекси середньої собівартості змінного складу, індекси собівартості постійного складу та індекси структурних зрушень: 1) за виробом *А*; 2) за виробом *Б*; 3) за виробом *В*; 4) за виробом *Г*.

9.83. Маються наступні дані про прямі витрати праці на виробництво 1 ц картоплі в господарствах області (табл. 9.83).

Таблиця 9.83

Категорії господарств	Затрати праці на 1 ц, люд.-год.		Валовий збір, тис. т	
	2021 р.	2022 р.	2021 р.	2022 р.
Сільськогосподарські підприємства	2,4	2,6	44,5	38,4
Фермерські господарства	2,3	2,1	15	13

Визначте: 1) індивідуальні індекси трудомісткості виробництва картоплі; 2) індекси середньої трудомісткості картоплі господарствами області змінного складу, постійного складу і структури. Перевірте ув'язку їх в систему.

9.9. Розрахунок територіальних індексів

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Відносний показник, що характеризує співвідношення соціально-економічних явищ у просторі (за економічними районами, містами,

державами тощо), називається *територіальним індексом*, або *просторовим індексом*. Подібно до індексів динаміки, територіальні індекси відображають відносну зміну рівня явища, його фізичного (натурального) обсягу тощо від однієї території до іншої (або до кількох інших).

Методологія побудови територіальних індексів ще до кінця не вирішена. Є пропозиції індекси якісних ознак розраховувати за вагами того об'єкта, для якого обчислюється індекс, а індекси об'ємних (кількісних) ознак — за вагами середнього рівня відповідних якісних показників по всій сукупності даних об'єктів. Є пропозиції використовувати як терези деякі середні величини (галузеві і т. п.).

При побудові територіальних індексів виникають складності ще й тому, що проводиться зіставлення різних об'єктів, які мають різко різну структуру і рівні якісних ознак на відміну від динамічних індексів, де вивчається розвиток одного і того ж самого об'єкта. Але слід мати на увазі, що в територіальних індексах здійснюється порівняння розвитку явищ на різних територіях, тому ваги повинні в деякій мірі нейтралізувати певні структурні відмінності.

Вибір бази порівняння при обчисленні територіальних індексів повинен вирішуватися в кожному випадку окремо в залежності від тих завдань, які стоять перед дослідником. Особливого ретельного аналізу потребує вибір бази порівняння при міжнародних співставленнях показників економічного розвитку.

Розглянемо приклад обчислення територіального індексу.

Задача 16. Наприклад, можна співставити собівартість двох видів продукції за двома областями. Вихідна інформація наведена в табл. 9.84.

Таблиця 9.84

Продукція	Область *А*		Область *Б*	
	собівартість одиниці продукції, грн (z_A)	вироблено, шт. (q_A)	собівартість одиниці продукції, грн ($z_Б$)	вироблено, шт. ($q_Б$)
1	10,4	150	10,6	660
2	9,7	210	9,2	200

Розрахуйте територіальний індекс собівартості продукції, використовуючи як ваги обсяги виробництва продукції в області *А* і *Б*.

Рішення

Розрахуємо територіальний індекс собівартості продукції, використовуючи як ваги обсяги виробництва продукції в області *А*:

$$I_z = \frac{\sum z_A q_A}{\sum z_Б q_A} = \frac{10{,}4 \cdot 150 + 9{,}7 \cdot 210}{10{,}6 \cdot 150 + 9{,}2 \cdot 210} = \frac{2\,597}{3\,522} = 1{,}021, \text{ або } 102{,}1\ \%.$$

Отже, собівартість продукції області *А* вище, ніж у області *Б*, на 2,1 % (1,021·100 – 100), якщо вагами брати кількість продукції області *А*.

Територіальний індекс собівартості з використанням як ваги обсягу продукції, виробленої в області *Б*:

$$I_z = \frac{\sum z_Б q_Б}{\sum z_A q_Б} = \frac{10{,}6 \cdot 660 + 9{,}2 \cdot 200}{10{,}4 \cdot 660 + 9{,}2 \cdot 200} = \frac{8\,836}{9\,005} = 1{,}004, \text{ або } 100{,}4\ \%.$$

Вийшов суперечливий результат: перший індекс свідчить про те, що собівартість продукції області *А* вище, ніж області *Б*, другий — цілком протилежне. Це з тим, що вибір ваг (у першому випадку — q_A, у другому — $q_Б$) не нейтралізує структурних відмінностей у виробництві продукції, що у областях *А* і *Б*.

Є різні погляду на вибір баз при обчисленні територіальних індексів. Іноді як ваги пропонується використовувати і суми первинних ознак порівнюваних сукупностей. Наприклад, в індексі собівартості продукції — за сумою обсягу виробництва продукції обох територій, тобто $q_A + q_Б$.

Якщо як терези використовуються обсяги відповідних видів продукції, територіальний індекс собівартості може бути обчислений за такою формулою:

$$I_z = \frac{\sum z_A q_{A+Б}}{\sum z_Б q_{A+Б}} = \frac{10{,}4 \cdot (150 + 660) + 9{,}7 \cdot (210 + 200)}{10{,}6 \cdot (150 + 660) + 9{,}2 \cdot (210 + 200)} = \frac{12401}{12358} =$$

$$= 1{,}003, \text{ або } 100{,}3\ \%.$$

Задачі

9.84. Необхідно співставити собівартість двох видів продукції за двома областями, використовуючи наступні дані:

Таблиця 9.85

Продукція	Область *А*		Область *Б*	
	собівартість одиниці продукції, грн (z_A)	вироблено, шт. (q_A)	собівартість одиниці продукції, грн ($z_Б$)	вироблено, шт. ($q_Б$)
1	10,4	150	10,6	660
2	9,7	210	9,2	200

Розрахуйте територіальний індекс собівартості продукції, використовуючи як ваги обсяги виробництва продукції в області *А*.

9.85. Вихідні дані наведені в задачі 9.84. *Розрахуйте* територіальний індекс собівартості продукції. В якості ваги використайте обсяг відповідних видів продукції за двома областями в цілому, тобто $q_A + q_Б$.

9.86. Урожайність та площі озимої пшениці в двох районах наведені нижче:

Таблиця 9.86

Продукція	Область *А*		Область *Б*	
	урожайність, ц/га (z_A)	площа посіву, га (q_A)	урожайність, ц/га ($z_Б$)	площа посіву, га ($q_Б$)
1	30,4	1 600	24,6	660
2	24,7	2 310	28,2	1 200

Розрахуйте територіальний індекс урожайності продукції, використовуючи в якості ваги площі посіву озимої пшениці в області *А*.

9.87. Маються дані про місячний продаж молочних продуктів на ринках двох міст:

Таблиця 9.87

Продукція	Ціна за 1 кг, грн		Обсяг продажів, ц	
	місто *А*	місто *Б*	місто *А*	місто *Б*
Молоко	24	26	19,5	31,8
Сир	245	257	1,7	8,1
Сметана	45	48	15,6	26,7

Розрахуйте територіальний індекс цін на ці продукти в місті *А* порівняно з містом *Б*.

9.88. Використовуючи вихідні дані попередньої задачі, *розрахуйте* територіальний індекс собівартості продукції. Як ваги прийміть обсяги виробництва продукції в області *Б*.

9.89. Маються наступні дані про урожайність та посівні площі зернових культур в двох районах:

Таблиця 9.88

Продукція	Урожайність, ц/га		Посівна площа, га	
	місто *А*	місто *Б*	місто *А*	місто *Б*
Пшениця озима	31	26	520	960
Ячмінь	24	25	12 700	32 800
Овес	18	22	16 500	11 300

Розрахуйте територіальний індекс урожайності зернових.

9.10. Тести

1. Відносна величина, що характеризує зміну в часі та просторі обсягів або рівнів комплексних сукупностей, які складаються з безпосередньо несумірних елементів — це:
а) індекс зведений;
б) індекс базисний;
в) індекс територіальний;
г) індекс груповий (субіндекс).
2. Статистичний узагальнюючий показник, який є мірою змін у репрезентативній групі окремих значень даних, або іншими словами, складеною мірою, яка агрегує набір інших показників або індексів нижчого рівня агрегації — це:
а) вага;
б) індекс;
в) індексний метод;
г) індексна система.
3. Індекс, який отримують шляхом зіставлення з рівнем періоду, що прийнятий за базу порівняння — це:
а) індекс зведений;
б) індекс базисний;
в) індекс територіальний;
г) індекс груповий (субіндекс).
4. Індекс, що характеризує зміну явища в часі — це:
а) індекс індивідуальний;
б) індекс базисний;
в) індекс динамічний;
г) індекс груповий (субіндекс).
5. Форми вираження індексу:
а) відсотки, продециміле, кілограми;
б) проценти, кілограми, гривни;
в) коефіцієнти, тонни, гривни;
г) коефіцієнти, проценти, проміле.
6. Індекс, який отримують шляхом зіставлення поточних рівнів y_t з попередніми y_{t-1} — це:
а) індекс ланцюговий;
б) індекс базисний;

в) індекс динамічний;
г) індекс груповий (субіндекс).

7. Цей індекс, обчислений за відповідний період року, є результатом послідовного множення значень місячних ланцюгових індексів:
а) індекс агрегатний;
б) індекс ланцюговий;
в) індекс базисний;
г) індекс груповий.

8. Відносна величина, що розраховується для всієї сукупності досліджуваних явищ, яка складається із різнорідних, безпосередньо незіставних елементів — це:
а) індекс індивідуальний;
б) індекс ланцюговий;
в) індекс базисний;
г) індекс загальний.

9. Це індекс, що дає порівняльну характеристику окремих елементів досліджуваної сукупності. Неодмінною умовою його обчислення є порівнянність методики вимірювання чисельника та знаменника:
а) індекс середніх величин;
б) індекс індивідуальний;
в) індекс базисний;
г) індекс загальний.

10. Ці індекси є різновидом зведених індексів; обчислюються як середні з індивідуальних індексів, зважених на величини, що мають однакову розмірність, зафіксовані на незмінному рівні:
а) індекси індивідуальні;
б) індекси середньозважені;
в) індекси середніх величин;
г) індекси цін.

11. Основною особливістю індексів у порівнянні з відносними та середніми величинами є те, що вони:
а) можуть розраховуватися лише для однорідних статистичних сукупностей;
б) характеризують співвідношення абсолютних рівнів складного явища, елементи якого безпосередньо непорівнянні.
в) виражають характерну, типову величину ознаки у одиниць сукупності, що утворюються в даних умовах місця і часу під впливом всієї сукупності факторів;
г) визначають середньорічні темпи зміни явища або процесу.

12. Це такі зведені індекси, чисельник і знаменник яких представляє со-

бою суми добутку індексованої величини та її ваги за два порівнювальних періоди:

а) агрегатні індекси;

б) індивідуальні індекси;

в) індекс структури;

г) індекс виконання плану.

13. Індекс, що виражає співвідношення середніх рівнів досліджуваного явища, що відноситься до різних періодів часу або різних територій — це:

а) індекс постійного складу;

б) індекс змінного складу

в) агрегатний індекс;

г) індекс структури.

14. Часто індекс структурних зрушень обчислюється як:

а) частка від ділення індексу змінного складу на індекс постійного (фіксованого) складу;

б) добуток індексу змінного складу та індексу постійного (фіксованого) складу;

в) різниця між індексом змінного складу та індексом постійного (фіксованого) складу;

г) сума індексу змінного складу та індексу постійного (фіксованого) складу.

15. Основною формою загальних (зведених) індексів є:

а) індекс середній арифметичний;

б) індекс агрегатний;

в) індекс індивідуальний;

г) індекс середній гармонійний.

16. Будь-який агрегатний індекс може бути перетворений на «…» з індивідуальних індексів. Для цього індексована величина базисного періоду, що стоїть у знаменнику агрегатного індексу, замінюється добутком зворотного значення індивідуального індексу на величину, що індексується, звітного періоду:

а) груповий агрегатний індекс;

б) середній гармонійний індекс;

в) середній арифметичний індекс;

г) індекс структури.

17. Будь-який агрегатний індекс може бути перетворений в «…» із індивідуальних індексів. Для цього індексована величина, що стоїть в чисельнику агрегатного індексу, замінюється добутком індивідуального індексу на індексовану величину базисного періоду (за виключенням ін-

дексу продуктивності праці):

а) груповий агрегатний індекс;

б) середній гармонійний індекс;

в) середній арифметичний індекс;

г) індекс структури.

9.11. Питання для обговорення

1. Яке значення мають індекси в економічному аналізі?

2. Які задачі можуть бути вирішені на основі застосування різних індексів?

3. *Дайте* визначення поняттям: індекс, індексована ознака, вага. Чим відрізняються індекси від звичайних відносних величин?

4. Якими формулами слід користуватися для визначення групових індексів за системою взаємопов'язаних індексів?

5. Що таке ланцюговий та базисний метод індексування? *Дайте* характеристику порядку розрахунку базисних та ланцюгових індексів.

6. Чим відрізняється індекс із середніх величин від індексу агрегатного?

7. *Охарактеризуйте* порядок обчислення індексів з постійними та змінними вагами.

8. Як розкласти підсумковий результат зміни досліджуваних явищ за факторами?

9. *Охарактеризуйте* індивідуальний, груповий та зведений індекс.

10. *Дайте* характеристику середнім арифметичним та середнім гармонійним індексам. У яких випадках вони застосовуються?

11. *Охарактеризуйте* особливість побудови індексів виконання плану.

12. Як на основі індексів можна обчислити абсолютні різниці? При обчисленні яких індексів це має суттєве значення?

13. *Дайте* характеристику агрегатній формі індексів. В чому полягає їх особливість?

14. Як розрахувати індекс структури? В яких випадках застосовують індекс структури? Що він характеризує?

15. *Дайте* характеристику побудові територіальних індексів. Чим відрізняється побудова територіальних індексів від динамічних індексів?

16. *Охарактеризуйте* найважливіші економічні індекси, які розраховуються для аналізу економічних процесів в країні.

17. В чому полягає сутність індексного методу розрахунку впливу факторів на результативних показник?

ЛІТЕРАТУРА

1. *Горкавий В. К.* Статистика: Підручник. Третє вид., переробл. і доповн. Київ: Алерта, 2019. С. 321–354.
2. Статистика: підручник / *С. І. Пирожков*, *В. В. Рязанцева*, *Р. М. Моторин* та ін. Київ: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2020. С. 264–296.
3. Статистика: Підручник / *С. С. Герасименко*, *А. В. Головач*, *А.М. Єріна* та ін.; За наук. ред. д-ра екон. наук С. С. Герасименка. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: КНЕУ, 2000. С. 139–159.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

Навчальні посібники, *словники*

4. *Педченко Г. П.* Статистика: Навчальний посібник. Мелітополь: Колор Принт, 2018. С. 239–247.
5. Статистичний словник / [*О. Г. Осауленко*, *О. О. Васєчко*, *М. В. Пугачова* та ін.]; за ред. д-ра держ. упр., проф., член-кор. НАН України О. Г. Осауленка; НТК статистичних досліджень. Київ: ДП «Інформ.-аналіт. агентство», 2012. 498 с.
6. *Ткач Є. І.*, *Сторожук В. П.* Загальна теорія статистики: підручник. 3-тє вид. Київ: Центр учбової літератури, 2009. С. 302–332.
7. *Шапочка М. К.*, *Маценко О. М.* Теорія статистики: навч. посібник. Суми: Університетська книга, 2014. С. 269–298.

Монографії та статті

8. *Андрієнко В. Ю.* Статистичні індекси в економічних дослідженнях: монографія. Київ: Академперіодика, 2004.

Глава 10. ВИБІРКОВИЙ МЕТОД

10.1. Визначення помилки вибіркової середньої при власне випадковому і механічному відборі

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Вибіркове спостереження (або *вибірка*) — метод отримання статистичних даних про досліджувані або контрольовані явища та процес. На відміну від суцільного статистичного спостереження, при вибірковому спостереженні обстежується лише частина досліджуваної або перевіреної сукупності з подальшим поширенням отриманих даних на всю сукупність в цілому. В основі теорії вибіркового спостереження лежать теореми закону великих чисел, які дозволяють вирішити два взаємопов'язані і головні у практичному відношенні питання вибірки: розрахувати її обсяг при заданій точності дослідження та визначити помилку при даному обсязі вибірки.

Головними питаннями теорії вибіркового спостереження є:

визначення межі випадкової помилки репрезентативності для різних типів вибіркових характеристик з урахуванням особливостей відбору;

визначення обсягу вибірки, що забезпечує необхідну репрезентативність вибіркової характеристики, з урахуванням особливостей відбору.

Середня помилка вибірки для середньої показує середню величину всіх можливих відхилень вибіркової та генеральної середньої.

Величина середньої помилки вибірки різна для окремих різновидів випадкового відбору. За власне-випадковому повторному відборі середня помилка визначається наступними формулами:

індивідуальний відбір:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

де σ^2 — загальна дисперсія ознаки;

n — число відібраних одиниць спостереження;

груповий (гніздовий, серійний) відбір:

$$\mu = \sqrt{\frac{\delta^2}{r}} = \frac{\delta^2}{\sqrt{r}},$$

де δ^2 — міжгрупова дисперсія;

r — число відібраних груп (гнізд, серій) одиниць спостереження.

У випадку безповторного способу відбору (а також механічного) слід мати на увазі поправки (K) до помилки повторної вибірки на безповторність відбору:

$$K = \sqrt{1 - \frac{n}{N}} < 1 \quad \text{або} \quad K = \sqrt{1 - \frac{r}{R}} < 1.$$

де N — число одиниць в генеральної сукупності.

Отже, для середньої формули приймуть такий вид для безповторної вибірки:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}.$$

Гранична помилка вибірки Δ розраховується за формулою:

$$\Delta = \mu t,$$

де t — критерій довіри, його величина залежить від ймовірності P.

Значення t розраховують за спеціальною таблицею, що виражається інтегральною формулою Лапласа.

Визначення помилок вибіркових характеристик дозволяє встановити найвірогідніші межі знаходження відповідних генеральних показників.

Межі генеральної середньої:

$$\bar{x} = \tilde{x} \pm \Delta_{\tilde{x}},$$

де $\bar{x}$ — генеральна середня;

$\tilde{x}$ — вибіркова середня;

$\Delta_{\tilde{x}}$ — помилка вибіркової середньої.

Межі генеральної долі:

$$p = w \pm \Delta_w,$$

де p — генеральна доля;

Δ_w — помилка вибіркової долі.

За механічним відбором середня помилка вибірки розраховується за формулою власне-випадкового безповторного відбору.

Задача 1. Здійснено вибіркове обстеження виробітку на земляних роботах у 121 робітників. В результаті обстеження середній виробіток за вибірковими даними визначена 5,2 деталей на одного робітника, а середній квадрат відхилень (σ^2) рівний 2,56. Необхідно *визначити* точність вибіркового спостереження.

Рішення

Обчислимо розмір помилки вибірки:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{2{,}56}{121}} = \pm\frac{1{,}6}{11} = \pm 0{,}145.$$

Помилка вибірки свідчить, в яких межах в ту чи іншу сторону можна очікувати відхилення середнього виробітку у всіх робітників від середнього виробітку за вибірковими даними. За нашими розрахунками, ця величина становить ±0,145 шт. Отже, з вірогідністю, рівною 0,683, можна сказати, що середній виробіток у всіх робітників знаходиться в межах: від 5,055 шт. (5,2 – 0,145) до 5,345 шт. (5,2 + 0,145), а з вірогідністю 0,954 вона не вийде за межі: від 4,91 (5,2 – 0,29) до 5,49 (5,2 + 2,9).

Задача 2. В районі проживає 2000 сімей. З метою визначення середнього розміру сім'ї була проведена 3%-не вибіркове обстеження сімей методом випадкового без повторного відбору. В результаті обстеження отримані наступні дані:

Розмір сім'ї, осіб	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Число сімей	4	8	14	16	8	4	3	2	1

З ймовірністю 0,997 *визначте* межі, в яких знаходиться середній розмір сім'ї в районі.

Розв'язання

Щоб визначити межі генеральної середньої, необхідно обчислити вибіркову середню і помилку вибіркової середньої. Обчислимо середній розмір сім'ї у вибірковій сукупності та дисперсію вибіркової сукупності:

Таблиця 10.1

Число членів сім'ї x	Кількість сімей f	xf	$x-\tilde{x}$	$(x-\tilde{x})^2$	$(x-\tilde{x})^2 f$
0	4	0	–2,9	8,41	33,64
1	8	8	–1,9	3,61	28,88
2	14	28	–0,9	0,81	11,34
3	16	48	0,1	0,01	0,16
4	8	32	1,1	1,21	9,68
5	4	20	2,1	4,41	17,64
6	3	18	3,1	9,61	28,83
7	2	14	4,1	16,81	33,62
8	1	8	5,1	26,01	26,01
Всього	60	176			189,80

Визначимо вибіркову середню і дисперсію:

$$\widetilde{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{176}{60} = 2{,}9 \text{ осіб};$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \widetilde{x})^2 f}{\sum f} = \frac{189{,}80}{60} = 3{,}16 \approx 3{,}2.$$

Гранична помилка вибіркової середньої при випадковому відборі розраховується за формулою $\Delta_{\widetilde{x}} = t\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}$. Із ймовірністю 0,997 наша помилка вибірки не перевищує трьох середніх помилок:

$$\Delta_{\widetilde{x}} = 3\sqrt{\frac{3{,}2}{60}\left(1 - \frac{60}{2000}\right)} = 0{,}2 \text{ осіб}.$$

Визначимо межі, в яких знаходиться середній розмір сім'ї у місті *A*:

$$\bar{x} = \widetilde{x} \pm \Delta_{\widetilde{x}} = 3{,}2 \pm 0{,}2.$$

З ймовірністю 0,997 можна стверджувати, що середній розмір сім'ї в місті *A* знаходиться в межах $3{,}0 \le \bar{x} \le 3{,}4$.

Задача 3. З ймовірністю 0,954 необхідно визначити межі середньої ваги деталі для всієї партії із 100 одиниць, які випустило підприємство за місяць, якщо контрольна вибіркова перевірка дала наступні результати (перші дві графи таблиці):

Таблиця 10.2

Вага, г (*x*)	Кількість деталей, шт.
38–39	20
39–40	50
40–41	20
41–42	10
Всього	100

Рішення

Для обчислення межі середньої ваги деталі складемо допоміжну таблицю (табл. 10.3).

Обчислення здійснюється в такій послідовності.

1. Середня вага деталі по вибірці:

$$\widetilde{x} = \frac{\sum x'f'}{\sum f'} \cdot k + A = \frac{2}{10} \cdot 1 + 39{,}5 = 39{,}7 \text{ г}.$$

Таблиця 10.3

Вага, г (x)	Кількість деталей, шт. (f)	Центр інтервалу x	x'	f'	$x'f'$	$(x')^2 f'$
38–39	20	38,5	–1	2	–2	2
39–40	50	39,5	0	5	0	0
40–41	20	40,5	+1	2	2	2
41–42	10	41,5	+2	1	2	4
Всього	100	–	–	10	2	8

2. Вибіркова дисперсія ваги деталі:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x')^2 f'}{\sum f'} - \left(\frac{\sum x'f'}{\sum f'} \right)^2 = \frac{8}{10} - \left(\frac{2}{10} \right)^2 = 0{,}76.$$

3. Середня помилка вибіркової середньої:

$$\mu_{\tilde{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}76}{100}} = \pm 0{,}087.$$

4. Межі для помилки з ймовірністю 0,954:

$$\Delta = 2\mu = \pm 0{,}174 \text{ } г \approx 0{,}2 \text{ } г.$$

5. Межі генеральної середньої:

$$\bar{x} = \tilde{x} \pm 0{,}2 = 39{,}7 \pm 0{,}2 \text{ } г.$$

Таким чином, з ймовірністю 0,954 можна стверджувати, що вага деталі в середньому для всієї партії не більше 39,9 *г* і не менше 39,5 *г*.

Слід відмітити, що помилка вибірки залежить головним чином від абсолютної чисельності вибірки і лиш в незначній мірі від її відносної долі. Розглянемо наступний приклад.

Задача 4. Припустимо, що при безповторній вибірці проводиться 220 спостережень в першому випадку із сукупності в 4 400 одиниць і в другому випадку із сукупності 220 000 одиниць. Дисперсія в обох випадках дорівнює 24,2. *Визначити* помилку вибіркового спостереження.

Рішення

В першому випадку при 5% відборі середня помилка вибірки складе:

$$\mu = \sqrt{\frac{24{,}2}{220} \times \left(1 - \frac{220}{4400} \right)} = \sqrt{0{,}11 \times 0{,}95} = \sqrt{0{,}1045} = 0{,}32,$$

і в другому випадку при 0,1 % відбору:

$$\mu = \sqrt{\frac{24,2}{220} \times \left(1 - \frac{220}{22000}\right)} = \sqrt{0,11 \times 0,999} = \sqrt{0,10989} = 0,33.$$

Незважаючи на те, що в другому випадку процент вибірки зменшився в 50 разів, помилка вибірки зменшилася в незначній мірі.

Задача 5. З вірогідністю 0,997 необхідно визначити помилку частості при 5%-ній гніздовій вибірці 50 гнізд при наступних умовах: загальна дисперсія близька до максимальної, а емпіричне кореляційне відношення складає 0,7.

Рішення

Межі (при P=0,997) для долі складають:

$$\Delta = 3\mu = 3\sqrt{\frac{\delta^2}{50}}\ .$$

Міжгрупову дисперсію обчислимо на основі формули кореляційного відношення:

$$\eta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}}\ .$$

Прийнявши σ^2=0,25, маємо:

$$0,7 = \sqrt{\frac{\delta^2}{0,25}},\ \text{звідки}\ \ \delta^2 = 0,1225.$$

Таким чином, помилка частості складе:

$$\Delta = 3\sqrt{\frac{0,1225^2}{50}} = 0,052.$$

Задачі

10.1. В районі А проживає 2500 сімей. Для встановлення середнього числа дітей в сім'ї була проведена 2%-на випадкова безповторна вибірка сімей. В результаті обстеження були отримані наступні дані:

Число дітей в сім'ї	0	1	2	3	4	5	6
Число сімей	9	20	11	5	2	2	1

З ймовірністю 0,997 необхідно *визначити* межі, в яких буде знаходиться середнє число дітей в сім'ї в генеральній сукупності (в місті *А*). Генеральна середня $\bar{x} = \tilde{x} \pm \Delta_{\tilde{x}}$.

10.2. Класифікація і заробітна плата 70 робітників-відрядників

характеризується наступними даними:

Таблиця 10.4

Порядковий номер робітника	Тарифний розряд робітника	Нараховано заробітної плати за місяць, грн	Порядковий номер робітника	Тарифний розряд робітника	Нараховано заробітної плати за місяць, грн
1	2	11 200	36	4	14 700
2	5	9 500	37	4	8 500
3	3	8 400	38	5	8 600
4	2	10 300	39	6	12 400
5	4	10 900	40	4	13 500
6	3	12 700	41	4	7 800
7	5	8 600	42	4	8 700
8	4	9 200	43	6	9 100
9	6	8 100	44	5	12 000
10	4	11 800	45	6	13 400
11	6	7 500	46	6	12 800
12	3	8 200	47	6	8 600
13	3	9 600	48	3	13 500
14	3	12 800	49	2	9 600
15	5	13 100	50	4	13 400
16	6	15 400	51	6	8 700
17	2	10 800	52	5	9 500
18	3	7 300	53	5	8 000
19	4	12 700	54	5	12 700
20	5	14 600	55	6	11 600
21	5	12 800	56	5	13 500
22	5	8 300	57	5	11 500
23	4	7 500	58	5	9 800
24	6	7 500	59	4	7 800
25	5	14 600	60	6	12 600
26	5	14 200	61	6	14 200
27	4	8 200	62	6	8 600
28	6	7 600	63	6	8 700
29	3	7 600	64	4	11 600
30	6	15 200	65	5	9 600
31	6	9 600	66	5	9 300
32	3	9 500	67	5	12 500
33	3	12 700	68	5	14 000
34	3	13 500	69	2	8 700
35	3	14 200	70	6	9 500

За даними про 70-ти робітників-відрядників *здійсніть* власне-випадковий відбір 20 робітників: а) за жеребом; б) за таблицею випадкових чисел (див. *додаток 3*); в) розрахуйте вибіркові середні за двома показниками; г) розрахуйте фактичні помилки репрезентативності (різниця між вибірковою і генеральною величиною середньої заробітної

плати робітника та середнього тарифного розряду робітника; .

10.3. Виходячи з умов задачі 10.2 розрахуйте: а) середні помилки вибірки за обома показниками (середньою заробітною платою та середнім тарифним розрядом робітників); б) граничні помилки обох показників з ймовірністю 0,954 та 0,997; в) межі, в яких можуть знаходитися відповідні генеральні характеристики (з тією ж ймовірністю).

10.4. За даними про кваліфікацію та заробітну плату 70 робітників (задача 10.2) здійсніть механічний відбір кожного сьомого робітника, використовуючи в якості основи відбору: а) розташування робітників за їх порядковим номером; б) ранжований ряд за розміром заробітної плати. За результатами вибірок обчисліть середній тарифний розряд. Порівняйте фактичні помилки цього показника для ранжованого та неранжованого механічного відбору.

10.5. За даними задачі 10.4 *розрахуйте* граничну помилку (з ймовірністю 0,954) середнього тарифного розряду робітників для двох варіантів механічного відбору. *Порівняйте* отримані результати.

10.6. На машинобудівному заводі з числом робітників 4 000 осіб було проведене 5%-не вибіркове обстеження кваліфікації робітників методом випадкового без повторного відбору. В результаті обстеження були отримані наступні дані:

Кваліфікація робітників	1	2	3	4	5	6
Число робітників	8	32	43	67	30	20

З ймовірністю 0,997 *визначте* межі, в яких знаходиться середній тарифний розряд робітників.

10.7. В результаті безповторного відбору було проведено випробування на розрив 100 ниток із партії. В результаті обстеження встановлена середня міцність пряжі 310 г при середньому квадратичному відхиленні 24 г. З ймовірністю 0,954 *визначте* межі, в яких знаходиться середня міцність пряжі в партії.

10.8. Для визначення середнього часу горіння електричних ламп в порядку випадкової вибірки було обстежено 400 ламп. В результаті обстеження середня тривалість горіння електричних ламп склала 1625 г. при середньому квадратичному відхилення 153 год. З ймовірністю 0,667 *визначте* межі, в яких знаходиться середня тривалість горіння електричних ламп.

10.9. На заводі працює 200 токарів. З метою дослідження продуктивності токарів було проведено 20%-не вибіркове обстеження 40 робітників методом випадкового безповторного відбору. В результаті обстеження були отримані наступні дані про кількість деталей, вироблених

робітниками:

Годинний виробіток, шт.	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18
Число робітників	6	11	13	7	3

З ймовірністю 0,997 *визначте* межі, в яких знаходиться середній виробіток токарів.

10.10. На складі із загальним числом валиків 1 000 шт. було методом випадкового безповторного відбору проведено 2%-не обстеження ваги валиків. В результаті обстеження отримані наступні дані:

Вага деталі, *г*	49,918–49,928	49,928–49,938	49,938–49,948	49,948–49,958	49,958–49,968
Кількість деталей	7	23	11	5	4

З ймовірністю 0,997 *визначте* межі, в яких знаходиться середня вага валиків.

10.11. В місті *А* проживає 2 000 сімей. Для встановлення середнього розміру в сім'ї була проведена 4%-не вибіркове обстеження 80 сімей. В результаті обстеження були отримані наступні дані:

Розмір сім'ї, осіб	0	1	2	3	4	5	6	7
Число сімей	6	21	20	12	8	6	5	2

З ймовірністю 0,954 необхідно *визначити* межі, в яких знаходиться середній розмір сім'ї в місті *А*.

10.12. В сільськогосподарському підприємстві взяли 100 метрівок для визначення очікуваного урожаю на кореню. *Яка помилка* вибіркової середньої, якщо встановлена, що середнє квадратичне відхилення урожайності (σ) становить 1,8 ц? *Визначте* середню помилку, якщо взято 400 метрівок.

10.13. Визначте, як зменшиться середня помилка повторної вибірки, якщо середнє квадратичне відхилення ознаки зросте в 3 рази, на 10 %.

10.14. Для вимірювання товщини листа металу взято 300 проб. Середня товщина броні виявилася 234 *мм* при σ=26 мм. *Визначте*, в яких межах слід очікувати середню товщину всієї випущеної партії листів металу?

10.15. Припустимо, що при безповторній вибірці проводиться 225 спостережень в першому випадку із сукупності в 4500 одиниць і в другому випадку із сукупності 225 000 одиниць. Дисперсія в обох випадках дорівнює 25. *Визначити* помилку вибіркового спостереження. Припустимо, що ми збільшили чисельність вибірки до 625 спостережень при

генеральній сукупності в 225 000. *Визначте* помилку вибірки.

10.16. Дослідник має у своєму розпорядженні багаточисленні дані споживчих бюджетів. Не маючи можливість обробити дані із десятка тисяч показань, дослідник вирішив випадковий відбір за жеребу; всього було відібрано 200 бюджетів, і дані про середньомісячних витратах на купівлю товару *А* стали такими:

Таблиця 10.5

Купівля в середньому на душу населення (грн)	Число покупок
Від 100 до 120	17
» 120 » 140	38
» 140 » 160	70
» 160 » 180	42
» 180 » 200	29
» 200 » 220	4
Всього	200

Визначити середні розміри купівлі товару міськими споживачами.

10.17. Із 300 одиниць виробів 92 % відповідали першому сорту. *Визначити* середню помилку вибірки і межі, в яких знаходиться доля продукції першого сорту в усій партії, з ймовірністю 0,954.

10.18. Згідно умов договору партія виробів повинна мати не менше 80 % виробів першого сорту. Визначте, чи задовольняє вона чим вимогам, якщо при обстеженні 800 одиниць вироби першого сорту склали 82 %.

10.19. В якому співвідношенні знаходяться при інших рівних умовах помилки власне-випадкової повторної та без повторної вибірок при 5%-, 20%-, 50%-ному відборі? Як зміниться помилка вибірки, якщо її обсяг збільшити з 4 до 16 %?

10.20. На основі проведеного хронометражу роботи 38 токарів були отримані наступні результати:

Затрати часу на виготовлення однієї деталі, хв.	30–31	31–32	32–33	33–34
Число виготовлених деталей, шт.	7	13	11	7

Визначте середню трудомісткість виготовлення деталі і граничну помилку цього показнику з ймовірністю 0,954, враховуючи, що хронометраж проводився при масовому випуску.

10.21. Який обсяг власне-випадкової повторної вибірки із сукупності 10 000 робітників був би необхідний, щоб з забезпечити з ймовірністю 0,954 репрезентативність системи показників, яка відхиляється від

генеральних в наступних межах: а) за середньою заробітною платою — не більше 500 грн; б) за питомою вагою тарифу в заробітній платі робітника — не більше 0,01.

10.22. Вибіркове обстеження сімей характеризується наступними даними (вибіркою було охоплено 900 сімей, або 25 % їх чисельності в районі):

Вартість покупки, грн	120–140	140–160	160–180	180–200	200–220	220–240
Чисельність сімей, % до підсумку	5	10	30	25	20	10

Чи можна стверджувати з ймовірністю 0,954, що середня вартість покупок і доля сімей, які роблять покупки понад 200 грн, мають помилки, які не перевищують 5 % їх величини?

10.23. Здійсніть 10%-ний механічний відбір із генеральної сукупності обсягом 500 одиниць. *Дайте* відповіді на питання: а) який інтервал відбору; б) на скільки рівновеликих частин повинна бути розбита генеральна сукупність; в) яка чисельність кожної із цих частин?

10.24. За даними вибіркового обстеження кожного десятого вкладу в банку були отримані наступні дані:

Розмір вкладу, грн	5000–6000	6000–7000	7000–8000	8000–9000
Число вкладів	50	100	150	60

Визначте з ймовірністю 0,954 межі: а) середнього вкладу; б) питомої ваги вкладів до 7 000 грн.

10.25. *Заповніть* таблиці відсутніми показниками:

Типові групи	Обсяг вибірки	Вибіркова середня	Коефіцієнт варіації	При P=0,954	
				помилка вибіркової середньої	межі генеральної середньої
I	500	6	20		
II	800	5	30		
III	1 500	7	40		
Всього					

10.26. При власне-випадковому безповторному відборі із партії деталей в 2000 штук було відібрано 100 деталей, із яких 4 виявилися бракованими. Чи можна з ймовірністю 0,954 зробити висновок, що доля

браку не перевищить 5 %.

10.27. Із партії деталей в порядку власне-випадкового безповторного відбору було відібрано 200 деталей, із яких 7 виявилися бракованими. Обсяг всієї партії складає 5 000 штук. Чи можна з ймовірністю 0,954 зробити висновок, що доля браку не перевищить 4 %.

10.28. Методом власне-випадкового безповторного відбору на наявність браку було обстежено 100 ящиків продукції. В результаті обстеження були отримані наступні дані:

Процент браку	1–2	2–3	3–4
Число ящиків	55	35	10

Чи можна прийняти всю партію із 1 000 ящиків за умови, якщо процент браку з ймовірністю 0,954 не повинен перевищувати 2,5 %?

10.29. Генеральна сукупність складається із 3 000 рівновеликих серій. З метою отримання відомостей про варіацію ознаки було проведено вибіркове обстеження 10 серій. Отримані наступні результати:

Номер серії	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Середній розмір ознаки в серії, $см^3$	61	65	69	78	72	65	61	56	76	65

Скільки необхідно відібрати в порядку безповторного відбору для суцільного обстеження, якщо помилка вибірки не перевищувала 3 $см^3$ (з ймовірністю 0,954)?

10.2. Визначення помилки вибіркової частки при власне-випадковому механічному відборі

Методичні вказівки та рішення типової задачі

При повторному відборі середня помилка вибіркової частки обчислюється за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}},$$

де w — частка ознаки (наприклад, якщо відсоток браку продукції становить від усієї продукції 0,5 %, то при w =0,005);

n — чисельність одиниць вибіркової сукупності.

Задача 6. При обстеженні 400 зразків виробів, відібраних із партії готової продукції підприємству у випадковому порядку, виявилося

20 нестандартними. З ймовірністю 0,954 визначте межі, в яких знаходиться частка нестандартної продукції, що випускається заводом.

Рішення

Обчислимо частку нестандартної продукції:

$$w = \frac{n}{N} = \frac{20}{400} = 0{,}05.$$

Гранична помилка обчислюється за формулою:

$$\Delta = t\mu,$$

де t — коефіцієнт ймовірної довірчості.

Отже, з ймовірністю 0,954 гранична помилка вибіркової частки становитиме:

$$\Delta = t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} = 2\sqrt{\frac{0{,}05(1-0{,}05)}{400}} = 0{,}022.$$

Визначимо нижню межу генеральної частки

$$w - \Delta_w = 0{,}05 - 0{,}022 = 0{,}028 \text{ (або 2,8 \%)}.$$

Визначимо верхню межу генеральної частки

$$w + \Delta_w = 0{,}05 + 0{,}022 = 0{,}072 \text{ (або 7,2 \%)}.$$

З ймовірністю 0,954 можна стверджувати, що частка нестандартної продукції в партії товару знаходиться в межах 2,8 %<p<7,2 %.

При безповторному способу відбору середня помилка вибіркової частки визначається за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}.$$

де N — чисельність одиниць генеральної сукупності.

Задача 7. З сукупності 10 000 деталей відібрано власне випадковим безповоротним методом 1 000 деталей, для яких середня вага деталі дорівнювала 55 *г*, дисперсія дорівнює 54. Бракованих деталей було виявлено 24 штук. З ймовірністю 0,954 *обчислити* межі, в яких знаходиться середня доля браку.

Рішення

Дано:

N=10 000; n=1 000; $\bar{x}$=55; σ^2=49;

Генеральна доля дорівнює: $P = w \pm \Delta_w$. Щоб визначити межі генеральної частки, необхідно визначити вибіркову частку и помилку вибіркової частки.

Обчислимо частку браку у вибірковій сукупності:

$$w = \frac{n}{N} = \frac{24}{1000} = 0{,}024.$$

При безповторному способі відбору середня помилка вибіркової частки браку визначається за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}.$$

За формулою знаходимо середню помилку вибірки:

$$\mu = \sqrt{\frac{0{,}024 \cdot 0{,}976}{1000} \cdot \left(1 - \frac{1000}{10000}\right)} = 0{,}0046, \text{ або } 0{,}46\ \%.$$

З ймовірністю 0,954 визначимо помилку вибірки для частки:

$$\Delta_w = t\mu = 2 \cdot 0{,}046 = 0{,}092 \approx 0{,}09, \quad \text{або} \quad 9\ \%.$$

Визначимо нижню межу генеральної частки $w - \Delta_w$ ==0,024 – 0,046=0,0194 (або 1,9 %).

Визначимо верхню межу генеральної частки $w + \Delta_w$ ==0,024 + 0,046=0,0286 (або 2,8 %).

З ймовірністю 0,954 можна стверджувати, що частка браку в загальній кількості деталей знаходиться в межах 1,9 %<p<2,8 %.

Задачі

10.30. При обстеженні 200 зразків виробів, відібраних із партії у випадковому порядку, виявилося 40 нестандартних. З ймовірністю 0,954 *визначте* межі, в яких знаходиться частка нестандартної продукції в партії.

10.31. В порядку випадкової повторної вибірки було відібрано 800 одиниць готової продукції, із якої 40 одиниць виявилися браком. З ймовірністю 0,954 *визначте* межі, в яких знаходиться частка бракованої продукції підприємства.

10.32. Із 400 тис. жителів міста *A* методом безповторного випадкового відбору обстежено 40 тис. жителів. В результаті обстеження встановлено, що 8 % жителів мають 6 дітей і більше. З ймовірністю 0,683 *визначте* межі, в яких знаходиться частка жителів, які мають 6 дітей і більше.

10.33. В порядку випадкового без повторного відбору було відібрано 500 зразків готової продукції, із яких 25 виявилися нестандартними.

З ймовірністю 0,683 *визначте* межі, в яких знаходиться частка нестандартної продукції.

10.34. Із партії готової продукції в порядку випадкової повторної вибірки було відібрано 200 одиниць готової продукції, із яких 10 одиниць буди забракованими. З ймовірністю 0,683 *визначте* межі, в яких знаходиться частка бракованої продукції підприємства.

10.35. Для дослідження думки місцевих жителів міста *А* про перспективи забудови методом випадкового безповторного відбору було опитано 400 жителів. Із них 280 жителів позитивно оцінили перспективний план забудови міста. З ймовірністю 0,954 *визначте* межі, в яких знаходиться частка жителів, які схвалили перспективний план забудови міста.

10.36. В місті проживає 4 000 осіб. В порядку випадкового безповторного відбору було обстежено 160 сімей. В результаті обстеження встановлено, що 48 сімей складаються із п’яти і більше осіб. З ймовірністю 0,954 *визначте* межі, в яких знаходиться частка сімей в місті, яка складається з п’яти та більше осіб.

10.37. Здійснено вибіркове обстеження якості цегли. Взято 200 проб, причому в п’яти випадках (2,5 %) цегла виявилася бракованою. Необхідно *визначити*, в яких межах заключається доля браку для всієї продукції (з ймовірністю 0,683).

10.38. Генеральна доля оцінюється приблизно в 20 %. Який повинен бути обсяг повторної вибірки, якщо помилка вибіркової долі не перевищувала 5 пунктів з ймовірністю 0,997. *Розрахуйте* також обсяг вибірки за умови, щоб помилка вибірки повинна бути зменшена на 25 %.

10.39. Із сукупності 5 000 деталей відібрано власне-випадковим безповторним методом 500 деталей, із яких середня вага деталі виявилася рівною 65 г, дисперсія рівна 68. Бракованих деталей було виявлено 14 штук. *Обчисліть* середні помилки вибірки для середньої та долі.

10.3. Визначення необхідної чисельності вибірки при дослідженні середньої для власне-випадкового і механічного відбору

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Важливою проблемою при організації вибіркового обстеження є визначення обсягу вибірки при заданій її точності. Ця проблема є оберненою проблемою, що розглядалася нами раніше – визначення помилки вибірки при заданому її обсязі. Формулу обсягу вибірки отримують із

відповідної помилки вибірки:

Формула обсягу вибірки складе:

для індивідуального без повторного відбору:

$$n = \frac{t^2\sigma^2 N}{\Delta^2 N + t^2\sigma^2};$$

групового безповторного відбору:

$$n = \frac{t^2\delta^2 R}{\Delta^2 R + t^2\delta^2}.$$

При рішенні задач на визначення необхідного обсягу вибірки слід мати на увазі, що замість генеральної дисперсії використовується вибіркова дисперсія.

Задача 8. Обсяг сукупності становить 6 000 виробів. За даними суцільного обстеження виробів першої партії, які складається із 100 одиниць, визначили дисперсію ваги виробів, рівну 36. Необхідна точність результатів спостереження становить 1 *г*. *Визначити* необхідну чисельність випадкової безповторної вибірки, що забезпечує задану точність з вірогідністю 0,954.

Рішення

Орієнтуючись на задану точність результатів спостереження для визначення тільки середньої ваги виробів: N=6 000; σ_x^2=36; $\Delta_{\bar{x}} = 1$ *г*; P=0,954; t=2.

При без повторному відборі формула для визначення обсягу вибірки має наступний вид:

$$n = \frac{t^2\sigma^2 N}{\Delta^2 N + t^2\sigma^2}.$$

Звідси

$$n = \frac{2^2 \cdot 36 \cdot 6\,000}{1^2 \cdot 6\,000 + 2^2 \cdot 36} \approx 141 \text{ шт.}$$

Таким чином, для забезпечення необхідної точності при визначенні середньої ваги необхідно вибрати не менше 141 виробів.

Задача 9. Нормувальник, досліджуючи витрати праці, вибірково обстежив 100 робітників. Середня помилка при цьому була рівною 2,4 години при середніх витрат часу ($\bar{x}$) в розмірі 6,2 години і середньому квадратичному відхиленні (σ^2) 441 години. При цих умовах нормувальник з вірогідністю 0,6827 міг стверджувати, що витрати часу на виготовлення виробу в середньому для всіх робітників даної професії будуть рівними 6,2±2,4 години. Сумніваючись в репрезентативності обстеженні

за такою великою помилкою, нормувальник вирішив збільшити чисельність цього обстеження, щоб зменшити помилку вдвічі. *Визначити* чисельність цього обстеження.

Рішення

Чисельність обстеження при зменшенні величини помилки складе:

$$n = \frac{441}{1{,}2^2} = \frac{441}{1{,}44} \approx 306 \text{ робітників.}$$

Здійснюючи обстеження в 306 робітників з вірогідністю 0,6827, можна стверджувати, що витрати праці в середньому для обстежуваної групи робітників склали 6,2±1,2 години. Якщо б нормувальник не був задоволений і таким результатом, то, здійснюючи вибірку в 1 225 робітників, він міг би зменшити величину середньої помилки двоє проти останнього спостереження і стверджувати, що з вірогідністю 0,6827, що витрати часу становитимуть 6,2±0,6.

$$n = \frac{441}{0{,}6^2} \approx 1\ 225 \text{ робітників.}$$

Таким чином, якщо величина середньої помилки змінюється обернено пропорційно кореня квадратному із чисельності спостережень, то, щоб зменшити помилку вдвічі, число спостережень необхідно збільшити вчетверо, а щоб помилку зменшити вчетверо, число спостережень необхідно збільшити в 16 разів і т. п.

Задача 10. Необхідно *визначити* абсолютний та відносний обсяги індивідуального відбору для дослідження генеральної долі, щоб помилка частості з ймовірністю 0,954 не перевищувала 0,03, якщо вибірка проводиться із генеральної сукупності обсягів: а) 1000; б) 10 000.

Рішення

Приймемо для генеральної долі максимальне значення pq=0,25. Використовуючи формулу $n = \frac{t^2 pq^2 N}{\Delta^2 N + t^2 pq^2}$ при ймовірності 0,954 (t=2), маємо:

1) $n = \frac{2^2 \cdot 0{,}25 \cdot 1000}{0{,}0009 \cdot 1000 + 2^2 \cdot 0{,}25} = 526$, або 52,6 %;

2) $n = \frac{2^2 \cdot 0{,}25 \cdot 10\,000}{0{,}0009 \cdot 10\,000 + 2^2 \cdot 0{,}25} = 1000$, або 10 %;

Задачі

10.40. Обсяг сукупності становить 3 000 виробів. За даними суцільного обстеження виробів першої партії, які складається із 100 одиниць, визначили дисперсію ваги виробів, рівну 28. Необхідна точність результатів спостереження становить 2 *г*. *Визначити* необхідну чисельність випадкової безповторної вибірки, що забезпечує задану точність з вірогідністю 0,954.

10.41. На машинобудівному заводі працює 1 000 робітників. Для обстеження використання робочого часу пропонується провести випадковий безповторний відбір робітників. Попередньо встановлено, що середнє квадратичне відхилення змінної виробітки становить 46 шт. *Визначте* необхідну чисельність вибірки за умови, що з ймовірністю 0,954 помилка вибірки не перевищить 6 шт.

10.42. *Визначте*, як зміниться обсяг вибірки, якщо ймовірність, що гарантує результат, зменшити з 0,997 до 0,954?

10.43. Для встановлення середнього стажу робітників передбачається здійснити механічну вибірку. Чисельність робітників становить 2 тис. осіб. Попередньо встановлено, що середнє квадратичне відхилення стажу роботи дорівнює 6 років. *Визначити* необхідну чисельність вибірки за умови, що з ймовірністю 0,997 помилка вибірки не перевищить 1,0 року.

10.44. В районі проживає 10 тис. сімей. Попереднім обстеженням встановлено, що середнє квадратичне відхилення чисельності сімей становить 2,0 людини. В порядку безповторної вибірки передбачається *визначити* середній розмір сім'ї за умови, якщо помилка середньої не повинна перевищувати 0,7 людини с ймовірністю P=0,954.

10.45. Необхідно *визначити* абсолютний та відносний обсяги індивідуального відбору для дослідження генеральної долі, щоб помилка частості з ймовірністю 0,954 не перевищувала 0,04, якщо вибірка проводиться із генеральної сукупності обсягів: а) 500; б) 5 000.

10.46. Нормувальник, досліджуючи витрати праці, вибірково обстежив 100 робітників. Середня помилка при цьому була рівною 4,8 години при середніх витрат часу ($\bar{x}$) в розмірі 12,4 години і середньому квадратичному відхиленні (σ^2) 882 години. При цих умовах нормувальник з вірогідністю 0,6827 міг стверджувати, що витрати часу на виготовлення виробу в середньому для всіх робітників даної професії будуть рівними 12,4±4,8 години. *Визначити*, на скільки необхідно збільшити чисельність вибірки, щоб зменшити помилку втричі.

10.47. З метою визначення якості деталей на машинобудівному за-

воді передбачається провести вибіркове обстеження деталей методом випадкового повторного відбору. Яка повинна бути чисельність вибірки, щоб з ймовірністю 0,954 помилка вибіркового обстеження не перевищувала 2 мм при середньої квадратичному відхилення 10 мм.

10.48. З метою визначення середніх витрат сім'ї на продукти харчування передбачається провести вибіркове обстеження методом випадкового повторного відбору. Яка повинна бути чисельність вибірки, щоб з ймовірністю 0,997 помилка вибіркової середньої не перевищувала 50 грн при середньому квадратичному відхилення 200 грн.

10.49. За заводі передбачається провести вибіркове обстеження середньої годинної норми виробітку методом випадкового повторного відбору. Визначте чисельність вибірки, щоб з ймовірністю 0,954 помилка вибірки не перевищувала 6 шт., якщо на основі попередніх обстежень відомо, що дисперсія дорівнює 238.

10.4. Визначення необхідної чисельності вибірки при дослідженні вибіркової частки для власне-випадкового і механічного відбору

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Із формули $\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ витікає, що по заданій помилці (μ) і за відомою величиною σ можна визначити і необхідний обсяг вибірки для отримання вибіркової середньої, що володіє відповідним ступенем надійності:

$$n = \frac{\sigma^2}{\mu^2}.$$

При випадковому безповторному відборі для розрахунку необхідної чисельності вибірки для визначення частки із заданою точністю обчислюють за формулою:

$$n = \frac{t^2 w(1-w)N}{\Delta^2 N + t^2 w(1-w)}.$$

Якщо дисперсія частки невідома, то застосовують наступну формулу:

$$n = \frac{0{,}25t^2 N}{\Delta^2 N + 0{,}25t^2}.$$

На практиці застосовують наступну формулу чисельності вибірко-

вої сукупності, пристосовану для моментної вибірки:

$$n = \frac{t^2(1-w)100^2}{d^2 w},$$

де t — коефіцієнт довірчої ймовірності;

w — частка у вибірковій сукупності (звичайно це коефіцієнт завантаженості робітників, що визначається на основі звітних даних);

d — заздалегідь встановлена відносна гранична помилка спостереження.

Ця формула часто використовується як основа для різних модифікацій. Як правило, t в умовах стабільного виробництва приймається за 2, нестабільного – за 3.

Задача 11. В механічному цеху з метою визначення резервів робочого часу вирішено провести вибіркове обстеження. На основі звітних даних коефіцієнт завантаження токарів (w) становить 0,80, величина помилки (d) повинна бути 5 %. *Необхідно* встановити кількість необхідних спостережень за роботою токарів в умовах нестабільного процесу (t=3).

Рішення

Використаємо формулу визначення чисельності вибіркової сукупності, пристосованої для моментної вибірки. Звідси

$$n = \frac{3^2 \times (1-0{,}8) \times 100^2}{5^2 \times 0{,}8} = 900 \text{ спостережень.}$$

Якщо на ділянці мається 45 робочих місць, то, щоб зафіксувати 900 спостережень на протязі 8-годинного робочого дня, один спостерігач повинен зробити 900:45=20 обходів. На один обхід спостерігач буде мати 480:20=24 хв.

Задача 12. Із загальної сукупності деталей, що становить 6000 виробів, вибрали партії в розмірі 100 одиниць. Визначили дисперсію частки першого сорту, рівну 0,06. Необхідна точність результатів спостереження становить 1 *г*. Необхідна точність результатів спостереження при визначені долі виробів першого сорту – 5 %. Визначити необхідну чисельність випадкової безповторної вибірки, що забезпечує задану точність з вірогідністю 0,954.

Рішення

Орієнтуючись на задану точність результатів спостереження для визначення частки виробів першого сорту: N=6 000; $\Delta_p = 0{,}05$; σ_p^2=0,06; P=0,954; t=2.

Отже,

$$n = \frac{t^2\sigma_p^2 N}{\Delta_p^2 N + t^2\sigma_p^2} = \frac{2^2 \cdot 0{,}06 \cdot 6000}{0{,}05^2 \cdot 6000 + 2^2 \cdot 0{,}05} \approx 95 \text{ шт.}$$

Таким чином, відбір 95 штук забезпечує необхідну точність визначенні долі виробів першого сорту.

Задача 13. В місті проживає 20 тис. осіб. Для встановлення долі сімей із чисельністю дітей три і більше необхідно провести вибірку методом механічного відбору. Попереднім обстеженням встановлено, що дисперсія дорівнює 0,2. Яка повинна бути чисельність вибірки, якщо з ймовірністю 0,954 помилка вибірки не перевищить 0,03 людини.

Рішення

Розрахуємо необхідну чисельність вибірки

$$n = \frac{t^2 w(1-w)N}{\Delta^2 N + t^2 w(1-w)} = \frac{2^2 \cdot 0{,}2 \cdot 20\,000}{(0{,}03)^2 \cdot 20\,000 + 2^2 \cdot 0{,}2} = 851 \text{ сім'я.}$$

Задача 14. Здійснено вибіркове обстеження виробітку на земляних роботах у 121 робітників. В результаті обстеження середній виробіток за вибірковими даними визначена 5,2 деталей на одного робітника, а середній квадрат відхилень (σ^2) рівний 2,56. Необхідно визначити, яка повинна бути чисельність вибірки, щоб розмір помилки не перевищував 0,1 деталі (з вірогідністю 0,683).

Рішення

Обчислимо розмір помилки вибірки:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{2{,}56}{121}} = \pm\frac{1{,}6}{11} = \pm 0{,}145.$$

На основі формули $n = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$ отримаємо:

$$n = \frac{2{,}56}{(0{,}1)^2} = \frac{2{,}56}{0{,}01} = 256 \text{ робітників.}$$

Таким чином, при збільшенні точності в 2 раза і при зменшенні помилки в 2 рази чисельність вибірки зростає в 4 рази (256× 4=1024).

Задача 15. Яка повинна бути чисельність вибірки, щоб розмір помилки, вказаний у вище наведеному прикладі, гарантувати з вірогідністю в 0,954 (t=2)?

Рішення

Розмір помилки складе:

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\mu^2} = \frac{2^2 \times 2{,}56}{(0{,}1)^2} = \frac{10{,}24}{0{,}01} = 1024 \text{ робітників.}$$

При повторному способу відбору чисельність вибірки обчислюється за формулою:

$$n = \frac{w(1-w)t^2}{\Delta^2}.$$

Задача 16. Використовуючи дані задачі 11.3, обчисліть необхідну чисельність вибірки за умови, якщо метод відбору повторний.

Рішення

Чисельність вибірки складе:

$$n = \frac{w(1-w)t^2}{\Delta^2} = \frac{0{,}2 \cdot 2^2}{0{,}03^2} = 889 \text{ сімей.}$$

Задачі

10.50. *Необхідно* встановити кількість необхідних спостережень за роботою станочників в умовах стабільного процесу (t=2). На основі звітних даних коефіцієнт завантаження станочників (w) становить 0,85, величина помилки (d) повинна бути 5 %.

10.51. В місті проживає 40 тис. осіб. В порядку механічної вибірки необхідно визначити долю сімей із чисельністю дітей три і більше. Попереднім обстеженням встановлено, що дисперсія дорівнює 0,3. Яка повинна бути чисельність вибірки, якщо з ймовірністю 0,954 помилка вибірки не перевищить 0,04 людини?

10.52. Чисельність робітників заводу становить 1 400 осіб. В порядку механічної вибірки необхідно *визначити* долю робітників із стажем роботи 15 років і більше. Із попередніх обстежень відомо, що дисперсія дорівнює 0,2. Яка повинна бути чисельність вибірки, щоб з ймовірністю 0,954 помилка вибірки не перевищувала 0,02 людини?

10.53. В місті H проживає 100 тис. сімей. В порядку випадкового безповторного відбору *визначте* долю сімей з дітьми до 6 років. На основі попередніх обстежень встановлено, що дисперсія дорівнює 0,18. Яка повинна бути чисельність вибірки, щоб з ймовірністю 0,954 помилка вибірки не перевищувала 0,05?

10.54. На ткацькій фабриці працює 6 тис. ткачих. Необхідно *встановити* шляхом механічного відбору долю ткачих, які навчалися у вищих навчальних закладах. Яка повинна бути чисельність вибірки, щоб з ймовірністю 0,954 помилка вибірки не перевищувала 0,04, якщо на

основі попередніх обстежень встановлено, що дисперсія дорівнює 0,08?

10.55. В місті А з числом сімей 40 тис. в порядку випадкового безповторного відбору передбачається *встановити* долю сімей з доходом на душу 5 000 грн і менше. На основі попередніх обстежень встановлено, що дисперсія дорівнює 0,32. Яка повинна бути чисельність вибірки, щоб з ймовірністю 0,997 помилка вибірки не перевищувала 0,06?

10.56. За даними задачі 10.52 гл. 10 *визначте* чисельність вибірки за умови, що метод відбору повторний.

10.57. За даними задачі 10.55 гл. 10 *визначте* чисельність вибірки за умови, що метод відбору повторний.

10.58. За даними задачі 10.53 гл. 10 *визначте* чисельність вибірки за умови, що метод відбору повторний.

10.59. За даними задачі 10.54 гл. 10 *визначте* чисельність вибірки за умови, що метод відбору повторний.

10.5. Визначення помилки вибіркової середньої типової вибірки

Методичні вказівки та рішення типової задачі

Різні форми організації вибіркового спостереження — типова (районована) вибірка, серійна (гніздова) вибірка, механічна вибірка, комбінаційна вибірка — представляють собою подальший розвиток і видозмінення простої випадкової вибірки. Застосування цих форм викликається рядом причин: меншими витратами, полегшенням процесу спостереження, особливим характером спостереження або відсутністю необхідної інформації для складання списку одиниць спостереження.

Типовий відбір використовується у випадках, коли всі одиниці генеральної сукупності можна розбити на кілька типових груп. В якості типів можуть бути групи, що використовуються в статистиці та плануванні. При районованому, або типовому відборі вибіркова сукупність формується шляхом відбору одиниць з груп або районів (якщо сукупність просторово розподілена), утворених за будь-яким типовим для визначення величини предмета, що вивчається, або явища ознаки (звідси і назва цього способу відбору). Потім обчислюються міжгрупові результати, які характеризують всю сукупність. Таким чином, при проведенні типової вибірки необхідно розбити загальний обсяг вибірки n між групами і визначити число спостережень по кожній групі.

Виділяють три способи відбору одиниць із кожної типової групи:

пропорційне розміщення, непропорційне обсягу груп, оптимальне розміщення.

Найбільш часто в практиці організації типового відбору зустрічається так назване пропорційне розміщення, коли обсяг вибірки із кожної типової групи пропорційно питомій вазі даної групи в генеральній сукупності. Число спостережень по кожній групі визначається за формулою:

$$n_i = n \cdot \frac{N_i}{N},$$

де n_i — число спостережень із *i*-ої типової групи;

n — чисельність одиниць вибіркової сукупності;

N_i — обсяг *i*-ої типової групи в генеральній сукупності;

N — обсяг генеральної сукупності.

Можливий і інший варіант (назвемо його умовно непропорційним), коли із кожної типової групи вибирається однакове число одиниць. Розрахунок обсяг вибірки із кожної типової групи здійснюється за формулою:

$$n_i = \frac{n}{k},$$

де k — кількість виділених типових груп.

Отримана величина дає чисельність відбору одиниць, яка однакова кожної типової групи.

Можливий і ще один варіант відбору у вибіркову сукупність (назвемо його найвигіднішим або умовно оптимальним). Цей спосіб враховує також ступінь варіації ознаки у різних групах генеральної сукупності. При відборі з урахуванням коливання ознаки відсоток вибірки з кожної типової групи повинен бути пропорційний середньому квадратичному відхилення з цієї групи (σ_i).

Розрахунок чисельності одиниць, відібраних у вибірку за кожною типовою групою (n_i), здійснюється за формулою:

$$n_i = \frac{nN_i\sigma_i}{\sum N_i\sigma_i} \text{ — для середньої;}$$

$$n_i = \frac{nN_i\sqrt{w_i(1-w_i)}}{\sum N_i\sqrt{w_i(1-w_i)}} \text{ — для долі.}$$

де σ_i і w_i — середнє квадратичне відхилення и доля досліджуваної ознаки в *i*-й групі.

На основі типової вибірки можна безпосередньо отримати середні

за групами, тобто величини ($\widetilde{x}_i$). Величина середньої для всієї сукупності $\widetilde{x}_0$ є середня арифметична зважена із вибіркових середніх за групами. В якості ваги використовують обсяг відповідної типової групи в генеральній сукупності. Розрахунок середньої здійснюють за формулою:

$$\widetilde{x}_0 = \frac{\sum \widetilde{x}_i N_i}{\sum N_i}.$$

При застосуванні так званого пропорційного розміщення, коли кількість відібраних у вибірку одиниць пропорційно питомій вазі даної групи в генеральній сукупності, розрахунок середньої здійснюється наступним чином:

$$\widetilde{x}_0 = \frac{\sum \widetilde{x}_i n_i}{\sum n_i} = \frac{\sum \widetilde{x}_i N_i}{\sum N_i}.$$

Формули для визначення стандартної помилки типової вибірки для різних прийомів відбору наведено в табл. 10.6.

Покажемо специфіку розрахунку помилки вибірки за різних варіантах типового відбору.

Задача 17. Із сукупності 1000 робітників проводиться вибірка типовим способом. Вся сукупність ділиться на 3 типові групи чисельністю 250, 350 та 400 одиниць. Було відібрано 100 робітників (відбір 10% безповторний, пропорційний). Результати вибірки представлені у табл. 10.7.

Таблиця 10.7

Групи робітників з кваліфікації (i)	Чисельність груп (N_i)	Відібрано одиниць n_i	Середньогодинна заробітна плата, грн $\widetilde{x}_i$	Дисперсія годинної заробітної плати σ_i^2
1	2	3	4	5
1	250	25	123	106
2	350	35	137	172
3	400	40	154	78
Всього	1 000	100		

Визначимо межі, у яких із ймовірністю 0,954 знаходиться генеральна середня.

Рішення

Межі генеральної середньої з ймовірністю 0,954 дорівнюватимуть:

Таблиця 10.6

Формула розрахунку μ при типовому методі відбору[1]

Відбір	Відбір			
	повторний		безповторний	
	для середньої	для долі	для середньої	для долі
Непропорційний обсягу груп	$\frac{1}{N}\sqrt{\frac{\sigma_i^2}{n_i}N_i^2}$	$\frac{1}{N}\sqrt{\frac{w_i(1-w_i)}{n_i}N_i^2}$	$\frac{1}{N}\sqrt{\frac{\sigma_i^2}{n_i}N_i^2\left(1-\frac{n_i}{N_i}\right)}$	$\frac{1}{N}\sqrt{\frac{w_i(1-w_i)}{n_i}N_i^2\left(1-\frac{n_i}{N_i}\right)}$
Пропорційний обсягу груп	$\sqrt{\frac{\overline{\sigma_i^2}}{n}}$	$\sqrt{\frac{\overline{w(1-w)}}{n}}$	$\sqrt{\frac{\overline{\sigma_i^2}}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$	$\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$
Пропорційний коливанням ознаки в групах до обсягу груп (є найвигіднішим)	$\frac{1}{N}\cdot\frac{\sum\sigma_i N_i}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{N}\cdot\frac{\sum w_i(1-w_i)N_i}{\sqrt{n_i}}$	$\frac{1}{N}\cdot\frac{\sum\sigma_i N_i}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(1-\frac{n}{N}\right)}$	$\frac{1}{N}\cdot\frac{\sum w_i(1-w_i)N_i}{\sqrt{n_i}}\sqrt{\left(1-\frac{n}{N}\right)}$

де $\overline{\sigma_i^2}$ — середня з вибіркових дисперсій типових груп;

$\overline{w(1-w)}$ — середня з добутку частот на доповнення їх до одиниці;

σ_i^2 — вибіркова дисперсія *i*-ої типової групи;

σ_i — середнє квадратичне відхилення у вибірці з *i*-ої типової групи.

$$\bar{x} = \tilde{x} \pm 2\mu_{\bar{x}}.$$

Розрахуємо:

1) середню заробітну плату за даними типового відбору:

$$\tilde{x} = \frac{\sum \tilde{x}_i n_i}{\sum n_i} = \frac{123 \cdot 25 + 137 \cdot 35 + 154 \cdot 40}{100} = 140{,}3 \text{ грн};$$

2) середню з групових дисперсій:

$$\overline{\sigma_i^2} = \frac{\sum \sigma_i^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{106 \cdot 25 + 172 \cdot 35 + 78 \cdot 40}{100} = 117{,}9;$$

3) величину середньої квадратичної помилки вибірки:

$$\mu_{\bar{x}=} \sqrt{\frac{\overline{\sigma_i}^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{117{,}9}{100}\left(1 - \frac{100}{1\,000}\right)} = 1{,}03 \text{ грн};$$

4) граничну помилку власне випадкової вибірки:

$$\Delta = t\mu = 2 \cdot 1{,}03 = 2{,}06.$$

Таким чином, з ймовірністю 0,954 можна стверджувати, що середня заробітна плата в генеральній сукупності перебуватиме в межах: $\bar{x} = 140{,}3 \pm 2{,}06$, тобто $138{,}24 \leq \bar{x} \leq 142{,}36$.

Задача 18. Для визначення середньої із сукупності 10 000 одиниць здійснюється вибірка типовим методом. Вся сукупність ділиться на 5 типових груп чисельністю 400, 2 000, 3 000, 1 600 і 3 000 одиниць. Відбирається 2 000 одиниць. *Визначити* чисельність відібраних одиниць із кожної типової групи.

Рішення

При відборі одиниць пропорційно чисельності кожної групи число спостережень за кожною групою визначається за формулою:

$$n_i = n \cdot \frac{N_i}{N},$$

Так, для першої типової групи маємо при заданому обсязі всієї вибірки, що дорівнює 400 одиниць

$$n_1 = 2\,000 \cdot \frac{400}{10\,000} = 80 \text{ одиниць};$$

для другої типової групи:

$$n_2 = 2\,000 \cdot \frac{2\,000}{10\,000} = 400 \text{ одиниць};$$

для третьої типової групи:

$$n_3 = 2\,000 \cdot \frac{3\,000}{10\,000} = 600 \text{ одиниць};$$

для четвертої типової групи:

$$n_4 = 2\,000 \cdot \frac{1\,600}{10\,000} = 320 \text{ одиниць};$$

для п'ятої типової групи:

$$n_2 = 2\,000 \cdot \frac{3\,000}{10\,000} = 600 \text{ одиниць}.$$

Задача 19. З сукупності 20 000 одиниць проводиться вибірка 4 000 одиниць типовим методом. Вся сукупність ділиться на 5 типових груп чисельністю: 4 000, 3 500, 1 000, 7 500 та 4 000 одиниць. Відбір одиниць усередині типових груп провадиться випадковим безповоротним методом. При відборі отримані наступні результати:

Таблиця 10.8

Номер групи i	Чисельність групи N_i	Вибіркова середня $\tilde{x}$	Вибіркова дисперсія σ_i^2
1	2	4	5
1	4 000	20	8
2	3 500	22	12
3	1 000	30	20
4	7 500	36	40
5	4 000	40	32
Всього	20 000	–	–

Визначити середню помилку вибірки при непропорційному відборі.

Рішення

При відборі одиниць непропорційно до чисельності груп число спостережень з кожної групи дорівнюватиме загальній чисельності вибірки, рівномірно розподіленої по групах, тобто 4000:5 = 800 одиниць. За формулами для середньої помилки вибірки, чисельність якої непропорційна чисельності груп, робимо відповідні розрахунки та отримуємо (див. табл. 10.9).

Обчислюємо середню помилку вибірки всієї сукупності Обчислюємо середню помилку вибірки всієї сукупності із табл. 10.9:

$$\mu_{\text{непроп. числ}} = \frac{1}{N}\sqrt{\sum \frac{\sigma_i^2}{n_i} N_i^2 \left(1 - \frac{n_i}{N_i}\right)} = \frac{1}{20000}\sqrt{3299250} \approx$$

$$\approx 0{,}09.$$

Таблиця 10.9

Разрахункова таблиця

Номер групи i	Чисельність групи N_i	Чисельність вибірки n_i	Вибіркова середня $\widetilde{x}$	Вибіркова дисперсія σ_i^2	$\frac{\sigma_i^2}{n_i}$	$\frac{\sigma_i^2}{n_i}N_i^2$	$1-\frac{n_i}{N_i}$	$\frac{\sigma_i^2}{n_i}N_i^2 \times \times\left(1-\frac{n_i}{N_i}\right)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4 000	800	20	8	0,0100	160 000	0,80000	128 000
2	3 500	800	22	12	0,0150	183 750	0,77143	141 750
3	1 000	800	30	20	0,0250	25 000	0,20000	5 000
4	7 500	800	36	40	0,0500	2 812 500	0,89333	2 512 500
5	4 000	800	40	32	0,0400	640 000	0,80000	512 000
Всього	20 000	4 000	29,6	–	–	–	–	3 299 250

Задачі

10.60. Із сукупності 10 000 одиниць проводиться вибірка 2 000 одиниць типовим методом. Вся сукупність поділена на 5 типових груп чисельністю: 700, 2500, 3 000, 1 500, 2 300 одиниць. Відбір одиниць всередині типових груп здійснюється випадковим без повторним методом. При відборі отримані результати:

Таблиця 10.10

Номер групи i	Чисельність групи N_i	Вибіркова середня $\widetilde{x}$	Вибіркова дисперсія σ_i^2
1	2	4	5
1	700	26	9
2	2 500	24	14
3	3 000	31	21
4	1 500	37	43
5	2 300	42	37
Всього	20 000	–	–

Визначити: 1) середню помилку вибірки при непропорційному відборі; 2) межі, в яких з ймовірністю 0,997 знаходиться генеральна середня (при власне випадковому і типовому відборі).

10.61. В районі 20 тис. сімей. Із них 10 тис. сімей робітників, 8 тис. сімей сільських жителів, 2 тис. сімей службовців. Для визначення числа дітей в сім'ї була проведена 10%-на типова вибірка із відбором одиниць

пропорційно чисельності одиниць типових груп. Всередині застосовувався механічний відбір. Результати вибірки представлені в табл. 10.11.

Таблиця 10.11

Типи сімей i	Число сімей в генеральній сукупності N_i	Середнє число дітей в сім'ї, осіб $\widetilde{x}$	Середнє квадратичне відхилення, осіб σ_i^2
1	2	4	5
Робітники	10 000	2,4	1,3
Службовці	2 000	1,9	0,6
Сільські жителі	8 000	2,7	2,5

З ймовірністю 0,954 *визначте* межі, в яких знаходиться середнє число дітей в сім'ї в районі.

10.62. Із сукупності 20 000 одиниць проводиться вибірка 5000 одиниць типовим методом. Вся сукупність поділена на 4 типові групи чисельністю: 1500, 1000, 500, 2000 одиниць. Відбір одиниць всередині типових груп здійснюється випадковим безповторним методом. При відборі отримані результати:

Таблиця 10.12

Номер групи i	Чисельність групи N_i	Вибіркова середня $\widetilde{x}$	Вибіркова дисперсія σ_i^2
1	2	4	5
1	1500	34	21
2	1 000	31	25
3	500	37	32
4	2 00	42	54
Всього	5 000	–	–

Визначити: 1) середню помилку вибірки при відборі з урахуванням чисельності групи і коливання ознаки; 2) межі, в яких з ймовірністю 0,954 знаходиться генеральна середня.

10.63. Чисельність корів в господарствах населення області становить 75 тис. голів. Із них: в районі *А* — 35 тис. корів, в районі *Б* — 25 тис. корів, в районі *В* — 15 тис. корів. З метою визначення середнього надою від корови здійснена 1% типова вибірка з відбором одиниць пропорційно чисельності корів в районах. При відборі були отримані наступні результати (табл. 10.13).

Таблиця 10.13

Район	Середній надій молока, кг	Середнє квадратичне відхилення, кг
А	3 450	800
Б	3 140	520
В	3 620	230

З ймовірністю 0,997 *визначте* межі, в яких знаходиться середній надій корів в області.

10.64. Для визначення середньої заробітної плати робітників галузі була здійснена 5%-на типова вибірка з відбором одиниць пропорційно чисельності типових груп. Відбір одиниць всередині груп здійснювався випадковим без повторним відбором. Результати вибірки представлені в табл. 10.14.

Таблиця 10.14

Тип заводу	Середня заробітна плата, грн	Середнє квадратичне відхилення, грн	Число робітників, осіб
I	10 200	540	150
II	11 400	2100	500
III	15 100	1200	350

З ймовірністю 0,997 *визначте* межі, в яких знаходиться середня заробітна плата всіх робітників заводів.

10.6. Визначення помилки вибіркової середньої серійної вибірки

Методичні вказівки та рішення типової задачі

При *серійній вибірці* у випадковому порядку відбираються групи (серії, гнізда) одиниць, після чого проводиться суцільне обстеження усіх відібраних одиниць кожної групи. Серійна вибірка набула широкого поширення там, де генеральна сукупність складається із визначеним чином відокремлених груп одиниць. Наприклад, при статистичному контролі якості готової продукції серійна вибірка у випадках, коли одиниця продукції складуються у тару, наприклад, конусні шестерні одного

типорозміру складуються в ящики і суворо встановленим числом в кожному із них.

При рівновеликих серіях *стандартна помилка* вибірки визначається за формулами:

при повторному відборі серій:

$$\mu_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\delta_{\bar{x}}^2}{r}};$$

при безповторному відборі серій:

$$\mu_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\delta_{\bar{x}}^2}{r}\left(\frac{R-r}{R-1}\right)} \approx \sqrt{\frac{\delta_{\bar{x}}^2}{r}\left(1-\frac{r}{R}\right)},$$

де R — число серій у генеральній сукупності;

r — кількість відібраних серій;

$\delta_{\bar{x}}^2$ — міжсерійна (міжгрупова) дисперсія середніх.

Середня помилка вибіркової долі серійної вибірки у випадку рівновеликих серій визначається за формулами:

при повторному відборі серій:

$$\mu_p = \sqrt{\frac{\delta_p^2}{r}}$$

де δ_p^2 — міжсерійна (міжгрупова) дисперсія долі, яка визначається за формулою:

$$\delta_p^2 = \frac{\sum (w_i - \overline{w}_i)^2}{r},$$

де w_i — доля ознаки *i*-ої серії;

$\overline{w}_i$ — доля ознаки у всій вибіркової сукупності;

при повторному відборі серій:

$$\mu_p = \sqrt{\frac{\delta_p^2}{r}\left(\frac{R-r}{R-1}\right)} \approx \sqrt{\frac{\delta_p^2}{r}\left(1-\frac{r}{R}\right)}$$

Задача 20. Покажемо розрахунок серійної вибірки на наступному прикладі: із 1000 ящиків по 200 деталей в кожному, які надійшли на протязі місяця на склад готової продукції, в порядку випадкової без повторної вибірки було відібрано 10 ящиків. Всі відібрані деталі були перевірені на вагу.

Результати вибірки представимо наступним чином:

Номер ящику	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Середня вага деталі, г	65	61	58	66	65	64	68	66	65	62

Визначити середню помилку серійної безповторної вибірки.

Рішення

Визначимо середню вагу деталі за даними вибірки:

$$\widetilde{x}_0 = \frac{\sum \widetilde{x}_i}{r} = \frac{65+61+58+66+65+64+68+66+65+62}{10} = 64 \text{ г.}$$

Величина міжсерійної дисперсії дорівнює:

$$\delta^2_{\widetilde{x}} = \frac{\sum (\widetilde{x}_i - \widetilde{x}_0)^2}{r} = \frac{(65-64)^2 + (61-64)^2 + \ldots + (65-64)^2 + (62-64)^2}{10} = 7{,}6.$$

Середня помилка серійної без повторної вибірки дорівнює:

$$\mu_{\widetilde{x}} = \sqrt{\frac{\delta^2_{\widetilde{x}}}{r}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \sqrt{\frac{7{,}6}{10}\left(\frac{1000-100}{1000-1}\right)} = 0{,}827.$$

Задачі

10.65. Генеральна сукупність складається із 5000 одиниць, розбитих на 50 рівних за величиною серій (по 100 одиниць). Безповторним відбором відібрано 10 серій. Результати вибірки представлені в наступній таблиці:

Таблиця 10.15

Номера серій	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Середній розмір ознаки ($\widetilde{x}_i$)	62	65	64	66	67	74	78	82	85	96
Внутрішньогрупова дисперсія (σ_i^2)	27,1	25,3	18,6	38,4	47,2	89,4	85,6	76,7	107,3	138,1

Обчислити середню помилку серійної безповторної вибірки.

10.66. При статистичному контролі якості готової продукції із 500 ящиків по 100 деталей в кожному, які надійшли на протязі місяця на склад готової продукції, в порядку випадкової без повторної вибірки було відібрано 10 ящиків. Всі відібрані деталі були перевірені на вагу.

Результати вибірки представимо наступним чином:

Номер ящику	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Середня вага деталі, г	74	71	68	63	67	72	76	70	69	71

Обчислити середню помилку серійної безповторної вибірки.

10.67. Для визначення питомої ваги браку із 100 ящиків по 50 деталей проводилася вибірка серійним методом. У випадковому порядку для перевірки якості готової продукції відібрані 10 ящиків, які піддалися суцільному обстеженню.

Результати вибірки представимо наступним чином:

Номер ящику	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Середня доля браку, %	6,4	3,8	5,6	6,2	5,6	4,1	5,5	6,2	4,7	5,4

Обчислити середню помилку долі серійної безповторної вибірки.

10.7. Тести

1. Як відомо, середня помилка залежить від чисельності спостережень. То, щоб зменшити помилку вдвічі, число спостережень необхідно збільшити:
   а) вдвічі;
   б) втричі;
   в) вчетверо;
   г) у вісім разів.
2. До вибіркового обстеження відноситься обстеження:
   а) 20 робітників механічного цеху із 100 з метою визначення затрат часу на виготовлення деталі КС-17;
   б) м’ясопереробного підприємства з метою визначення показників ефективності використання основних засобів;
   в) чисельності персоналу машинобудівного заводу;
   г) всього обладнання підприємства.
3. Проведено обстеження: 1) усіх робітників інструментального цеху з метою встановлення норм часу на виготовлення інструменту; 2) токаря Локтєва В. з метою встановлення втрат робочого часу при обробці деталі ПР-100; 3) двадцяти сільськогосподарських підприємств із 200 підприємств області, що займаються вирощуванням ранніх овочевих культур; 4) рухомого складу автотранспортного підприємства. Що відноситься до вибіркового обстеження:
   а) 1;
   б) 2;
   в) 3;
   г) 4.
4. Проведений хронометраж роботи робітників машинобудівного заводу, у яких стаж роботи по спеціальності менше 2 років, з метою встано-

влення втрат робочого часу при обробці деталей: 1) токаря Іванова; 2) усіх робітників заводу, які мають стаж роботи менше 2 років; 3) 30 робітників із 100, стаж роботи яких менше 2 років; 4) усіх робітників заводу. Що відноситься до вибіркового обстеження?

а) 1;

б) 2;

в) 3;

г) 4.

5. При вибірковому обстеженні робітників рівня виконання норм виробітку були свідомо виключені два робітника, стаж роботи яких не перевищував 2 місяців. Результати обстеження:

а) містять систематичну помилку реєстрації;

б) систематичну помилку репрезентативності;

в) не містять систематичну помилку репрезентативності;

г) не містять систематичну помилку реєстрації.

6. При відборі робітників для обстеження причин втрати робочого часу на підприємстві були свідомо виключені робітники, які маються скорочений робочий час. Результати обстеження:

а) не містили систематичну помилку реєстрації;

б) містили систематичну помилку реєстрації;

в) не містили систематичну помилку репрезентативності;

г) містили систематичну помилку репрезентативності.

7. Кількість одиниць спостереження (або відсоток), які мають бути включені до вибірки. Це можуть бути або окремі одиниці, або їх групи (кластери, серії), відібрані з генеральної сукупності:

а) одиниця;

б) обсяг вибірки;

в) одиниця вибірки;

г) помилка вибірки.

8. Відмінна ознака цього відбору полягає в наступному: випадково або механічно відбираються не окремі одиниці сукупності, а серії, або їх групи. При цьому кожну таку серію одиниць або їх групу досліджують суцільно:

а) типовий відбір;

б) власне-випадковий відбір;

в) серійний відбір;

г) багатоступінчатий відбір.

9. Суть вибірки при цьому способі відбору полягає в тому, що випадковий, або механічний відбір одиниць проводиться із груп або районів, якщо сукупність просторово розподілена, утворених за якою-небудь

типовою для визначення величини досліджуваного предмета чи явища ознакою:

а) типовий відбір;

б) механічний відбір;

в) вибір основного масиву;

г) відбір нерайонований.

10. При цій формі вибіркового спостереження відбирається одна одиниця з кожної рівної частини, на які механічно ділиться загальна сукупність. Якщо, наприклад, із сукупності 10 000 одиниць необхідно відібрати 100 одиниць, то ця сукупність має бути поділена на 100 рівних частин по 100 одиниць і з кожної такої частини дослідник повинен відібрати одиницю:

а) відбір основного масиву;

б) механічний відбір;

в) анкетне опитування;

г) монографічний метод.

11. Одиниця відбору, що увійшла до складу вибірки — це:

а) вибірка;

б) одиниця вибірки;

в) підвибірка;

г) показники варіації.

12. Вибірковий метод також передбачає відбір із сукупності одиниць даного роду відомої їх частини. Але від інших форм несуцільного спостереження він відрізняється тим, що

а) обстеженню підлягає така частина одиниць сукупності, в якій обсяг досліджуваної ознаки складає переважну частину в загальному обсязі;

б) будуть прийняті заходи для виключення випадковості, якщо буде впевненість, що одиничні об’єкти, які вибрані для дослідження, не виділяються якими-небудь різкими відмінностями від ряду схожих одиниць;

в) організація спостереження підпорядкована ідеї отримати в результаті відбору таку сукупність одиниць, яка б за своїм складом і величині узагальнюючих статистичних характеристик представляла б (репрезентувала) ту загальну сукупність, із якої здійснений відбір;

г) обстеженню підлягає такий обсяг сукупності, який за величиною перевищує 50 % від її загальної кількості.

13. Необхідна чисельність вибірки при вимірювання середньої дорівнює:

а) середньому квадрату відхилень, поділеному на квадрат заданої точності $\left(n=\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)$.;

б) середньому квадрату відхилень, помноженому на квадрат заданої точності $\left(n=\sigma^2\cdot\mu^2\right)$;

в) долі, помноженій на доповнення її до долі і поділеній на квадрат заданої точності $\left(n=\frac{p(1-p)}{\mu^2}\right)$;

г) долі, поділеній на доповнення її до долі і помноженій на квадрат заданої точності $\left(n=\frac{p}{(1-p)}\cdot\mu^2\right)$.

14. Обстежена частина генеральної сукупності, яка повно та адекватно представляє досліджувані ознаки останньої — це:

а) вибірка ротаційна (часткове заміщення);

б) вибірка проста випадкова;

в) вибірка репрезентативна;

г) вибірка стратифікована.

15. Розбіжність між значеннями досліджуваної ознаки (показника) вибіркової сукупності та генеральної сукупності — це:

а) помилка реєстрації;

б) помилка вибірки (репрезентативності);

в) помилка випадкова;

г) помилка темпу зростання.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Горкавий В. К*. Статистика: Підручник. Третє вид., переробл. і доповн. Київ: Алерта, 2019. С. 145–180.
2. Статистика: підручник / *С. І. Пирожков*, *В. В. Рязанцева*, *Р. М. Моторин* та ін. Київ: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2020. С. 162–177.
3. Статистика: Підручник / *С. С. Герасименко*, *А. В. Головач*, *А.М. Єріна* та ін.; За наук. ред. д-ра екон. наук С. С. Герасименка. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ: КНЕУ, 2000. С. 81–99.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

Навчальні посібники, словники

4. *Венецкий И. Г.*, *Венецкая В. И.* Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе: Справочник. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Статистика, 1979.
5. Вибіркове спостереження: Термінологічний словник / [уклад. *О. І. Черняк*, *Є. М. Жуйкова*, *О. В. Гончар* та ін.]; під наук. кер.

О. О. Васєчко. Київ: НТК статистичних досліджень, 2004. 140 с.
6. *Єріна А. М.* Організація вибіркових обстежень: навч. посіб. Київ: КНЕУ, 2004. 127 с.
7. *Козирєва О. В.*, *Федорова В. О.* Статистика: навчальний посібник. Харків: Видавництво Іванченка І.С., 2021. С. 34–42.
8. *Педченко Г. П.* Статистика: Навчальний посібник. Мелітополь: Колор Принт, 2018. С. 162–177.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Таблиця обчислення середньорічних

Середній річний темп		Темп зростання			Середній річний темп		Темп зростання		
зрос-тання	при-росту	за 3 роки	за 4 роки	за 5 років	зрос-тання	при-росту	за 3 роки	за 4 роки	за 5 років
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
					102,00	2,00	106,12	108,24	110,41
100,05	0,05	100,15	100,20	100,25	102,05	2,05	106,28	108,46	110,68
100,10	0,10	100,30	100,40	100,50	102,10	2,10	106,43	108,67	110,95
100,15	0,15	100,45	100,60	100,75	102,15	2,15	106,59	108,88	111,22
100,20	0,20	100,60	100,80	101,00	102,20	2,20	106,75	109,09	111,49
100,25	0,25	100,75	101,00	101,25	102,25	2,25	106,90	109,31	111,77
100,30	0,30	100,90	101,21	101,51	102,30	2,30	107,06	109,52	112,04
103,35	0,35	101,05	101,41	101,76	102,35	2,35	107,22	109,74	112,32
100,40	0,40	101,20	101,61	102,02	102,40	2,40	107,37	109,95	112,39
100,45	0,45	101,36	101,81	102,27	102,45	2,45	107,53	110,17	112,87
100,50	0,50	101,51	102,02	102,53	102,50	2,50	107,69	110,38	113,14
100,55	0,55	101,66	102,22	102,78	102,55	2,55	107,85	110,60	113,42
100,60	0,60	101,81	102,42	103,04	102,60	2,60	108,00	110,81	113,69
100,65	0,65	101,96	102,63	103,29	102,65	2,65	108,16	111,03	113,97
100,70	0,70	102,11	102,83	103,55	102,70	2,70	108,32	111,25	114,25
100,75	0,75	102,27	103,03	103,81	102,75	2,75	108,48	111,46	114,53
100,80	0,80	102,42	103,24	104,06	102,80	2,80	108,64	111,68	114,81
100,85	0,85	102,57	103,44	104,32	102,85	2,85	108,80	111,90	115,09
100,90	0,90	102,72	103,65	104,58	102,90	2,90	108,95	112,11	115,37
100,95	0,95	102,88	103,85	104,84	102,95	2,95	109,11	112,33	115,65
101,00	1,00	103,03	104,06	105,10	103,00	3,00	109,27	112,55	115,93
101,05	1,05	103,18	104,27	105,36	103,05	3,05	109,43	112,77	116,21
101,10	1,10	103,34	104,47	105,62	103,10	3,10	109,59	112,99	116,49
101,15	1,15	103,49	104,68	105,88	103,15	3,15	109,75	113,21	116,77
101,20	1,20	103,64	104,89	106,15	103,20	3,20	109,91	113,43	117,06
101,25	1,25	103,80	105,09	106,41	103,25	3,25	110,07	113,65	117,34
101,30	1,30	103,95	105,30	106,67	103,30	3,30	110,23	113,87	117,63
103,35	1,35	104,10	105,51	106,93	103,35	3,35	110,39	114,09	117,91
101,40	1,40	104,26	105,72	107,20	103,40	3,40	110,55	114,31	118,20
101,45	1,45	104,10	105,93	107,46	103,45	3,45	110,71	114,53	118,48
101,50	1,50	104,57	106,14	107,73	103,50	3,50	110,87	114,75	118,77
101,55	1,55	104,72	106,35	107,99	103,55	3,55	111,03	114,97	119,06
101,60	1,60	104,88	106,56	108,26	103,60	3,60	111,19	115,20	119,34
101,65	1,65	104,03	106,77	108,53	103,65	3,65	111,35	115,42	119,63
101,70	1,70	105,19	106,98	108,79	103,70	3,70	111,52	115,64	119,92
101,75	1,75	105,34	107,19	109,06	103,75	3,75	111,68	115,87	120,21
101,80	1,80	105,50	107,40	109,33	103,80	3,80	111,84	116,09	120,30
101,85	1,85	105,65	107,61	109,60	103,85	3,85	112,00	116,31	120,79
101,90	1,90	105,81	107,82	109,87	103,90	3,90	112,16	116,54	121,08
101,95	1,95	105,96	107,83	109,84	103,95	3,95	112,32	116,76	121,37

темпів зростання, приросту

Середній річний темп		Темп зростання			Середній річний темп		Темп зростання		
зрос-тання	при-росту	за 3 роки	за 4 роки	за 5 років	зрос-тання	при-росту	за 3 роки	за 4 роки	за 5 років
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
104,00	4,00	112,49	116,99	121,67	106,00	6,00	119,10	126,25	133,82
104,05	4,05	112,65	117,21	121,96	106,05	6,05	199,27	126,49	134,14
104,10	4,10	112,81	117,44	122,25	106,10	6,10	109,44	126,72	134,45
104,15	4,15	112,97	117,66	122,55	106,15	6,15	199,61	126,96	134,77
104,20	4,20	113,14	117,39	122,84	106,20	6,20	119,78	127,20	135,09
104,25	4,25	113,30	118,11	123,13	106,25	6,25	119,95	127,44	135,41
104,30	4,30	113,46	118,34	123,43	106,30	6,30	120,12	127,68	135,73
104,35	4,35	113,63	118,57	123,73	106,35	6,35	120,29	127,92	136,05
104,40	4,40	113,79	118,80	124,02	106,40	6,40	120,46	128,16	136,37
104,45	4,45	113,96	119,02	124,32	106,45	6,45	120,62	128,41	136,69
104,50	4,50	114,12	119,25	124,62	106,50	6,50	120,79	128,65	137,01
104,55	4,55	114,28	119,48	124,92	106,55	6,55	120,97	128,89	137,33
104,60	4,60	114,44	119,71	125,22	106,60	6,60	121,14	129,13	137,65
104,65	4,65	114,61	119,94	125,52	106,65	6,65	121,31	129,37	137,98
104,70	4,70	114,77	120,17	125,82	106,70	6,70	121,48	129,62	138,30
104,75	4,75	114,94	120,40	126,12	106,75	6,75	121,65	129,86	138,62
104,80	4,80	115,10	120,63	126,42	106,80	6,80	121,82	130,10	138,95
104,85	4,85	115,27	120,86	126,72	106,85	6,85	121,99	130,35	139,27
104,90	4,90	115,43	121,09	127,02	106,90	6,90	122,16	130,59	139,60
104,95	4,95	115,60	121,32	127,32	106,95	6,95	122,33	130,83	139,93
105,00	5,00	115,76	121,55	127,63	107,00	7,00	122,50	131,08	140,26
105,05	5,05	115,93	121,78	127,93	107,05	7,05	122,68	131,32	140,58
105,10	5,10	116,09	122,01	128,24	107,10	7,10	122,85	131,57	140,91
105,15	5,15	116,26	122,25	128,54	107,15	7,15	123,02	131,82	141,24
105,20	5,20	116,43	122,48	128,85	107,20	7,20	123,19	132,06	141,57
105,25	5,25	116,59	122,71	129,15	107,25	7,25	123,36	132,31	141,90
105,30	5,30	116,76	122,95	129,49	107,30	7,30	123,54	132,56	142,23
105,35	5,35	116,92	123,18	129,77	107,35	7,35	123,71	132,80	142,56
105,40	5,40	117,09	123,41	130,08	107,40	7,40	13,88	133,05	142,09
105,45	5,45	117,26	123,65	130,39	107,45	7,45	124,06	133,30	143,23
105,50	5,50	117,42	123,88	130,70	107,50	7,50	124,23	133,55	143,56
105,55	5,55	117,59	124,12	131,01	107,55	7,55	124,40	133,80	143,90
105,60	5,60	117,76	124,35	131,32	107,60	7,60	124,58	134,04	144,23
105,65	5,65	117,93	124,59	131,63	107,65	7,65	124,75	134,29	144,57
105,70	5,70	118,09	124,82	131,94	107,70	7,70	124,92	134,54	144,90
105,75	5,75	118,26	125,06	132,25	107,75	7,75	125,10	134,79	145,24
105,80	5,80	118,43	125,30	132,56	107,80	7,80	125,27	135,04	145,58
105,85	5,85	118,60	125,53	132,88	107,85	7,85	125,45	135,29	145,92
105,90	5,90	118,76	125,77	133,19	107,90	7,90	125,62	135,55	146,25
105,95	5,95	118,93	126,01	133,51	107,95	7,95	125,80	135,80	145,59

Додаток 2

Таблиця розрахунку середніх темпів динаміки

Середній темп	Базисні коефіцієнти динаміки								
	$\sqrt{}$	$\sqrt[3]{}$	$\sqrt[4]{}$	$\sqrt[5]{}$	$\sqrt[6]{}$	$\sqrt[7]{}$	$\sqrt[8]{}$	$\sqrt[9]{}$	$\sqrt[10]{}$
0,950	0,902	0,857	0,814	0,774	0,735	0,698	0,663	0,630	0,599
0,951	0,904	0,860	0,818	0,778	0,740	0,703	0,669	0,636	0,605
0,952	0,906	0,863	0,821	0,782	0,744	0,709	0,675	0,642	0,611
0,953	0,908	0,865	0,825	0,786	0,749	0,714	0,680	0,648	0,618
0,954	0,910	0,868	0,828	0,790	0,754	0,719	0,686	0,654	0,624
0,955	0,912	0,871	0,832	0,794	0,759	0,724	0,692	0,661	0,631
0,956	0,914	0,874	0,835	0,798	0,763	0,730	0,698	0,667	0,638
0,957	0,916	0,876	0,839	0,803	0,768	0,735	0,704	0,673	0,644
0,958	0,918	0,879	0,842	0,807	0,773	0,741	0,709	0,680	0,651
0,959	0,920	0,882	0,846	0,811	0,778	0,746	0,715	0,686	0,658
0,960	0,922	0,885	0,849	0,815	0,783	0,751	0,721	0,692	0,665
0,961	0,923	0,887	0,853	0,820	0,788	0,757	0,727	0,699	0,672
0,962	0,925	0,890	0,856	0,824	0,793	0,762	0,733	0,706	0,679
0,963	0,927	0,893	0,860	0,828	0,797	0,768	0,740	0,712	0,686
0,964	0,929	0,896	0,864	0,832	0,802	0,774	0,746	0,719	0,693
0,965	0,931	0,899	0,867	0,37	0,807	0,779	0,752	0,726	0,700
0,966	0,933	0,901	0,871	0,841	0,813	0,785	0,758	0,732	0,708
0,967	0,935	0,904	0,874	0,845	0,818	0,791	0,765	0,739	0,715
0,968	0,937	0,907	0,878	0,850	0,823	0,796	0,771	0,746	0,722
0,969	0,939	0,910	0,882	0,854	0,828	0,802	0,777	0,753	0,730
0,970	0,941	0,913	0,885	0,859	0,833	0,808	0,784	0,760	0,737
0,971	0,943	0,915	0,889	0,863	0,838	0,814	0,790	0,767	0,745
0,972	0,945	0,918	0,893	0,868	0,843	0,820	0,797	0,774	0,753
0,973	0,947	0,921	0,896	0,872	0,848	0,826	0,803	0,782	0,761
0,974	0,949	0,924	0,900	0,877	0,854	0,832	0,810	0,789	0,768
0,975	0,951	0,927	0,904	0,881	0,859	0,838	0,817	0,796	0,776
0,976	0,953	0,930	0,907	0,886	0,864	0,844	0,823	0,804	0,784
0,977	0,954	0,933	0,911	0,890	0,870	0,850	0,830	0,811	0,792
0,978	0,956	0,935	0,915	0,895	0,875	0,856	0,837	0,819	0,801
0,979	0,958	0,938	0,919	0,899	0,880	0,862	0,844	0,826	0,809
0,980	0,960	0,941	0,922	0,904	0,886	0,868	0,851	0,834	0,817
0,981	0,962	0,944	0,926	0,908	0,891	0,874	0,858	0,841	0,825
0,982	0,964	0,947	0,930	0,913	0,897	0,881	0,865	0,849	0,834
0,983	0,966	0,950	0,934	0,918	0,902	0,887	0,872	0,857	0,842
0,984	0,968	0,953	0,937	0,922	0,908	0,893	0,879	0,865	0,851
0,985	0,970	0,956	0,941	0,927	0,913	0,900	0,886	0,873	0,860
0,986	0,972	0,959	0,945	0,932	0,919	0,906	0,893	0,881	0,868
0,987	0,974	0,961	0,949	0,937	0,924	0,912	0,901	0,889	0,877
0,988	0,976	0,964	0,953	0,941	0,930	0,919	0,908	0,897	0,886
0,989	0,978	0,967	0,957	0,946	0,936	0,925	0,915	0,905	0,895
0,990	0,980	0,970	0,961	0,951	0,941	0,932	0,923	0,913	0,904
0,991	0,982	0,973	0,964	0,956	0,947	0,939	0,930	0,922	0,914
0,992	0,984	0,976	0,968	0,961	0,953	0,945	0,938	0,930	0,923
0,993	0,986	0,979	0,972	0,965	0,959	0,952	0,45	0,939	0,932
0,994	0,988	0,982	0,976	0,970	0,964	0,959	0,953	0,947	0,942

Середній темп	Базисні коефіцієнти динаміки								
	$\sqrt{}$	$\sqrt[3]{}$	$\sqrt[4]{}$	$\sqrt[5]{}$	$\sqrt[6]{}$	$\sqrt[7]{}$	$\sqrt[8]{}$	$\sqrt[9]{}$	$\sqrt[10]{}$
0,995	0,990	0,985	0,980	0,975	0,970	0,965	0,96	0,956	0,951
0,996	0,992	0,988	0,984	0,980	0,976	0,972	0,968	0,965	0,961
0,997	0,994	0,991	0,988	0,985	0,982	0,979	0,976	0,973	0,970
0,998	0,996	0,994	0,992	0,990	0,988	0,986	0,984	0,982	0,980
0,999	0,998	0,997	0,996	0,995	0,994	0,993	0,992	0,991	0,990
1,001	1,002	1,003	1,004	1,005	1,006	1,007	1,008	1,009	1,010
1,002	1,004	1,006	1,008	1,010	1,012	1,014	1,016	1,018	1,020
1,003	1,006	1,009	1,012	1,015	1,018	1,021	1,024	1,027	1,030
1,004	1,008	1,012	1,016	1,020	1,024	1,028	1,032	1,037	1,041
1,005	1,010	1,015	1,020	1,025	1,030	1,035	1,041	1,046	1,051
1,006	1,012	1,018	1,024	1,030	1,036	1,043	1,049	1,055	1,062
1,007	1,014	1,021	1,028	1,035	1,043	1,050	1,057	1,065	1,072
1,008	1,016	1,024	1,032	1,041	1,049	1,057	1,066	1,074	1,083
1,009	1,018	1,027	1,036	1,046	1,055	1,065	1,074	1,084	1,094
1,010	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0605	1,0710	1,0820	1,0930	1,1040
1,011	1,0220	1,0330	1,0440	1,0550	1,0670	1,0790	1,0910	1,1030	1,1150
1,012	1,0240	1,0360	1,0480	1,0606	1,0740	1,0870	1,1000	1,1130	1,1260
1,013	1,0262	1,0395	1,0530	1,0667	1,0806	1,0946	1,1088	1,1232	1,1378
1,014	1,0282	1,0426	1,0572	1,0720	1,0870	1,1022	1,1176	1,1322	1,1491
1,015	1,0302	1,0456	1,0613	1,0772	1,0934	1,1098	1,1264	1,1433	1,1604
1,016	1,0323	1,0488	1,0656	1,0826	1,0999	1,1175	1,1354	1,1536	1,1721
1,017	1,0343	1,0519	1,0698	1,0880	1,1065	1,1253	1,1444	1,1638	1,1836
1,018	1,0363	1,0549	1,0739	1,0932	1,1129	1,1329	1,1533	1,1741	1,1952
1,019	1,0384	1,0581	1,0782	1,0987	1,1196	1,1409	1,1626	1,1847	1,2070
1,020	1,0404	1,0612	1,0824	1,1040	1,1261	1,1486	1,1716	1,1950	1,2190
1,021	1,0424	1,0643	1,0866	1,1094	1,1327	1,1565	1,1808	1,2051	1,2309
1,022	1,0445	1,0675	1,0910	1,1150	1,1395	1,1646	1,1902	1,2164	1,2432
1,023	1,0465	1,0706	1,0952	1,1204	1,1462	1,1726	1,1996	1,2272	1,2554
1,024	1,0486	1,0738	1,0996	1,1260	1,1530	1,1870	1,2090	1,2380	1,2677
1,025	1,0506	1,0769	1,1038	1,1314	1,1597	1,1887	1,2184	1,2489	1,2801
1,026	1,0527	1,0801	1,1082	1,1370	1,1666	1,1969	1,2280	1,2599	1,2927
1,027	1,0547	1,0832	1,1124	1,1424	1,1732	1,2049	1,2374	1,2708	1,3051
1,028	1,0568	1,0864	1,1168	1,1481	1,1802	1,2132	1,2472	1,2821	1,3180
1,029	1,0588	1,0895	1,2111	1,1536	1,1870	1,2214	1,2568	1,2932	1,3307
1,030	1,0609	1,0927	1,1255	1,1593	1,1941	1,2290	1,2668	1,3048	1,3439
1,031	1,0630	1,0960	1,1300	1,1650	1,2011	1,2383	1,2767	1,3163	1,3571
1,032	1,0650	1,0991	1,1345	1,1706	1,2080	1,2467	1,2866	1,3278	1,3703
1,033	1,0671	1,1023	1,1387	1,1763	1,2151	1,2552	1,2966	1,3394	1,3836
1,034	1,0692	1,1055	1,1431	1,1820	1,2222	1,2637	1,3067	1,3511	1,3970
1,035	1,0712	1,1087	1,1475	1,1877	1,2293	1,2723	1,3168	1,3629	1,4106
1,036	1,0733	1,1119	1,1519	1,1934	1,2364	1,2809	1,3270	1,3748	1,4243
1,037	1,0754	1,1152	1,1565	1,1993	1,2437	1,2897	1,3394	1,3869	1,4382
1,038	1,0774	1,1183	1,1608	1,2049	1,2507	1,2982	1,3475	1,3987	1,4518
1,039	1,0795	1,1216	1,1653	1,2107	1,2579	1,3070	1,3580	1,4110	1,4660
1,040	1,0820	1,1253	1,1703	1,2171	1,2658	1,3164	1,3691	1,4239	1,4809
1,041	1,0837	1,1281	1,1743	1,2224	1,2725	1,3247	1,3790	1,4355	1,4944

Середній темп	Базисні коефіцієнти динаміки								
	$\sqrt{}$	$\sqrt[3]{}$	$\sqrt[4]{}$	$\sqrt[5]{}$	$\sqrt[6]{}$	$\sqrt[7]{}$	$\sqrt[8]{}$	$\sqrt[9]{}$	$\sqrt[10]{}$
1,042	1,0858	1,1314	1,1789	1,2284	1,2800	1,3338	1,3898	1,4482	1,5090
1,043	1,0878	1,1346	1,1834	1,2343	1,2874	1,3428	1,4005	1,4607	1,5235
1,044	1,0899	1,1379	1,1880	1,2403	1,2949	1,3519	1,4114	1,4735	1,5383
1,045	1,0920	1,1411	1,1924	1,2461	1,3022	1,3608	1,4220	1,4860	1,5529
1,046	1,0941	1,1444	1,1970	1,2521	1,3097	1,3699	1,4329	1,4988	1,5677
1,047	1,0962	1,1477	1,2016	1,2581	1,3172	1,3791	1,4439	1,5118	1,5829
1,048	1,0983	1,1510	1,2062	1,2641	1,3248	1,3884	1,4550	1,5248	1,5980
1,049	1,1004	1,1543	1,2109	1,2702	1,3324	1,3977	1,4662	1,5380	1,6134
1,050	1,1025	1,1576	1,2155	1,2763	1,3401	1,4071	1,4775	1,5514	1,6290
1,051	1,1046	1,1609	1,2201	1,2823	1,3477	1,4164	1,4886	1,5645	1,6443
1,052	1,1067	1,1642	1,2247	1,2884	1,3554	1,4259	1,5000	1,5780	1,6600
1,0525	1,1078	1,1660	1,2272	1,2916	1,3594	1,4308	1,5059	1,5850	1,6682
1,053	1,1088	1,1676	1,2295	1,2947	1,3633	1,4356	1,5117	1,5918	1,6762
1,054	1,1109	1,1709	1,2341	1,3007	1,3709	1,4449	1,5229	1,6051	1,6918
1,055	1,1130	1,1742	1,2388	1,3069	1,3788	1,4546	1,5346	1,6190	1,7080
1,056	1,1151	1,1775	1,2434	1,3130	1,3865	1,4641	1,5461	1,6327	1,7241
1,057	1,1172	1,1809	1,2482	1,3193	1,3945	1,4740	1,5580	1,6468	1,7407
1,0575	1,1183	1,1823	1,2506	1,3225	1,3985	1,4789	1,5639	1,6538	1,7489
1,058	1,1194	1,1843	1,2530	1,3257	1,4026	1,4840	1,5701	1,6612	1,7575
1,059	1,1215	1,1877	1,2578	1,3320	1,4106	1,4938	1,5819	1,6752	1,7740
1,060	1,1236	1,1810	1,2625	1,3383	1,4186	1,0537	1,5939	1,6895	1,7909
1,061	1,1257	1,1944	1,2673	1,3446	1,4266	1,5136	1,6059	1,7039	1,8078
1,062	1,1278	1,1977	1,2720	1,3509	1,4347	1,5237	1,6182	1,7195	1,8250
1,0625	1,1289	1,1995	1,2745	1,3542	1,4388	1,5287	1,6242	1,7257	1,8336
1,063	1,1300	1,2012	1,2769	1,3573	1,4428	1,5337	1,6303	1,7330	1,8422
1,0645	1,1321	1,2046	1,2817	1,3637	1,4510	1,5439	1,6427	1,7478	1,8597
1,065	1,1342	1,2079	1,2864	1,3700	1,4590	1,5538	1,6548	1,7624	1,8770
1,066	1,1364	1,2114	1,2914	1,3766	1,4675	1,5644	1,6677	1,7778	1,8951
1,067	1,1385	1,2148	1,2962	1,3830	1,4757	1,5716	1,6801	1,7927	1,9128
1,0675	1,1396	1,2165	1,2986	1,3863	1,4799	1,5798	1,6864	1,8002	1,9217
1,068	1,1406	,2182	1,3010	1,3895	1,4840	1,5849	1,6927	1,8078	1,9307
1,069	1,1428	1,2210	1,3030	1,3961	1,4924	1,5924	1,7055	1,8232	1,9490
1,070	1,1449	1,2250	1,3108	1,4026	1,5008	1,6059	1,7183	1,8386	1,9673
1,071	1,1470	1,2284	1,3156	1,4090	1,5090	1,6161	1,7308	1,8537	1,9853
1,072	1,1492	1,2319	1,3206	1,4157	1,5176	1,6269	1,7440	1,8696	2,0042
1,0725	1,1503	1,2337	1,3231	1,4190	1,5219	1,6322	1,7505	1,8774	2,0135
1,073	1,1513	1,2353	1,3255	1,4223	1,5261	1,6375	1,7570	1,8853	2,0229
1,074	1,1535	1,2389	1,3306	1,4291	1,5349	1,6485	1,7705	1,9015	2,0422
1,075	1,1556	1,2423	1,3355	1,4357	1,5434	1,6592	1,7836	1,9174	2,0612
1,076	1,1578	1,2458	1,3405	1,4424	1,5520	1,6670	1,7937	1,9300	2,0767
1,077	1,1599	1,2192	1,3454	1,4490	1,5606	1,6808	1,8102	1,9496	2,0997
1,0775	1,1610	1,2510	1,3480	1,4525	1,5651	1,6864	1,8171	1,9579	2,1096
1,078	1,1621	1,2527	1,3504	1,4557	1,5692	1,6916	1,8235	1,9657	2,1190
1,079	1,1642	1,2562	1,3554	1,5625	1,5780	1,7027	1,8372	1,9823	2,1389
1,080	1,1664	1,2597	1,3605	1,4693	1,5868	1,7137	1,8508	1,9989	2,1588
1,081	1,1686	1,2633	1,3656	1,4762	1,5958	1,7251	1,8648	2,0158	2,1791

Середній темп	Базисні коефіцієнти динаміки								
	$\sqrt{}$	$\sqrt[3]{}$	$\sqrt[4]{}$	$\sqrt[5]{}$	$\sqrt[6]{}$	$\sqrt[7]{}$	$\sqrt[8]{}$	$\sqrt[9]{}$	$\sqrt[10]{}$
1,082	1,1707	1,2667	1,3706	1,4830	1,6046	1,7362	1,8786	2,0326	2,1993
1,0825	1,1718	1,2685	1,3732	1,4865	1,6091	1,7419	1,8856	2,0412	2,2096
1,083	1,1729	1,2703	1,3757	1,4899	1,6136	1,7475	1,8925	2,0496	2,2197
1,084	1,1751	1,2738	1,3808	1,4968	1,6225	1,7588	1,9065	2,0666	2,2402
1,085	1,1772	1,2773	1,3859	1,5037	1,6315	1,7702	1,9207	2,0840	2,2611
1,086	1,1794	1,2808	1,3909	1,5105	1,6404	1,7815	1,9347	2,1011	2,2818
1,087	1,1816	1,2844	1,3961	1,5176	1,6496	1,7931	1,9491	2,1187	2,3030
1,0875	1,1827	1,2862	1,3987	1,5211	1,6542	1,7989	1,9563	2,1275	2,3137
1,088	1,1837	1,2879	1,4012	1,5245	1,6587	1,8047	1,9635	2,1363	2,3243
1,089	1,1859	1,2914	1,4063	1,5315	1,6678	1,8162	1,9778	2,1538	2,3455
1,090	1,1882	1,2950	1,4116	1,5386	1,6771	1,8280	1,9925	2,1718	2,3673
1,091	1,1903	1,2986	1,4168	1,5457	1,6864	1,8399	2,0073	2,1900	2,3893
1,092	1,1925	1,3022	1,4220	1,5528	1,6957	1,8517	2,0221	2,2081	2,4112
1,0925	1,1936	1,3040	1,4246	1,5564	1,7004	1,8577	2,0295	2,2172	3,4223
1,093	1,1946	1,3057	1,4271	1,5598	1,7049	1,8635	2,0368	2,2262	2,4332
1,094	1,1968	1,3093	1,4324	1,5670	1,7143	1,8754	2,0517	2,2446	2,4556
1,095	1,1990	1,3129	1,4376	1,5742	1,7237	1,8875	2,0668	2,2631	2,4781
1,096	1,2012	1,3165	1,4429	1,5814	1,7332	1,8996	2,0820	2,2819	2,5010
1,097	1,2034	1,3201	1,4481	1,5886	1,7427	1,9117	2,0971	2,3005	2,5236
1,0975	1,2045	1,3219	1,4508	1,5923	1,7475	1,9179	2,1049	2,3101	2,5353
1,098	1,2056	1,3237	1,4534	1,5958	1,7522	1,9239	2,1124	2,394	2,5467
1,099	1,2078	1,3274	1,4588	1,6032	1,7619	1,9365	2,1282	2,3389	2,5705
1,100	1,2100	1,3310	1,4641	1,6105	1,7716	1,9488	2,1437	2,3581	2,5939
1,101	1,2122	1,3346	1,4694	1,6178	1,7812	1,9611	2,1592	2,3773	2,6174
1,102	1,2144	1,3383	1,4748	1,6252	1,7910	1,9737	2,1750	2,3969	2,6414
1,1025	1,2155	1,3401	1,4775	1,6289	1,7959	1,9800	2,1830	2,4068	2,6535
1,103	1,2166	1,3419	1,4801	1,6326	1,8008	1,9863	2,1909	2,4166	2,6655
1,104	1,2188	1,3456	1,4855	1,6400	1,8106	1,9989	2,2068	2,4363	2,6897
1,105	1,2210	1,3592	1,4909	1,6474	1,8204	2,0155	2,2227	2,4561	2,7140
1,106	1,2232	1,3529	1,4963	1,6549	1,8303	2,0243	2,2389	2,4762	2,7387
1,107	1,2254	1,3565	1,5016	1,6623	1,8402	2,0371	2,2551	2,4964	2,7635
1,1075	1,2266	1,3585	1,5045	1,6662	1,8453	2,0437	2,2634	2,5067	2,7762
1,108	1,2277	1,3603	1,5072	1,6700	1,8504	2,0502	2,2716	2,5169	2,7887
1,109	1,2299	1,3640	1,5127	1,6776	1,8605	2,0633	2,2882	2,5376	2,8142
1,110	1,2321	1,3676	1,5180	1,6850	1,8704	2,0761	2,3045	2,5580	2,8394
1,111	1,2343	1,3713	1,5235	1,6926	1,8805	2,0892	2,3211	2,5787	2,8649
1,112	1,2365	1,3750	1,5290	1,7002	1,8906	2,1023	2,3378	2,5996	2,8908
1,1125	1,2377	1,3769	1,5318	1,7041	1,8958	2,1091	2,3464	2,6104	2,9041
1,113	1,2388	1,3788	1,5346	1,7080	1,9010	2,1158	2,3549	2,6210	2,9172
1,114	1,2410	1,3825	1,5401	1,7157	1,9113	2,1292	2,3719	2,6423	2,9435
1,115	1,2432	1,3862	1,5456	1,7233	1,9215	2,1425	2,3889	2,6636	2,9699
1,116	1,24555	1,3900	1,5512	1,7311	1,9319	2,1560	2,4061	2,6852	2,9967
1,117	1,2477	1,3937	1,5568	1,7389	1,9424	2,1697	2,4236	2,7072	3,0239
1,118	1,2499	1,3974	1,5623	1,7467	1,9528	2,1832	2,4408	2,7288	3,0508
1,119	1,2522	1,4012	1,5679	1,7545	1,9633	2,1969	2,4583	2,7508	3,0781
1,120	1,2544	1,4049	1,5735	1,7623	1,9738	2,2107	2,4760	2,7731	3,1059

Додаток 3

Таблиця випадкових чисел

5489	5583	3156	0835	1988	3912	0938	7460	0869	4420
3522	0935	7877	5665	7020	9555	7379	7124	7878	5544
7555	7579	2550	2487	9477	0864	2349	1012	7250	2633
5759	3554	5080	9074	7001	6249	3224	6368	9102	2672
6303	6895	3371	3196	7231	2918	7380	0438	7547	2644
7351	5634	5323	2623	7803	8374	2191	0464	0464	93529
7068	7803	8832	5119	6350	0120	5026	3684	5657	0304
3613	1428	1796	8447	0503	5654	3254	7336	9536	1944
5143	4534	2105	0368	7890	2473	4240	8652	9435	1422
9815	5144	7649	8638	6137	8070	5345	4865	2456	5708
5780	1277	6316	1013	2867	9938	3930	3203	5696	1769
1187	0951	5991	5245	5700	5564	7352	0891	6249	6568
4184	2179	4554	9083	2254	2435	2965	5154	1209	7069
2916	2972	9885	0275	0144	8034	8122	3213	7666	0230
5524	1341	9860	6565	6981	9842	0171	2284	2707	3008
0146	5291	2354	5694	0377	5336	6460	9585	3415	2358
4920	2826	5238	5402	7937	1993	4332	2327	6875	5230
7978	1947	6380	3425	7267	7285	1130	7722	0164	8273
7453	0653	3645	7497	5969	8682	4191	2976	0361	9334
1473	6938	4899	5348	1641	3652	0852	5296	4538	4456
8162	8797	8000	4707	1880	9660	8446	1883	9768	0881
5645	4219	0807	3301	4279	4168	4305	9937	3120	5547
2042	1192	1175	8851	6432	4635	5757	6656	1660	5389
5470	7702	6958	9080	5925	8519	0127	9233	2452	7341
4045	1730	6005	1704	0345	3275	4738	4862	2556	8333
5880	1257	6163	4439	7276	6353	6912	0731	9033	5294
9083	4260	5277	4998	4298	5204	3965	4028	8936	5148
1762	8713	1189	1090	8989	7273	3213	1935	9321	4820
2023	2589	1740	0424	8924	0005	1969	1636	7237	1227
7965	3855	4765	0703	1678	0841	7543	0308	9732	1289
7690	0480	8098	9629	4819	7219	7241	5128	3853	1921
9292	0426	9573	4903	5916	6576	8368	3270	6641	0033
0867	1656	7016	4220	2533	6345	8227	1904	5138	2537
0505	2127	8255	5276	2233	3956	4118	8199	6380	6340
6295	9795	1112	5761	2575	6837	3336	9322	7403	7345
6323	2615	3410	3365	1117	2417	3176	2434	5240	5455
8672	8536	2966	5773	5412	8114	0930	4697	6919	4569
1422	5507	7596	0670	3013	1351	3886	3268	9469	2584
2653	1472	5113	5735	1469	9545	9331	5303	9914	9394
2653	1472	5113	5735	1469	9545	933	5303	9914	6394
0438	4376	3328	8649	8327	0110	4549	7955	5275	2890
2851	2157	0047	7085	1129	0460	6821	8323	2572	8962
7962	2753	3077	8718	7418	8004	1425	3706	8822	1494
3837	4098	0220	1227	4732	0150	1637	1097	1040	7372
8542	4126	9274	2251	0507	4301	8730	7690	6235	3477
0139	0765	8039	9484	2577	7859	1976	0623	1418	6685
6687	1943	4307	0579	8171	8224	8641	7034	3595	3875
6242	5582	5872	3197	4919	2792	5991	4058	9769	1918
6859	9606	0522	4993	0345	8958	1289	8825	6941	7685
6950	1932	6043	3623	1973	4112	1795	8465	2110	8045
3482	0478	0221	6738	7323	5643	4767	0106	2272	9862

Додаток 4

Таблиця значень функції $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3989	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3790	3778	3765	3752	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3863	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3078	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2303	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2050	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0855	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0203	0198	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0064	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
4,0	0001	0001	0001	000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Додаток 5

Таблиця значень *t* Стьюдента для *p*=0,05 і 0,01

Число ступеней свободи	*p*=0,05	*p*=0,01	Число ступеней свободи	*p*=0,05	*p*=0,01
1	12,69	63,655	28	2,049	2,764
2	4,302	9,924	29	2,045	2,757
3	3,183	5,841	30	2,042	2,750
4	2,777	4,604	32	2,037	2,739
5	2,571	4,032	34	2,032	2,728
6	2,447	3,707	36	2,027	2,718
7	2,364	3,500	38	2,025	2,711
8	2,307	3,356	40	2,020	2,704
9	2,263	3,250	42	2,017	2,696
10	2,227	3,169	44	2,015	2,691
11	2,200	3,138	46	2,012	2,685
12	2,179	3,055	48	2,010	2,681
13	2,161	3,012	50	2,007	2,678
14	2,145	2,977	55	2,005	2,668
15	2,131	2,946	60	2,000	2,661
16	2,119	2,921	65	1,997	2,653
17	2,110	2,898	70	1,994	2,648
18	2,100	2,877	80	1,990	2,638
19	2,093	2,860	100	1,985	2,615
20	2,086	2,846	125	1,980	2,615
21	2,078	2,832	150	1,977	2,610
22	2,074	2,818	200	1,972	2,600
23	2,069	2,807	400	1,965	2,588
24	2,064	2,796	1000	1,962	2,581
25	2,059	2,787			
26	2,054	2,778			
27	2,052	2,771			

Додаток 6

Таблиця ймовірностей $P(\chi^2)$

k / χ^2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,3173	0,6065	0,8013	0,9098	0,9626	0,9656	0,9948	0,9982	0,9994	0,9998
2	1574	3679	5724	7318	8491	9197	9598	9810	9915	9963
3	0833	2231	3916	5578	7000	8088	8850	9344	9643	9814
4	0455	1353	2615	4060	5494	6767	7798	8571	9114	9473
5	0254	0821	1718	2873	4153	5438	6600	7576	8343	8912
6	0143	0498	1116	1991	3062	4232	5398	6472	7399	8153
7	0081	0302	0719	1359	2206	3208	4289	5366	6371	7254
8	0047	0183	0460	0916	1562	2381	3326	4335	5341	6288
9	0027	0111	0293	0611	1091	1736	2527	3423	4373	5321
10	0016	0067	0186	0404	0752	1247	1886	2650	3505	4405
11	0009	0041	0117	0266	0514	0884	1386	2017	2757	3575
12	0005	0025	0074	0174	0348	0620	1006	1512	2133	2851
13	0003	0015	0046	0113	0234	0430	0721	1119	1626	2237
14	0002	0009	0029	0073	0156	0296	0512	0818	1223	1730
15	0001	0006	0018	0047	0104	0203	0360	0591	0909	1321
16	0001	0003	0011	0030	0068	0138	0251	0424	0669	0996
17	0000	0002	0007	0019	0045	0093	0174	0301	0487	0744
18	–	0001	0004	0012	0029	0062	0120	0212	0352	0550
19	–	0001	0003	0008	0019	0042	0082	0149	0252	0403
20	–	0000	0002	0005	0013	0028	0056	0103	0179	0293
21	–	–	0001	0003	0008	0018	0038	0071	0126	0211
22	–	–	0001	0002	0005	0012	0025	0049	0089	0151
23	–	–	0000	0001	0003	0008	0017	0034	0062	0107
24	–	–	–	0001	0002	0005	0011	0023	0043	0076
25	–	–	–	0001	0001	0003	0008	0016	0030	0053
26	–	–	–	0000	0001	0002	0005	0010	0020	0037
27	–	–	–	–	0001	0001	0003	0007	0014	0026
28	–	–	–	–	0000	0001	0002	0005	0010	0018
29	–	–	–	–	–	0001	0001	0003	0006	0012
30	–	–	–	–	–	0000	0001	0002	0004	0009

k / χ^2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	9985	0,9994	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	9907	9955	9979	9991	0,9996	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
4	9699	9834	9912	9955	9977	9989	9995	0,9998	0,9999	1,0000
5	9312	9580	9752	9858	9921	9958	9978	9989	9994	0,9997
6	8734	9161	9462	9665	9797	9881	9932	9962	9979	9989
7	7991	8576	9022	9347	9576	9733	9835	9901	9942	9967
8	733	7851	8436	8893	9238	9489	9665	9786	9867	9919
9	9219	7029	7729	8311	8775	9134	9403	9597	9735	9829
10	5304	6160	6939	7622	8197	8666	9036	9319	9539	9682
11	4433	5289	6108	6860	7526	8095	8566	8944	9238	9462
12	3626	4457	5276	6063	6790	7440	8001	8472	8856	9161
13	2933	3690	4478	5265	6023	6728	7362	7916	8386	8774
14	2330	3007	3738	4497	5255	5987	6671	7291	7837	8305
15	1825	2414	3074	3782	4514	5246	5955	6620	7226	7764
16	1411	1912	2491	3134	3821	4530	5238	5925	6573	7166
17	1079	1496	1993	2562	3189	3856	4544	5231	5899	6530
18	0816	1157	1575	2068	2627	3239	3888	4557	5224	5874
19	0611	0885	1231	1649	2137	2687	3285	3918	4568	5218
20	0453	0671	0952	1301	1719	2202	2742	3328	3946	4579
21	0334	0504	0729	1016	1368	1785	2263	2794	3368	3971
22	0244	0375	0554	0786	1078	1432	1847	2320	2843	3405
23	0177	0277	0417	0603	0841	1137	1498	1906	2373	2888
24	0127	0203	0311	0458	0651	0895	1194	1550	1962	2424
25	0091	0148	0231	0346	0499	0698	0947	1249	1605	2014
26	0065	0107	0170	0259	0380	0540	0745	0998	1302	1658
27	0046	0077	0124	0193	0287	0415	0581	0790	1047	1353
28	0032	0055	0090	0142	0216	0316	0449	0621	0834	1094
29	0023	0039	0065	0104	0161	0239	0345	0484	0660	0878
30	0016	0028	0047	0076	0119	0180	0263	0374	0518	0699

k / χ^2	21	22	23	24	25	26	27	28	29
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	9994	9997	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	9981	9990	9995	9997	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
8	9951	9972	9984	9991	9995	9997	0,9999	0,9999	1,0000
9	9892	9933	9960	9976	9986	9992	9995	9997	0,9999
10	9789	9863	9913	9945	9967	9980	9988	9993	9996
11	9628	9747	9832	9890	9929	9955	9972	9983	9990
12	9396	9574	9705	9799	9866	9912	9943	9964	9977
13	9086	9332	9520	9661	9765	9840	9892	9929	9954
14	8696	9015	9269	9466	9617	9730	9813	9872	9914
15	8230	8622	8946	9208	9414	9573	9694	9784	9850
16	7696	8159	8553	8881	9148	9362	9929	9658	9755
17	7111	7634	8093	8487	8818	9091	9311	9486	9622
18	6490	7060	7575	8080	8424	8758	9035	9261	9443
19	5851	6453	7012	7520	7971	8364	8700	8981	9213
20	5213	5830	6419	6968	7468	7916	8308	8645	8929
21	4589	5207	581	6387	6926	7420	7863	8253	8591
22	3995	4599	5203	5793	6357	6887	7374	7813	8202
23	3440	4017	4608	5198	5776	6329	6850	7330	7765
24	2981	3472	4038	4616	5194	5760	6303	6815	7289
25	2472	2971	3503	4058	4624	5190	5745	5278	5782
26	2064	2517	3009	3532	4076	4631	5186	5730	6255
27	1709	2112	2560	3045	3559	4093	4638	5182	5717
28	1402	1757	2158	2600	3079	3585	4110	4644	5179
29	1140	1449	1803	2201	2639	3111	3609	4125	4651
30	0920	1185	1494	1848	2243	2676	3142	3632	4140

Додаток 7

Таблиця значень функції

$$f(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$ при різних значеннях t

t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$
0,00	0,00000	0,30	0,23582	0,60	0,45149	0,90	0,63188
01	00798	31	24344	61	45814	91	63718
02	01596	32	25103	62	46474	92	64243
03	02393	33	25860	63	47131	93	64763
04	03191	34	26614	64	47783	94	65278
05	03988	35	27366	65	48431	95	65789
06	04784	36	28115	66	49075	96	66294
07	05581	37	28862	67	49714	97	66795
08	06376	38	29605	68	50350	98	67291
09	07171	39	30346	69	50981	99	67783
0,10	0,07966	0,40	0,31084	0,70	0,51607	1,00	0,68269
11	08759	41	31819	71	52230	01	68750
12	09552	42	32552	72	52848	02	69227
13	10348	43	33280	73	53461	03	69699
14	11134	44	34006	74	54070	04	70166
15	11924	45	34729	75	54675	1,05	70628
16	12712	46	35448	76	55275	06	71086
17	13499	47	34164	77	55870	07	71538
18	14285	48	33877	78	56461	08	71986
19	15069	49	37587	79	57047	09	72429
0,20	0,15852	0,50	0,38292	0,80	0,57629	1,10	0,72867
21	16633	51	38995	81	58206	11	73300
22	17413	52	39694	82	58778	12	73729
23	18191	53	40389	83	59346	13	74152
24	18967	54	41080	84	59909	14	74571
25	19741	55	41768	85	60468	15	74986
26	20514	56	42452	86	61021	16	75395
27	21284	57	43132	87	61570	17	75800
28	22052	58	43809	88	62114	18	76200
29	22818	59	44481	89	52653	19	76595

Продовження додатку 7

t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$
1,20	0,76986	1,55	0,87886	1,90	0,94257	2,25	0,97555
21	77372	56	88124	91	94387	26	97618
22	77754	57	88358	92	94514	27	97679
23	78130	58	88589	93	94639	28	97739
24	78502	59	88817	94	94762	29	97798
25	78870	1,60	0,89040	95	94882	2,30	0,97855
26	79233	61	89260	96	95000	30	97911
27	79592	62	89477	97	95116	32	97966
28	79945	63	89690	98	95230	33	98019
29	80295	64	89899	99	95341	34	98072
1,30	0,80640	65	90106	2,00	0,95450	35	98123
31	80980	66	90309	01	95557	36	98172
32	81316	67	90508	02	95662	37	98221
33	81648	68	90704	03	95764	38	98269
34	81975	69	90897	04	95865	39	98315
35	82298	1,70	0,91087	05	95964	2,40	0,98360
36	82617	71	91273	06	96060	41	98405
37	82931	72	91457	07	66155	42	98448
38	83241	73	91637	08	96247	43	98490
39	83547	74	91814	09	96338	44	98531
1,40	0,83849	75	91988	2,10	0,96427	45	98571
41	84146	76	92159	11	96514	46	98611
42	84439	77	92327	12	96599	47	98649
43	84729	78	92492	13	96683	48	98686
44	85013	79	92655	14	96765	49	98723
45	85294	1,80	0,92814	15	96844	2,50	0,98758
46	85571	81	92970	16	96923	51	98793
47	85844	82	93124	17	96999	52	98826
48	86113	83	93275	18	97074	53	98859
49	86378	84	93426	19	97148	54	98891
1,50	0,86639	85	93569	2,20	0,97219	55	98923
51	86696	86	93711	21	97289	56	98953
52	87149	87	93852	22	97358	57	98983
53	87398	88	93989	23	97425	58	99012
54	87644	89	94124	24	97491	59	99040

t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$
2,60	0,99068	2,95	0,99682	3,30	0,99903	3,65	0,99974
61	99095	96	99692	31	99907	66	99975
62	99121	97	99702	32	99910	67	99976
63	99146	98	99712	33	99913	68	99977
64	99171	99	99721	34	99916	69	99978
65	99195	3,00	0,99730	35	99919	3,70	0,99978
66	99219	01	99739	36	99922	71	99979
67	99241	02	99747	37	99925	72	99980
68	99263	03	99755	38	99928	73	99981
69	99285	04	99763	39	99930	74	99982
2,70	0,99307	05	99771	3,40	0,99933	75	99982
71	99327	06	99779	41	99935	76	99983
72	99347	07	99786	42	99937	77	99984
73	99367	08	99793	43	99940	78	99984
74	99386	09	99800	44	99942	79	99985
75	99404	3,10	0,99806	45	99944	3,80	0,99986
76	99422	11	99813	46	99946	81	99986
77	99439	12	99819	47	99948	82	99987
78	99456	13	99825	48	99950	83	99987
79	99473	14	99831	49	99952	84	99988
2,80	0,99489	15	99837	3,50	0,99953	85	99988
81	99505	16	99842	51	99955	86	99989
82	99520	17	99848	52	99957	87	99989
83	99535	18	99853	53	99958	88	99990
84	99549	19	99585	54	99960	89	99990
85	99563	3,20	0,99863	55	99961	3,90	0,99990
86	99576	21	99867	56	99963	91	99991
87	99590	22	99872	57	99964	92	99991
88	99602	23	99876	58	99966	93	99992
89	99615	24	99880	59	99967	94	99992
2,90	0,99627	25	99855	3,60	0,99968	95	99992
91	99639	26	99889	61	99969	96	99992
92	99650	27	99892	62	99971	97	99993
93	99661	28	99896	63	99972	98	99993
94	99672	29	99900	64	99973	99	99993

З М І С Т

Глава 1. СТАТИСТИЧНЕ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

1.1. Програма статистичного спостереження 3
1.2. Організація статистичного спостереження 8
1.3. Прийоми контролю результатів статистичного спостереження . . . 12
1.4. Питання для обговорення 16
1.5. Тести 17
Література 21

Глава 2. ЗВЕДЕННЯ І ГРУПУВАННЯ СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ

2.1. Побудова рядів розподілу за кількісною ознакою, за атрибутивною ознакою 22
2.2. Побудова групування типологічного, структурного і аналітичного 36
2.3. Прийоми вторинного групування 56
2.4. Тести 64
2.5. Питання для обговорення 66
Література 67

Глава 3. СТАТИСТИЧНІ ТАБЛИЦІ

3.1 Складання макетів таблиць 69
3.2 Виклад статистичного матеріалу у вигляді таблиці 81
3.3. Тести 85
3.4 Питання для обговорення 90
Література 90

Глава 4. АБСОЛЮТНІ ТА ВІДНОСНІ ВЕЛИЧИНИ

4.1. Перерахунок абсолютних величин в умовні одиниці 91
4.2. Визначення відносних величин виконання плану та планового завдання 94
4.3. Визначення відносних величин структури 102
4.4. Визначення відносних величин координації та порівняння 113
4.5. Визначення відносних величин динаміки 114
4.6. Відносні величини інтенсивності 119
4.7. Тести 122
4.8. Питання для обговорення 126
Література 127

Глава 5. СЕРЕДНІ ВЕЛИЧИНИ

5.1. Обчислення середньої арифметичної простої за індивідуальними даними . . . 129
5.2. Обчислення середньої арифметичної зваженої в дискретному ряду розподілу . . . 135
5.3. Обчислення середньої арифметичної зваженої в інтервальному ряду розподілу із закритими і відкритими інтервалами . . . 146
5.4. Обчислення середньої арифметичної зваженої по способу моментів . . . 154
5.5. Розрахунок середньої арифметичної із групових середніх . . . 160
5.6. Розрахунок середньої гармонічної . . . 166
5.7. Розрахунок моди . . . 177
5.8. Розрахунок медіани . . . 180
5.9. Тести . . . 186
5.10. Питання для обговорення . . . 189
Література . . . 189

Глава 6. ПОКАЗНИКИ ВАРІАЦІЇ

6.1. Визначення розмаху варіації . . . 191
6.2. Визначення середнього лінійного відхилення за індивідуальними даними і в рядах розподілу . . . 194
6.3. Розрахунок дисперсії і середнього квадратичного відхилення по індивідуальним даним і в рядах розподілу . . . 199
6.4. Розрахунок дисперсії по формулі $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ за індивідуальними даними і в рядах розподілу . . . 215
6.5. Розрахунок дисперсії за способом моментів . . . 221
6.6. Визначення коефіцієнту варіації . . . 225
6.7. Розрахунок групової, міжгрупової і загальної дисперсії (за правилом складання дисперсії) . . . 231
6.8. Розрахунок емпіричного кореляційного відношення . . . 236
6.9. Розрахунок коефіцієнту асиметрії . . . 240
6.10. Тести . . . 242
6.10. Питання для обговорення . . . 246
Література . . . 247

Глава 7. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ЯВИЩАМИ

7.1. Розрахунок параметрів рівняння прямої за індивідуальними даними . . . 248
7.2. Розрахунок параметрів рівняння параболи другого порядку . . . 254
7.3. Розрахунок параметрів рівняння гіперболи . . . 261
7.4. Розрахунок параметрів степеневої функції . . . 264
7.5. Вирівнювання за показовою (експонентною) кривою . . . 268

7.6. Розрахунок параметрів рівняння множинної регресії 271
7.7. Розрахунок теоретичного кореляційного відношення та індексу кореляції 276
7.8. Розрахунок коефіцієнту кореляції за незгрупованими даними . . . 281
7.9. Розрахунок множинного коефіцієнту кореляції 284
7.10. Розрахунок коефіцієнта асоціації та контингенції 287
7.11. Розрахунок коефіцієнта взаємної зв'язаності А. Чупрунова та К. Пірсона 290
7.12. Розрахунок коефіцієнту кореляції рангів 293
7.13. Розрахунок коефіцієнту Фехнера 296
Література 298

Глава 8. РЯДИ ДИНАМІКИ

8.1. Встановлення виду ряду динаміки 300
8.2. Приведення рядів динаміки до співставного виду 303
8.3. Визначення середнього рівня динаміки 306
8.4. Визначення показників зміни рівнів ряду динаміки. Визначення середнього абсолютного приросту 313
8.5. Визначення в рядах динаміки середнього темпу зростання і приросту 324
8.6. Приведення рядів динаміки загальної основи 331
8.7. Визначення в рядах динаміки загальної тенденції розвитку 334
8.8. Визначення в рядах внутрішньорічної динаміки індексів сезонності 347
8.9. Інтерполяція та екстраполяція рівнів ряду динаміки 354
8.10. Тести 359
8.11. Питання для обговорення 362
Література 363

Глава 9. ІНДЕКСИ

9.1. Розрахунок індивідуальних індексів обсягу виробництва, товарообігу, цін, якості та собівартості продукції 365
9.2. Розрахунок агрегатних загальних і групових індексів обсягу виробництва (товарообігу), цін, собівартості і продуктивності праці 373
9.3. Розрахунок агрегатних індексів із постійними та змінними вагами, ланцюгових та базисних агрегатних індексів 381
9.4. Розрахунок середніх арифметичних індексів обсягу виробництва продукції та продуктивності праці 384
9.5. Розрахунок середніх гармонійних індексів цін і собівартості 388
9.6. Розрахунок за допомогою індексних систем відсутніх індексів . . . 393
9.7. Арифметичне розкладення за допомогою індексних систем абсолютних приростів за факторами 398
9.8. Розрахунки індексів змінного та постійного складу 406
9.9. Розрахунок територіальних індексів 414

9.10. Тести 418
9.11. Питання для обговорення 421
Література 422

Глава 10. ВИБІРКОВИЙ МЕТОД

10.1. Визначення помилки вибіркової середньої при власне випадковому і механічному відборі 423
10.2. Визначення помилки вибіркової частки при власне-випадковому механічному відборі 434
10.3. Визначення необхідної чисельності вибірки при дослідженні середньої для власне-випадкового і механічного відбору 437
10.4. Визначення необхідної чисельності вибірки при дослідженні вибіркової частки для власне-випадкового і механічного відбору . . . 441
10.5 Визначення помилки вибіркової середньої типової вибірки 445
10.6 Визначення помилки вибіркової середньої серійної вибірки 453
10.7. Тести 456
Література 459

Додатки 461
Додаток 1. Таблиця обчислення середньорічних темпів зростання, приросту 461
Додаток 2. Таблиця розрахунку середніх темпів динаміки 463
Додаток 3. Таблиця випадкових чисел 467
Додаток 4. Таблиця значень функції $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$ 468
Додаток 5. Таблиця значень t Стьюдента для p=0,05 і 0,01 469
Додаток 6. Таблиця ймовірностей $P(\chi^2)$ 470
Додаток 7. Таблиця значень функції $f(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ при різних значеннях t 473

Навчальне видання

ІНФОРМАЦІЯ ПРО АВТОРСЬКИЙ КОЛЕКТИВ

Дмитрієва Оксана Іллівна	д-р екон. наук, завідувач кафедри економіки і підприємництва Харківського національного автомобільно-дорожнього університету
Шевченко Інна Юріївна	д-р екон. наук, декан факультету управління та бізнесу Харківського національного автомобільно-дорожнього університету
Гіржева Ольга Миколаївна	д-р екон. наук, доцент кафедри менеджменту, бізнесу і адміністрування Державного біотехнологічного університету
Непран Андрій Володимирович	к.е.н., доцент кафедри економіки і підприємництва Харківського національного автомобільно-дорожнього університету
Бірченко Наталія Олександрівна	к. е. н., доцент кафедри обліку, аудиту та оподаткування Державного біотехнологічного університету
Чуйко Наталія Василівна	к.е.н., доцент кафедри менеджменту, бізнесу і адміністрування Державного біотехнологічного університету

Відповідальний за випуск *А. В. Непран*
В авторській редакції
Комп'ютерна верстка *А. В. Непран*
Підписано до друку 30.05.2022 р.

Формат 60×84 1/16. Папір офісний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 16,5.
Тираж 100 прим. Зам №

Видавництво та друк
ФОП Іванченко І. С.
пр. Тракторобудівників, 89-а/62, м. Харків, Україна, 61135
тел.: +038(050/093) 40-243-50.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої діяльності до державного реєстру видавців, виготовників та розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 4388 від 15.08.2012 р.
61002, Харків, вул.