Міністерство освіти і науки України

Харківський національний автомобільно-дорожній університет

І.В. Міщенко

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Харків ХНАДУ 2023

УДК 531
ББК 22.21
М 57

М 57
Міщенко, І.В. Теоретична механіка: конспект лекцій [Текст] / І. В. Міщенко. – Х.: ХНАДУ, 2023. – 207 с.

Конспект лекцій з теоретичної механіки призначено для здобувачів вищої освіти за денною та заочною формами навчання за спеціальністю (освітньою програмою) 274 «Автомобільний транспорт».

У конспекті послідовно розглянуто основні питання теоретичної механіки, наведено лекційний матеріал за розділами теоретичної механіки – «Статика», «Кінематика», «Динаміка» – згідно з навчальною програмою, тематичним планом для вказаної спеціальності.

Викладений матеріал дозволяє опанувати курс теоретичної механіки за офлайн та (або) онлайн формами навчання.

УДК 531
ББК 22.21

ЗМІСТ

ВСТУП

Теоретична механіка є одною з навчальних дисциплін науки «Механіка».

Наука про загальні закони руху та рівноваги матеріальних тіл та виникаючих при цьому взаємодіях між тілами називається теоретичною (або **загальною**) **механікою**.

Курс «Теоретична механіка» входить до складу дисциплін, які пов'язані із загальнопрофесійною діяльністю. Структура професійної діяльності у галузі механіки пов'язана з експлуатацією та обслуговуванням технічно складних механічних приладів і пристроїв.

Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони **механічного руху**, під яким в механіці розуміють зміну взаємного положення матеріальних тіл у просторі, яке відбувається у часі. **Механічною взаємодією** між тілами називається той вид взаємодії, в результаті якого відбувається зміна руху цих тіл або зміна їх форми (деформація). Прикладами механічного руху в техніці є рух різних наземних або інших транспортних засобів, рух частин різноманітних машин, механізмів і двигунів, деформації елементів тих чи інших конструкцій і споруд. Останні з наведених вивчають інші дисципліни – опір матеріалів, теорія пружності, теорія пластичності та повзучості.

Метою вивчення теоретичної механіки є формування у студентів знань законів руху та рівноваги матеріальних тіл і виникаючих при цьому взаємодіях між тілами, формування теоретичного базису для подальшого вивчення спеціальних інженерних дисциплін.

Основними завданнями вивчення «Теоретичної механіки» є:

– набуття практичних навиків розв'язання задач механіки шляхом вивчення методів і алгоритмів побудови математичних моделей руху та (або) стану механічних систем, які розглядаються, та також методів дослідження цих математичних моделей;

– отримання природньонаукового світогляду на базі вивчення основних законів природи та механіки.

За характером задач, які розглядаються, механіку поділяють на статику, кінематику та динаміку, які складають ї розділи. У статиці надається вчення про сили та умови рівноваги матеріальних тіл під дією сил. В кінематиці розглядаються загальні геометричні властивості руху тіл. В динаміці вивчають рух матеріальних тіл під дією сил. В такому ж порядку та відповідно до навчальної програми з дисципліни «Теоретична механіка» для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти за спеціальністю (освітньою програмою) 274 «Автомобільний транспорт» надано лекційний матеріал в цьому конспекті лекцій.

Серед природничих наук теоретична механіка займає чільне місце, є науковим фундаментом для багатьох технічних дисциплін, теорія яких ґрунтується на положеннях і законах теоретичної механіки. Передумовами для опанування запропонованого у конспекті матеріалу є набуття знань при вивченні таких дисциплін: Вища математика; Інформатика; Нарисна геометрія, інженерна та комп’ютерна графіка; Фізика; Технологія конструкційних матеріалів та матеріалознавство. Отримані знання будуть в нагоді при подальшому вивченні таких дисциплін: Опір матеріалів; Гідравліка, гідро- і пневмоприводи; Теорія механізмів і машин; Деталі машин.

Конспект лекцій поділено на три розділи, в кожному з яких є певна кількість лекцій. У кінці кожної лекції наведено контрольні питання, відповідь на які дозволяє визначити рівень опанування лекційного матеріалу. Нумерація рисунків і формул є подвійною – перша цифра відповідає номеру лекції, друга поточному значенню в межах лекції. За умов розгляду декількох тем у лекції зазначений підхід до нумерації не змінюється.

Поширення в останні часи через різні причини онлайн форми навчання ні в якому разі не витискає традиційну офлайн форму навчання. У кожній з них є свої плюси, свої мінуси, свої переваги, свої недоліки. Сподіваюсь, що конспект лекцій буде в нагоді під час опанування навчального матеріалу з дисципліни «Теоретична механіка» за будь-якої форми навчання.

Розділ Статика. Лекція № 1

План лекції

1. Основні поняття статики
2. Основні системи та одиниці вимірювання
3. Аксіоми статики
4. В’язі та їх реакції
5. Основні задачі статики. Система збіжних сил
6. Геометричний (графічний) спосіб додавання збіжних сил
7. Аналітичний спосіб додавання збіжних сил
8. Умови рівноваги збіжної системи сил. Алгоритм аналітичного розв’язання задач на рівновагу

Тема 1. Основні визначення теоретичної механіки

1.1. Основні поняття статики

Статика – **це розділ механіки, в якому подається загальне вчення про сили та вивчаються умови рівноваги системи сил і матеріальних тіл, які знаходяться під дією сил.**

Під **рівновагою** розуміють стан спокою тіла по відношенню до інших тіл. В курсі механіки розглядають задачі про рівновагу твердих тіл.

Матеріальна точка (**МТ**) – **найпростіша модель матеріального тіла, розмірами якого можна нехтувати**. **МТ має масу та не здійснює обертальний рух.**

Механічною системою називається **будь-яка сукупність матеріальних точок**.

Абсолютно твердим тілом є **така механічна система, відстань між будь-якими точками якої не змінюється при довільних взаємодіях.**

Сила – кількісна міра механічної взаємодії матеріальних тіл.

Сила є векторною величиною, яка визначається: 1) числовою величиною або модулем сили; 2) напрямом дії; 3) точкою прикладення.

Для знаходження твердого тіла під дією певної системи сил у рівновазі (стані спокою) необхідно, щоб ці сили задовольняли певним умовам рівноваги даної системи сил.

Для сил існують наступні визначення:

1. Тіло, не скріплене з іншими тілами та якому можна надати довільне переміщення у просторі, називається **вільним**. Або іншими словами:

Вільне тіло – якщо його переміщення нічим не обмежені. Невільне тіло – якщо його переміщення обмежені іншими тілами.

2. **Сукупність декількох сил**, прикладених до механічної системи, називають **системою сил**. Якщо лінії дії сил системи лежать в одній площині, то її називають **плоскою**, якщо лінії дії лежать в різних площинах, то систему називають **просторовою**.

3. Якщо одну систему сил, діючих на вільне тверде тіло, можна замінити іншою системою, не змінюючи при цьому стан спокою або руху, в якому знаходиться тіло, то такі дві системи сил називаються **еквівалентними**.

4. Система сил, під дією якої тверде тіло може знаходитися в стані спокою, називається **зрівноваженою** або **еквівалентною до нуля**.

5. Якщо дана система сил еквівалентна одній силі, то ця сила називається **рівнодіючою** даної системи сил. Таким чином, **рівнодіюча – це сила, яка одна замінює дію даної системи сил на тверде тіло**.

Сила, що дорівнює рівнодіючій за модулем, прямо протилежна їй за напрямом и діє вздовж тієї ж прямої називається **зрівноважуючою** силою.

6. Сили, що діють на тверде тіло, поділяються на **зовнішні** та **внутрішні**. **Зовнішні** сили діють на точки даної механічної системи з боку МТ інших систем. **Внутрішні** – це сили взаємодії між МТ даної системи.

7. За характером дії сили поділяють на **зосереджені** та **розподілені**.

Зосереджена – сила, прикладена до тіла в будь-якій одній його точці.

Розподілені – сили, що діють на певну частину поверхні або об'єму тіла і характеризуються інтенсивністю.

8. За способом розташування у просторі розрізняють:

- **систему збіжних сил** (лінії дії сил сходяться в одній точці);
- **плоску систему сил** (сили даної системи розміщені в одній площині);
- **довільну систему сил** (сили даної системи розміщені довільно у просторі);
- **систему паралельних сил** (лінії дії сил даної системи паралельні між собою).

В подальшому під час вивчення теоретичної механіки ми будемо працювати з різними фізичними величинами, тому є доцільним надати відповідний матеріал.

1.2. Основні системи та одиниці вимірювання

Вибір одиниць, необхідних для вимірювань усіх фізичних величин, можна зробити двома шляхами. По-перше, можна скласти набір одиниць, установлюючи кожну одиницю незалежно від усіх інших. По-друге, можна утворити систему одиниць, установлюючи незалежно тільки одиниці невеликого числа величин — так звані основні одиниці, відносячи всі інші до розряду похідних, розмір яких закономірно зв'язаний з розмірами основних одиниць. При сучасному рівні розвитку науки і техніки другий спосіб є єдиноприйнятним. Історично в хронологічному порядку лише найбільш відомими системами були Система Гаусса, Система Британської Асоціації, Система МКГСС, Природна система одиниць Планка, Система МТС, Міжнародна система одиниць — фр. **Le Systeme International d'Unites**, скорочено SI, англ. **International System of Units**.

Визначимо поняття фізичної величини та одиниці фізичної величини.

Фізична величина – властивість, загальна в якісному відношенні багатьом фізичним об’єктам (фізичним системам, їхнім станам і процесам, що відбувається в них), але в кількісному відношенні індивідуальна для кожного об’єкта.

Одиниця фізичної величини – фізична величина, якій за визначенням надано значення, що дорівнює одиниці.

На даний час SI містить у своїй основі сім основних (еталонних) одиниць і дві додаткові. Зупинимось на трьох, які задіяні в теоретичній механіці.

Основні фізичні величини (використовують в механіці).

1.Фізична величина – довжина (**length**), позначення L, одиниця фізичної величини – метр, скорочене позначення – м.

2. Фізична величина – маса (**mass**), позначення M, одиниця фізичної величини – кілограм, скорочене позначення – кг.

3. Фізична величина – час (**time**), позначення T, одиниця фізичної величини – секунда, скорочене позначення – с.

Решта величин (наводимо для загальної інформації):

4. Фізична величина – сила електричного струму (**electric current**), позначення I, одиниця фізичної величини – ампер (**ampere**), скорочені позначення А і A.

5. Фізична величина – термодинамічна температура (**temperature**), позначення Θ, одиниця фізичної величини – кельвін (**kelvin**), скорочені позначення К і K.

6. Фізична величина – сила світла (**luminous intensity**), позначення J, одиниця фізичної величини – кандела (**candela**), скорочені позначення кд і cd.

7. Фізична величина – кількість речовини (**amount of substance**), позначення N, одиниця фізичної величини – моль (**mole**), скорочені позначення моль і mol.

Поряд із сьома основними одиницями SI прийнято ще користуватися двома додатковими одиницями, досить корисними для вирішення фізичних задач, але приналежними скоріше до геометрії. Мова йде про радіан і стерадіан.

Додаткові фізичні величини.

Фізична величина – плоский кут (**plane angle**), позначення Ω, одиниця фізичної величини – радіан (**radian**), скорочене позначення рад.

Одиниця плоского кута – **радіан** дорівнює кутові між двома радіусами окружності, довжина дуги між якими дорівнює радіусу. В градусному обчисленні радіан дорівнює 57°17′44,8″.

Фізична величина – тілесний кут (**solid angle**), позначення Ω, одиниця фізичної величини – стерадіан (**steradian**), скорочене позначення ср.

Похідні одиниці фізичних величин

Похідні одиниці SI утворюються на підставі законів, що встановлюють зв’язок між фізичними величинами, або на підставі прийнятих визначень відповідних величин. Існують іменні величини на честь видатних вчених, які мали відношення до відповідних галузей науки. Скорочено ці величини завжди пишуться з великої літери, друга літера (якщо є) мала.

Для розмірності величин уведене позначення **dim** (скорочено від англ. **dimension** – розмірність, розмір). Таким чином, формула розмірності похідної одиниці у теоретичній механіці має вигляд:

$$[z] = dimz = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma},$$

де α, β, γ – показники ступеня, що називаються розмірностями похідних величин щодо відповідних основних одиниць. Якщо фізична величина не залежить від жодної з основних величин, то вона називається безрозмірнісною величиною. Для того, щоб одержати формулу розмірності якої-небудь похідної одиниці, треба у визначальне рівняння підставити розмірності всіх одиниць фізичних величин, що входять у нього, і зробити необхідні математичні операції.

Таблиця 1

Префікс, позначення				Множник	**Найменування множника**
Українське		**Латинське**			
тера	Т	tera	T	10^{12}	трильйон
гіга	Г	giga	G	10^{9}	мільярд
мега	М	mega	M	10^{6}	мільйон
кіло	к	kilo	k	10^{3}	тисяча
гекто	г	hecto	h	10^{2}	сто
дека	да	deca	da	10^{1}	десять
				$10^{0} =1$	одиниця
деци	д	deci	d	10^{-1}	одна десята
санти	с	centi	c	10^{-2}	одна сота
мілі	м	milli	m	10^{-3}	одна тисячна
мікро	мк	micro	μ	10^{-6}	одна мільйонна
нано	н	nano	n	10^{-9}	одна мільярдна
піко	п	pico	p	10^{-12}	одна трильйонна

В рамках системи SI до когерентної системи одиниць додані десяткові кратні та частинні одиниці, які утворюються від вихідної одиниці множенням або діленням на степінь числа 10. У Таблиці 1 наведені відповідні множники, приставки та їхні назви для деяких кратних та частинних одиниць вимірювань.

За необхідності будуть надані розмірності фізичних величин, які будуть введені під час вивчення дисципліни.

Сила F (вага G) уводиться на основі другого закону Ньютона (докладно про це у розділі «Динаміка»). Припускаючи в цьому співвідношенні m=1 кг, a=1 м/с^2, одержимо: 1 одиниця сили=(1 кг)•(1 м/с^2)=1 кг•м/с^2. Розмір одиниці дорівнює (1 кг)•(1 м)**:**(1 с)^2. Найменування цієї одиниці «ньютон», скорочене позначення Н. Ньютон – сила, що надає тілу з масою 1 кг прискорення 1 м/с^2 у напрямку дії сили. Розмірність одиниці сили

$$[F] = [m] \cdot [a] = LMT^{-2}.$$

1.3. Аксіоми статики

Аксіоми статики – це вихідні положення, які сформульовані на підставі численних дослідів та спостережень над навколишніми об’єктами реального світу, що приймаються без будь-яких доказів.

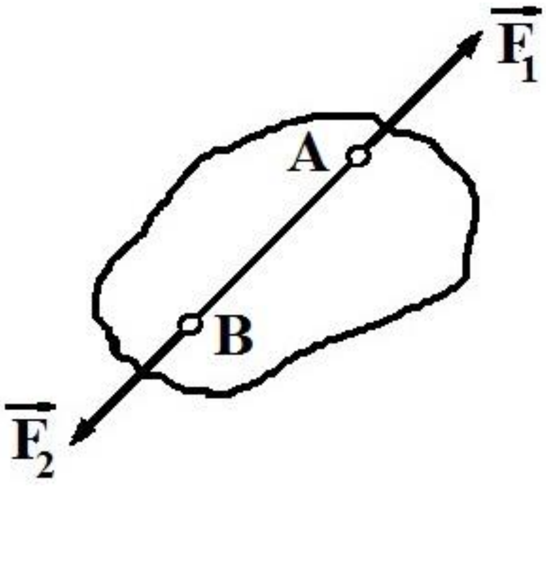


Рисунок 1.1.

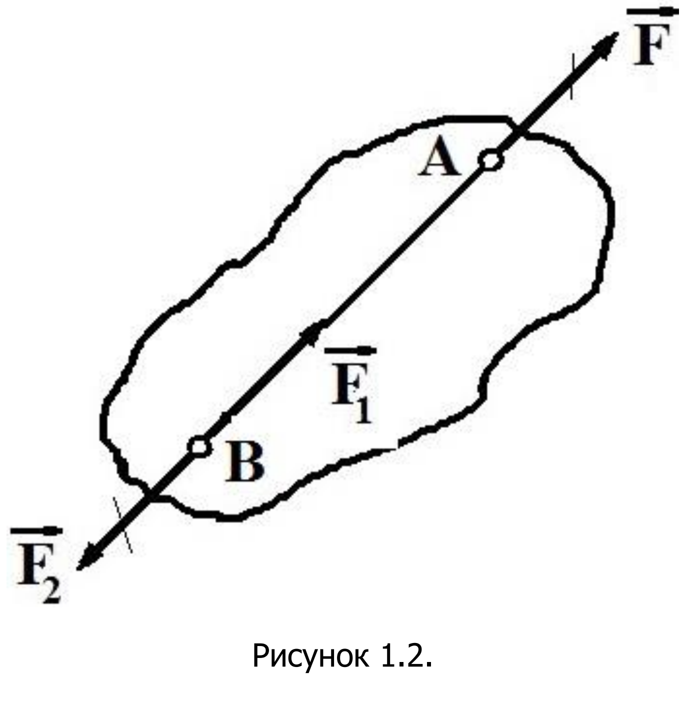


Рисунок 1.2.

<u>Аксіома (1) рівноваги системи двох сил</u> (рис. 1.1)

Якщо на вільне абсолютно тверде тіло діють дві сили, то тіло може знаходитися у рівновазі тоді і тільки тоді, коли ці сили рівні за модулем ($F_1 = F_2$) і спрямовані вздовж однієї прямої в протилежному напрямі.

<u>Аксіома (2) про додавання (відкидання) системи сил, яка еквівалентна нулю</u> (рис. 1.2)

Дія даної системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або від неї відкинути систему сил, еквівалентну нулю.

<u>Наслідок з 1-ї та 2-ї аксіом</u>. **Дія сили на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо перенести точку прикладення сили вздовж її лінії дії в іншу точку тіла.**

Нехай на тверде тіло діє сила $\vec{F}$, яку прикладено в точці A. На лінії дії цієї сили в точці B прикладемо еквівалентну нулю систему сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ (сили однакові за модулем $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}|$, спрямовані в протилежні сторони). Система сил $\vec{F}$ і $\vec{F}_2$ на підставі Аксіоми (1) еквівалентна нулю і на підставі Аксіоми (2) її можна відкинути. Таким чином, на тіло діє тільки сила $\vec{F}_1$. Вектор $\vec{F}$ можна вважати прикладеним в довільній точці на лінії дії цієї сили. Такий вектор називається **ковзним**.

<u>Аксіома (3) паралелограма сил</u> (рис. 1.3)

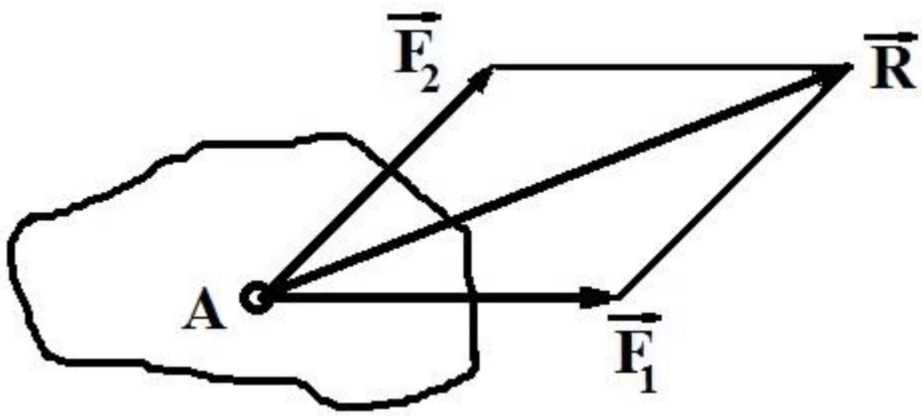


Рисунок 1.3.

Дві сили, що діють в одній точці твердого тіла, можна замінити однією рівнодіючою силою, що дорівнює за величиною і напрямом дії діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах.

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\vec{F}_1, \vec{F}_2)},$$

де $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ – кут між векторами $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.

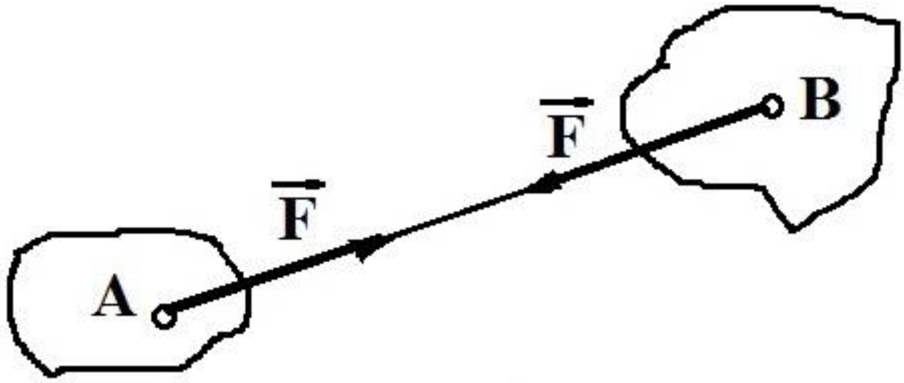


Рисунок 1.3.

Аксіома (4) дії та протидії (рис. 1.4)

Сили взаємодії двох матеріальних точок однакові за модулем, протилежні за напрямом і діють вздовж однієї прямої, що проходить через ці точки.

Аксіома (5) – принцип тверднення

Рівновага змінного (деформівного) тіла, що знаходиться під дією даної системи сил, не зміниться, якщо тіло вважати затверділим (абсолютно твердим).

Для формулювання останньої аксіоми статики необхідно ввести поняття в’язей і реакцій в’язей.

1.4. В’язі та їх реакції

Все, що обмежує переміщення даного тіла в просторі, називається в’яззю. **Сила, з якою дана в’язь діє на тіло, перешкоджаючи тим чи іншим його переміщенням: називається силою реакції (протидії) в’язі** або просто **реакцією в’язі**. Реакція в’язі спрямована в бік, протилежний тому, куди в’язь не дає переміщуватися тілу.

В механіці приймають наступне положення (**Аксіома (6) – принцип звільнення**)

будь-яке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо дію в’язей замінити їх реакціями, прикладеними до даного тіла.

Конструктивно в’язі можуть бути виконані у вигляді різних опор, шарнірних з’єднань, гнучких елементів тощо. Вважатиме, що в’язі виконані з абсолютно твердих тіл, тертям у місці з’єднання в’язі з основним тілом можна нехтувати. Такі в’язі будемо називати ідеальними. Розглянемо деякі типові види в’язів.

1. **Гладка поверхня або опора**. (рис. 1.5)

Реакція $\vec{N}$ спрямована за загальною нормаллю до поверхонь стику, має назву нормальної реакції.

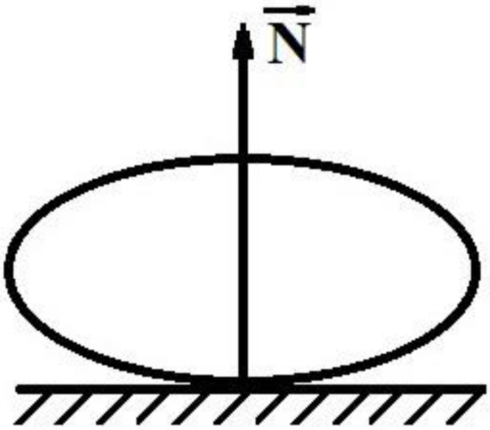


Рисунок 1.5.

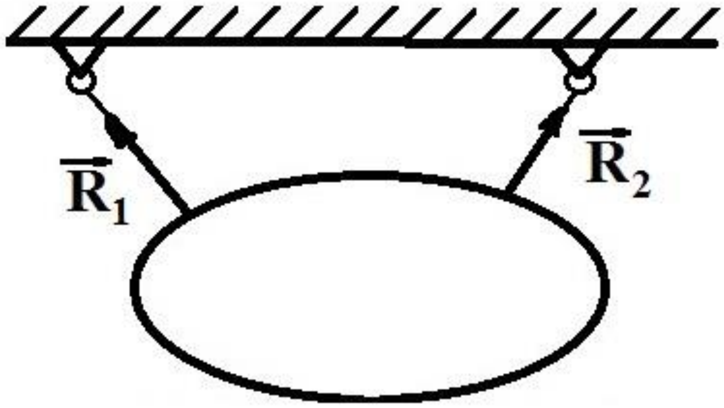


Рисунок 1.6.

2. **Гнучка в’язь (трос, нитка, канат)**. (рис. 1.6)

Гнучкі в’язі реалізують за допомогою ниток, шнурків, ланцюгів, канатів, які вважаємо нерозтяжними та невагомими. Реакція $\vec{R}_1$ (або інші за необхідності, наприклад, $\vec{R}_2$) спрямована вздовж нитки до точки підвісу.

3. **Циліндрична шарнірно-нерухома опора**. (рис. 1.7)

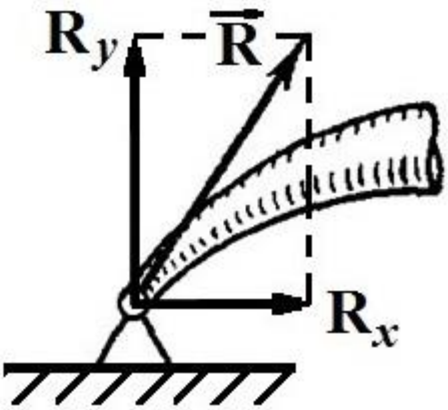


Рисунок 1.7.

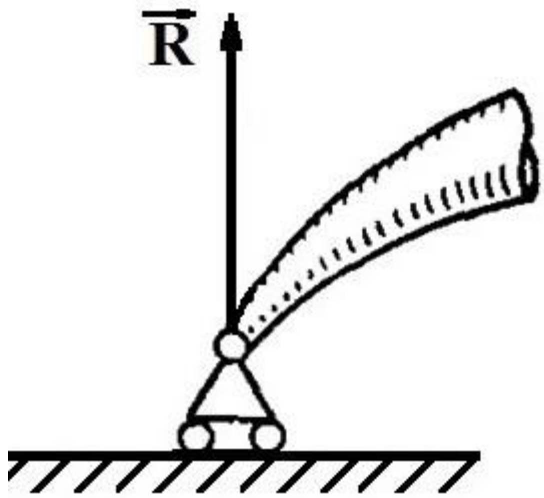


Рисунок 1.8.

Ця опора реалізується за допомогою двох циліндрів, які мають спільну геометричну вісь, спрямовану перпендикулярно до площини рисунку. Реакція такої опори проходить через її вісь, напрям дії може бути довільним в площині, перпендикулярній до осі опори. Реакція $\vec{R}$ має складові R_X, R_Y – проекції на відповідні осі. Шарнірно-рухома опора (нерухомий шарнір) дозволяє тілу вільно повертатися навколо осі шарніра, але перешкоджає його лінійним переміщенням у всіх напрямках.

4. **Циліндрична шарнірно-рухома опора**. (рис. 1.8)

Перешкоджає переміщенню закріпленої точки тіла за перпендикуляром до площини контакту, відповідно, реакція опори має напрям цього перпендикуляра. Відповідні котки дозволяють переміщувати тіло паралельно до нерухомої опорної поверхні.

5. Жорстке закладення. (рис. 1.9)

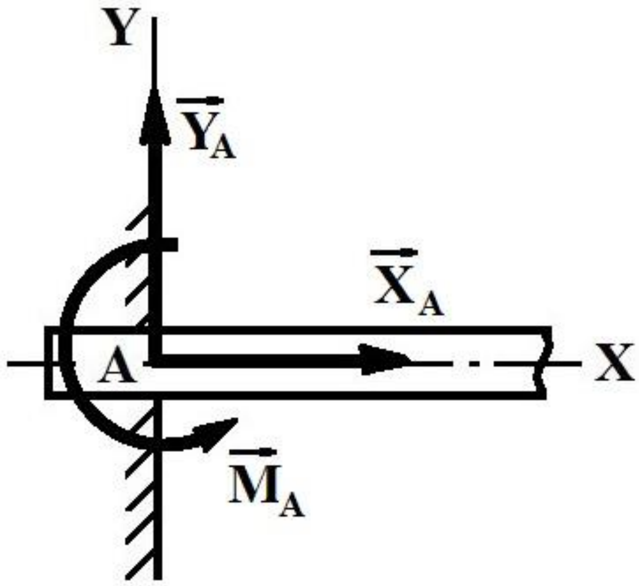


Рисунок 1.9.

Такий тип в'язі існує за умови нерухомого з'єднання тіла з опорою. Обмежуються лінійні переміщення та повертання тіла в місці закріплення (прямий кут між опорою та тілом залишається незмінним). Реакцію складають реактивна сила $\vec{R}_A$ (розкладається по осях на складові $\vec{X}_A$ і $\vec{Y}_A$) та момент $\vec{M}_A$, який зветься **реактивним моментом**. Поняття моменту буде введено у Лекції № 2.

Тема 2. Плоска система збіжних сил. Її рівнодіюча

2.1. Основні задачі статики. Система збіжних сил

У статиці абсолютно твердого тіла існують дві основні задачі:

1) **Перша задача статики,** або **Задача про приведення системи сил**: як дану систему сил замінити іншою, зокрема, більш простішою, еквівалентною до даної.

2) **Друга задача статики,** або **Задача про рівновагу**: яким умовам повинна задовольняти система сил, прикладена до даного тіла (або МТ), щоб вона була урівноваженою системою. Встановлені умови рівноваги

використовують при розв’язанні задач з визначення відомих активних сил і невідомих реакцій в’язей.

Розв’язують зазначені задачі статики у геометричний або аналітичний способи.

2.2. Геометричний (графічний) спосіб додавання збіжних сил

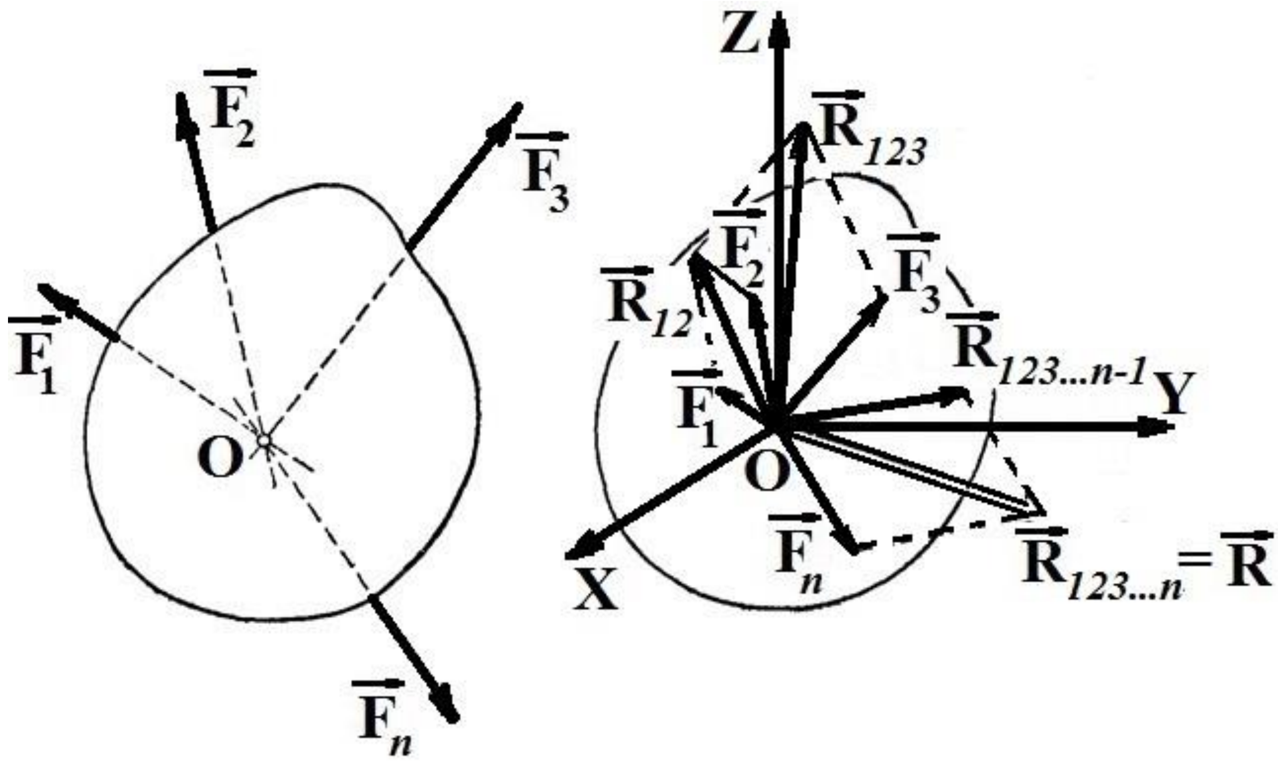


Рисунок 1.10.

Нехай задана система збіжних сил $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,\ldots,\ \vec{F}_n$, прикладених до абсолютно твердого тіла. Перенесемо точки прикладення сил по лініях їх дії в точку перетину цих ліній. Отримуємо систему сил, прикладених в одній точці. На основі Аксіоми 3 проводимо послідовне додавання сил:

$$\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

$$\vec{R}_{123} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

$$\vec{R}_{123\ldots n} = \vec{R}_{12\ldots n-1} + \vec{F}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$$

або

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{1.1}$$

Таким чином, система збіжних сил має рівнодіючу, що дорівнює векторній сумі, або **головному вектору**, цих сил і прикладену в точці збігу (рис. 1.10).

Побудова рівнодіючої може бути спрощена, якщо замість паралелограма побудувати **силовий багатокутник**, для якого від кінця попередньої сили відкладається вектор наступної сили. На рис. 1.11 показано побудову силового багатокутника для тіла під дією 4-х збіжних сил.

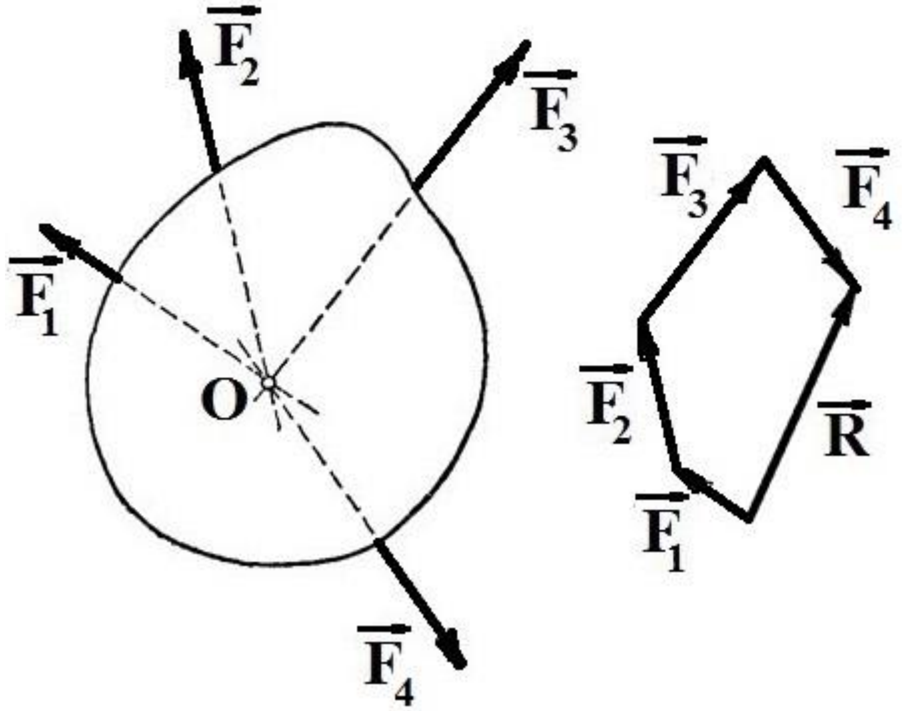


Рисунок 1.11.

2.3. Аналітичний спосіб додавання збіжних сил

Поряд з графічним (геометричним) способом найбільш загальним способом визначення модуля та напряму рівнодіючої є аналітичний спосіб, який витікає з рівняння (1.1) і ґрунтується на понятті про проекцію сили на вісь, а саме: **проекція вектора сили на вісь є алгебраїчна величина, яка дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між додатним напрямком осі і вектором сили**. Спроектуємо рівність (1.1) на осі координат:

$$R_X = F_{1X} + F_{2X} + \ldots + F_{nX} = \sum_{i=1}^{n} F_{iX}$$
$$R_Y = F_{1Y} + F_{2Y} + \ldots + F_{nY} = \sum_{i=1}^{n} F_{iY}, \qquad (1.2)$$
$$R_Z = F_{1Z} + F_{2Z} + \ldots + F_{nZ} = \sum_{i=1}^{n} F_{iZ}$$

де F_{iX}, F_{iY}, F_{iZ} – проекції сили $\vec{F_i}$ на осі, а R_X, R_Y, R_Z – проекції рівнодіючої $\vec{R}$ на ті ж осі. Отже:

проекції рівнодіючої системи збіжних сил на координатні осі дорівнюють алгебраїчним сумам проекцій цих сил на відповідні осі. За допомогою виразів (1.2) можна знайти модуль рівнодіючої та її напрям в прямокутній (декартовій) системі координат:

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{iX}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iY}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iZ}\right)^2}. \qquad (1.3)$$

$$\cos\left(\vec{R}, X\right) = \frac{R_X}{R}, \ \ \cos\left(\vec{R}, Y\right) = \frac{R_Y}{R}, \ \ \cos\left(\vec{R}, Z\right) = \frac{R_Z}{R}. \qquad (1.4)$$

Для плоскої системи змінні, що відповідають осі Z, тотожно дорівнюють нулю, що призводить до спрощення формул (1.2)-(1.4).

2.4. Умови рівноваги збіжної системи сил. Алгоритм аналітичного розв'язання задач на рівновагу

Для рівноваги системи збіжних сил, прикладених до твердого тіла, необхідно та достатньо, щоб їх рівнодіюча дорівнювала нулю, або щоб силовий багатокутник був замкнений (рис. 1.12).

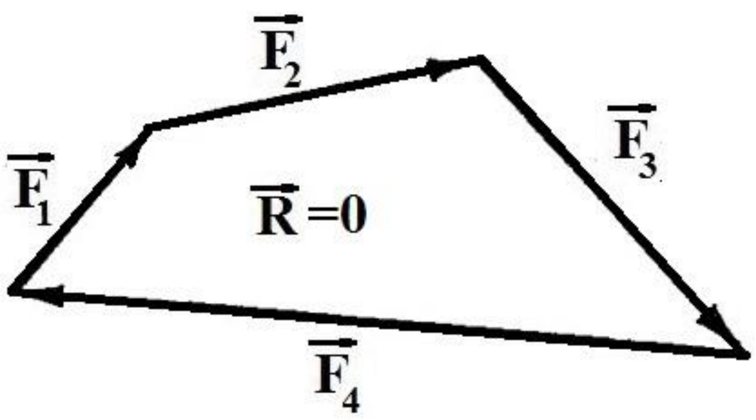


Рисунок 1.12.

Рівність

$$\vec{R} = 0 \qquad (1.5)$$

еквівалентна 3-м скалярним рівнянням, які є аналітичною умовою рівноваги:

$$R_X = \sum_{i=1}^{n} F_{iX} \equiv 0,$$

$$R_Y = \sum_{i=1}^{n} F_{iY} \equiv 0,$$

$$R_Z = \sum_{i=1}^{n} F_{iZ} \equiv 0. \qquad (1.6)$$

Для плоскої системи сил рівняння для R_Z не потрібно.

Умови рівноваги (як в аналітичній, так і в геометричній формі) дозволяють проконтролювати, чи знаходиться у рівновазі задана система сил.

Задачі, в яких кількість невідомих величин дорівнює кількості рівнянь рівноваги, до яких вони входять, називають **статично визначеними**. Задачі, в яких кількість невідомих перевищує кількість рівнянь рівноваги, до яких вони входять, називають **статично невизначеними**.

Всі задачі на рівновагу матеріального об’єкта рекомендується розв’язувати за таким алгоритмом:

1. Виділити матеріальний об’єкт (точку, тверде тіло), рівновага якого буде розглядатися.
2. До виділеного об’єкта прикласти всі активні сили.
3. Користуючись принципом звільнення від в’язей, відкинути в’язі, які накладені на об’єкт, замінивши їх дію відповідними реакціями.
4. Вибрати систему координат, якщо в поставленій задачі вона не задана.
5. Для отриманої системи сил, що діють на об’єкт, застосувати умови рівноваги.
6. Розв’язати систему рівнянь рівноваги та визначити невідомі реакції.

Контрольні питання

1. Що називається механікою ?
2. Що вивчається у розділі статика ? Назвіть дві основні задачі статики.
3. Назвіть основні поняття статики.
4. Які існують аксіоми статики ?
5. Які типи в’язей вам відомі ? Наведіть приклади.
6. У чому полягають векторний та аналітичний способи додавання сил та визначення рівнодіючої ?
7. Сформулюйте аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил.
8. Що таке статично визначені та статично невизначені задачі ?

Розділ Статика. Лекція № 2

План лекції

1. Момент сили відносно точки
2. Момент сили відносно осі
3. Додавання двох паралельних сил.
4. Момент пари сил
5. Зведення довільної системи сил до даного центру
6. Обчислення головного вектора та головного моменту. Умови рівноваги системи сил
7. Умови рівноваги плоскої системи сил
8. Розподілені навантаження

Тема 3. Теорія моменту сили відносно центра та осі

3.1. Момент сили відносно точки

Поняття про момент сили є одним з основних понять механіки, яке широко використовують і в теоретичних дослідженнях, і при практичних розрахунках. Введемо поняття моменту сили:

Задана сила $\vec{F}$, яка зображена у вигляді вектора $\overrightarrow{AB}$, і прикладена до тіла у точці A. Визначимо момент сили $\vec{F}$ відносно центру O (рис. 2.1).

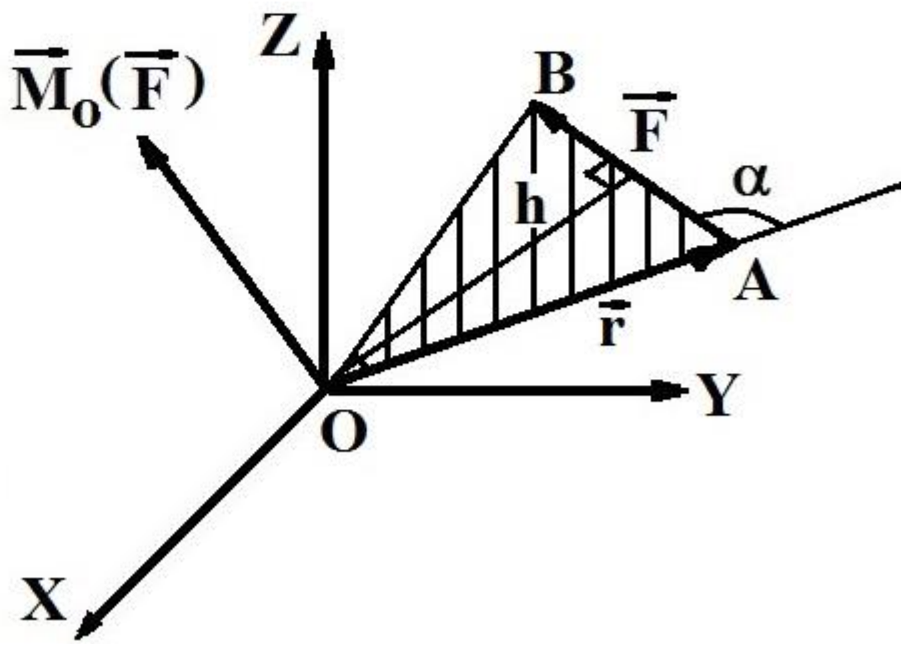


Рисунок 2.1.

Якщо O – точка, відносно якої визначається момент сили $\vec{F}$, то момент сили позначається символом $\vec{M}_o(\vec{F})$.

Моментом сили відносно будь-якої точки (центру) називається вектор, який чисельно дорівнює добутку модуля сили на плече, тобто на найкоротшу відстань від вказаної точки до лінії дії сили. Ця відстань називається **плече**. **Вектор спрямований перпендикулярно до площини, що проходить через обрану точку та лінію дії сили, в той бік, звідки «обертання» сили навколо точки відбувається проти ходи годинникової стрілки**. Момент сили характеризує її обертальну дію.

Якщо точка прикладення сили $\vec{F}$ визначається радіус-вектором $\vec{r}$ відносно O, то справедливе співвідношення

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{2.1}$$

Момент сили дорівнює векторному добутку вектора $\vec{r}$ на вектор $\vec{F}$. Модуль векторного добутку дорівнює:

$$M_o(\vec{F}) = \pm rF\sin\alpha = \pm Fh, \tag{2.2}$$

де h – плече сили. Для моменту правило знаків:
якщо сила намагається обертати тіло навколо центра проти ходи годинникової стрілки, обираємо знак «плюс», за ходою годинникової стрілки, обираємо знак «мінус» (рис. 2.2).

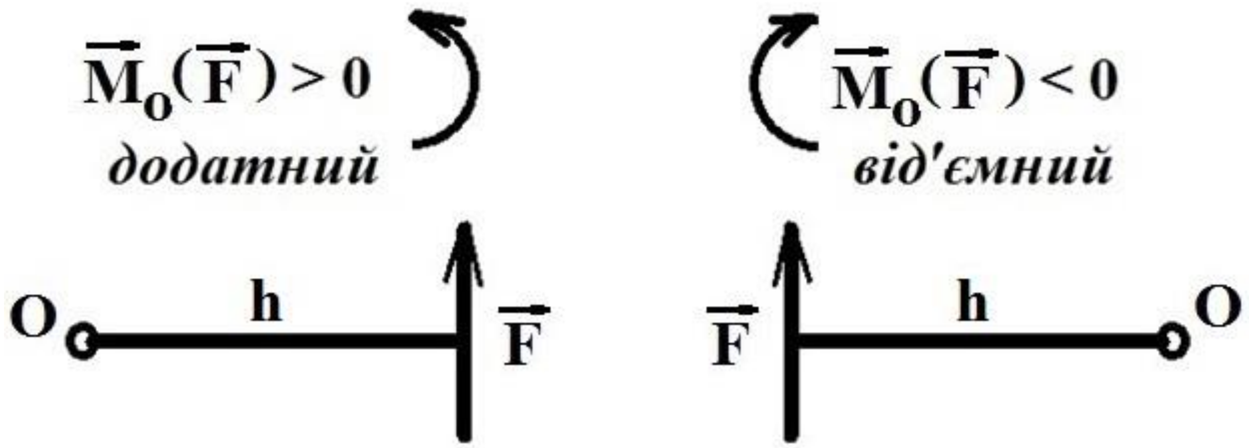


Рисунок 2.2.

Якщо лінія дії сили проходить через центр, то момент сили відносно цього центру буде дорівнювати нулю.

Момент сили відносно точки не змінюється при перенесенні сили вздовж її лінії дії, оскільки незмінним залишається плече сили відносно центру.

За формулою (2.2) визначимо розмірність моменту сили. 1 одиниця моменту сили=(1 Н)•(1 м)=1 кг•м/с^2•м. Розмір одиниці дорівнює (1 кг)•(1 м)^2**:**(1 с)^2. Найменування цієї одиниці «ньютон-метр», скорочене позначення Н•м. 1 Ньютон-метр – це момент, який утворює сила 1 Н на важелі довжиною 1 м. Розмірність одиниці моменту сили:

$$[M] = [F] \cdot [h] = L^2 M T^{-2}.$$

Нехай x, y, z – координати точки прикладення сили, а F_X, F_Y, F_Z – проекції сили на координатні осі. Тоді, якщо точка O знаходиться у початку координат, момент сили має вигляд ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орти координатних осей):

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_X & F_Y & F_Z \end{vmatrix} =$$

$$= (yF_Z - zF_Y)\vec{i} + (zF_X - xF_Z)\vec{j} + (xF_Y - yF_X)\vec{k}. \qquad (2.3)$$

З цього слідує, що проекції моменту сили на координатні осі визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} M_{OX}(\vec{F}) &= yF_Z - zF_Y \\ M_{OY}(\vec{F}) &= zF_X - xF_Z. \\ M_{OZ}(\vec{F}) &= xF_Y - yF_X \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Модуль моменту $\vec{M}_o(\vec{F})$ і косинуси кутів, які він утворює з осями координат, можна обчислити за формулами:

$$\left|\vec{M}_o(\vec{F})\right| = \sqrt{(yF_Z - zF_Y)^2 + (zF_X - xF_Z)^2 + (xF_Y - yF_X)^2}$$

$$\begin{aligned} \cos(\vec{M}_o, OX) &= M_{OX}(\vec{F}) / \left|\vec{M}_o(\vec{F})\right| \\ \cos(\vec{M}_o, OY) &= M_{OY}(\vec{F}) / \left|\vec{M}_o(\vec{F})\right|. \\ \cos(\vec{M}_o, OZ) &= M_{OZ}(\vec{F}) / \left|\vec{M}_o(\vec{F})\right| \end{aligned}$$

3.2. Момент сили відносно осі

Нехай до тіла в деякій точці прикладена сила $\vec{F}$ (рис. 2.3). **Проекцією сили на площину** називається **вектор**, початок і кінець якого збігаються з проекцією початку та кінця сили на цю площину.

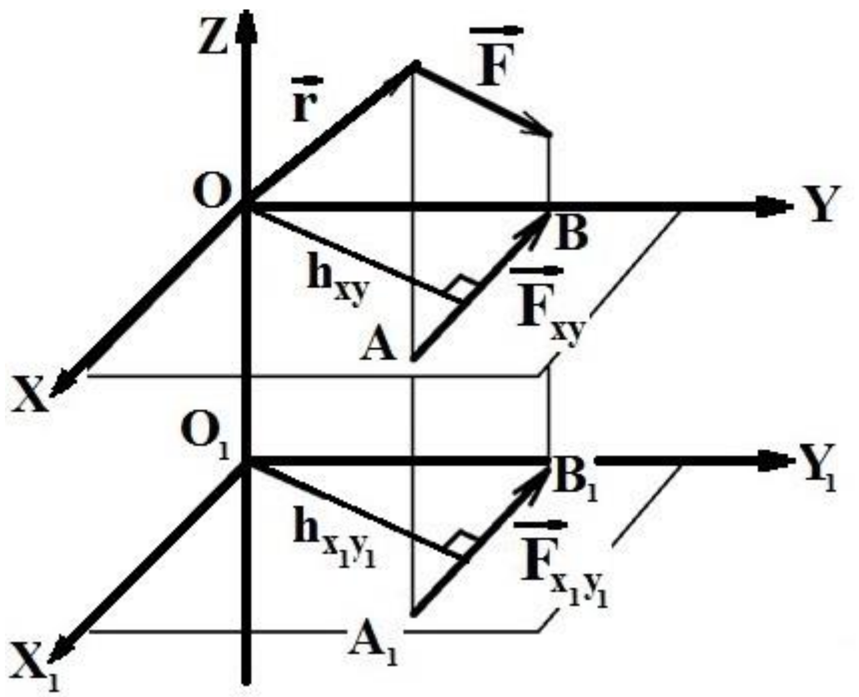


Рисунок 2.3.

Позначимо $\vec{F}_{xy}$ проекцію сили $\vec{F}$ на площину XOY, перпендикулярну до осі Z, h_{xy} – плече проекції моменту $M_{OZ}(\vec{F})$ відносно точки O. Тоді момент сили:

$$M_{OZ}(\vec{F}) = |\vec{F}_{xy}| h_{xy}. \qquad (2.5)$$

Очевидно, той самий результат можна отримати, якщо спроектувати силу $\vec{F}$ на площину X_1OY_1, перпендикулярну до осі Z з проекцією $\vec{F}_{x_1y_1}$, $h_{x_1y_1}$ – плече проекції моменту $M_{O_1Z}(\vec{F})$ відносно точки O_1. Момент сили за аналогією з (2.5):

$$M_{O_1Z}(\vec{F}) = |\vec{F}_{x_1y_1}| h_{x_1y_1}.$$

З рівності проекцій отримуємо

$$M_{OZ}(\vec{F}) = M_{O_1Z}(\vec{F}) = \pm |\vec{F}_{xy}| h_{xy}, \qquad (2.6)$$

тобто проекція моменту сили відносно точки на вісь, що проходить через цю точку, не залежить від вибору точки на осі. Тому в подальшому будемо опускати позначення точки, залишаючи тільки позначення осі, а саме $M_Z(\vec{F})$.

Моментом сили відносно осі називається алгебраїчний момент проекції цієї сили на площину, перпендикулярну осі, відносно точки перетину осі з цією площиною.

Якщо з боку позитивного напряму осі ми бачимо, що сила намагається повернути тіло проти ходу годинникової стрілки, момент є додатним. Якщо за ходою годинниковою стрілки – від'ємним.

З формули (2.6) слідує, що **момент сили відносно осі дорівнює нулю** у двох випадках:

1. Коли проекція сили на площину, перпендикулярну осі, дорівнює нулю, тобто коли **сила та вісь паралельні**.
2. Коли плече проекції $h = h_{xy} = 0$, тобто коли **лінія дії сили перетинає вісь**.

Фактично, зазначені умови еквівалентні одній умові: **момент сили відносно осі дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли лінія дії сили та вісь знаходяться в одній площині**.

Для обчислення моментів сили відносно осей координат використаємо формули (2.4), відкидаючи позначення O в виразах для проекцій моменту.

3.3. Додавання двох паралельних сил

Для сил, не рівних за модулем, можна визначити рівнодіючу. На рис. 2.4 і рис. 2.5 показано варіанти дії сил в одному напрямі та в різних, для яких визначено рівнодіючу та місце її знаходження.

Рівнодіюча двох паралельних сил, спрямованих в один бік, паралельна до цих сил, спрямована в той самий бік, що й зазначені сили. Ця рівнодіюча дорівнює сумі сил, а лінія її дії поділяє відстань між точками прикладення цих сил внутрішньо на частини, обернено пропорційні до цих сил (рис. 2.4).

Рівнодіюча двох паралельних сил, не однакових за модулем та протилежно спрямованих, є паралельною до цих сил, спрямована у бік більшої за модулем сили і дорівнює різниці сил. Лінія її дії

проходить через точку, яка лежить зовні відрізка, що поєднує початки векторів сил, з боку більшої за модулем сили та поділяє відстань між точками прикладення сил зовнішньо на відрізки, обернено пропорційні до модулів сил. (рис. 2.5).

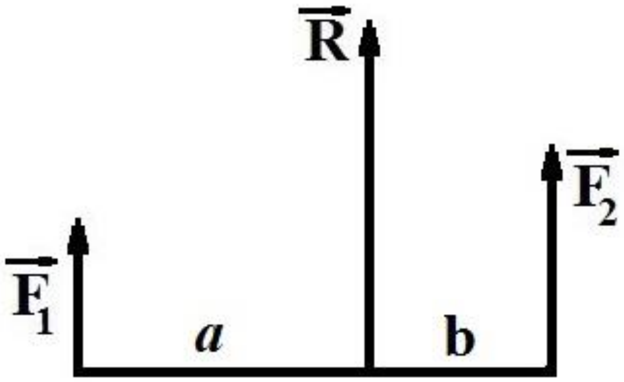


Рисунок 2.4.

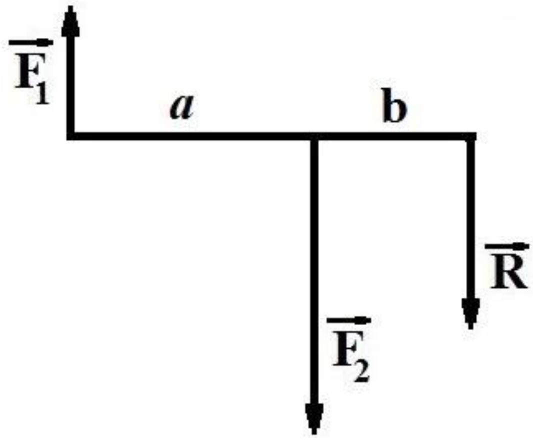


Рисунок 2.5

$$R = F_2 + F_1, \frac{F_2}{F_1} = \frac{a}{b}$$

$$R = F_2 - F_1, \frac{F_2}{F_1} = \frac{a+b}{b}$$

Якщо є сили, рівні за модулем і спрямовані протилежно одна до одній, то формально в такому випадку рівнодіюча дорівнює нулю, однак тіло під дією такої системи сил не буде знаходитись у рівновазі (наприклад, різноспрямований рух лівої та правої рук, що утримують кермо автомобіля, і, як наслідок, обертання керма).

Цей випадок особливий, оскільки такі дві сили є якісно новим елементом статики, який називається **парою сил**.

3.4. Момент пари сил

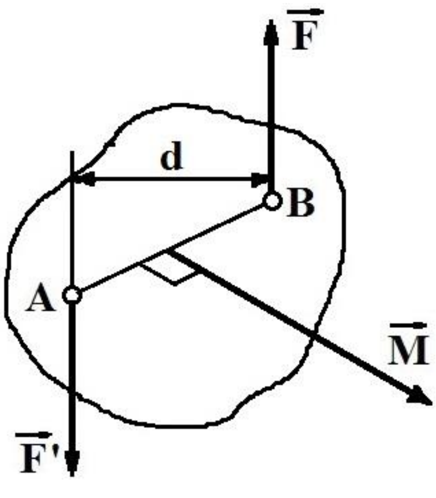


Рисунок 2.6.

Парою сил називається система двох рівних за модулем, паралельних і спрямованих в протилежні боки сил, діючих на абсолютно тверде тіло.

Пара сил – це особлива міра механічної взаємодії тіл. Система сил $\vec{F}$, $\vec{F}^*$, яка утворює пару, не знаходиться у рівновазі, не має рівнодіючої (рис. 2.6).

Площина, що проходить через лінії дії пари сил, називається **площиною дії пари**. Відстань d між лініями дії сил пари називається **плечем пари**.

Дія пари сил на тверде тіло зводиться до деякого обертального ефекту, який характеризується величиною, що називається **моментом пари** $\vec{M}$. Цей момент визначається: 1) модулем $M = \pm Fd$; 2) положенням у просторі площини дії пари; 3) напрямом повороту пари у цій площині. Вектор-момент пари спрямовують відповідно до поняття векторного добутку перпендикулярно до площини дії пари так, щоб з його кінця було видно намагання пари сил обертати тіло проти ходу годинникової стрілки (рис. 2.7).

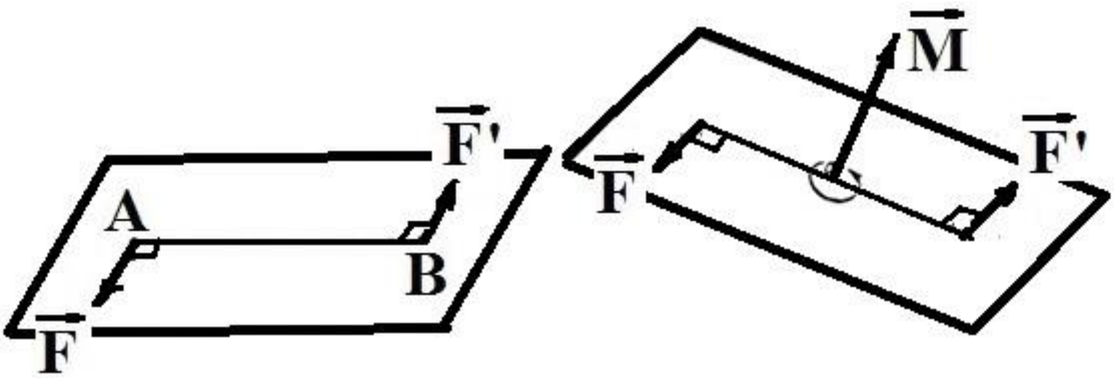


Рисунок 2.7.

Домовимося вважати момент **додатним, якщо пара намагається повернути тіло проти ходи годинникової стрілки**, та **від'ємним, якщо за ходою годинникової стрілки** (рис. 2.8).

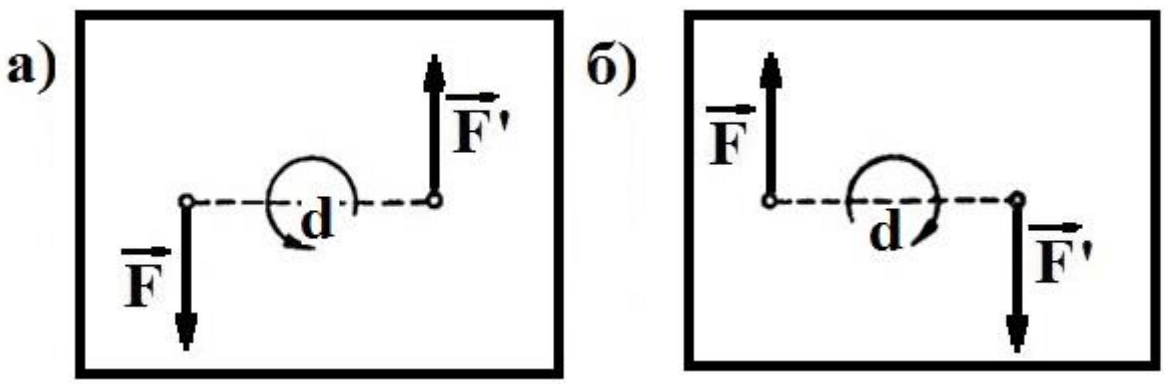


Рисунок 2.8.

Оскільки момент пари сил не залежить від вибору центру моментів сил пари, то можна допустити, що вектор-момент пари сил можна прикладати в будь-якій точці простору, тобто вважати його вільним вектором. Таким чином, задану пару сил, не змінюючи її дії на тверде тіло, можна переносити куди завгодно в площині дії пари.

Тема 4. Зведення довільної системи сил. Умови рівноваги

4.1. Зведення довільної системи сил до даного центру

Головна теорема статики:

Довільна система сил, що діють на тверде тіло, може бути приведена до даного центру, тобто замінена іншою, їй еквівалентною, але значно простішою, яка складається тільки з однієї сили та пари.

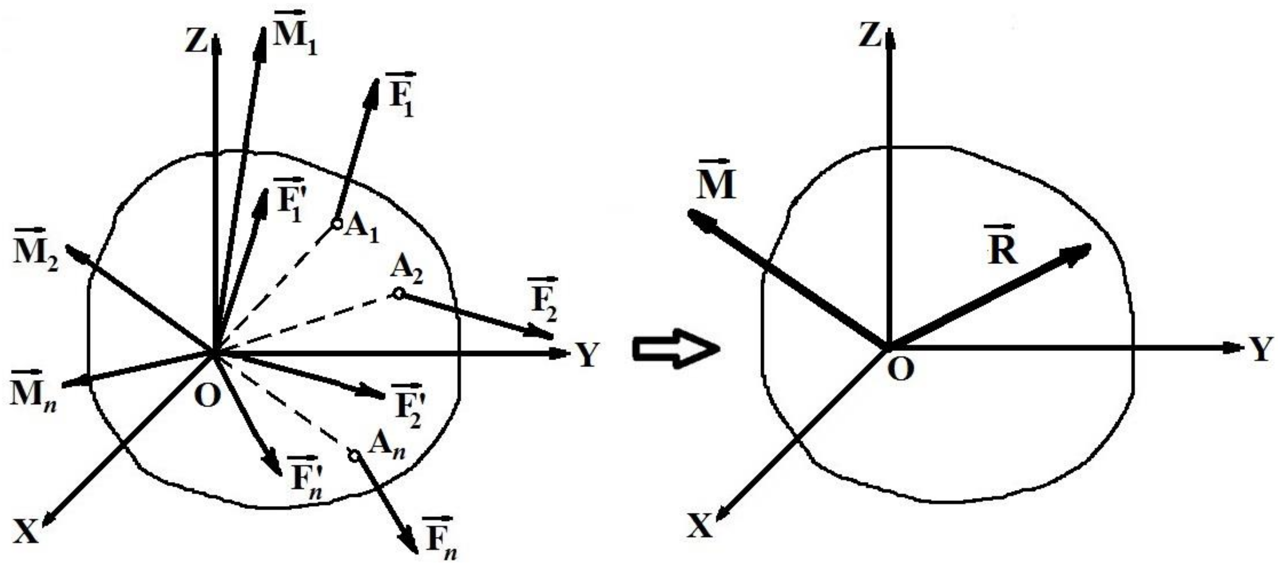


Рисунок 2.9.

Нехай на тіло діє довільна система сил $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,\ldots,\ \vec{F}_n$. Обираємо довільну точку O за центр приведення та перенесемо всі сили до неї, приєднуючи при цьому відповідні пари. Тоді на тіло буде діяти система сил:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}'_1,\ \vec{F}_2 = \vec{F}'_2,\ldots,\ \vec{F}_n = \vec{F}'_n, \tag{2.7}$$

прикладених в центрі O, і система пар, моменти яких:

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1),\ \vec{M}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2),\ldots,\ \vec{M}_n = \vec{M}_O(\vec{F}_n). \tag{2.8}$$

Систему збіжних сил, прикладених в точці O, замінюють однією силою:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{2.9}$$

Систему приєднаних пар замінимо однією еквівалентною парою, додаючи вектори моментів кожної пари:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i). \quad (2.10)$$

Одержану збіжну систему сил і систему пар сил можна замінити однією силою $\vec{R}$ і однією парою сил з моментом $\vec{M}_O$ (рис. 2.9). Як відомо, величина $\vec{R}$, яка дорівнює геометричній сумі всіх сил, називається **головним вектором системи сил**; величина $\vec{M}_O$, яка дорівнює геометричній сумі моментів всіх сил відносно центра O, називається **головним моментом системи сил** відносно цього центра.

В даному випадку сила $\vec{R}$ не є рівнодійною даної системи сил через те, що вона замінює систему сил тільки разом з парою. Головний вектор не залежить, а головний момент залежить від вибору центру зведення.

4.2. Обчислення головного вектора та головного моменту. Умови рівноваги системи сил

За формулами (2.9), (2.10) у проекціях на осі декартових координат отримуємо:

$$R_X = \sum_{i=1}^{n} F_{iX},\ R_Y = \sum_{i=1}^{n} F_{iY},\ R_Z = \sum_{i=1}^{n} F_{iZ}; \quad (2.11)$$

$$M_{OX} = \sum_{i=1}^{n} M_{OX}(\vec{F}_i),\ M_{OY} = \sum_{i=1}^{n} M_{OY}(\vec{F}_i),$$

$$M_{OZ} = \sum_{i=1}^{n} M_{OZ}(\vec{F}_i), \quad (2.12)$$

звідки знайдемо величини головного вектора та головного моменту:

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2}, \qquad M_O = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2}.$$

Напрям $\vec{R}$ і $\vec{M}_O$ визначається косинусами кутів.

Основна теорема статики розв’язує першу основну задачу статики – спрощення довільної системи сил, її зведення до найпростішого вигляду.
З основної теореми статики випливають умови рівноваги системи сил, діючих на тверде тіло. Згідно з аксіомами статики, система перебуває у рівновазі, коли вона еквівалентна нулю, тобто для рівноваги довільної системи сил, діючих на

тверде тіло, необхідно та достатньо, щоб головний вектор і головний момент відносно довільної точки дорівнювали нулю:

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O = 0. \tag{2.13}$$

Умови (2.13) називають **умовами рівноваги довільної просторової системи сил у векторній формі**. Якщо при рівновазі системи сил головний вектор дорівнює нулю, то його проекції на координатні осі також дорівнюють нулю. Це стосується також і головного моменту. Це відповідає шести алгебраїчним рівнянням, які виражають **умови рівноваги системи сил в аналітичній формі**. Отже, маємо шість умов:

$$\begin{aligned} R_X = 0, \quad R_Y = 0, \quad R_Z = 0; \\ M_{OX} = 0, \quad M_{OY} = 0, \quad M_{OZ} = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iY} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iZ} = 0;$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{OX}(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{OY}(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{OZ}(\vec{F}_i) = 0. \tag{2.15}$$

Таким чином, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно та достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил на три координатні осі та алгебраїчна сума їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю. Якщо ці умови містять невідомі (наприклад, реакції в'язей), то вони називаються рівняннями рівноваги твердого тіла.

4.3. Умови рівноваги плоскої системи сил

Систему сил, лінії дії яких довільно розташовані в одній площині, називають довільною плоскою системою сил. Така система є окремим випадком довільної просторової системи сил. Оскільки достатньо багато практичних задач зводиться до цього випадку, зупинимось далі на аналізі довільної плоскої системи сил.

Розглянемо в площині XOY довільне тіло, яке навантажено системою сил (рис. 2.10). Обираємо центром зведення точку O цієї площини. Згідно з головною теоремою статики задана система сил зведеться до однієї сили $\vec{R}$, яка є головним вектором і її визначають за формулою (2.9), і до пари сил, момент якої $\overrightarrow{M_O}$ дорівнює головному моменту і його визначають за формулою (2.10).

Оскільки всі сили заданої системи розташовані в одній площині, то сила $\vec{R}$ теж лежить у цій площині. Крім того, зводячи сили до центру O, дістанемо пари, які теж розташовані у той самій площині. Тоді і результуюча пара лежить у цій площині, а вектор-момент $\overrightarrow{M_O}$ спрямований перпендикулярно до неї. Для довільної плоскої системи сил головний вектор і головний момент взаємно перпендикулярні.

Головний вектор $\vec{R}$ довільної плоскої системи сил дорівнює геометричній сумі всіх сил системи та лежить у площині дії сил, а головний момент її відносно деякого центру дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил системи відносно того ж центру.

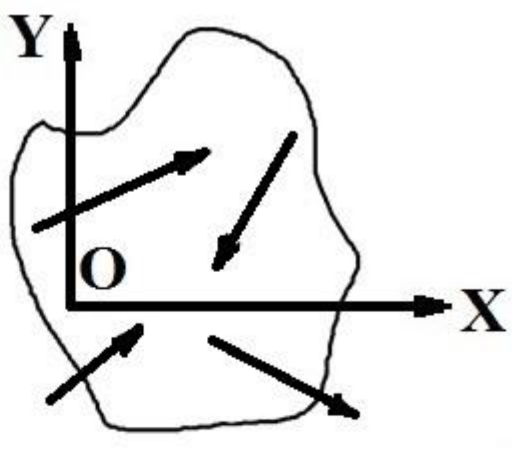


Рисунок 2.10.

Введемо в площині дії системи сил систему координат XOY. Умова

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iZ} = 0$$

є тотожністю. Оскільки кожна з сил розміщена в площині з осями OX і OY, моменти сил відносно цих осей дорівнюють нулю, тобто умови

$$\sum_{i=1}^{n} M_{OX}(\vec{F_i}) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{OY}(\vec{F_i}) = 0$$

також тотожності. Залишаються тільки 3 умови:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iY} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{OZ}(\vec{F_i}) = 0. \qquad (2.16)$$

Моменти сил відносно осі OZ, перпендикулярної площині дії сил, дорівнюють алгебраїчним моментам цих сил відносно точки O:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{OZ}(\vec{F_i}) = \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F_i}) = 0.$$

Рівняння (2.16) є основною формою умов рівноваги для плоскої системи сил.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно іта достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил на дві координатні осі, що лежать у площині дії сил, і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільної точки цієї площини дорівнювали нулю.

Існують ще еквівалентні форми умов рівноваги.

Друга форма умов рівноваги: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно та достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно довільних трьох точок, які не лежать на одній прямій в площині дії сил, дорівнювали нулю. Цю умову ще називають теоремою про три моменти.

Третя форма умов рівноваги: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно та достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно довільних двох точок та алгебраїчна сума проекцій усіх сил на вісь, яка не перпендикулярна до прямої, що проходить через обрані точки, дорівнювали нулю.

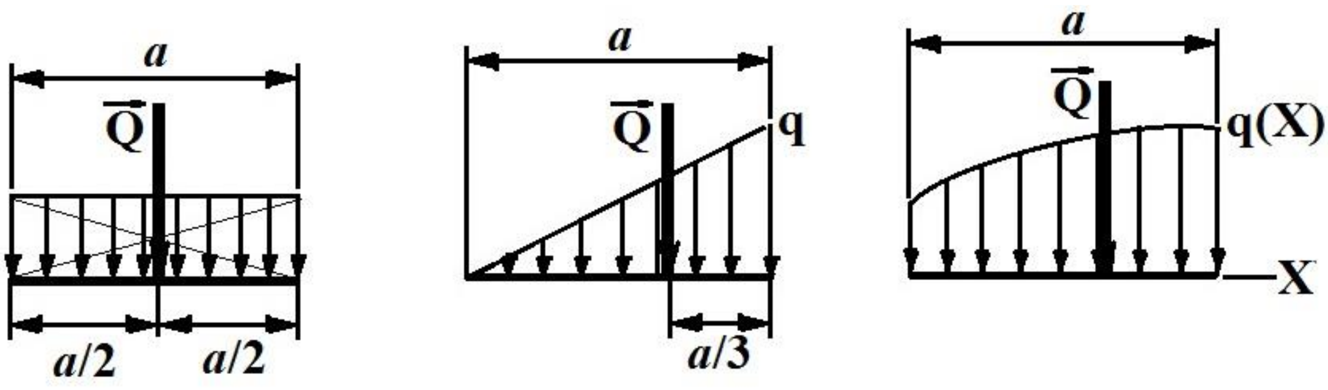
4.4. Розподілені навантаження

В інженерних розрахунках часто є навантаження, розподілені за об’ємом тіла, поверхнею або вздовж деякої лінії. Такі навантаження називають розподіленими. Систему розподілених навантажень характеризують своєю інтенсивністю q, тобто величиною сили, що приходиться на одиницю об’єму, площі чи довжини навантаженого тіла. Інтенсивність розподілених об’ємних сил вимірюють у [Н/м^3], поверхневих сил у [Н/м^2], розподілених вздовж лінії – у [Н/м].

Розглянемо деякі прості приклади розподілених сил, які лежать в одній площині.

1. Сили, рівномірно розподілені вздовж відрізку прямої (рис. 2.11, а). Для такої системи сил інтенсивність q є величиною постійною. Для статичних розрахунків цю систему можна замінити рівнодіючою силою $\vec{Q}$, модуль якої дорівнює $Q = qa.$ Сила $\vec{Q}$ прикладена посередині відрізка, на якому діє розподілене навантаження.
2. Сили, розподілені вздовж відрізка прямої за лінійним законом. Прикладом такого розподілу є тиск рідини на вертикальну або нахилену прямолінійну

поверхню (рис. 2.11, б). За модулем рівнодійна $Q = qa/2$, а точкою прикладання є координата центру ваги трикутника, тобто рівнодіюча сила $\vec{Q}$ розташована на відстані $a/3$ від бокової сторони трикутника.



а) б) в)

Рисунок 2.11.

3. Сили, розподілені вздовж відрізка прямої за довільним законом (рис. 2.11, в). За модулем рівнодійна Q дорівнює площі фігури, яка відображає закон зміни інтенсивності q, а лінія дій рівнодіючої проходить через центр ваги вказаної фігури.

Контрольні питання

1. Що називається моментом сили відносно точки та відносно осі ? Сформулюйте правило знаків для нього.
2. Що називається парою сил ?
3. Сформулюйте головну теорему статики.
4. Дайте визначення головного вектора системи сил та головного моменту системи сил.
5. Як обчислюються головний вектор системи сил та головний момент системи сил ?
6. Сформулюйте умови рівноваги довільної системи сил (просторової та плоскої).

Розділ Статика. Лекція № 3

План лекції

1. Задача розрахунку ферми. Основні допущення
2. Задача розрахунку ферми. Приклад
3. Центр паралельних сил
4. Центр ваги твердого тіла
5. Центр ваги плоскої фігури. Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі
6. Визначення центру ваги плоскої фігури по центрах ваги її частин. Метод додавання та метод відняття
7. Тертя ковзання
8. Тертя кочення

Тема 5. Ферми та методи їх розрахунку

5.1. Задача розрахунку ферми. Основні допущення

Подальшим розвитком стержньових конструкцій є **ферми – це геометрично незмінні конструкції, що складаються з великої кількості прямолінійних стержнів, які зв'язані між собою шарнірами**. (рис. 3.1).

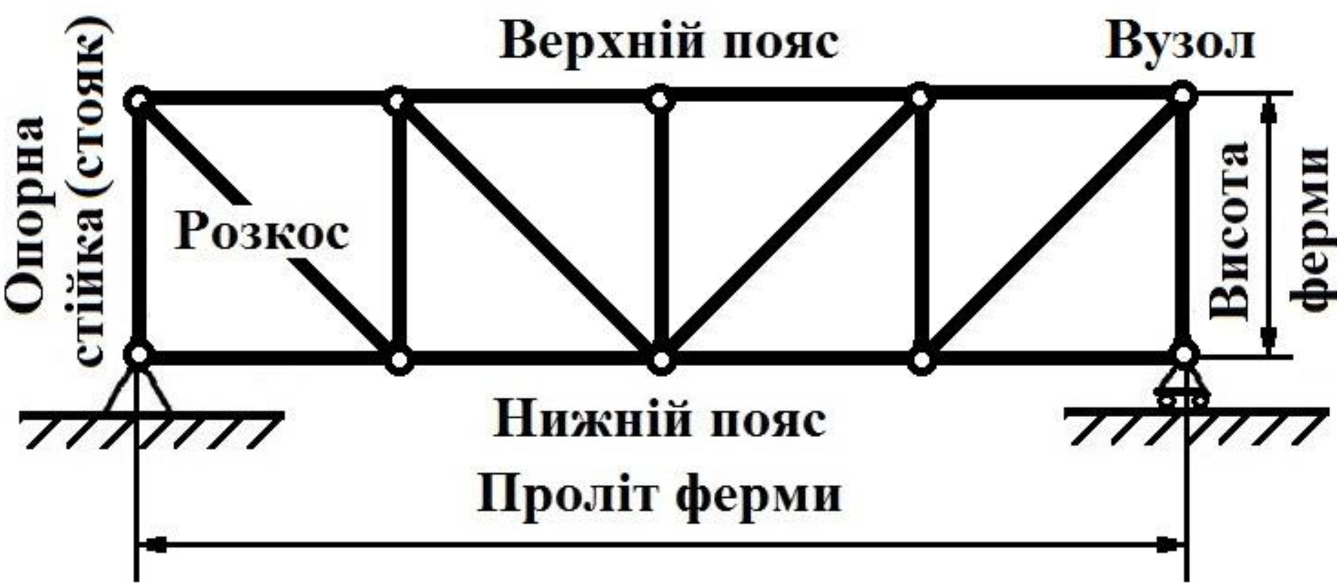


Рисунок 3.1.

Якщо осі усіх стержней ферми лежать в одній площині, то її називають **плоскою фермою**. Точки, в яких зходяться осі стержнів, називаються **вузлами ферми**, а ті вузли, якими ферма спирається на основу, називаються **опорними вузлами**.

Ферми застосовуються в будівництві та машинобудуванні, зокрема, стріли підйомних кранів, залізничні мости тощо. Місця з'єднання стержнів називають вузлами, вертикальні стержні – стійками (стояками), нахилені – розкосами. Стержні, які розташовані на зовнішньому контурі ферми, утворюють верхній і нижній пояси.

Реакція кожного з опорних стержнів спрямована вздовж осі цього стержня.

Якщо шарніри, що з'єднують стержні ферми, вважаються ідеальними, тобто без тертя, а всі зовнішні сили – прикладеними до вузлів, то всі стержні відчувають або розтягнення, або стискання, через те, що до кожного стержня сили прикладені тільки на його кінцях.

З усього класу геометрично незмінних ферм без зайвих стержнів виділимо прості ферми. Їх побудова відбувається наступним чином: розглядається основний трикутник, до нього двома стержнями приєднується новий шарнір (вузол) тощо. В подальшому розглядаються виключно плоскі ферми.

Існує три основних методи визначення зусиль у стержнях статично визначених ферм: метод вирізання вузлів, метод Ріттера й графічний метод побудови діаграми Максвелла-Кремони.

Розглянемо визначення зусиль в стержнях ферми за способом вирізання вузлів.

Цей спосіб полягає в тому, що подумки вирізають вузли ферми, прикладають до них відповідні зовнішні сили та реакції стержнів і складають рівняння рівноваги сил, які прикладені до кожного вузла. Оскільки на початку розрахунку ферми невідомо, які стержні розтягнуті, то вважають, що всі стержні розтягнуті. Тому реакції стержнів направляємо від вузлів. Якщо отримують реакцію зі знаком мінус, це означатиме стискання. Знайдені реакції стержнів за модулем дорівнюють внутрішнім зусиллям у стержнях.

Метод вирізання вузлів застосовують для визначення зусиль в усіх стержнях ферми. Його перевагою є простота, недоліком – громіздкість і можливе накопичення помилок. Застосування попередніх розрахунків зусиль в подальшому може призвести до суттєвих помилок.

Методом вирізання вузлів вигідно користуватися тоді, коли потрібно знайти зусилля у всіх стержнях ферми. А для знаходження зусиль лише в одному або декількох стержнях доцільно використовувати метод Ріттера.

Зусилля в окремих стержнях навантаженої ферми може бути рівними нулю, такі стержні називаються **нульовими**. Нижче наведено леми, користуючись якими можна визначити нульові стержні плоскої ферми, не проводячи їх розрахунку.

Лема 1. Якщо в ненавантаженому вузлі плоскої ферми сходяться два стержні, то зусилля в цих стержнях дорівнюють нулю (рис. 3.2).

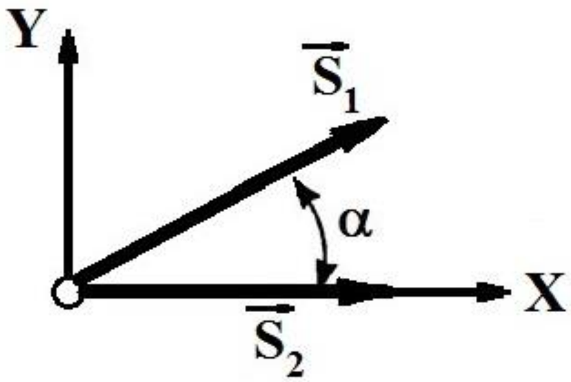


Рисунок 3.2.

Складемо рівняння рівноваги для цих сил:

$$\begin{cases} S_2 + S_1\cos\alpha = 0 \\ S_1\cos(90° - \alpha) = 0 \end{cases}. \qquad (3.1)$$

Отже, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$.

Лема 2. Якщо в ненавантаженому вузлі плоскої ферми сходяться три стержні, два з яких розташовані на одній прямій, то зусилля в третьому стержні дорівнює нулю. Зусилля в перших двох стержнях рівні між собою (рис. 3.3).

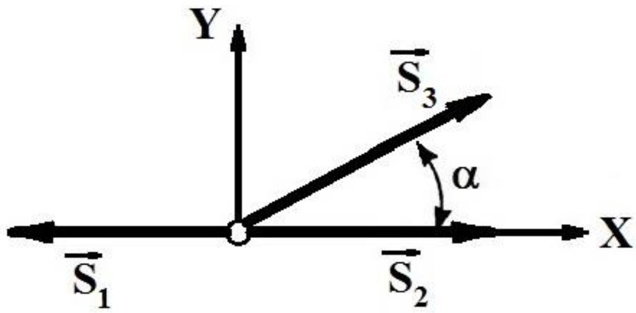


Рисунок 3.3.

Запишемо рівняння рівноваги сил, діючих на вузол (плоска система збіжних сил):

$$\begin{cases} -S_1 + S_2 + S_3\cos\alpha = 0 \\ S_3\cos(90° - \alpha) = 0 \end{cases}. \qquad (3.2)$$

Отже, $S_3 = 0$, $S_1 = S_2$.

Лема 3. Якщо у вузлі плоскої ферми сходяться два стержні і до вузла прикладена зовнішня сила, лінія дії якої збігається з віссю одного з стержнів, то зусилля в цьому стержні дорівнює за модулем прикладеній силі, а зусилля в іншому стержні дорівнює нулю (рис. 3.4).

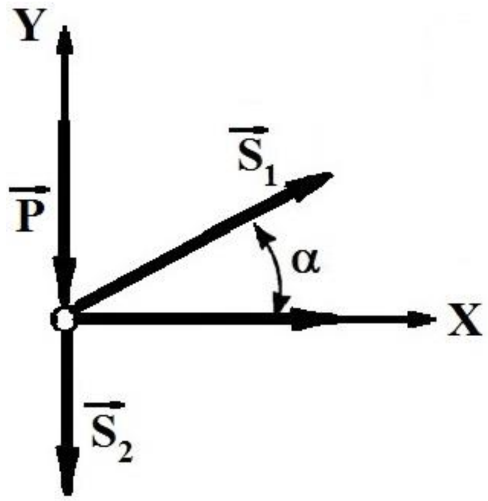


Рисунок 3.4.

Рівняння рівноваги сил, діючих на вузол:

$$\begin{cases} S_1 \cos\alpha = 0 \\ -P - S_2 + S_1 \sin\alpha = 0 \end{cases}. \qquad (3.3)$$

Отже, $S_1 = 0$, $S_2 = -P$.

5.2. Задача розрахунку ферми. Приклад

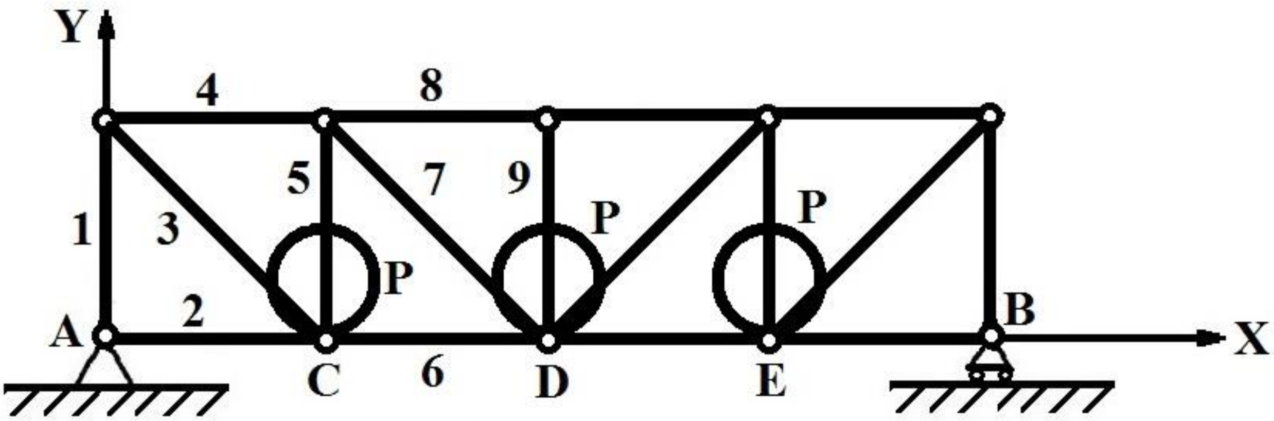


Рисунок 3.5.

На мостовій фермі, що зображена на рис. 3.5, вузли C, D, E завантажені однаковим навантаженням P =100 кН. Нахилені стержні складають кут 45° з горизонтом. Знайти зусилля в стержнях 1,2,3,….,9.

Розв'язання. Розглянемо ферму в цілому. Знайдемо опорні реакції, для цього складемо рівняння рівноваги (в проекціях на горизонтальну X і вертикальну Y осі та для моментів відносно точки A):

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ R_B + Y_A - 3P = 0 \\ -P \cdot a - P \cdot 2a - P \cdot 3a + R_B \cdot 4a = 0 \end{cases}. \qquad (3.4)$$

Отже,

$$R_B = \frac{6P}{4} = \frac{600}{4} = 150 \text{ кН},$$

$$Y_A = 3P - R_B = 300 - 150 \text{ кН}.$$

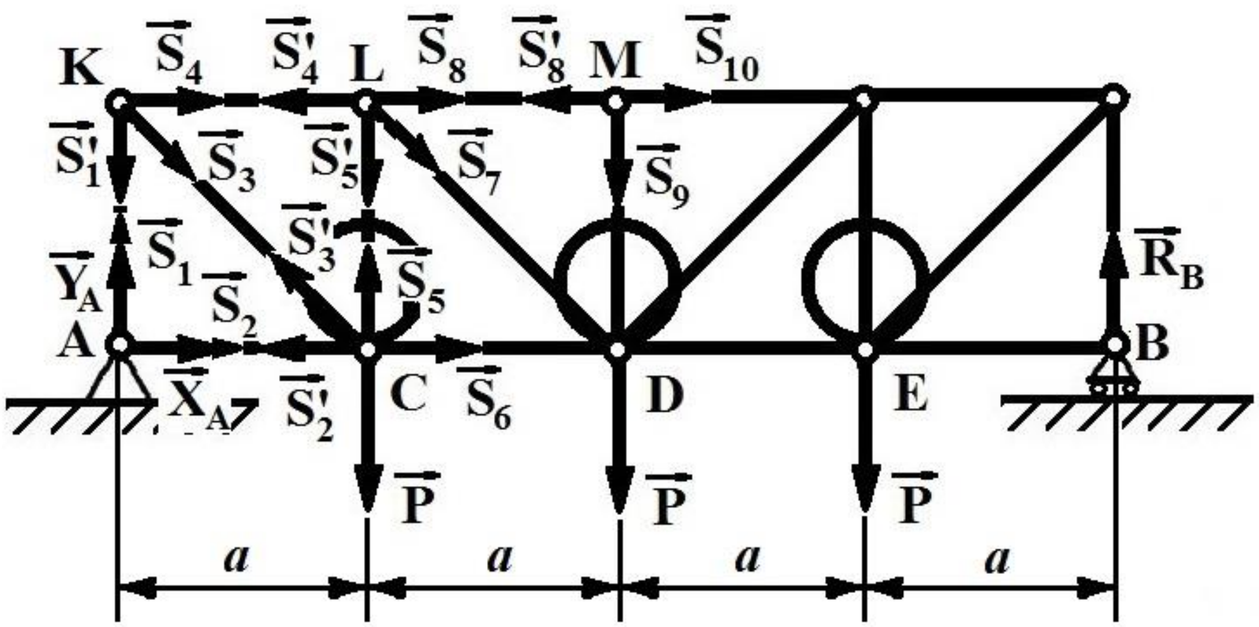
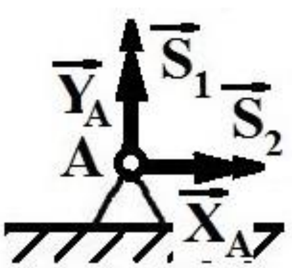


Рисунок 3.6.

Далі послідовно пройдемо всі вузли, в яких потрібно знайти зусилля, склавши відповідні умови рівноваги.

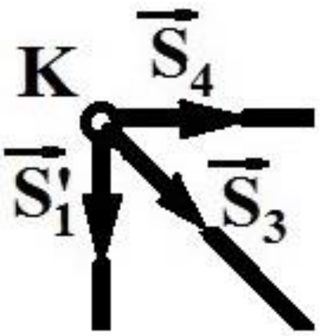
Виріжемо вузол A і складемо рівняння рівноваги (в проекціях на осі)



$$\begin{cases} X_A + S_2 = 0 \\ Y_A + S_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_2 = -X_A \\ S_1 = -Y_A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} S_2 = 0 \\ S_1 = -150 \text{ кН} \end{cases}.$$

Виріжемо вузол K і складемо аналогічні рівняння рівноваги:

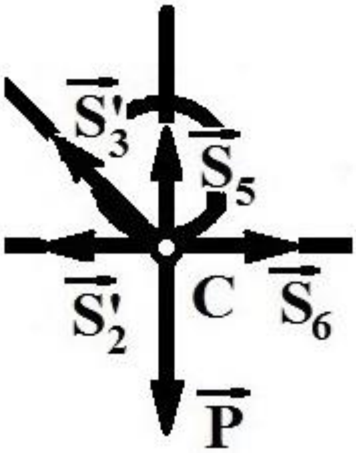


$$\begin{cases} S_4 + S_3 \cos 45° = 0 \\ -S'_1 - S_3 \cos 45° = 0 \end{cases}.$$

$$S_3 = -\frac{S_1}{\cos 45°} = \frac{150}{0{,}707} = 212 \text{ кН},$$

$$S_4 = -S_3 \cos 45° = -150 \text{ кН}.$$

Виріжемо вузол C і знайдемо зусилля S_5 і S_6, склавши рівняння рівноваги:

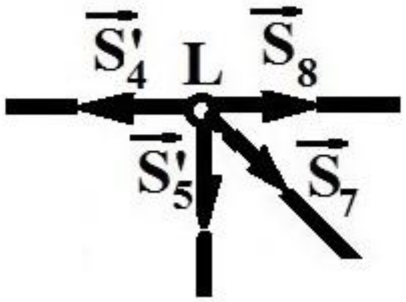


$$\begin{cases}-S_2' + S_6 - S_3\cos 45° = 0\\ S_3'\cos 45° - P + S_5 = 0\end{cases}.$$

$$S_6 = S_3\cos 45° = 212 \cdot 0{,}707 = 150\ \text{кН},$$

$$S_5 = P - S_3\cos 45° = 100 - 212 \cdot 0{,}707 = -50\ \text{кН}$$

Виріжемо вузол L і знайдемо зусилля S_8 і S_7, склавши умови рівноваги:

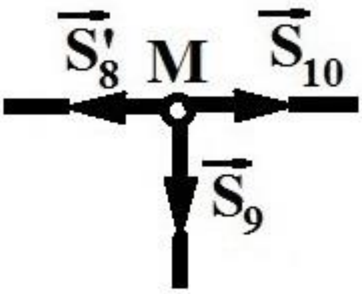


$$\begin{cases}-S_4' + S_8 + S_7\cos 45° = 0\\ -S_5' - S_7\cos 45° = 0\end{cases}.$$

$$S_7 = -\frac{S_5'}{\cos 45°} = \frac{50}{0{,}707} = 71\ \text{кН},$$

$$S_8 = S_4' - S_7\cos 45° = -150 - 50 = -200\ \text{кН}.$$

Виріжемо вузол M і знайдемо зусилля $\overline{S}_9$, записавши рівняння рівноваги в проекціях на вертикальну вісь:



$$S_9 = 0$$

Остаточно, відповідь:

$S_1 = -150\ \text{кН};\ \ S_2 = 0;\ \ S_3 = 212\ \text{кН};\ \ S_4 = -150\ \text{кН};$

$S_5 = -50\ \text{кН};\ \ S_6 = 150\ \text{кН};\ \ S_7 = 71\ \text{кН};\ \ S_8 = -200\ \text{кН};\ S_9 = 0.$

В подальшому стержні, в яких стискання, через значне, на рівні порядку, співвідношення між довжиною та розмірами поперечного перерізу необхідно розраховувати на стійкість, що вивчається в курсі опору матеріалів.

Тема 6. Центр ваги

6.1. Центр паралельних сил

З паралельними силами ми часто зустрічаємось при розв'язанні задач механіки. Сили ваги, що діють на тіло, спрямовані паралельно одна одній, сила тиску рідини на поверхню спрямовані також паралельно.

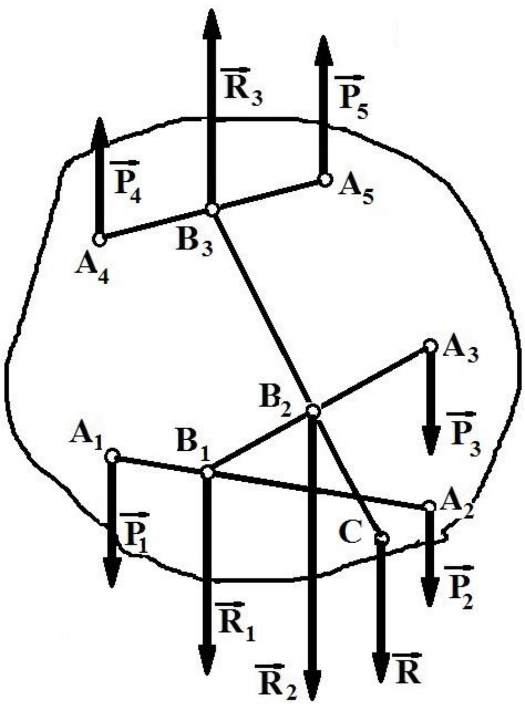


Рисунок 3.7.

Припустимо, що до твердого тіла в точках $A_1, A_2, \ldots, A_5$ прикладені паралельні сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_5$, з яких сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ спрямовані в один бік, а сили $\vec{P}_4, \vec{P}_5$ в інший (рис. 3.7).

Додаємо сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ за правилом складання двох паралельних сил, спрямованих в один бік:

$$R_1 = P_1 + P_2, \quad A_1B_1/A_2B_1 = P_2/P_1. \tag{3.5}$$

Для сили $\vec{R}_1$ знаходимо точку прикладення B_1. Далі додаємо силу $\vec{P}_3$ і силу $\vec{R}_1$, знаходимо точку прикладення B_2. Далі послідовно додаємо сили, отримуючи дві протилежно спрямовані паралельні сили $\vec{R}_2$ і $\vec{R}_3$ в точках B_2 і B_3.

Залежно від модулів і точок прикладення цих сил можливі наступні випадки:

1. Сили $\vec{R}_2$ і $\vec{R}_3$ не рівні за модулем, причому $R_2 > R_3$. Тоді $\vec{R}$ рівнодіюча заданих сил має модуль $R = R_2 - R_3$ і спрямована у бік більшої сили $\vec{R}_2$.

Точка C знаходиться на продовженні відрізкуB_2B_3 за точкою прикладення більшої сили. Ця точка називається **центром паралельних сил**. Через цю точку обов'язково проходить лінія дії рівнодіючої заданої системи паралельних сил.

2. Сили $\vec{R}_2$ і $\vec{R}_3$ рівні за модулем, але їхні лінії дії не збігаються. В такому випадку задані сили приводяться до пари сил.

3. Сили $\vec{R}_2$ і $\vec{R}_3$ рівні за модулем, та їхні лінії дії збігаються. В такому випадку задані сили взаємно урівноважуються.

6.2. Центр ваги твердого тіла

Сили тяжіння окремих частинок тіла до Землі спрямовані приблизно до центру Землі. Ці сили можна вважати паралельними. Рівнодіюча цих сил, яка дорівнює їхній сумі, є вага тіла, а центр цієї системи називається **центром ваги тіла**.

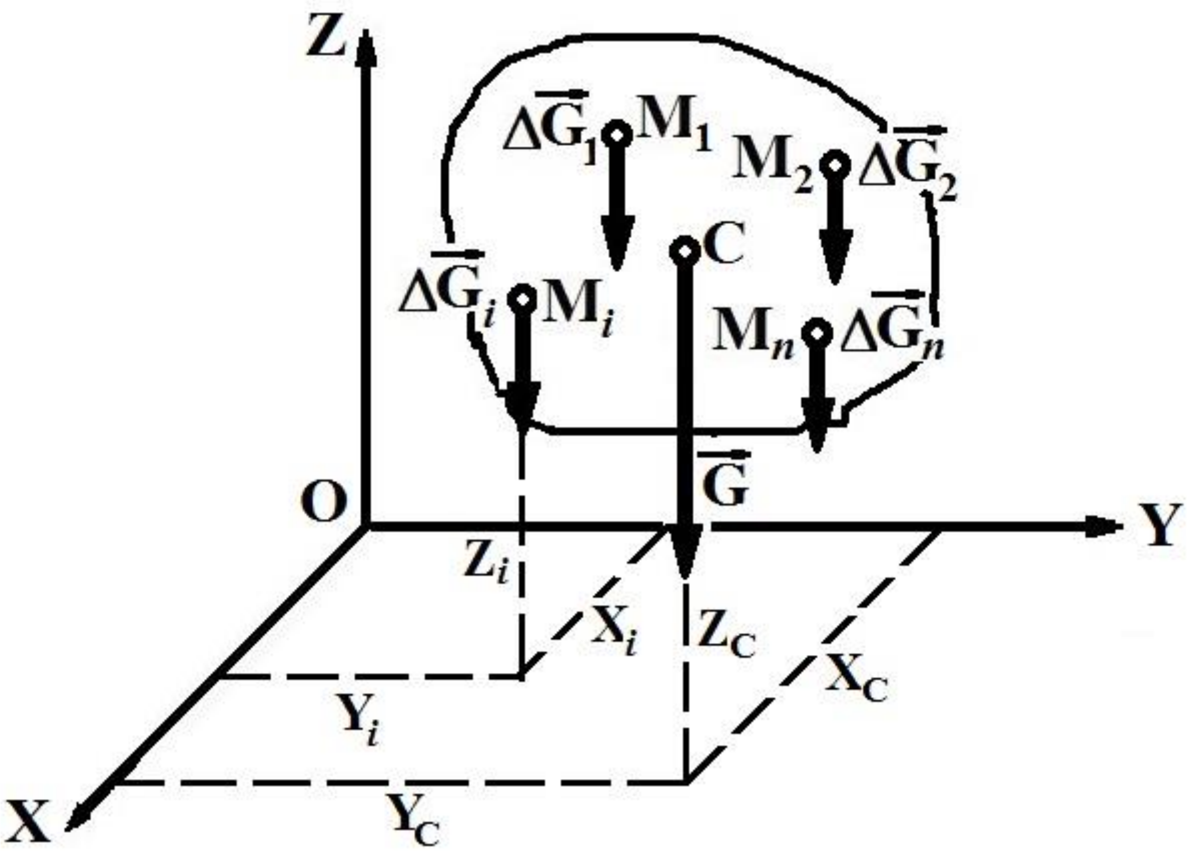


Рисунок 3.8.

Позначимо сили тяжіння окремих частинок тіла $\Delta\vec{G}_1$, $\Delta\vec{G}_2$,..., $\Delta\vec{G}_n$, вагу тіла $\vec{G}$, координати його центру ваги x_C, y_C, z_C, а координати довільної частини тіла x_i, y_i, z_i (рис. 3.8). Тоді для центру ваги:

$$\begin{cases} x_C = \sum x_i\,\Delta G_i/G \\ y_C = \sum y_i\,\Delta G_i/G. \\ z_C = \sum z_i\,\Delta G_i/G \end{cases} \tag{3.6}$$

6.3. Центр ваги плоскої фігури. Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі

Існують різні експериментальні методи знаходження центру ваги, до яких можна віднести метод підвісу та метод зважування.

Положення центру ваги за методом підвісу визначають так: підвішують тіло на нитці у довільній точці тіла та продовжують напрям нитки в тілі (прорисовують лінію на поверхні тіла); підвішують тіло на нитці в іншій точці і знову визначають на тілі продовження нитки. Точка перетину продовжених напрямків нитки й буде центром ваги тіла. Цей метод дозволяє визначити центр ваги неоднорідного тіла складної конфігурації.

Метод зважування використовують для знаходження центру ваги складних тіл значної ваги.

Розглянемо аналітичний спосіб визначення центру ваги, який базується на обчисленні статичних моментів плоскої фігури.

Сума добутків елементарних площин, які входять до складу фігури, на алгебраїчні значення їхніх відстаней до деякої осі називається статичним моментом площі плоскої фігури відносно цієї осі.

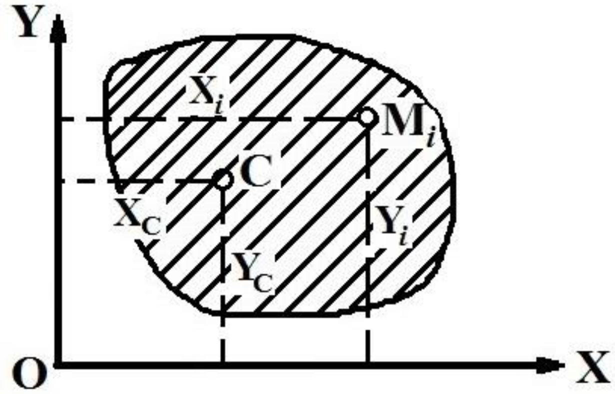


Рисунок 3.9.

Центром ваги площі вважають центр ваги однорідної тонкої пластини однакової товщини, основа якої займає дану площу. Положення центру ваги плоскої фігури визначається двома координатами x_C і y_C (рис. 3.9). Позначаючи S_X та S_Y статичні моменти площі плоскої фігури відносно осей X і Y, маємо:

$$S_X = \sum y_i\,\Delta F_i = F y_C, \quad S_Y = \sum x_i\,\Delta F_i = F x_C. \tag{3.7}$$

де F – площа плоскої фігури. Тоді:

$$x_C = \frac{S_Y}{F}, \quad y_C = \frac{S_X}{F}. \tag{3.8}$$

Очевидно, що статичний момент площі плоскої фігури відносно осі, що проходить через центр ваги фігури, дорівнює нулю.

Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр геометричної симетрії, то центр ваги цього тіла лежить у площині, на осі або у центрі симетрії.

6.4. Визначення центру ваги плоскої фігури по центрах ваги її частин. Метод додавання та метод відняття

Нехай потрібно визначити положення центру ваги деякої плоскої фігури, що складається з трьох частин, положення центрів ваги якої відомо (рис. 3.10).

Площі частин відповідно дорівнюють F_1, F_2, F_3, а координати центрів ваги C_1, C_2, C_3 будуть x_1 і y_1, x_2 і y_2, x_3 і y_3.

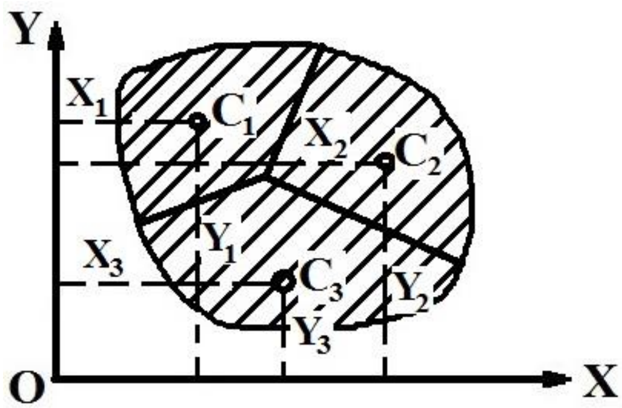


Рисунок 3.10.

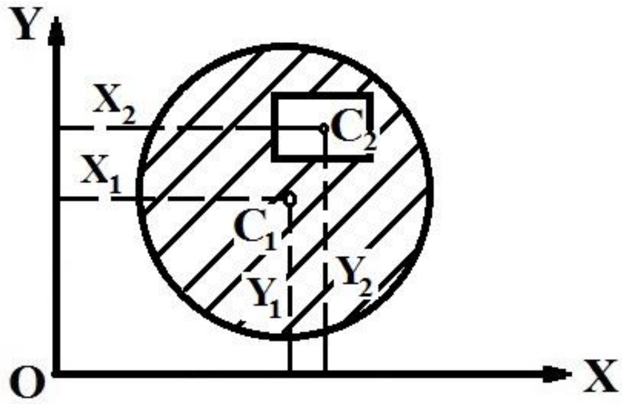


Рисунок 3.11.

Статичні моменти площі плоскої фігури відносно осей координат дорівнюють сумам статичних моментів площин окремих її частин, які можна визначити:

$$S_Y = F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3, \quad S_X = F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3.$$

Тоді для координат x_C і y_C маємо з урахуванням (6.4):

$$x_C = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3}{F}, \quad y_C = \frac{F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3}{F}. \tag{3.9}$$

Цей спосіб можна використовувати і для плоскої фігури площею F_1, з якої вирізана деяка частина площею (рис. 3.11), приймаючи площу вирізаної фігури від'ємною. Площа частини, що залишилась, дорівнює $F_1 - F_2$, а статичний момент – різниці статичних моментів фігур. Тоді:

$$x_C = \frac{F_1 x_1 - F_2 x_2}{F_1 - F_2}, \quad y_C = \frac{F_1 y_1 - F_2 y_2}{F_1 - F_2}. \tag{3.10}$$

Цей спосіб має назву способу від'ємних площин.

Приклад.
Визначити положення центру ваги однорідного диску з круглим отвором, якщо радіус диска r_1, радіус отвору r_2, і центр цього отвору знаходиться на відстані $r_1/2$ від центру диску (рис. 3.12).

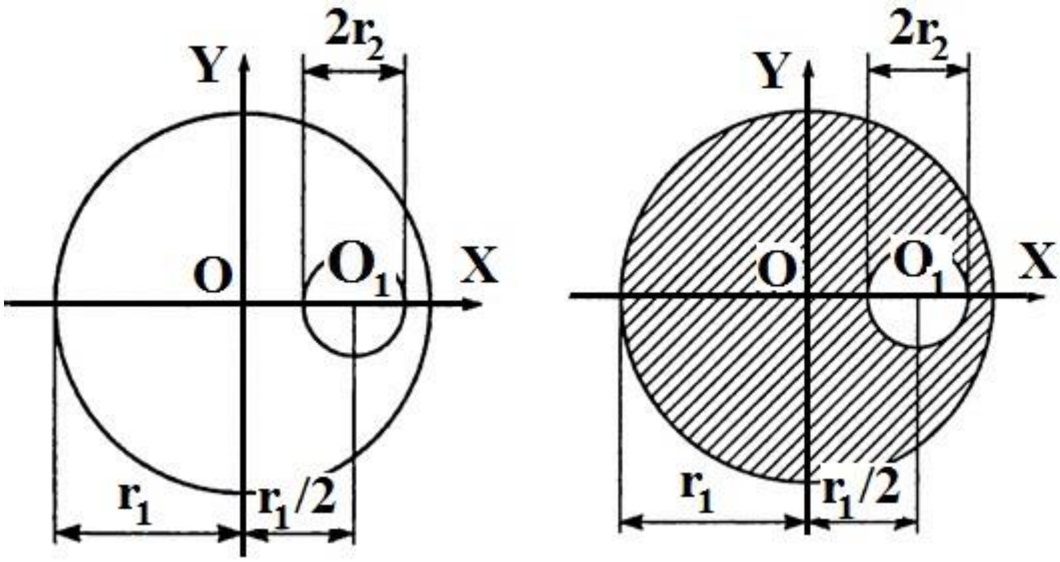


Рисунок 3.12.

Розв'язання. Вісь OX проходить через центри кола та отвору, тому центр ваги фігури буде розташований на неї. Диск без вирізу позначимо 1 з площею F_1, з центром ваги $C_1 = O$, отвір фігурою 2 з площею F_2, з центром ваги $C_2 = O_1$. Тоді маємо:

$$F_1 = \pi r_1^2,\ x_{C1} = OO = 0; \qquad F_2 = \pi r_2^2,\ x_{C2} = OO_1 = \frac{r_1}{2}$$

$$x_C = \frac{F_1 \cdot x_{C1} - F_2 \cdot x_{C2}}{F_1 - F_2} = -\frac{\pi r_2^2 \cdot \frac{r_1}{2}}{\pi r_1^2 - \pi r_2^2} = -\frac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}$$

Відповідь. $x_C = -\frac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}$.

Тема 7. Тертя та його види

Тертя явно чи приховано завжди присутнє у практичній діяльності людини й відіграє при цьому як корисну, так і шкідливу роль. Основна властивість тертя – чинити опір будь-якому переміщенню тіла і це, як допомагає рухатися тілу, так і є джерелом витрат енергії.

Залежно від руху тіла по поверхні розрізняють тертя **ковзання** (відповідає поступальному руху стичних тіл одне відносного одного), **кочення** (наприклад, колеса по рейці), **крутіння** (наприклад, у підп’ятнику). На перших двох зупинимось докладно.

7.1. Тертя ковзання

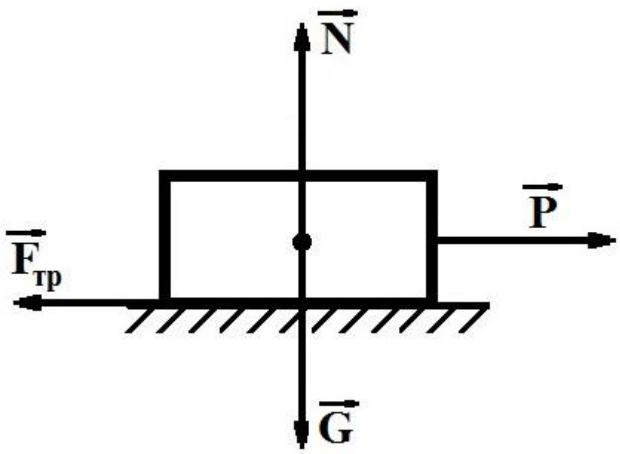


Рисунок 3.13.

Розглянемо тіло вагою $\vec{G}$, що лежить на шорсткій горизонтальній поверхні (рис. 3.13). Якщо до цього тіла прикласти горизонтальну силу $\vec{P}$, то на тіло окрім двох урівноважених сил $\vec{N}$, $\vec{G}$ і сили $\vec{P}$ буде діяти сила, що виникає між стичними поверхнями і яка буде спрямована протилежно до сили $\vec{P}$. Позначимо цю силу $\vec{F}_{\text{тр}}$, яка буде чинити опір руху тіла вздовж шорсткої поверхні і в межах модуля сили $\vec{P}$ буде її урівноважувати. Силу $\vec{F}_{\text{тр}}$ називають **силою тертя ковзання (тертя першого роду)**.

Отже, **сила тертя ковзання – це сила опору, яка виникає при переміщенні або намаганні переміщення одного тіла по поверхні іншого.** Досліди показали, що максимальне значення сили тертя пропорційне нормальній реакції поверхні тіла:

$$F_{\text{тр}max} = fN, \tag{3.11}$$

Коефіцієнт пропорційності f називається коефіцієнтом тертя ковзання і визначається дослідним шляхом, його значення залежно від матеріалу тіла та поверхні руху наведено у довідниках.

7.2. Тертя кочення

Крім тертя ковзання розглянемо ще один вид тертя, що виникає при коченні тіл – тертя кочення. У теоретичній механіці тертям кочення цікавляться лише з зору визначення реакцій опори.

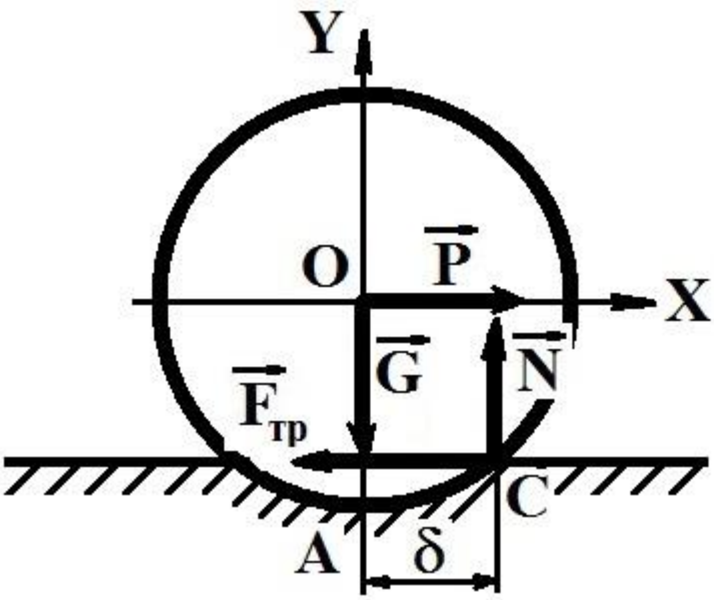


Рисунок 3.14.

Нехай до круглого котка радіусом r (рис. 3.14) прикладена горизонтальна сила $\vec{P}$. Крім того, на каток діє сила тяжіння $\vec{G}$. Через деформацію котка і горизонтальної опори поверхні точка контакту перетворюється у пляму контакту, нормальна $\vec{N}$ реакції опори зміститься на певну відстань δ.

Сила тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$ виникає в тому місці, де коток торкається опорної поверхні, тобто в точці C. У разі рівноваги котка сила $\vec{F}_{\text{тр}}$ дорівнює за модулем силі $\vec{P}$, але спрямована у протилежний бік. Отже, $\vec{P}$ і $\vec{F}_{\text{тр}}$ утворюють пару сил, яка урівноважується парою сил $\vec{N}$ і $\vec{G}$. Момент цієї пари називається **моментом тертя кочення**. Плечем цієї пари є величина δ, яка називається **коефіцієнтом тертя кочення,** або **коефіцієнтом тертя другого роду**. На відміну від коефіцієнту тертя ковзання, який є безрозмірнісною величиною, коефіцієнт тертя кочення має розмірність довжини, і, зазвичай, вимірюється у міліметрах.

Прирівнявши моменти зазначених пар, можна отримати вираз для визначення коефіцієнта тертя кочення:

$$Pr = G\delta \implies \delta = \frac{Pr}{G}. \tag{3.12}$$

Очевидно, збільшення твердості стичних поверхонь значно зменшує величину δ, що в свою чергу зменшує величину зусиль, необхідних для кочення вантажів.

Контрольні питання

1. Що називається фермою у механіці ? Назвіть основні елементи ферми.
2. Сформулюйте леми, які застосовують при розрахунку ферм.
3. Які сили називають паралельними ?
4. Що називається центром ваги тіла ?
5. Що називається статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі ?
6. Як знайти координати центру ваги ?
7. В чому полягає метод додавання та метод відняття ?
8. Поясніть природу тертя ковзання та тертя кочення.

Розділ Кінематика. Лекція № 4

План лекції

1. Вступ до кінематики. Основні поняття та визначення
2. Способи завдання руху точки
3. Швидкість точки
4. Прискорення точки
5. Окремі випадки руху точки

Тема 1. Кінематика точки

1.1. Вступ до кінематики. Основні поняття та визначення

Кінематикою називається розділ механіки, в якому вивчаються геометричні властивості руху тіл без урахування їх інертності (маси) та діючих на них сил. Це означає, що основною задачею кінематики є встановлення законів механічного руху та визначення й обчислення кінематичних величин (параметрів), які характеризують рух тіла загалом і рух кожної його точки зокрема.

Кінематика є тією частиною теоретичної механіки, яка класифікує різні види механічного руху матеріальних тіл і майже повністю розв’язує першу задачу теоретичної механіки, бо за встановленим законом руху визначають необхідні кінематичні величини, які в подальшому в динаміці будуть безпосередньо зв’язані з силами, що діють на матеріальні тіла та призводять до їх руху.

З іншого боку кінематика має і самостійне значення, як теоретична база для загальноінженерних і спеціальних дисциплін, в яких розв’язують задачі з кінематичного аналізу та синтезу різноманітних механізмів і машин.

Рух – зміна протягом часу положення даного тіла в просторі по відношенню до інших тіл. **Законом механічного руху будь-якого тіла і зокрема точки називають функціональну залежність положення тіла або точки від часу.**

Для визначення положення твердого тіла – ТТ (або матеріальної точки – МТ), що рухається, у різні моменти часу з тілом, відносно якого вивчається рух, жорстко зв’язують будь-яку систему координат, яка утворює разом з цим тілом **систему відліку**.

Зазвичай, систему відліку зображують у вигляді трьох координатних осей, які утворюють прямокутну декартову систему координат – $OXYZ$ з центром у точці O.

За одиницю довжини при вимірюванні відстані приймається 1 м, за одиницю часу – 1 с. Час є незалежною змінною, яка неперервно змінюється. Решта змінних (відстань, швидкість, прискорення тощо) вважається як змінні з часом, тобто функціями часу t.

Відлік часу починається з деякого **початкового моменту** $t = 0$, вибір якого має бути встановлено для кожного випадку. Різниця між будь-якими двома послідовними моментами часу називається **проміжком часу**.

Для розв’язання задач кінематики необхідно, щоб рух, який вивчається, був якимось чином заданий.

Кінематично задати рух або закон руху МТ або ТТ означатиме задати положення МТ або ТТ відносно заданої системи координат в довільний момент часу.

Вивчення кінематики починається з вивчення руху найпростішого об’єкту – МТ, а потім переходимо до вивчення кінематики ТТ.

Неперервна лінія, яку описує рухома точка відносно даної системи координат, називається **траєкторією** точки. Якщо траєкторія є пряма лінія, рух називається **прямолінійним**, якщо крива – **криволінійним**.

1.2. Способи завдання руху точки

Для завдання руху МТ можна застосовувати один з трьох способів: 1) векторний; 2) координатний; 3) натуральний.

1. **Векторний спосіб завдання руху МТ**.

Нехай точка M рухається по відношенню до деякої системи відліку $OXYZ$. Положення цієї точки в будь-який момент часу можна визначити, якщо задати радіус-вектор $\vec{r}$, проведений з початку координат O в точку M (рис. 4.1).

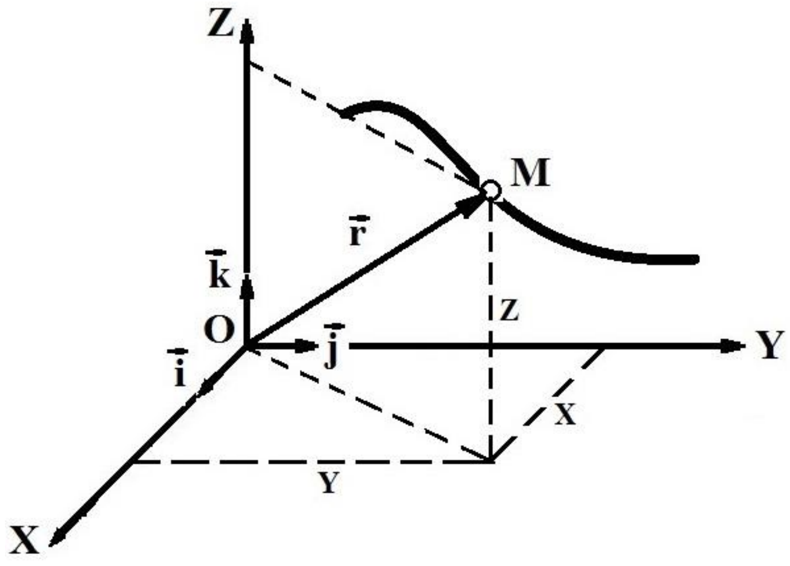


Рисунок 4.1.

Під час руху точки M вектор $\vec{r}$ буде протягом часу змінюватися і за модулем, і за напрямом. Отже, $\vec{r}(t)$ є змінним вектором (вектором-функцією), залежним від аргументу t, і є однозначною функцією часу:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{4.1}$$

Рівність (4.1) визначає закон руху МТ у векторній формі, тому що воно дозволяє у будь-який момент часу побудувати відповідний вектор $\vec{r}$ і знайти положення рухомої точки.

Геометричне місце кінців вектора $\vec{r}$, тобто **годограф** цього вектора, визначає траєкторію рухомої точки. Аналітично вектор задається його проекціями на координатні осі. В прямокутних координатах для вектора $\vec{r}$ буде: $r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z.$ Тоді після введення одиничних векторів (ортів) $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ і $\vec{k}$ запишемо для $\vec{r}$

$$\vec{r}(t) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}. \tag{4.2}$$

Вектор може бути заданий своїм модулем та кутами з осями або проекціями на осі інших систем координат.

2. **Координатний спосіб завдання руху МТ**.

З урахуванням (4.2) можна сказати, що залежність $\vec{r}(t)$ буде відома, коли будуть задані координати x, y, z точки як функції часу. Ці координати з часом будуть змінюватися. Знати закон руху МТ, тобто знати положення МТ, означає знати величини координат:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{4.3}$$

Рівняння (4.3) є рівняння руху МТ в прямокутних декартових координатах. За умов руху в одній площині маємо два рівняння руху:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t). \tag{4.4}$$

Нарешті, при прямолінійному русі МТ, якщо вздовж її руху спрямувати координатну вісь OX, рух буде визначатися одним рівнянням (**законом прямолінійного руху МТ**)

$$x = f(t). \tag{4.5}$$

Рівняння (4.3) і (4.4) є водночас рівняння траєкторії МТ в параметричній формі, де роль параметра грає час t. Виключивши з рівнянь руху час, можна знайти рівняння траєкторії у звичайній формі.

Приклад. Нехай $x = 2t$, $y = 12t^2$. З першого рівняння $t = x/2$ і, підставляючи у друге рівняння, $y = 12(x/2)^2 = 3x^2$. Отже, траєкторією є парабола.

3. **Натуральний спосіб завдання руху МТ**.

Натуральним (або траєторним) способом завдання руху зручно користуватися в тих випадках, коли траєкторія рухомої точки відома заздалегідь (наприклад, при вивченні складного руху МТ). Рух точки у цьому випадку розглядають відносно деякої умовно нерухомої системи відліку.

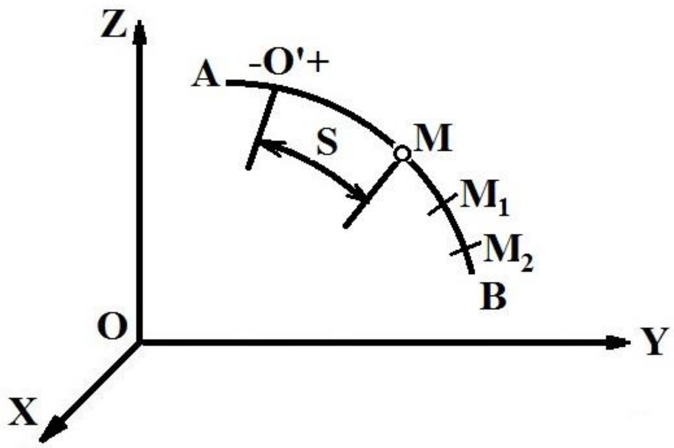


Рисунок 4.2.

Нехай крива AB є траєкторією точки M при русі в системі координат $OXYZ$. Вибираємо на ній нерухому точку O', яку приймаємо за початок відліку, встановимо позитивний і негативний напрями відліку (рис. 4.2).

Тоді положення точки M при її русі буде однозначно визначатися криволінійною координатою s, яка дорівнює відстані від точки O' до точки M, яка вимірюється вздовж дуги траєкторії і узятому з відповідним знаком. Щоб знати положення точки M на траєкторії у будь-який час, необхідно знати залежність

$$s = f(t). \tag{4.6}$$

Рівняння (4.6) і виражає **закон руху МТ вздовж траєкторії**.

1.3. Швидкість точки

Однією з основних кінематичних характеристик руху МТ є векторна величина, яка називається **швидкістю**.

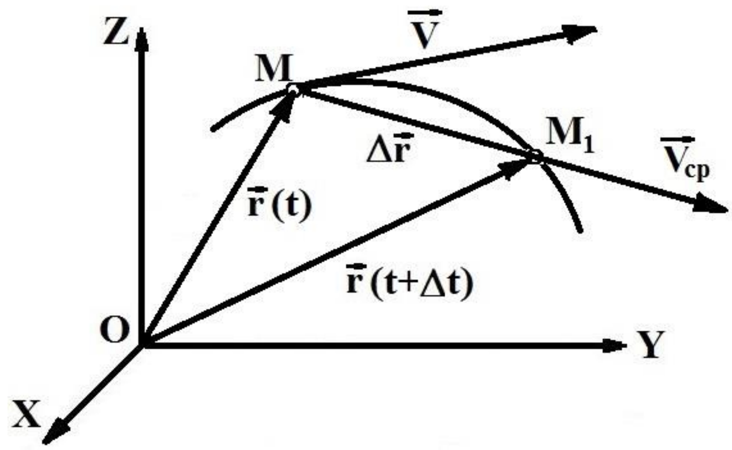


Рисунок 4.3.

Нехай в момент часу t положення МТ визначається радіус-вектором $\vec{r}(t)$, а в момент часу $t + \Delta t$ радіус-вектором $\vec{r}(t + \Delta t)$ (рис. 4.3). Вектор

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

будемо називати вектором переміщення МТ за час Δt.

Відношення вектора $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу Δt називається **середньою швидкістю точки за проміжок часу**:

$$\vec{v}_{cp} = \Delta\vec{r}/\Delta t.$$

Швидкістю в даний момент часу називається границя відношення переміщення точки до проміжку часу, за який відбулося це переміщення, коли цей проміжок часу прагне до нуля, тобто:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \tag{4.7}$$

З виразу (4.7) бачимо, що швидкість точки дорівнює похідної радіус-вектора точки за часом.

Швидкість МТ при координатному способі задання руху. При заданні руху в декартовій системі координат (4.3)

$$x = f_1(t) = x(t), \quad y = f_2(t) = y(t), \quad z = f_3(t) = z(t)$$

і за умов постійності одиничних векторів, на основі (4.7) маємо:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}. \qquad (4.8)$$

На рис. 4.4 показано розподіл швидкості на складові по осях системи координат $OXYZ$.

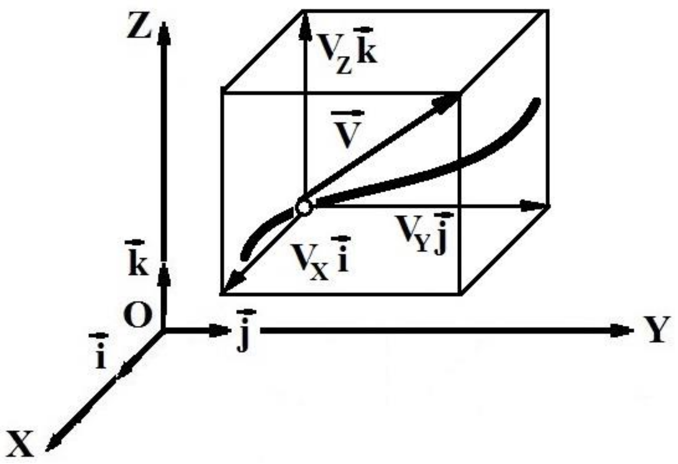


Рисунок 4.4.

В подальшому будемо використовувати позначення:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}. \qquad (4.9)$$

Модуль швидкості визначається за формулою:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \qquad (4.10)$$

а напрям швидкості – напрямними косинусами. Якщо модуль швидкості не змінюється за часом, то рух називається **рівномірним**.

Швидкість МТ при натуральному способі задання руху.

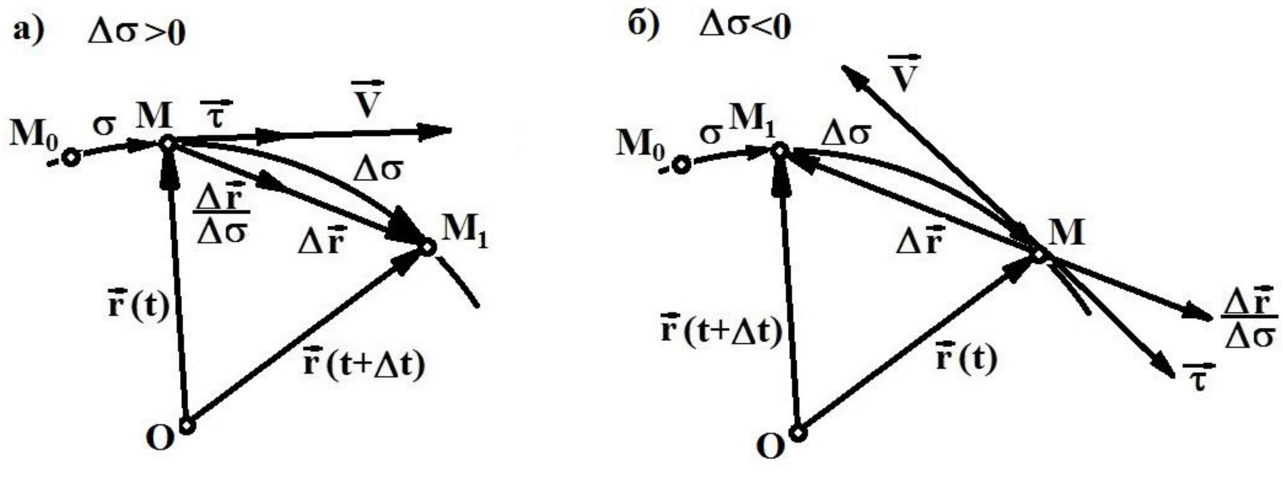


Рисунок 4.5.

Нехай дуга $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta\sigma$ (рис. 4.5). З урахуванням (4.7) можна записати:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta \sigma} \cdot \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta \sigma} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t}.$$

Введемо $\vec{\tau}$ – одиничний вектор дотичної до кривої, спрямований у позитивний бік відліку дуги. Тоді:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta \sigma} = \frac{d\vec{r}}{\Delta \sigma} = \vec{\tau}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma}.$$

Остаточно:

$$\vec{v} = \frac{d\sigma}{dt} = v_\tau \vec{\tau}. \tag{4.11}$$

Очевидно, $v_\tau = v$, якщо рух відбувається у бік позитивного відліку дуги, і $v_\tau = -v$, якщо рух відбувається у протилежний бік. Через те, що шлях, що проходить МТ, завжди додатний, то елемент шляху

$$ds = |d\sigma|,$$

і модуль швидкості можна визначити за формулою:

$$v = \left| \frac{d\sigma}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}. \tag{4.12}$$

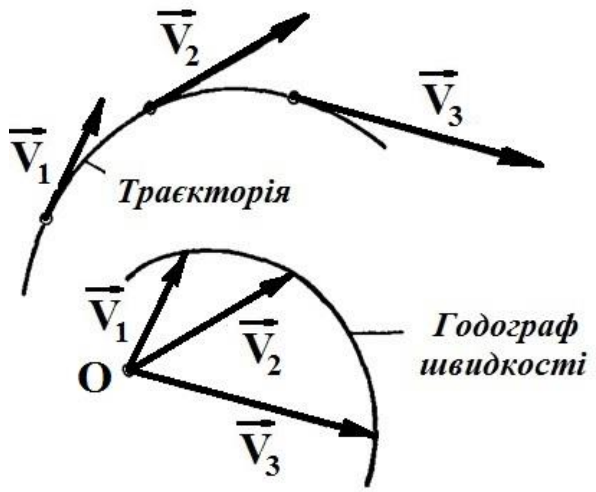


Рисунок 4.6.

Для швидкості, як і для траєкторії, можна побудувати **годограф** – криву, яку викреслює кінець вектора швидкості при русі точки, якщо вектор швидкості проводити з однієї точки (рис. 4.6).

1.4. Прискорення точки

Нехай в момент часу t швидкість точки дорівнює $\vec{v}_1 = \vec{v}(t)$, а в момент часу $t + \Delta t$ буде $\vec{v}_2 = \vec{v}(t + \Delta t)$ (рис. 4.7). Зміну вектора швидкості за проміжок часу Δt знайдемо як різницю векторів $\vec{v}_2$ і $\vec{v}_1$, якщо паралельно перенесимо вектор $\vec{v}_2$ в точку M_1. Отриманий вектор

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$$

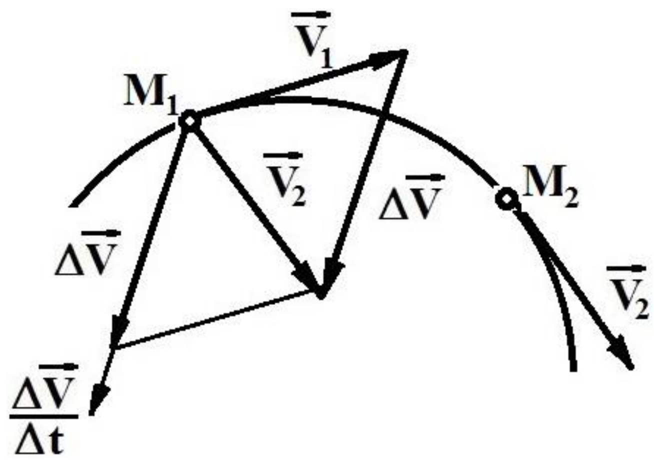


Рисунок 4.7.

є приростом вектора швидкості за проміжок часу Δt.

Відношення вектора $\Delta\vec{v}$ до проміжку часу Δt називається **середнім прискоренням** точки за проміжок часу Δt:

$$\vec{a}_{cp} = \Delta\vec{v}/\Delta t.$$

Прискоренням $\vec{a}$ точки в даний момент часу називається **границя відношення прирісту швидкості $\Delta\vec{v}$ до прирісту часу Δt за умови, що останнє прагне до нуля**, тобто:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (4.13)$$

Можна використовувати наступну форму запису через похідні за часом:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}.$$

Отже, прискорення точки в даний момент часу дорівнює **першій похідній за часом від вектора швидкості точки або другій похідній за часом від радіус-вектора точки**.

Прискорення МТ при координатному способі задання руху.

Нехай рух точки задано у вигляді (4.3), і з урахуванням (4.8) маємо:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

a_x, a_y, a_z – проекції прискорення на відповідні координатні осі. Тоді

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}, \tag{4.14}$$

тобто **проекція прискорення точки на будь-яку координатну вісь дорівнює першій похідній за часом від відповідної проекції швидкості точки**.

Вирази (4.14) можна переписати

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}. \tag{4.15}$$

Модуль прискорення визначається за формулою:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \tag{4.16}$$

а напрям прискорення – напрямними косинусами.

Прискорення МТ при натуральному способі задання руху.

Перед викладанням матеріалу ознайомимся з необхідними поняттями з диференціальної геометрії.

Розглянемо просторову криву, де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор **дотичної** до кривої, спрямований у позитивний бік відліку дуги (рис. 4.8).

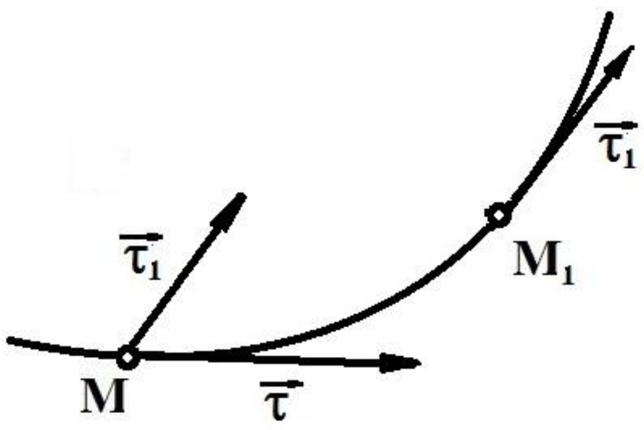


Рисунок 4.8.

Візьмемо на кривій точки M і M_1, близьку до неї. Паралельно перенесемо вектор $\vec{\tau}_1$ в точку M і проведемо площину через вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$, прикладені в точці M. При спрямуванні точки M_1 до точки M ця площина займе певне положення і таку площину називають **стичною** (рис. 4.9).

Площина, проведена через точку M перпендикулярно до дотичної, зветься **нормальною** площиною. Лінія перетину зазначених площин визначає **головну нормаль** до кривої в точці M.

Площина, яка проведена через точку M і перпендикулярна до головної нормалі, зветься **спрямляючою** площиною.

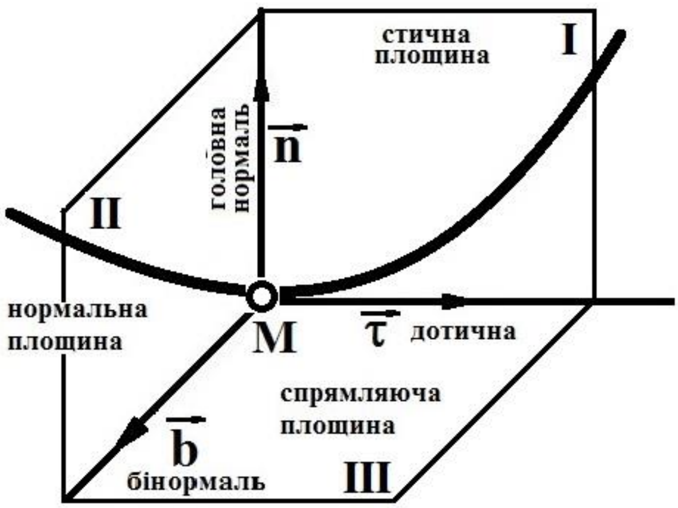


Рисунок 4.9.

На рис. 4.9 стична, нормальна та спрямляюча площини позначені цифрами I, II, III.

Лінія перетину спрямляючої і нормальної площин визначає **бінормаль** до кривої. Таким чином, в кожній точці кривої можна указати три взаємноперпендикулярних напрями: дотичної, головної нормалі та бінормалі, для яких можна ввести відповідні одиничні вектори: $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$.

Отриманий тригранник, який складається із зазначених площин, зветься природнім тригранником з одиничними векторами $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$. Вивчаючи рух точки за заданої траєкторії будемо вважати, що орт $\vec{\tau}$ спрямований у бік зростання дугової координати точки, орт $\vec{n}$ спрямований завжди у бік увігнутості траєкторії, а орт $\vec{b}$ спрямований за правилом векторного добутку $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$.

Для дуги $\widetilde{MM_1} = \Delta\sigma$ (рис. 4.5, рис. 4.8) отримуємо залежність:

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = \frac{1}{\rho}\vec{n},$$

де ρ – радіус кривизни кривої в точці M. Зауважимо, що радіус кривизни прямої дорівнює нескінченності, для окружності він дорівнює радіусу окружності в будь-якій точці.

Використовуючи вираз (4.11) і (4.13)

$$\vec{v} = \frac{d\sigma}{dt} = v_\tau\vec{\tau}, \;\; \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

маємо:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(v_\tau\vec{\tau})=\frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau}+v_\tau\frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Опускаючи викладки, запишемо:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(v_\tau\vec{\tau})=\frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}. \tag{4.17}$$

З іншого боку, вектор $\vec{a}$ можна розкласти по натуральних осях:

$$\vec{a}=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n}+a_b\vec{b}. \tag{4.18}$$

Порівнюючи результати в (4.17) і (4.18), маємо:

$$a_\tau=\frac{dv_\tau}{dt},\quad a_n=\frac{v^2}{\rho},\quad a_b=0.$$

Оскільки бінормальна складова прискорення завжди дорівнює нулю, вектор $\vec{a}$ лежить у стичній площині. Проекція прискорення на напрям $\vec{\tau}$:

$$a_\tau=\frac{dv_\tau}{dt} \tag{4.19}$$

називається **дотичним** (**тангенційним**) прискоренням. Проекція прискореня на головну нормаль:

$$a_n=\frac{v^2}{\rho} \tag{4.20}$$

називається **нормальним** прискоренням. Отже, прискорення $\vec{a}$ має дві складові, кожна з яких відповідає за відповідну зміну швидкості – за величиною або за напрямом. Щодо тангенційного прискорення $\vec{a}_\tau$ слід зауважити, що це прискорення може бути спрямовано у бік швидкості або у протилеєний їй бік залежно від того, однакові чи різні в них знаки.

Дотичне прискорення характеризує зміну модуля швидкості (величину), а нормальне прискорення характеризує зміну швидкості за напрямом.

Модуль вектора прискорення дорівнює:

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \tag{4.21}$$

Дотичне прискорення дорівнює нулю при русі точки з постійною за модулем швидкістю, а нормальне – при русі по прямій.

1.5. Окремі випадки руху точки

Прямолінійний рух.

Якщо траєкторія точки є прямою лінією, то, спрямувавши одну з осей, наприклад, вісь X, вздовж цієї прямої, ми повністю визначимо положення точки $x = x(t)$**.** Тоді за (4.9) і (4.15)

$$v_x = \dot{x}, \quad a_x = \ddot{x}.$$

Модулі швидкості та прискорення відповідно будуть

$$v = |\dot{x}|, \quad a = |\ddot{x}|.$$

Якщо $v_x > 0$, то рух точки відбувається у бік позитивного напряма осі X. Якщо при цьому $a_x > 0$, то рух прискорений; якщо $a_x < 0$, то рух сповільнений.

Якщо $v_x < 0$, то рух точки відбувається у бік негативного напряма осі X. Якщо при цьому $a_x > 0$, то рух сповільнений; якщо $a_x < 0$, то рух прискорений.

Рух точки по окружності.

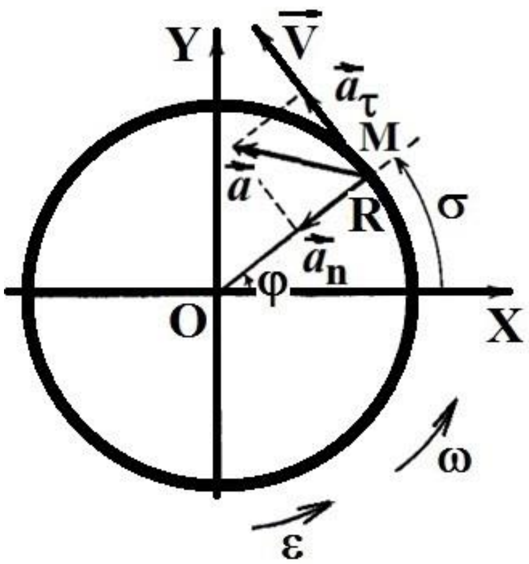


Рисунок 4.10.

При русі точки по окружності зручно задати її рух у полярних координатах, при цьому координата r є постійною величиною, яка дорівнює радіусу R окружності (рис. 4.10). Положення точки визначається кутом φ. За умови $r = R$ проекція швидкості на радіальний напрям дорівнює нулю. На дотичну проекція буде:

$$v = R\dot{\varphi} = R\omega.$$

Якщо обрати позитивний напрям відліку дуги проти годинникової стрілки, то дотичне прискорення

$$a_\tau = R\ddot{\varphi} = R\varepsilon,$$

а нормальне (його ще називають **доцентровим**)

$$a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}.$$

У цих формулах ω – кутова швидкість, а ε – кутове прискорення.

Модуль прискорення:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Контрольні питання

1. Що вивчає кінематика ?
2. Які існують способи завдання руху ?
3. Дайте визначення швидкості.
4. Як визначаються швидкості матеріальної точки за різних способів завдання руху ?
5. Дайте визначення прискорення.
6. Як визначаються прискорення матеріальної точки за різних способів завдання руху ?
7. Що визначають нормальне та дотичне прискорення ?
8. Назвіть окремі випадки руху точки.

Розділ Кінематика. Лекція № 5

План лекції

1. Задання руху твердого тіла
2. Найпростіші рухи твердого тіла
3. Швидкості та прискорення точок тіла, що обертається

Тема 2. Типи руху. Основні рухи твердого тіла

2.1. Задання руху твердого тіла

Під час руху твердого тіла (далі тіла) окремі його точки рухаються у загальному випадку за різними траєкторіями і мають в кожний момент часу різні швидкості та прискорення.

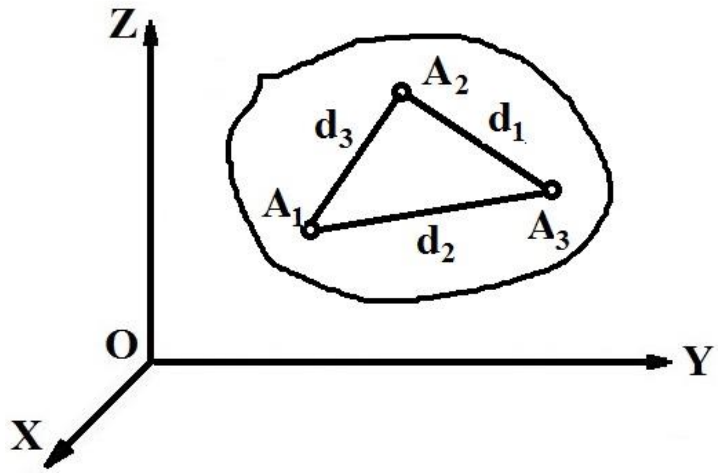


Рисунок 5.1.

Разом з цим, є кінематичні характеристики, однакові для всіх точок тіла. Основними задачами кінематики твердого тіла є встановлення способу задання його руху та вивчення кінематичних характеристик тіла, а також визначення траєкторій, швидкостей і прискорень всіх точок тіла.

Положення тіла у загальному випадку визначається заданням шести незалежних параметрів. Для цього візьмемо три точки $A_1,\ A_2,\ A_3$, що не лежать на одній прямій (рис. 5.1), координати яких:

$$x_k = x_k(t), \quad y_k = y_k(t), \quad z_k = z_k(t), \quad (k = 1,2,3) \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= d_3^2 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 &= d_1^2. \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 &= d_2^2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Через незмінність відстаней d_1, d_2, d_3 кількість незалежних змінних зменшується з дев'яти до шести. Пояснимо останнє.

Вільна точка має три ступеня волі, бо її положення і рух визначаються трьома незалежними координатами x, y, z; точка на поверхні має дві ступеня волі, бо її координати повинні задовольняти рівнянню поверхні, і тільки дві можуть бути незалежними (будь-яке обмеження руху зменшує на одиницю число ступенів волі). Вільне тіло в просторі має шість ступенів волі, бо його положення в декартовій системі визначається положенням будь-яких трьох точок, що не лежать на одній прямій. Проте дев'ять координат трьох точок повинні задовольняти трьом рівнянням, які вимагають незмінність відстаней між точками твердого тіла. Тому тільки шість координат є незалежними. В подальшому цими координатами будуть три лінійних переміщення та три кути повороту навколо осей.

Кількість незалежних параметрів, задання яких однозначно визначає положення тіла у просторі, називається **числом ступенів волі** тіла. **Числом ступенів волі твердого тіла (або будь-якої механічної системи) називають число незалежних параметрів, які однозначно визначають положення тіла відносно даної системи відліку**.

Показаний варіант задання руху тіла не є оптимальним, існують більш зручні параметри, що визначають положення тіла у просторі.

2.2. Найпростіші рухи твердого тіла

Існують п'ять видів руху твердого тіла:

1) поступальний;
2) обертальний;
3) плоский, або плоскопаралельний;
4) сферичний;
5) загальний випадок руху твердого тіла.

Поступальний і обертальний є найпростішими видами руху.

Поступальний рух твердого тіла.

Поступальним рухом твердого тіла називається такий рух, при якому довільна пряма, проведена у тілі, залишається у весь час руху паралельною своєму початковому положенню.

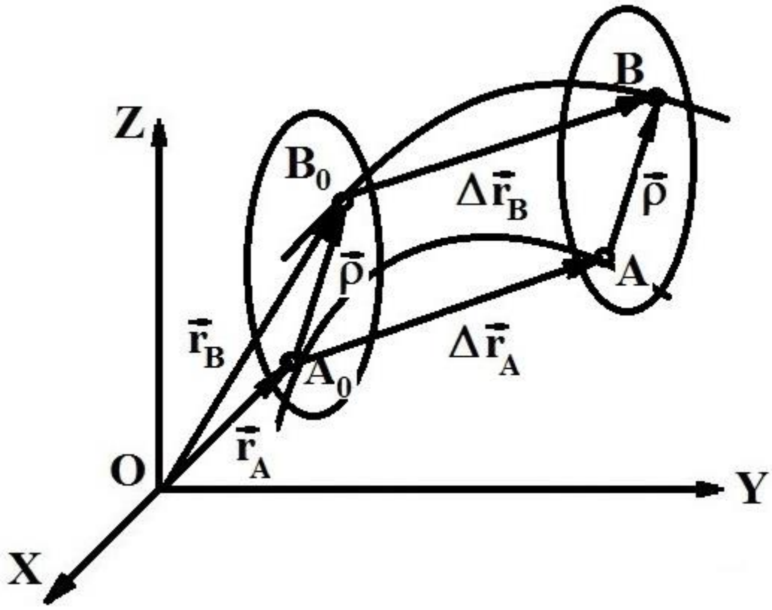


Рисунок 5.2.

Нехай тіло рухається поступально відносно системи координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 5.2), $\vec{r}_A$ – радіус-вектор точки A, $\vec{r}_B$ – радіус-вектор точки B, а $\vec{\rho}$ – радіус-вектор, який визначає положення точки B в рухомій системі координат $Axyz$, яка жорстко пов'язана з тілом.

Тіло вважається абсолютно твердим і його рух поступальний, тому вектор $\vec{\rho}$ при русі тіла не змінює модуля та напряму. Розглядаючи рис. 5.2, слідує:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \tag{5.3}$$

Нехай в момент часу t тіло займало положення I, а в момент часу $t + \Delta t$ – положення II. Тоді $\Delta\vec{r}_A$ буде вектором переміщення точки A, $\Delta\vec{r}_B$ – вектором переміщення точки B за проміжок часу Δt.

Під час руху вектор $\vec{\rho}$ не змінюється, тому відрізки A_0B_0 і AB рівні та паралельні, через те фігура A_0B_0AB – паралелограм. Таким чином,

$$\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B,$$

тобто при поступальному русі абсолютно твердого тіла переміщення всіх його точок геометрично рівні між собою.

З рівності (5.3) і умови постійності вектора $\vec{\rho}$ також слідує, що **траєкторії точок тіла, що рухається поступально, однакові, їх отримують одну з одної паралельним зміщенням**.

Продиференцюємо вираз (5.3) за часом

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}, \tag{5.4}$$

але $\vec{\rho} = const$ і $\dot{\vec{\rho}} = 0$, отже,

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \quad \text{або} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A, \tag{5.5}$$

тобто **при поступальному русі твердого тіла швидкості всіх його точок в кожний момент часу рівні між собою**.

Диференцюємо отриманий вираз за часом:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} \quad \text{або} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A, \tag{5.6}$$

тобто **прискорення всіх точок в кожний момент часу рівні між собою**.

Очевидно, що для визначення руху тіла, що рухається поступально, немає необхідності розглядати рух всіх точок тіла, достатньо розглянути рух однієї точки.

Тільки при поступальному русі:

- кутова швидкість твердого тіла дорівнює нулю;
- мають сенс наступні вирази – швидкість тіла, прискорення тіла, траєкторія тіла.

Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому будь-які дві точки, що належать до тіла (або незмінно з ним пов'язані), залишаються у весь час руху нерухомими.

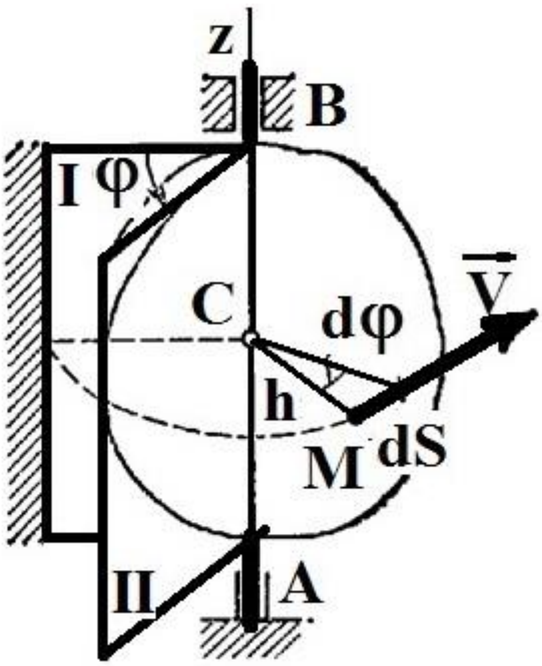


Рисунок 5.3.

Пряма AB, яка проходить через нерухомі точки A і B, називається **віссю обертання**. Очевидно, що точки на цій прямій будуть нерухомі, а решта точок будуть описувати окружності, площини яких перпендикулярні до осі обертання, а центри лежать на осі AB.

Для визначення положення тіла, що обертається (рис. 5.3), проведемо через вісь обертання напівплощину I – нерухому, і напівплощину II, яка врізана в само тіло та яка обертається разом з ним.

Тоді положення тіла в довільний момент часу однозначно визначиться узятим з відповідним знаком кутом φ між цими напівплощинами (має один ступінь волі), і який зветься **кутом повороту тіла**. Вважаємо кут додатним, якщо він відкладається від нерухомої напівплощини проти ходу годинникової стрілки, і від’ємним, коли за ходом годинникової стрілки.
Кут повороту визначається у радіанах.

Знати положення тіла у будь-який момент часу означає знати залежність кута за часом:

$$\varphi = f(t). \tag{5.7}$$

Рівняння (5.7) виражає **закон обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі**.

Основними кінематичними характеристиками обертального руху тіла є його кутова швидкість ω і кутове прискорення ε.

Кутова швидкість.

Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ тіло повертається на кут $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то чисельно середньою кутовою швидкістю тіла за цей проміжок часу буде:

$$\omega_{cp} = \Delta\varphi / \Delta t.$$

Гранично при $\Delta t \to 0$ маємо:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \omega = \dot{\varphi}. \tag{5.8}$$

Таким чином, **числове значення кутової швидкості тіла в даний момент часу дорівнює першій похідній від кута повороту за часом**.

Так само, $\omega > 0$ при обертанні проти ходу годинникової стрілки, і $\omega < 0$, коли за ходом годинникової стрілки.
Розмірність кутової швидкості рад/с, або 1/с.

Кутову швидкість тіла можна показати у вигляді вектора $\vec{\omega}$, модуль якого дорівнює $|\omega|$ і спрямований у той бік, звідки обертання видно проти ходу годинникової стрілки.

У техніці часто при рівномірному обертанні тіла використовують позасиситемну розмірність – **число обертів за хвилину** (об/хв). Залежність між кутовою швидкістю та числом обертів за хвилину визначається за наступною формулою:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}\ (1/с),$$

де n – число обертів за хвилину.

Кутове прискорення.

Кутове прискорення характеризує зміну протягом часу кутової швидкості тіла. Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ кутова швидкість зміниться на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то числове значення середнього кутового прискорення тіла за цей проміжок часу буде $\varepsilon_{cp} = \Delta\omega/\Delta t$. Гранично при $\Delta t \to 0$ маємо:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{або} \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \qquad (5.9)$$

Таким чином, **числове значення кутового прискорення тіла в даний момент часу дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту за часом**.
Розмірність кутового прискорення рад/с^2 або 1/с^2.

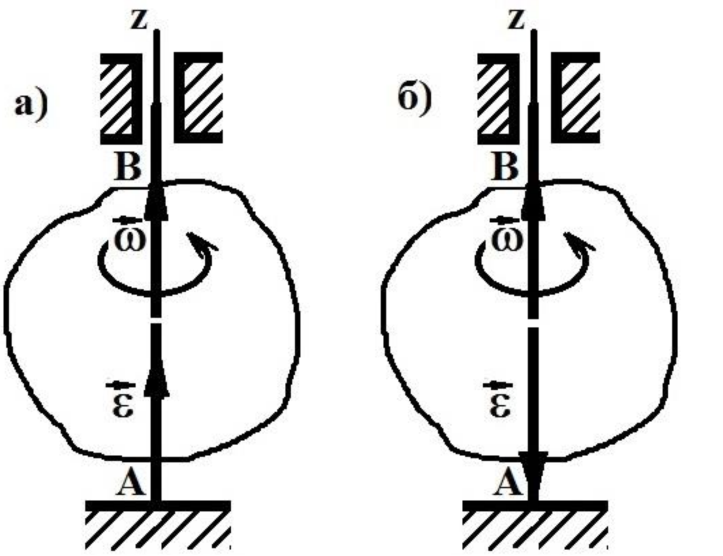


Рисунок 5.4.

Якщо модуль кутового прискорення з часом зростає, обертання називається прискореним, якщо зменшується – сповільненим.

Кутове прискорення можна показати у вигляді вектора $\vec{\varepsilon}$, який спрямований вздовж осі обертання (рис. 5.4).

Напрями векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ однакові за прискореного руху тіла, різні за сповільненого.

2.3. Швидкості та прискорення точок тіла, що обертається

Встановивши характеристики руху тіла в цілому, перейдемо до вивчення руху окремих його точок.

1. Швидкості точок тіла.

Повертаючись до рис. 5.3, розглянемо довільну точку M тіла, яка знаходиться на відстані h від осі обертання. При обертанні тіла точка M буде описувати окружність радіуса h, площина якої перпендикулярна до осі обертання, а центр C лежить на самій осі. Якщо за час dt відбувається елементарний поворот тіла на кут $d\varphi$, то точка M при цьому здійснює вздовж своєї траєкторії елементарне переміщення $ds = h \cdot d\varphi$. Тоді числове значення швидкості точки буде дорівнювати відношенню ds до dt, тобто

$$v = \frac{ds}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{або} \quad v = h\omega. \tag{5.10}$$

Швидкість v на відміну від кутової швидкості називають **лінійною** або **окружною** швидкістю точки M.

Таким чином, **числове значення швидкості точки тіла, що обертається, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань від цієї точки до осі обертання**.

Спрямована швидкість за дотичною до окружності, яку описує точка, або перпендикулярно до площини, яка проходить через вісь обертання та точку M.

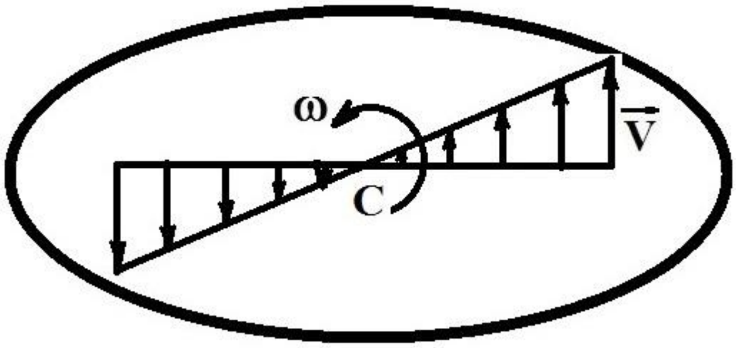


Рисунок 5.5.

Для всіх точок тіла кутова швидкість є постійною, то з виразу (5.10) слідує, що **модулі швидкості тіла, яке обертається, пропорційні їх відстаням від осі обертання**. Поле швидкостей тіла, яке обертається, показано на рис. 5.5.

2. Прискорення точок тіла.

Для визначення прискорення точки M скористаємось формулами для тангенційного (обертального) $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ (4.19), та нормального (доцентрового) $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ (4.20) прискорень з Лекції № 4.

Для нашого випадку $\rho = h$. Підставляючи значення v з виразу (5.10) у вирази для a_τ та a_n, отримуємо:

$$a_\tau = h\frac{d\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{h^2\omega^2}{h},$$

або остаточно:

$$a_\tau = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2. \qquad (5.11)$$

Модуль обертального прискорення a_τ точки твердого тіла дорівнює добутку відстані від точки обертання на модуль кутового прискорення тіла.

Модуль доцентрового прискорення a_n точки твердого тіла дорівнює добутку відстані від точки обертання на квадрат кутової швидкості тіла.

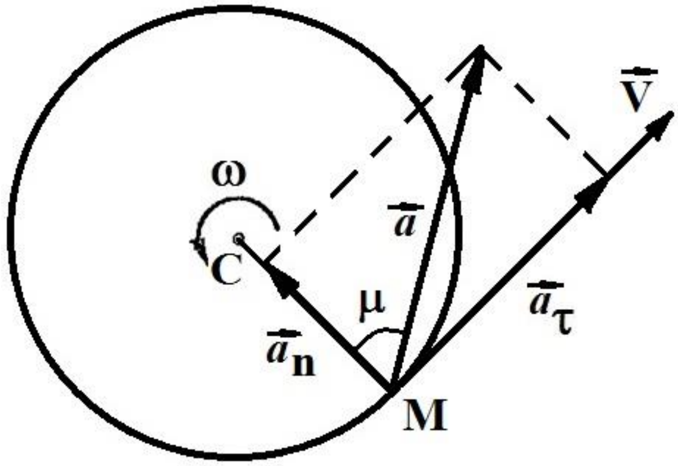


Рисунок 5.6.

Дотична складова прискорення $\vec{a}_\tau$ спрямована за дотичною до траєкторії (у бік руху за прискореного обертання та у зворотній бік за сповільненого); нормальна складова $\vec{a}_n$ завжди спрямована за радіусом обертання до осі обертання (рис. 5.6).

Повне прискорення точки буде $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ або:

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (5.12)$$

Відхилення вектора повного прискорення від радіуса окружності визначається кутом α, який обчислюється за формулою $\mathrm{tg}\mu = a_\tau / a_n$. Підставляючи сюди значення a_τ і a_n з виразу (5.11), маємо:

$$\mathrm{tg}\mu = \varepsilon / \omega^2. \qquad (5.13)$$

Через те, що ω і ε мають в даний момент часу для всіх точок тіла однакове значення, то з формул (5.12) і (5.13) слідує, що модулі прискорення всіх точок тіла, що обертається, пропорційні їх відстаням від осі обертання та утворюють в даний момент часу однаковий кут μ з радіусами окружностей, що описуються.

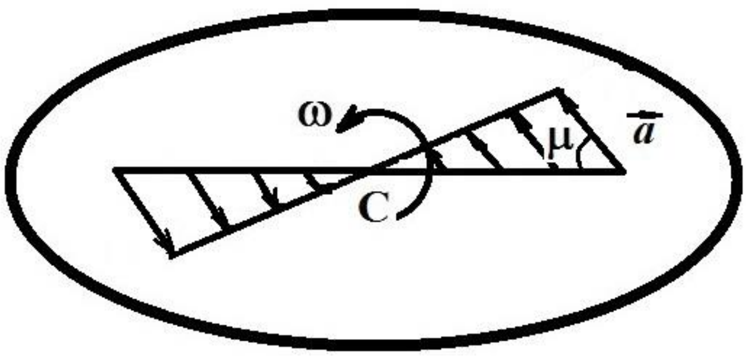


Рисунок 5.7.

Поле прискорень такого тіла має вигляд (рис. 5.7). За рівномірного обертання $\omega = const,\ \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0\ \ a_\tau = 0.$ Повне прискорення дорівнює доцентровому і спрямовано до центру обертання.

3. Вектори швидкості та прискорення точок тіла.

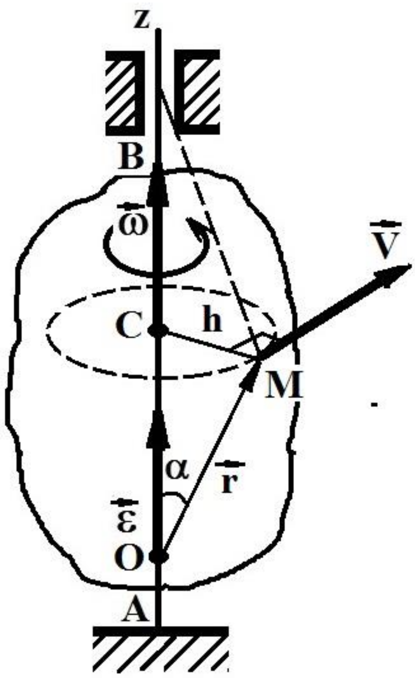


Рисунок 5.8.

Введемо поняття векторів кутової швидкості $\vec{\omega}$ і кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$.

Для знаходження виразів безпосередньо для векторів $\vec{v}$ і $\vec{a}$, проведемо з довільної точки O осі AB радіус-вектор $\vec{r}$ точки M (рис. 5.8). Тоді $h = r\sin\alpha$ і за формулою (5.10):

$$|v| = |\omega|h = |\omega|r\sin\alpha \quad \text{або}$$

$$|v| = |\vec{\omega} \times \vec{r}|.$$

Таким чином, модуль векторного добутку $\vec{\omega} \times \vec{r}$ дорівнює модулю швидкості точки M.

Напрями векторів $\vec{\omega} \times \vec{r}$ і $\vec{v}$ також збігаються (вони обидва перпендикулярні площині OMB) і їх розмірності однакові. Отже:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{5.14}$$

тобто **вектор швидкості довільної точки тіла, яке обертається, дорівнює векторному добутку кутової швидкості тіла на радіус-вектор цієї точки**. Формулу (5.14) називають формулою Ейлера.

Беручи від обох частин рівності (5.14) похідні за часом, маємо:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right),$$

або

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{v}). \tag{5.15}$$

Формула (5.15) визначає вектор прискорення довільної точки тіла, яке обертається.

Вектор $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ спрямований, як і вектор $\vec{\omega} \times \vec{r}$, тобто за дотичною до траєкторії точки M, а $|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon r\sin\alpha = \varepsilon h$. Вектор $\vec{\omega} \times \vec{v}$ спрямований вздовж MC, тобто за нормаллю до траєкторії точки M, а

$$|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v \sin 90° = \omega^2 h$$

з урахуванням $v = \omega h$. Враховуючи ці результати, а також формули (5.11), находимо, що обертальне прискорення $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}_\tau$ і доцентрове прискорення $\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_n$.

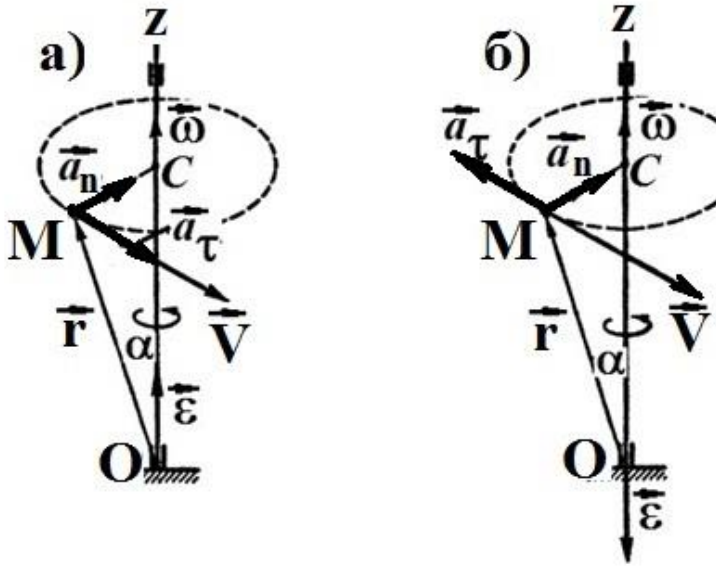


Рисунок 5.9.

Насправді, вектори, напрям яких залежний від обраної системи координат, мають назву **псевдовектори**. Прикладами псевдовекторів, окрім $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ є також момент сили відносно точки і момент пари сил.

На рис. 5.9, а показано напрями прискорень $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ для випадку прискореного руху, а на рис. 5.9, б – для випадку сповільненого обертання.

Контрольні питання

1. Які існують види руху твердого тіла ?
2. Що називають поступальним рухом твердого тіла ? Що його характеризує ?
3. Що називають обертальним рухом твердого тіла ? Що його характеризує ?
4. Як задається обертальний рух твердого тіла ? Як визначають кутову швидкість та кутове прискорення ?
5. Як визначають швидкості точок тіла ?
6. Які вектори мають назву псевдовекторів ?

Розділ Кінематика. Лекція № 6

План лекції

1. Властивості плоского руху твердого тіла. Рух плоскої фігури в її площині
2. Розклад руху плоскої фігури на поступальний рух разом з полюсом і обертанням навколо цього полюса. Рівняння руху плоскої фігури
3. Швидкості точок тіла при плоскому русі
4. План швидкостей
5. Миттєвий центр швидкостей
6. Різні випадки визначення положення миттєвого центру швидкостей
7. Приклади на застосування миттєвого центру швидкостей

Тема 3. Плоский (плоскопаралельний рух) твердого тіла

3.1. Властивості плоского руху твердого тіла. Рух плоскої фігури в її площині

Раніше були розглянуті основні рухи твердого тіла – поступальний та обертальний. Основними, а також й найпростішими, рухами їх називають тому, що всі інші рухи твердого тіла можуть бути складені з цих двох рухів. Перейдемо до вивчення одного з таких складних рухів – плоскопаралельного.

Плоским або плоскопаралельним рухом твердого тіла називають такий рух, при якому кожна точка тіла рухається у площині, паралельній до деякої нерухомої площини.

Плоский рух достатньо розповсюджений у техніці, бо приблизно 98 % всіх механізмів є плоскими і багато з них мають ланки, які рухаються плоскопаралельно.

Плоска фігура, яка утворена перерізом тіла цією нерухомою площиною Q, увесь час руху залишається в цій площині (рис. 6.1). Встановимо властивості плоского руху твердого тіла.

Розглянемо рух точок тіла, розташованих на одному перпендикулярі до нерухомої площини Q. Точка M_1 рухається у площині Q_1, а точка M_2 - у площині Q_2; обидві площини паралельні нерухомій площині Q.

Під час руху відрізок M_1M_2 залишається перпендикулярним площині Q, тобто залишається паралельним своєму початковому положенню.

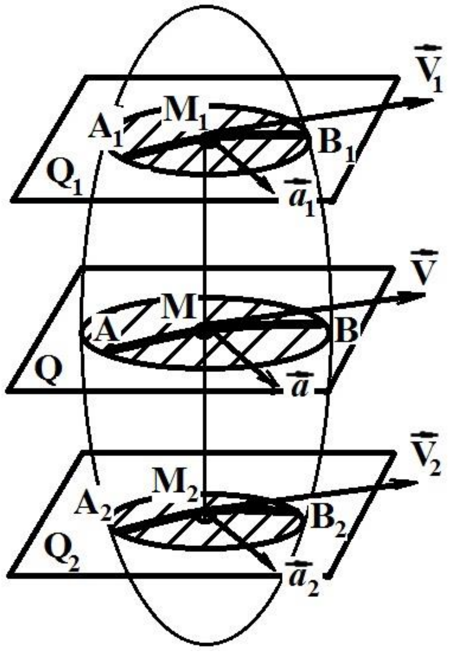


Рисунок 6.1.

Це означає, що всі точки цього перпендикуляра, аналогічно до точок тіла, яке рухається поступально, описують тотожні і паралельні між собою траєкторії і в кожний момент часу мають геометрично рівні швидкості та прискорення.

Інакше, траєкторії A_1B_1, A_2B_2, AB точок тіла M_1, M_2, M тотожні і паралельні, їхні швидкості $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$ і прискорення $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$ також рівні.

Ґрунтуючись на цій властивості плоского руху твердого тіла, встановлюємо, що рух кожної точки плоскої фігури в нерухомій площині Q визначає собою рух всіх точок твердого тіла, розташованих на перпендикулярі до площини Q, який проведено в цій точці. Це дозволяє звести вивчення плоского руху твердого тіла до вивчення руху плоскої фігури в її площині.

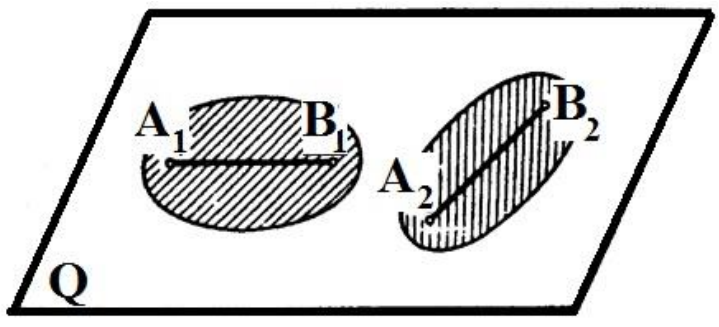


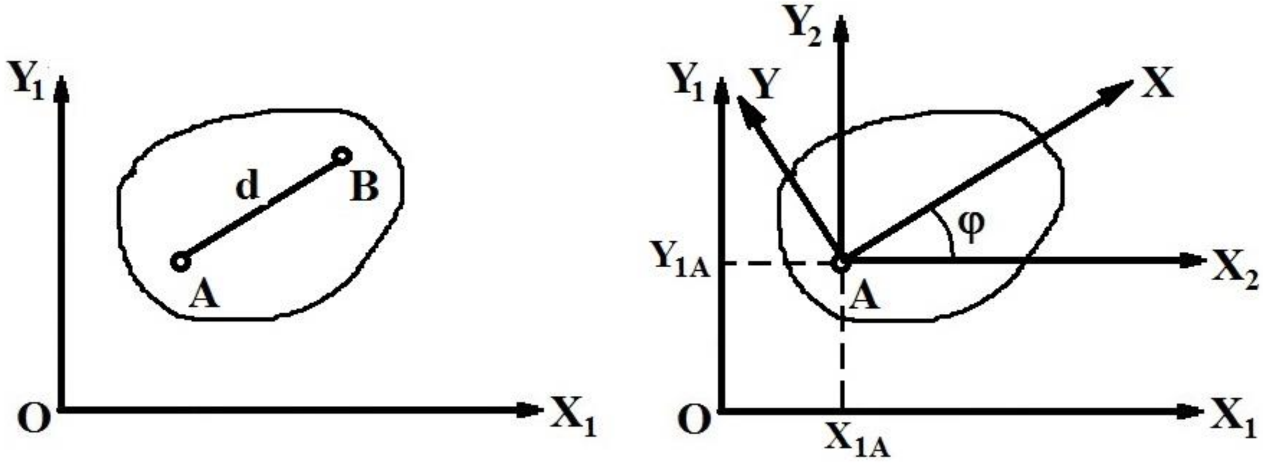
Рисунок 6.2.

Через те, що положення плоскої фігури на площині повністю визначається положенням 2-х її точок або положенням відрізку, що з'єднує ці точки, рух плоскої фігури в її площині можна вивчати як рух прямолінійного відрізку в цій площині (рис. 6.2).

Будемо вважати, що рух плоскої фігури відбувається в площині рисунку, відповідно, рисунок є натуральним зображенням фігури.

3.2. Розклад руху плоскої фігури на поступальний рух разом з полюсом і обертанням навколо цього полюса. Рівняння руху плоскої фігури

Нехай $A(x_{1A}, y_{1A})$ і $B(x_{1B}, y_{1B})$ – дві точки плоскої фігури, яка знаходиться у площині Ox_1y_1 (рис. 6.3).



а) б)

Рисунок 6.3.

Відстань d між цими точками залишається незмінною

$$(x_{1A} - x_{1B})^2 + (y_{1A} - y_{1B})^2 = d^2,$$

тому з чотирьох координат незалежними є тільки три (рис. 6.3, а). Приєднання третьої точки $C(x_{1C}, y_{1C})$ не збільшує числа невідомих координат, дві нові координати x_{1C} і y_{1C} мають задовольняти двом рівностям, що виражають незмінність відстаней до раніше обраних точок A і B. Таким чином, для опису плоского руху тіла потрібно знати три незалежних координати як функції часу.

Зв'яжемо жорстко з плоскою фігурою систему координат Axy, а разом з нею і положення плоскої фігури відносно системи координат Ox_1y_1 буде визначено заданням координат x_{1A} і y_{1A} точки A і кутом φ між осями Ax_2 і Ax (рис. 6.3, б) (осі Ax_2 і Ay_2 відповідно паралельні осям Ox_1 і Oy_1 і переміщуються при русі фігури поступально). Отже, три функції часу:

$$x_{1A} = x_{1A}(t), \quad y_{1A} = y_{1A}(t), \quad \varphi = \varphi(t) \qquad (6.1)$$

визначають положення плоскої фігури у будь-який момент часу. Рівності (6.1) називають **рівняннями руху плоскої фігури** або **рівняннями плоского руху твердого тіла**. Точку A, за допомогою якої визначають положення плоскої фігури, називають **полюсом**.

3.3. Швидкості точок тіла при плоскому русі

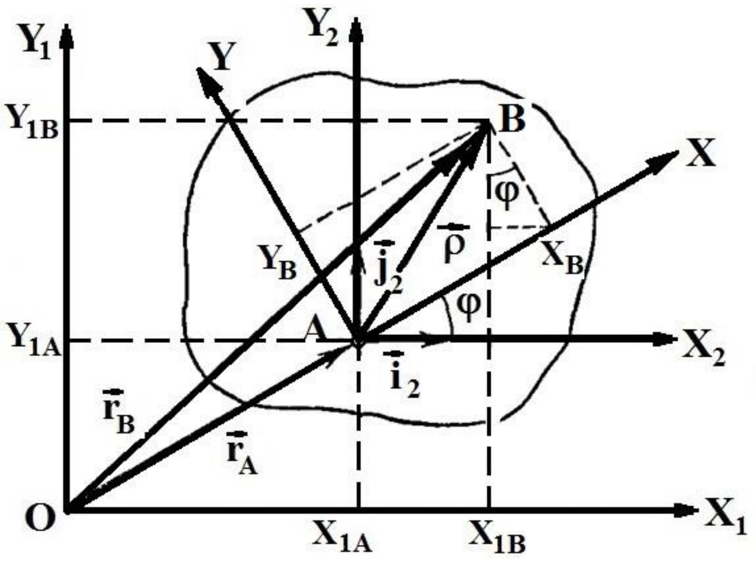


Рисунок 6.4.

Знайдемо формули, що дозволяють при заданих функціях (6.1) визначити координати довільної точки плоскої фігури.

Нехай система координат Ox_1y_1 є нерухомою системою, а система координат Ax_2y_2, яка має початок у довільно обраній точці A плоскої фігури, рухається поступально.

Радіус-вектор $\vec{r}_B$, який визначає положення точки B відносно нерухомої системи координат Ox_1y_1 (рис. 6.4), можна задати за допомого двох векторів: $\vec{r}_A$, який визначає положення точки A в системі відліку Ox_1y_1, і $\vec{\rho}$, який визначає положення точки B в системі відліку Ax_2y_2,

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \qquad (6.2)$$

Знаючи координати x_{1A} і y_{1A} точки A і координати x_B і y_B точки B в системі координат Axy, а також кут φ між осями Ax_2 і Ax, можна визначити координати x_{1B} і y_{1B} точки B за формулами:

$$x_{1B}(t) = x_{1A}(t) + x_B \cos\varphi(t) - y_B \sin\varphi(t),$$

$$y_{1B}(t) = y_{1A}(t) + x_B \sin\varphi(t) + y_B \cos\varphi(t). \qquad (6.3)$$

Нагадуємо, що координати x_B і y_B – постійні величини. Продиференціюємо за часом x_{1B} і y_{1B}, знайдемо проекції швидкості точки B на координатні осі:

$$\dot{x}_{1B} = \dot{x}_{1A} - x_B\,\dot{\varphi}\sin\varphi - y_B\,\dot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$\dot{y}_{1B} = \dot{y}_{1A} + x_B\dot{\varphi}\cos\varphi - y_B\dot{\varphi}\sin\varphi. \qquad (6.4)$$

До цього результату можна дістатися через диференціювання виразу (6.2):

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \qquad (6.5)$$

В цьому виразі $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_A$, $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_B$. Щодо $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$, то це є швидкість точки B відносно рухомої системи координат Ax_2y_2, тобто відносна швидкість. Введемо для неї позначення:

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Рух тіла відносно системи координат Ax_2y_2 є обертанням тіла навколо осі Az_2, спрямованої перпендикулярно площині рисунку на спостерігача. Таким чином, швидкість $\vec{v}_{BA}$ є швидкість точки B при обертанні тіла навколо осі Az_2. Для визначення цієї швидкості є формула:

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_A \times \vec{\rho},$$

де $\vec{\omega}_A$ – кутова швидкість обертання фігури навколо точки A (навколо осі Az_2), яку в подальшому будемо називати **полюсом**.
Формула (6.5) набуває вигляду:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \qquad (6.6)$$

тобто швидкість довільної точки B плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса A і швидкості точки B при обертанні плоскої фігури навколо полюса A.

Кутова швидкість обертання фігури не залежить від вибору полюса, тому $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}$ без збереження індексу полюса. Можна записати:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \qquad (6.7)$$

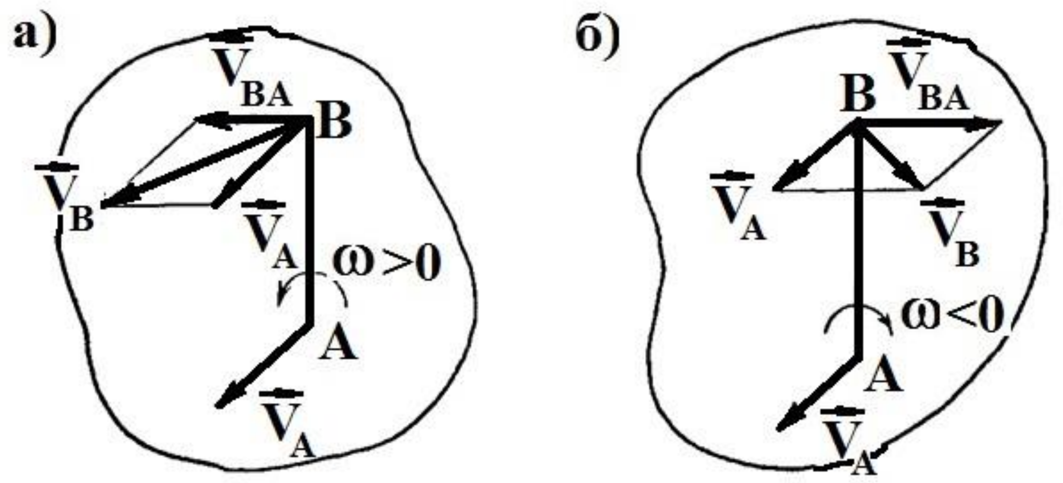


Рисунок 6.5.

На рис. 6.5 показано, як, знаючи швидкість точки A – полюса, знайти швидкість точки B при $\omega > 0$ і $\omega < 0$.

З формули (6.7) слідує одна корисна теорема (правило проекцій швидкостей):

при плоскому русі проекції швидкостей двох точок тіла на вісь, що проходить через ці точки, рівні між собою.

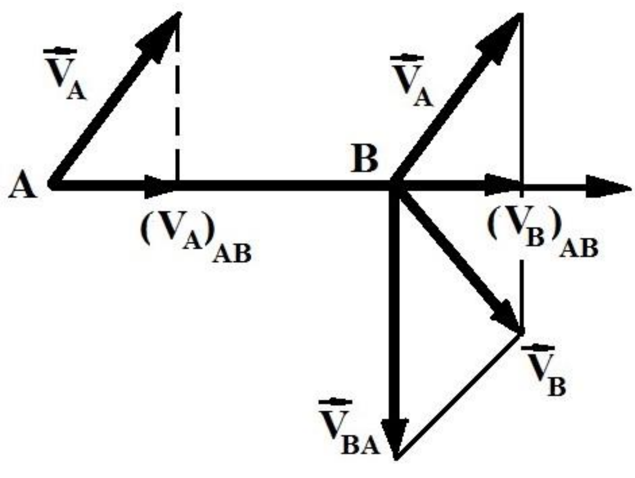


Рисунок 6.6.

Обираємо позитивний напрям для осі AB (рис. 6.6). Скористаємось формулою (6.7)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

Проектуючи цю рівність на відрізок AB (або його продовження у вигляді прямої), отримуємо:

$$(v_B)_{AB} = (v_A)_{AB} + (v_{BA})_{AB}.$$

Останній доданок в цьому виразі дорівнює нулю, тому що вектор $\vec{v}_{BA} \perp AB$. Остаточно:

$$(v_B)_{AB} = (v_A)_{AB}.$$

У випадку, коли вектори $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ перпендикулярні до прямої AB, ця теорема не дає результату і слід застосовувати інші методи.

3.4. План швидкостей

3.4.1. Загальні відомості про побудову плану швидкостей.

План швидкостей – це графічна картина розподілу швидкостей плоскої фігури. Цей спосіб застосовується в теорії механізмів і машин, в даному курсі наведемо принцип побудови плану швидкостей покажемо на прикладі кривошипно-шатунного механізму. Кінематичний аналіз механізму зробимо на прикладі схеми (рис. 6.7, а) з наступними вихідними даними:

$$OA = 0{,}5 \text{ м}, AB = 0{,}9 \text{ м}, \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ рад}, \omega_1 = 35 \text{ с}^{-1}.$$

Будуємо кінематичну схему механізму згідно з вихідними даними в масштабі.

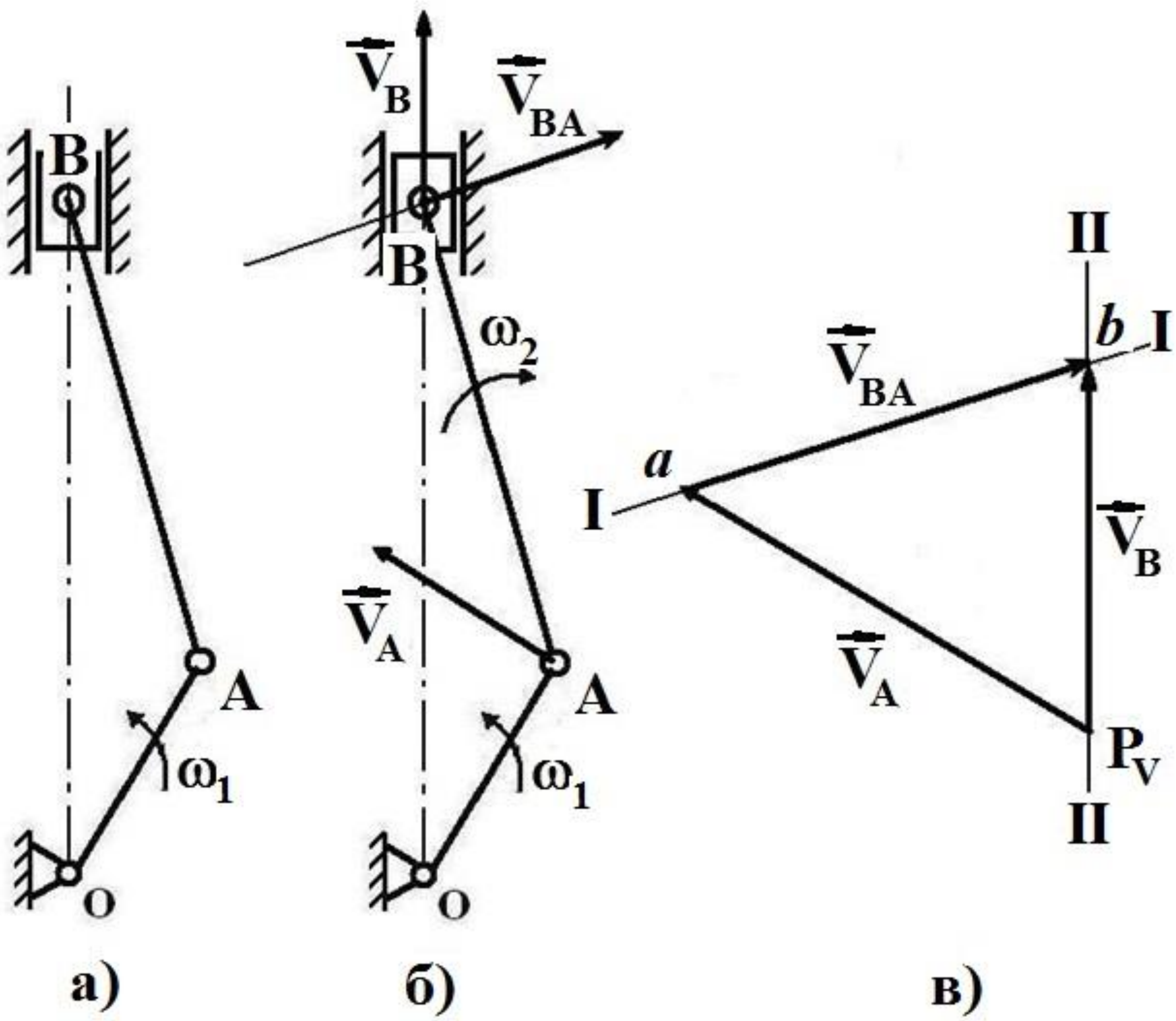


Рисунок 6.7.

Для механізмів з твердими та жорсткими ланками план швидкостей будують на основі теорії плоско-паралельного руху твердого тіла та теорії складного руху. Кривошип OA здійснює обертальний рух, повзун B –

поступальний, шатун AB – плоскопаралельний рух. Визначальною при цьому є швидкість повзуна $\vec{v}_B$. Вона дорівнює геометричній сумі швидкості $\vec{v}_A$ точки A кривошипу OA та швидкості $\vec{v}_{BA}$ точки B шатуна AB відносно точки A і визначається за формулою (6.6):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA},$$

за якою і здійснюють вказану побудову. В якості полюса плану швидкостей P_v можна взяти будь-яку точку твердого тіла, до якого мають бути прив'язані всі побудови.

Будемо використовувати наступні правила:

1. Кожний з відрізків, який з'єднує вершини плану швидкостей, геометрично дорівнює обертальній швидкості відповідної точки фігури навколо іншої точки як навколо полюса.

2. Вектори, що йдуть від полюса P_v, виражають абсолютні швидкості відповідних точок. Вектори, що не проходять через полюс P_v, виражають відносні швидкості відповідних точок.

3. Швидкість обертання ланки механізму спрямована перпендикулярно до відрізка, що зображує відповідну ланку, в бік обертання цієї ланки.

Абсолютними є швидкості $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$. Відносною є швидкість $\vec{v}_{BA}$ (має відношення до полюса A).

3.4.2. Визначення швидкості $\vec{v}_A$ точки A.

Точка A здійснює обертальний рух, тому

$$v_A = \omega_1 \cdot OA = 35 \cdot 0{,}5 = 17{,}5 \text{ м/с}.$$

Вектор $\vec{v}_A$ спрямований перпендикулярно до відрізку OA, у бік кутової швидкості ω_1, $\vec{v}_A \perp OA$. Обираємо масштаб плану швидкостей μ_v, який показує, скільком одиницям швидкості певної точки відповідає відрізок 1 мм на плані швидкостей (рис. 6.7, б).

Знаходимо довжину відрізку $(P_v a)$, який зображує вектор швидкості $\vec{v}_A$ на плані:

$$|P_v a| = \frac{v_A}{\mu_v}, \text{ мм.}$$

З полюса плану швидкостей P_v відкладаємо даний відрізок перпендикулярно до OA в напрямі кутової швидкості ω_1.

3.4.3. Визначення обертальної швидкості $\vec{v}_{BA}$ та швидкості $\vec{v}_B$.

Напрями та величини швидкостей $\vec{v}_{BA}$ і $\vec{v}_B$ невідомі. Єдиною достовірною інформацією є лінія дії вказаних векторів – вектор $\vec{v}_B$ діє вздовж лінії OB, а вектор $\vec{v}_{BA}$ за нормаллю до ланки AB, проходячи через точку B. Відрізки $(P_v a)$ і (ab), які зображують відповідно вектори швидкостей $\vec{v}_{BA}$ та $\vec{v}_B$, знаходимо безпосередньо з плану швидкостей (рис. 6.7, б). Через полюс P_v проводимо лінію II-II, паралельну лінії дії вектора $\vec{v}_B$, через точку a проводимо лінію I-I, паралельну лінії дії вектора $\vec{v}_{BA}$. На перетині двох проведених ліній отримуємо точку b. Вимірюючи довжину відрізків $|P_v b|$, мм, і $|ab|$, мм, помножаємо на масштаб μ_v та обчислюємо швидкості:

$$v_{BA} = |ab| \cdot \mu_v, \text{ м/с,}$$

$$v_B = |P_v b| \cdot \mu_v. \text{ м/с.}$$

Вектор $\vec{v}_{BA}$ спрямований так, що шатун обертається навколо точки A за годинниковою стрілкою.

3.4.5. Визначення кутової швидкості ω_2 шатуна AB.

Шатун обертається навколо точки A, тому кутова швидкість цієї ланки

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{AB}, \text{ с}^{-1}.$$

Для визначення напряму ω_2 переносимо вектор $\vec{v}_{BA}$ в точку B шатуна та дивимось, як вона рухається відносно точки A. Напрям цього руху відповідає ω_2. При напрямі кутової швидкості ω_1 проти годинникової стрілки (рис. 6.7, б) напрям кутової швидкості ω_2 буде протилежним.

3.5. Миттєвий центр швидкостей

Миттєвим центром швидкостей (МЦШ) називається точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Якщо кутова швидкість плоскої фігури відмінна від нуля, то МЦШ існує.

Швидкості точок тіла при його плоскому русі розподілені так само, як і при обертальному русі. Роль нерухомої осі відіграє миттєва вісь, яка проходить через МЦШ перпендикулярно площині руху. Таким чином, швидкості всіх точок фігури перпендикулярні відрізкам, які з'єднують ці точки з МЦШ, а модулі швидкостей пропорційні відстаням до МЦШ.

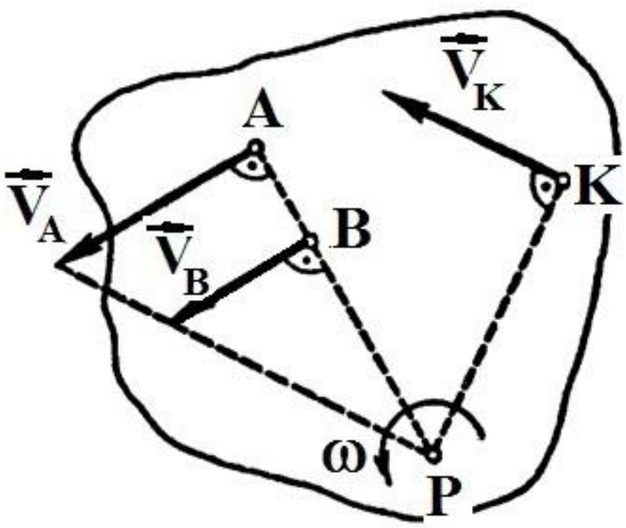


Рисунок 6.8.

Слід зазначити, що певне положення МЦШ існує тільки в цю мить, в іншу – положення змінюється. Знаючи положення МЦШ, можна знайти швидкості всіх точок плоскої фігури, якщо відома швидкість будь-якої її точки (рис. 6.8). Визначимо швидкості точок A, B, K плоскої фігури, прийнявши за полюс МЦШ точку P. За формулою (6.6) отримуємо:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{PA}, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{PB}, \quad \vec{v}_K = \vec{v}_P + \vec{v}_{PK}.$$

Але швидкість точки P в даний момент часу дорівнює нулю, тобто $\vec{v}_P = 0$. Тоді швидкості точок визначають за формулами:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{PA}, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_{PB}, \quad \vec{v}_K = \vec{v}_{PK}, \tag{6.8}$$

швидкість будь-якої точки плоскої фігури в даний момент часу є обертальною швидкістю цієї точки навколо МЦШ. З цього слідує:

$$\begin{aligned} v_A &= PA \cdot \omega, \quad \vec{v}_A \perp PA \\ v_B &= PB \cdot \omega, \quad \vec{v}_A \perp PB. \\ v_K &= PK \cdot \omega, \quad \vec{v}_A \perp PK \end{aligned} \tag{6.9}$$

Швидкість будь-якої точки плоскої фігури кожної миті має модуль, який дорівнює добутку кутової швидкості фігури на довжину відрізку, що з'єднує точку з МЦШ, і спрямована перпендикулярно до цього відрізку у бік обертання фігури.

З виразів (6.9):

$$v_B/v_A = PB/PA,\ v_K/v_A = PK/PA \text{ тощо.} \tag{6.10}$$

Для визначення швидкості точок плоскої фігури за допомогою МЦШ необхідно знати положення МЦШ і кутову швидкість фігури. Зазначимо, що це положення весь час змінюється, цим пояснюється назва цієї точки.

3.6. Різні випадки визначення положення миттєвого центру швидкостей

1. Нехай відомі прямі, вздовж яких спрямовані швидкості двох точок A і B плоскої фігури (рис. 6.9). Тоді МЦШ фігури визначиться як точка перетину перпендикулярів до цих прямих, відновлених у точках A і B.

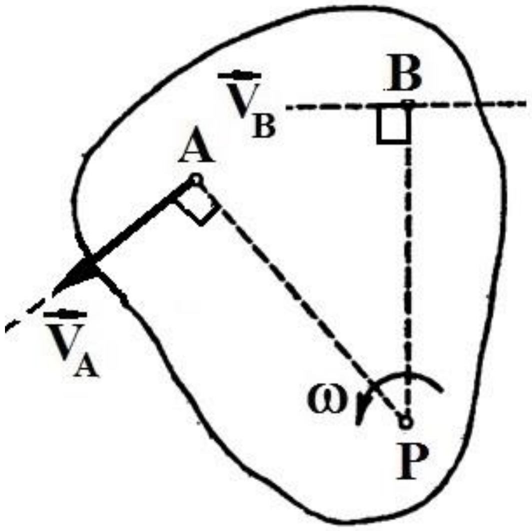


Рисунок 6.9.

Знаючи модуль швидкості точки A і визначив відстань PA між цією точкою та полюсом P, знаходимо кутову швидкість фігури згідно з (6.9):

$$\omega = v_A/PA.$$

Модуль швидкості точки B можна визначити з пропорційності (6.10):

$$v_B = v_A \cdot PB/PA$$

або $v_B = PB \cdot \omega$.

Швидкість будь-якої іншої точки визначається аналогічно.

2. Якщо швидкості точок A і B плоскої фігури паралельні між собою і перпендикулярні AB, то для визначення положення МЦШ мають бути відомі модулі швидкостей обох точок (рис. 6.10, а, б). Швидкості пропорційні їхнім відстаням від МЦШ $v_B/v_A = PB/PA$, отже кінці швидкостей точок A і B

лежать на прямій, що проходить через МЦШ. Перетин цієї прямої з прямою AB визначає положення МЦШ.

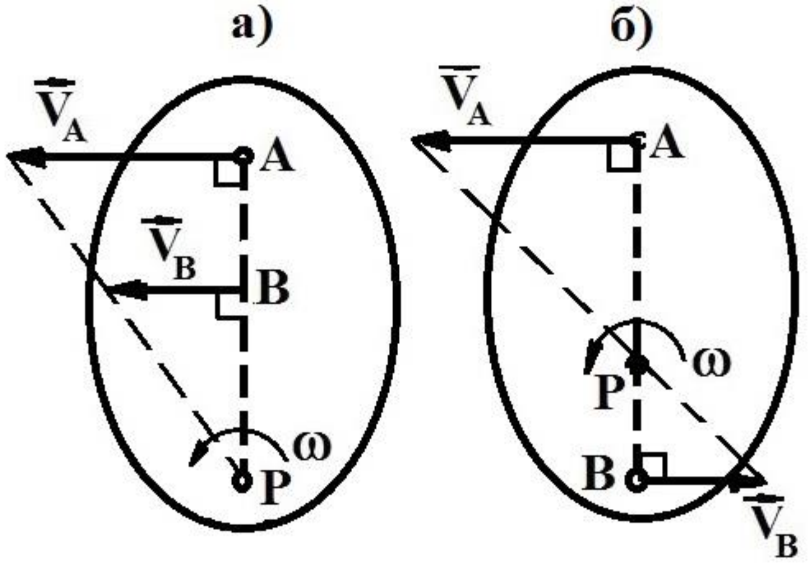


Рисунок 6.10.

Якщо швидкості точок A і B рівні, паралельні між собою і перпендикулярні AB, то МЦШ знаходиться у нескінченності ($AP = \infty$) (рис. 6.10, в), а кутова швидкість фігури

$$\omega = v_A / AP = v_A / \infty = 0.$$

Фігура за цієї умови відсутності обертання здійснює **миттєво поступальний рух**.

3. Якщо швидкості точок A і B рівні, паралельні між собою і не перпендикулярні AB, то МЦШ знаходиться у нескінченності ($AP = \infty$) (рис. 6.11), а кутова швидкість фігури також дорівнює нулю.

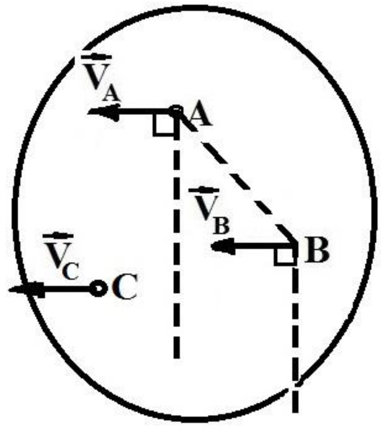


Рисунок 6.11.

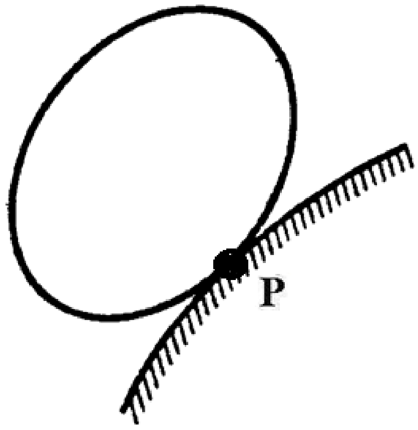


Рисунок 6.12.

Швидкості точок фігури в цей момент часу однакові

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \cdots.$$

4. Часто на практиці відбувається рух плоскої фігури, за якого вона котиться без ковзання по деякій нерухомій лінії (рис. 6.12). В цьому випадку МЦШ знаходиться у точці контакту з лінією. Дійсно, за відсутності ковзання швидкість точки стикання плоскої фігури по відношенню до нерухомої кривої дорівнює нулю, тобто ця точка і є МЦШ.

Для дослідження руху механізмів, тобто систем, які складаються з декількох тіл (ланок), миттєві центри швидкостей та кутові швидкості треба визначати окремо для кожного тіла, яке рухається плоскопаралельно.

3.7. Приклади на застосування миттєвого центру швидкостей

1. Колесо радіусом R котиться без ковзання по горизонтальній поверхні (рис. 6.13, а). Швидкість центра колеса в даний момент часу v_C.

Визначити швидкості точок A, B, D, E колеса, розташованих на кінцях взаємно перпендикулярних діаметрів.

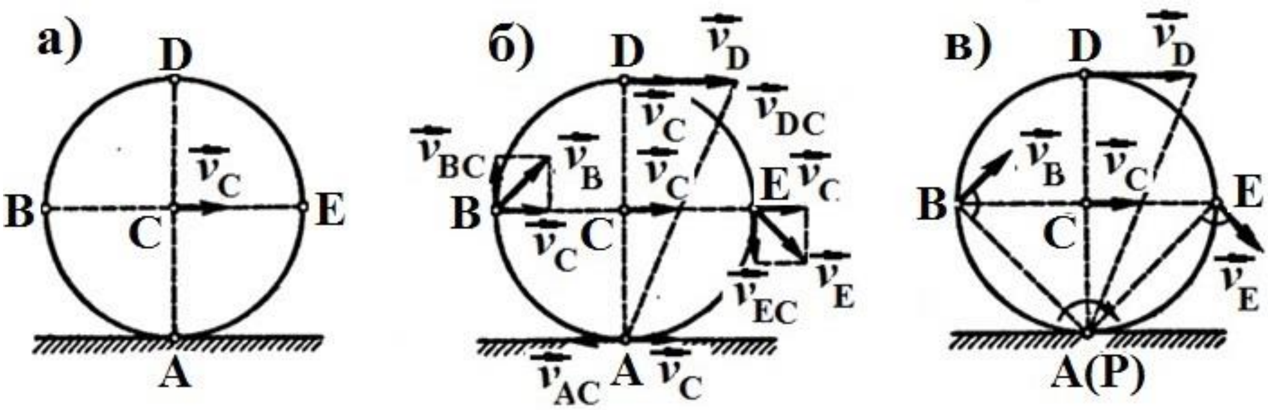


Рисунок 6.13.

Розв'язання (1-й спосіб). Приймаємо за полюс центр колеса C (рис. 6.13, б). Тоді швидкість довільної точки колеса дорівнює геометричній сумі швидкості полюса та швидкості обертання цієї точки навколо полюса. Колесо котиться без ковзання, тоді швидкість точки A контакту з поверхнею дорівнює нулю, $v_A = 0$. Точка A є МЦШ. В цій точці швидкість обертання v_{AC} навколо полюса і швидкість полюса v_C рівні за модулем і протилежні за напрямом.

Відстані від точок A, B, D, E до полюса C однакові. Отже, і обертальні швидкості точок навколо полюса теж однакові

$$v_{AC} = v_{BC} = v_{DC} = v_{EC} = v_C.$$

Відкладаючи у кожній точці швидкість полюса v_C і обертальну швидкість, перпендикулярну відповідному радіусу, складаємо їх геометрично, а потім знаходимо модулі швидкості.

Розв'язання (2-й спосіб). Приймаємо МЦШ за полюс (точка A). Тоді швидкості усіх точок колеса визначаються як обертальні швидкості навколо МЦШ (рис. 6.13, в). Модулі швидкостей всіх точок знайдемо з пропорційності швидкостей їх відстаням від МЦШ ($PB = PE = R\sqrt{2}$):

$$v_D = v_C \cdot PD/PC = v_C \cdot 2,$$

$$v_B = v_C \cdot PB/PC = v_C \cdot \sqrt{2},$$

$$v_E = v_C \cdot PE/PC = v_C \cdot \sqrt{2}.$$

Знайдені швидкості перпендикулярні відповідним відрізкам у бік обертання колеса. Аналогічний розподіл швидкостей має місце при коченні колеса без ковзання по будь-якій поверхні.

2. Кривошип OC обертається навколо осі O з кутовою швидкістю ω_{OC}. Визначити модулі та напрями швидкостей точок A, B, D, E рухомої шестерні, а також її кутову швидкість ω (рис. 6.14).

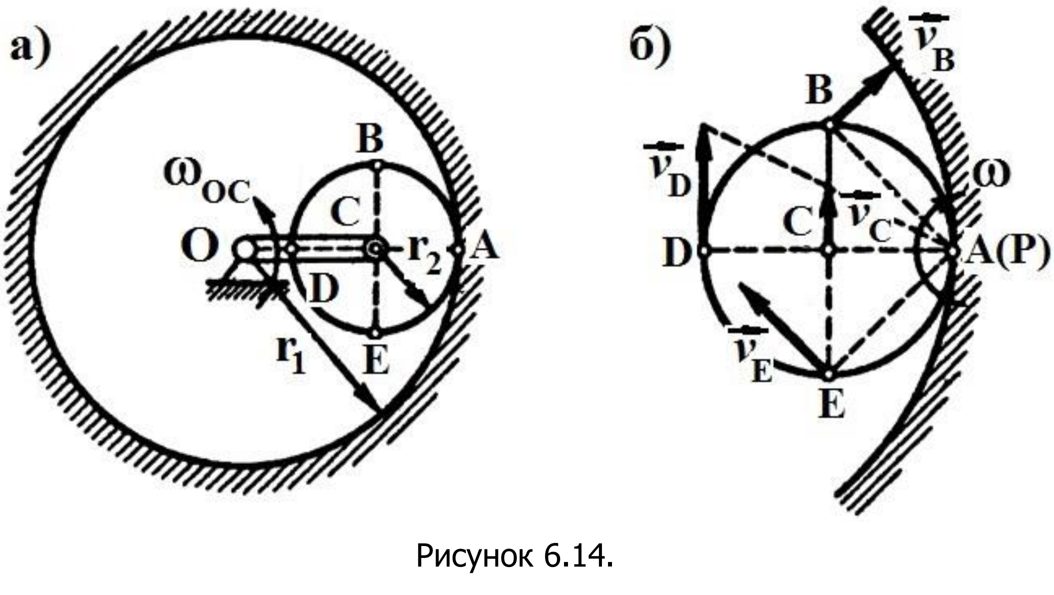


Рисунок 6.14.

Розв’язання. Проводиться аналогічно до попередньої задачі. Визначається положення МЦШ – точка контакту циліндру з нерухомою поверхнею, далі швидкість точки C, потім кутова швидкість ω.

Контрольні питання

1. Що називається плоским рухом твердого тіла ?
2. Як можна розкласти рух плоскої фігури ? Сформулюйте рівняння руху плоскої фігури.
3. Як визначають швидкості при плоскому русі ?
4. Що таке план швидкостей ?
5. Що називають миттєвим центром швидкостей ?
6. Наведіть приклади визначення положення миттєвого центру швидкостей ?
7. Що називають миттєво поступальним рухом ?

Розділ Кінематика. Лекція № 7

План лекції

1. Приклади на застосування миттєвого центру швидкостей (кривошипно-шатунний механізм)
2. Теорема про прискорення точок плоскої фігури
3. План прискорень точок плоскої фігури

Тема 3. Плоский (плоскопаралельний рух) твердого тіла

3.8. Приклади на застосування миттєвого центру швидкостей (кривошипно-шатунний механізм)

3. Кривошип OA кривошипно-шатунного механізму обертається навколо осі O з кутовою швидкістю ω_{OA}. Розміри $OA = r$ і $AB = l$. Визначити кутову швидкість шатуна AB і швидкість повзуна B для моменту часу, коли кривошип OA складає з віссю напрямних повзуна кут φ (рис. 7.1, а).

Розв'язання.

Рисунок 7.1,а

Проаналізуємо рух кожної ланки механізму. Кривошип здійснює обертальний рух навколо центру O, шатун здійснює плоский рух навколо полюса A, повзун здійснює поступальний рух вздовж своїх напрямних.

Знаючи кутову швидкість кривошипу та його довжину, визначимо модуль швидкості пальця кривошипу A (точки поєднання кривошипу та шатуна):

$$v_A = OA \cdot \omega_{OA} = r\omega_{OA}.$$

Швидкість пальця кривошипа A спрямована перпендикулярно до OA, а швидкість повзуна B – за прямою OB (рис. 7.1, б)

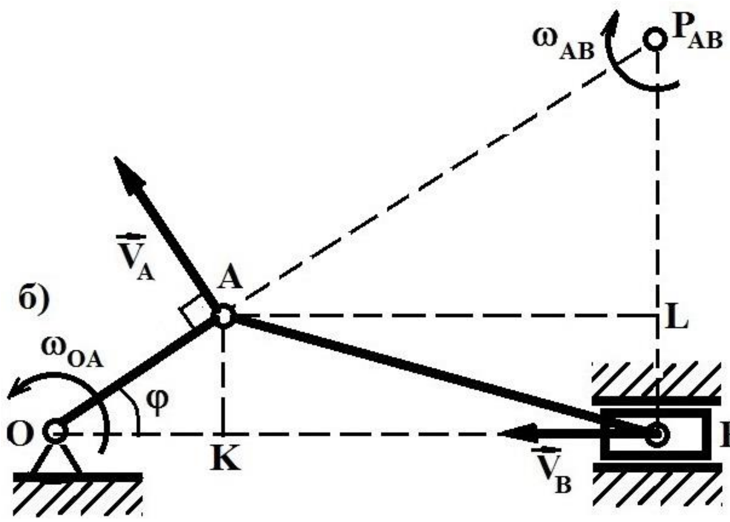


Рисунок 7.1,б

Відновлюємо в точках A і B перпендикуляри до напрямів їхніх швидкостей. Точка перетину цих перпендикулярів визначає положення МЦШ шатуна.

Обчислимо відстань від точки A до МЦШ:

$$P_{AB}A = AL/\cos\varphi,$$

але

$$AL = KB = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}.$$

Підставимо значення AL:

$$P_{AB}A = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}/\cos\varphi.$$

Кутова швидкість шатуна AB:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{P_{AB}A} = \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \omega_{OA}.$$

Напрям кутової швидкості визначається напрямом обертання навколо МЦШ швидкості v_A.

Для визначення швидкості повзуна B знайдемо $P_{AB}B$:

$$P_{AB}B = (P_{AB}A + r)\sin\varphi = \left(\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}/\cos\varphi + r\right)\sin\varphi.$$

Тоді швидкість повзуна B:

$$v_B = P_{AB}B \cdot \omega_{AB}.$$

Швидкість довільної точки шатуна AB можна визначити як обертальну швидкість навколо МЦШ. Однак визначення відстаней від точок до МЦШ призводить до громіздких розрахунків, в практичних розрахунках ці відстані доцільно визначати графічно за кресленням механізму, який виконано в масштабі, або користуватися побудовою плану швидкостей.

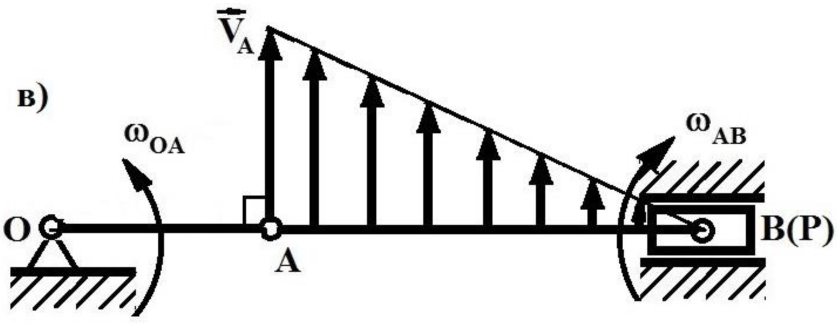


Рисунок 7.1,в

При $\varphi = 0$ (механізм витягується у пряму лінію) МЦШ шатуна (точка P) збігається з точкою B і швидкості всіх точок шатуна є обертальними навколо точки B (рис. 7.1, в).

Кутова швидкість шатуна

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA}.$$

Швидкість точки B $v_B = 0$.

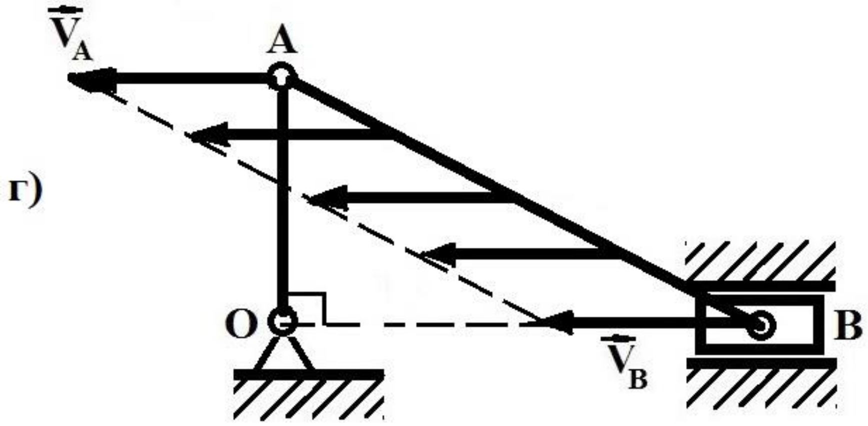


Рисунок 7.1,г

При $\varphi = 90°$ швидкості пальця кривошипу A і повзуна B паралельні, тому МЦШ шатуна AB знаходиться у нескінченності (рис. 7.1, г).

У цей момент часу всі точки шатуна AB мають однакові швидкості, які дорівнюють, $\vec{v}_A = 0$, $\omega_{AB} = 0$. Це так званий миттєво поступальний рух шатуна.

3.9. Теорема про прискорення точок плоскої фігури

Для визначення прискорення точки плоскої фігури продиференціюємо рівняння (6.7) за часом:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}.$$

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (7.1)$$

В цьому співвідношенні $\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{a}_B$, $\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A$ – відповідно прискорення точок B і A, $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ – вектор кутового прискорення, $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_{BA}$. Вектор $\vec{\varepsilon}$, як і вектор $\vec{\omega}$, спрямований перпендикулярно до площини фігури та визначається за формулою:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\vec{k}\right) = \ddot{\varphi}\vec{k}.$$

Таким чином, прискорення точок A і B пов’язані між собою співвідношенням:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}. \quad (7.2)$$

Два останніх доданки в (7.2) визначають прискорення точки B при закріпленій точці A (за умови $\vec{a}_A = 0$). Тому їхня сума:

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA} = \vec{a}_{BA}$$

дає прискорення точки B у обертальному русі навколо центру A.

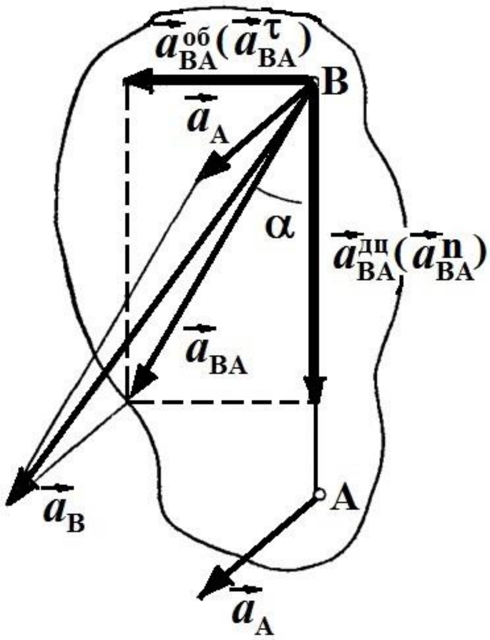


Рисунок 7.2

Під час вивчення обертального руху ми визначили, як спрямовані складові вектору прискорень $\vec{a}_{BA}$. Легко переконатися, користуючись правилом векторного добутку, що $\vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}$ має напрям, який збігається з відрізком BA (від точки до полюсу), а $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}$ перпендикулярно до BA. Зберігаючи назви доцентрового та обертального прискорень, запишемо:

$$\vec{a}^{\text{дц}}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}, \ \vec{a}^{\text{ОБ}}_{BA} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}.$$

Модулі цих складових будуть:

$$a^{\text{дц}}_{BA} = \omega^2\rho = \omega^2 \cdot AB, \quad a^{\text{ОБ}}_{BA} = \varepsilon\rho = \varepsilon \cdot AB. \quad (7.3)$$

На рис. 7.2 геометрично складено три вектори та визначено прискорення точки B за формулою:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\text{ОБ}} + \vec{a}_{BA}^{\text{ДЦ}}. \qquad (7.4)$$

Таким чином, **прискорення довільної точки B плоскої фігури геометрично складається з прискорення полюсу та доцентрового і обертального прискорень у обертальному русі фігури відносно полюсу**.

Зауважимо, що при вирішенні задач, перед використанням формули (7.4), необхідно обчислити кутову швидкість тіла, його кутове прискорення та обрати полюс. За полюс зазвичай обирається така точка, прискорення якої легко знаходиться за умовою задачі.

З (7.3) знайдемо кут, який складає вектор $\vec{a}_{BA}$ з напрямом на полюс (рис. 7.2),

$$tg\alpha = \frac{a_{BA}^{\text{ОБ}}}{a_{BA}^{\text{ДЦ}}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Звідси видно, що цей кут, по-перше, не залежить від вибору полюсу, по-друге, для всіх точок за фіксованого часу є однаковим.

Модуль прискорення точки при обертанні фігури навколо полюса також знаходиться з рівності (7.3):

$$a_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (7.5)$$

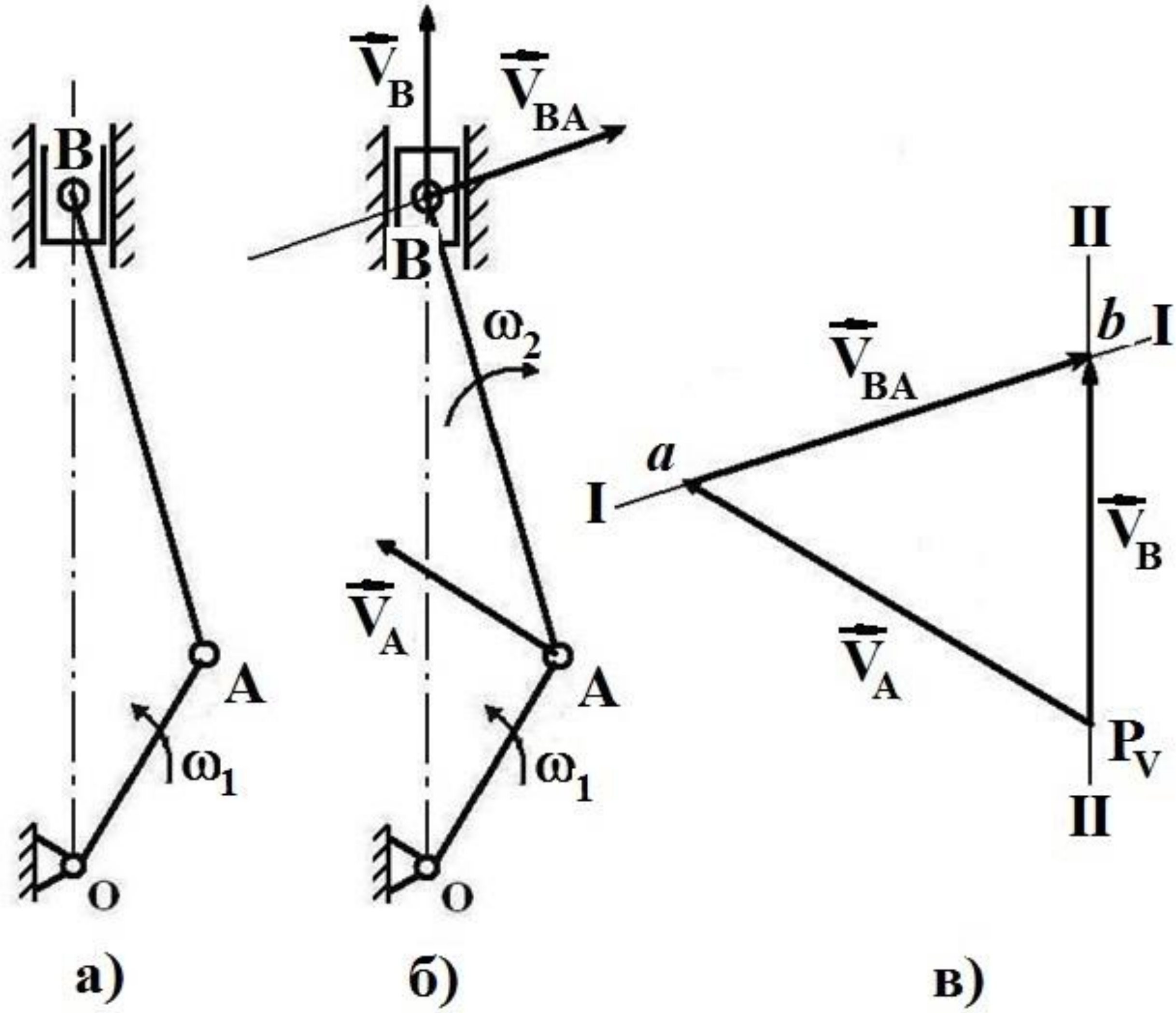
У термінах тангенційного та нормального прискорень формула (7.4) записується

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}. \qquad (7.6)$$

Позначення «обертальне» і «доцентрове» прив’язані до руху за окружністю. В більш загальному випадку руху за криволінійною траєкторією доцільно використовувати терміни «тангенційне» і «нормальне» прискорення.

3.10. План прискорень точок плоскої фігури

Для побудови плану прискорень використовують план швидкостей і вихідні дані задачі, яка була розглянута на попередній лекції (рис. 6.7).



Кінематичний аналіз механізму робимо на прикладі схеми з наступними вихідними даними:

$$OA = 0{,}5 \text{ м}, AB = 0{,}9 \text{ м}, \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ рад}, \omega_1 = 35 \text{ с}^{-1}.$$

Шатун обертається навколо точки A, тому кутова швидкість цієї ланки

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{AB}, \text{ с}^{-1}.$$

3.10.1. Загальні відомості про побудову плану прискорень

Для механізмів з твердими та жорсткими ланками план прискорень будують на основі теорії плоско-паралельного руху твердого тіла та теорії складного руху. План прискорень (рис. 7.3) будуємо за рівнянням з урахуванням (7.6) $\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^\tau$ $(\vec{a}^n \perp \vec{a}^\tau)$:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau,$$

де $\vec{a}_B$ – прискорення повзуна, $\vec{a}_A$ – прискорення точки A (в якості полюса можна обрати будь-яку точку твердого тіла), $\vec{a}_{BA}^n$ і $\vec{a}_{BA}^\tau$ – відповідно нормальне та дотичне (тангенційне) прискорення точки B відносно точки A. Всі побудови мають бути прив'язані до полюса плану прискорень P_a. При побудові плану прискорень механізму будемо використовувати наступне правило:

Прискорення довільної точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення полюса та прискорення цієї точки в її обертанні разом з плоскою фігурою навколо полюса.

Вихідними даними для побудови плану прискорень механізму є відомі геометричні розміри ланок механізму, кінематичні параметри, що задані або були визначені.

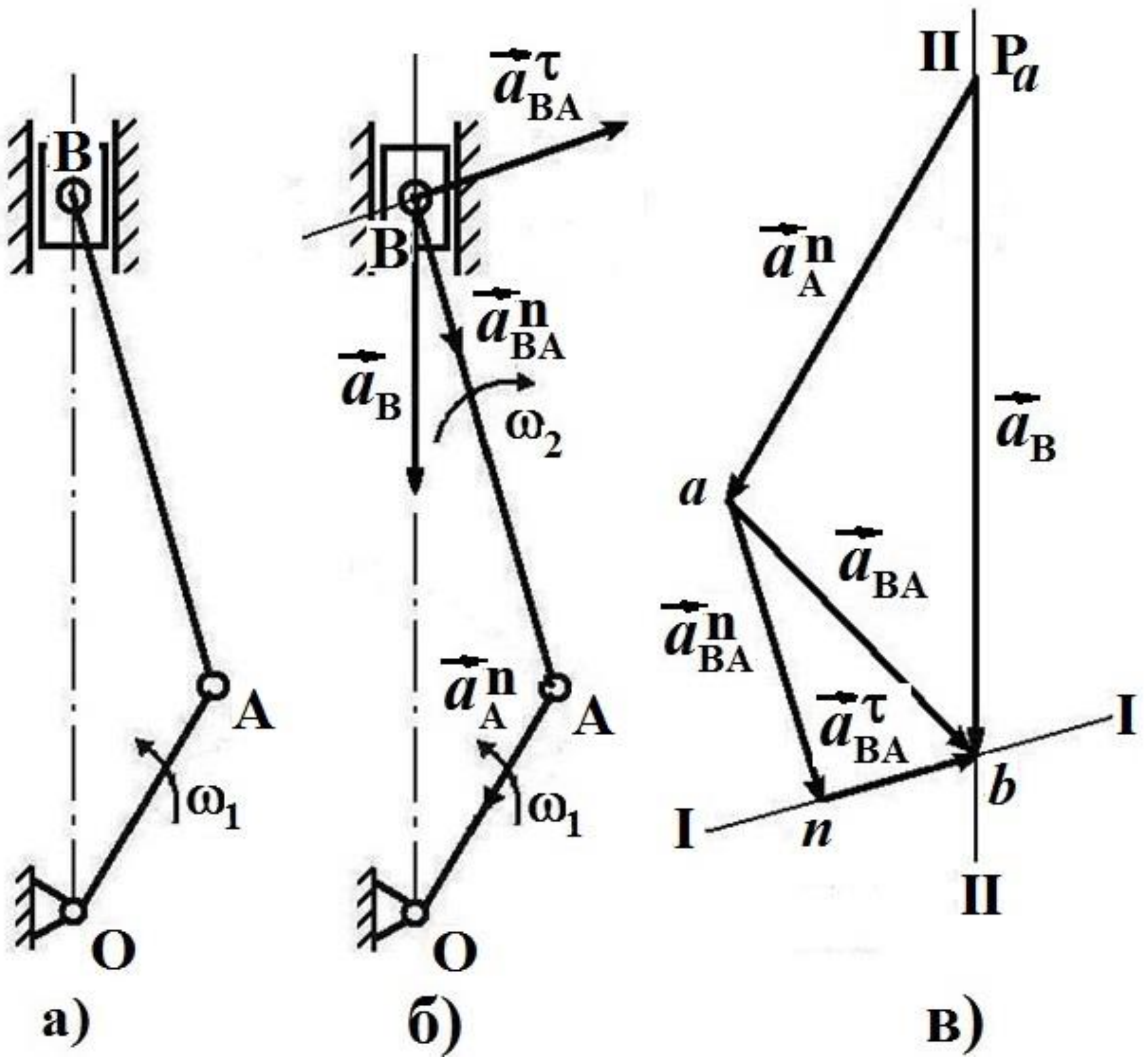


Рисунок 7.3.

3.10.2. Визначення прискорення $\vec{a}_A$ точки A

В загальному вигляді прискорення $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$, де $\vec{a}_A^n$ – нормальне, а $\vec{a}_A^\tau$ – дотичне (тангенційне) прискорення. Перше з вказаних відповідає за зміну напряму руху тіла, а друге – за зміну величини швидкості. Через постійність $\omega_1 = const$ тангенційна складова відсутня $\vec{a}_A^\tau = 0$, тому $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n$.

Нормальне прискорення $a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA$, вектор $\vec{a}_A^n$ спрямований за радіусом OA до центру обертання O і $\vec{a}_A^n \parallel OA$ (рис. 7.3, б):

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA = 35^2 \cdot 0{,}5 = 428{,}75 \text{ м/с}^2.$$

Обираємо масштаб плану прискорень $\mu_a = 5 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$. Знайдемо довжину відрізка $(P_a a)$, який зображує вектор прискорення $\vec{a}_A$ на плані:

$$|P_a a| = \frac{a_A^n}{\mu_a} = \frac{428{,}75}{5} = 85{,}75 \text{ мм}.$$

З полюса плану прискорень P_a відкладаємо вказаний відрізок у напрямі, паралельному OA.

3.10.3. Визначення прискорення $\vec{a}_B$ повзуна та прискорення $\vec{a}_{BA}$ точки B шатуна AB

Вектор прискорення $\vec{a}_{BA}$ розкладаємо на нормальну та дотичну складові (рис. 7.3, в) $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$ $(\vec{a}_{BA}^n \perp \vec{a}_{BA}^\tau)$. Нормальне прискорення дорівнює:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB = 17{,}45^2 \cdot 0{,}9 = 274{,}05 \text{ м/с}^2$$

і спрямовано від точки B до точки A вздовж лінії шатуна AB. Визначимо довжину відрізку (an), який зображує вектор прискорення $\vec{a}_{BA}^n$ на плані:

$$|an| = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{274{,}05}{5} = 54{,}8 \text{ мм} .$$

Від точки a у напрямі, паралельному лінії AB, відкладаємо відрізок (an).

Величина дотичного прискорення $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ невідома, лінія дії проходить через точку B перпендикулярно до шатуна AB, тому на плані прискорень проводимо через точку n лінію $\mathrm{I} - \mathrm{I}$, перпендикулярну відрізку (an).

Величина прискорення повзуна невідома, лінія дії вектора $\vec{a}_B$ спрямована вздовж лінії OB, через полюс плану P_a проводимо лінію $\mathrm{II} - \mathrm{II}$, паралельну вказаній лінії. Перетин прямих $\mathrm{I} - \mathrm{I}$ та $\mathrm{II} - \mathrm{II}$ визначає точку b, відрізок (nb) зображує в прийнятому масштабі дотичне прискорення $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ точки B, відрізок $(P_a b)$ - прискорення $\vec{a}_B$. Їхні довжини $|nb| = 29 \text{ мм}$, $|P_a b| = 117 \text{ мм}$. Напрям прискорення повзуна протилежний напряму швидкості $\vec{v}_B$, тому в дійсності величина a_B є від'ємною, тобто рух сповільнений.

Для знаходження величин невідомих прискорень необхідно довжини відповідних відрізків помножити на масштаб

$$a_{BA}^{\tau} = |nb| \cdot \mu_a = 29 \cdot 5 = 145 \text{ м/с}^2 ,$$

$$a_B = |P_a b| \cdot \mu_a = 115 \cdot 5 = 575 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення точки B відносно точки A визначається:

$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^{\tau})^2} = \sqrt{274{,}05^2 + 145^2} = 310{,}05 \text{ м/с}^2$, на рис. 7.3, в його зображує відрізок (ab).

3.10.4. Визначення кутового прискорення ε_2 шатуна AB

За планом прискорень можна визначити кутове прискорення відповідної ланки. Для цього слід скористатися відомими співвідношеннями між дотичним і кутовим прискореннями

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{145}{0{,}9} = 161{,}1 \text{ рад/с}^2.$$

Для визначення напряму ε_2 переносимо вектор $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ в точку B шатуна і дивимось його напрям руху відносно точки A. В даному випадку кутове прискорення ε_2 спрямовано за годинниковою стрілкою.

Контрольні питання

1. Наведіть приклади визначення швидкостей точок кривошипно-шатунного механізму для різних його положень.
2. Як визначається прискорення точок плоскої фігури ?
3. Що таке доцентрове та обертальне прискорення ?
4. Що таке план прискорень ?

Розділ Кінематика. Лекція № 8

План лекції

1. Основні визначення. Поняття про складний рух
2. Теорема про додавання швидкостей
3. Додавання прискорень
4. Приклад визначення абсолютної швидкості (переносний рух поступальний)
5. Приклад визначення абсолютного прискорення (переносний рух поступальний)
6. Приклад визначення абсолютної швидкості (переносний рух обертальний)
7. Приклад визначення абсолютного прискорення (переносний рух обертальний)
8. Приклад розподілу швидкостей (переносний рух обертальний)
9. Приклад розподілу прискорень (переносний рух обертальний)

Тема 4. Складний рух матеріальної точки

4.1. Основні визначення

В рамках попередніх тем ми вивчали рух точки або тіла по відношенню до однієї системи відліку. Однак у деяких випадках під час розв’язання задач механіки є доцільним розглядати рух точки або тіла одночасно по відношенню до двох систем відліку, одна з яких вважається основною або умовно нерухомою, а друга певним чином рухається по відношенню до першої.

Будемо називати **складним** або «**абсолютним**» рухом точки її рух по відношенню до системи координат, яка обрана як основна. Часто кінематичні параметри такого руху позначаються a (**absolutus**).

Наприклад, кулька, яка котиться по палубі корабля, який рухається, здійснює складний рух по відношенню до берега. Воно складається з кочення по відношенню до палуби (рухома система відліку) та рух разом з палубою по відношенню до берега (нерухома система відліку). Таким шляхом складний рух кульки розкладається на два більш простих і більш легких для дослідження рухів.

Рух точки по відношенню до рухомої системи координат будемо називати **відносним**. В подальшому кінематичні параметри відносного руху позначаються індексом r (**relative**, **relativus**).

Під **переносним** рухом будемо розуміти рух рухомої системи координат відносно нерухомої. В подальшому кінематичні параметри переносного руху позначаються індексом e (**entainer**).

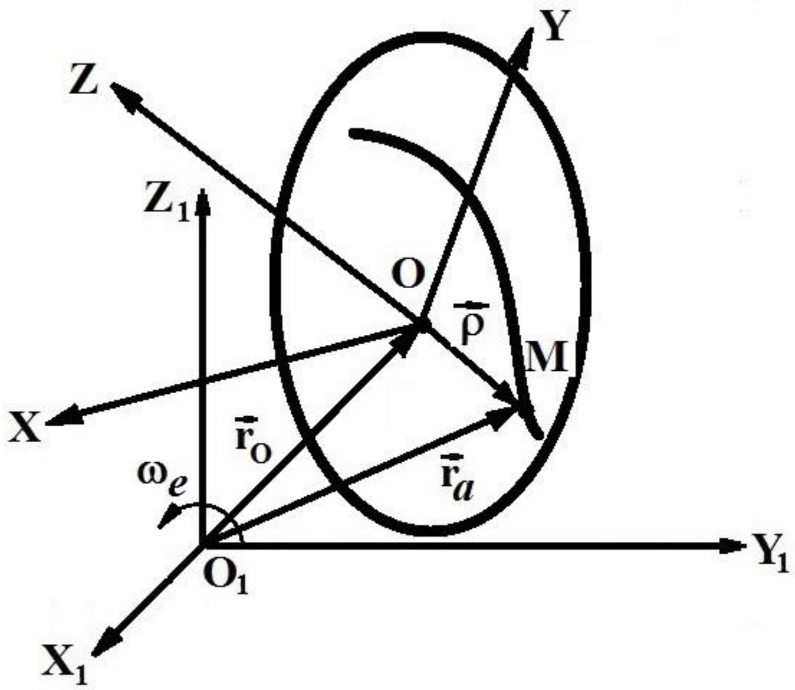


Рисунок 8.1.

Розглянемо точку M, яка рухається по відношенню до рухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$. Остання в свою чергу якимось чином рухається відносно іншої системи відліку $Oxyz$, яку назвемо основною або умовно нерухомою (рис. 8.1).

Рух довільної точки M можна вивчати як по відношенню до основної, так і по відношенню до рухомої систем координат за методами, які були викладено раніше.

Якщо радіус-вектор $\vec{r}_a = \vec{r}_a(t)$ визначає положення точки M по відношенню до системи координат $O_1x_1y_1z_1$, радіус-вектор $\vec{r}_O = \vec{r}_O(t)$ визначає положення початку координат $Oxyz$ в системі $O_1x_1y_1z_1$, а радіус-вектор $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ визначає положення точки M в системі координат $Oxyz$, то маємо:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_O + \vec{\rho}. \tag{8.1}$$

Тут:

$\vec{r}_a$, і в подальшому $\vec{v}_a$ – абсолютна швидкість, $\vec{a}_a$ – абсолютне прискорення;
$\vec{\rho}$, і в подальшому $\vec{v}_r$ – відносна швидкість, $\vec{a}_r$ – відносне прискорення;
$\vec{r}_O$, і в подальшому $\vec{v}_e$ і $\vec{\omega}_e$– переносна лінійна та кутова швидкість, $\vec{a}_e$ і $\vec{\varepsilon}_e$ – переносне лінійне та кутове прискорення.

4.2. Теорема про додавання швидкостей

Доведемо теорему про складання швидкостей точки, яка здійснює складний рух.

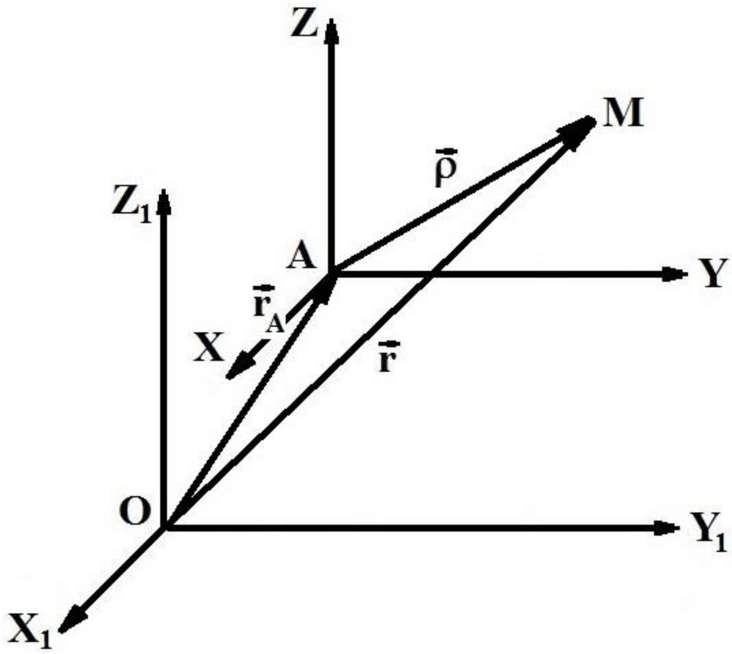


Рисунок 8.2.

Припустимо, що точка M рухається по відношенню до системи координат $Axyz$, яка жорстко пов’язана з тілом, яке переміщується поступально по відношенню до нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$. Положення точки відносно нерухомої системи координат визначається радіус-вектором (рис. 8.2):

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho},$$

де $\vec{r}_A$ – радіус-вектор початку рухомої системи координат, $\vec{\rho}$ – радіус-вектор, який визначає положення точки M в рухомій системі координат.
За визначенням, абсолютна похідна радіус-вектора за часом буде абсолютною швидкістю точки. Продиференцюємо цю рівність за часом:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \qquad (8.2)$$

Проаналізуємо кожний з доданків наведеного виразу. В цій рівності $\frac{d\vec{r}}{dt}$ є швидкістю точки відносно нерухомої системи координат, яка називається

швидкістю точки в складному русі або **абсолютною швидкістю точки** і позначається $\vec{v}_a$.

Перший доданок в правій частині рівності $\frac{d\vec{r}_A}{dt}$ – швидкість точки A. Через те, що система координат $Axyz$ рухається поступально, це водночас буде швидкістю тієї точки тіла, з якою в даний момент часу збігається рухома точка M і позначається $\vec{v}_e$.

З'ясуємо сенс похідної $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$. Вектор $\vec{\rho}$ визначений у рухомій системі координат, тому:

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де x, y, z – координати точки M в системі координат $Axyz$, а $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори цих осей.

Через поступальність руху рухомої системи координат вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – постійні, їх похідні за часом дорівнюють нулю, тому

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \tag{8.3}$$

Ця рівність визначає швидкість точки по відношенню до рухомої системи координат і називається відносною швидкістю точки M. Ця швидкість позначається $\vec{v}_r$. Остаточно маємо, переходячи до позначень швидкості:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \tag{8.4}$$

Отримана рівність виражає теорему про складання швидкостей: **абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній (векторній) сумі переносної та відносної швидкостей**.

Для визначення відносної швидкості точки слід подумки зупинити переносний рух і обчислити відносну швидкість за правилами кінематики точки.

Для визначення переносної швидкості точки достатньо подумки зупинити відносний рух і шукати переносну швидкість за правилами кінематики точки як швидкість тієї точки рухомої системи координат, з якою збігається в даний момент часу рухома точка.

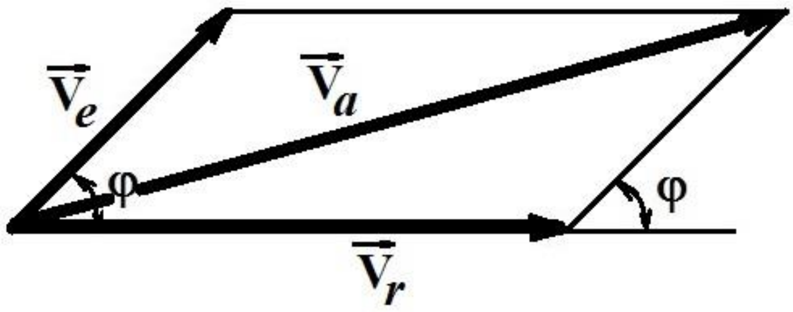


Рисунок 8.3.

Застосовуючи теорему про складання швидкостей, визначаємо шукану абсолютну швидкість точки.

За геометричною інтерпретацією (рис. 8.3)

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e \cos(180° - \varphi)} \quad \text{або}$$

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos\varphi}. \tag{8.5}$$

Розв’язання задач, таким чином, зводиться до побудови трикутника або паралелограма швидкостей і визначенню елементів, сторін і кутів цих геометричних фігур. Це можна зробити або тригонометричним шляхом, або проектуванням геометричної рівності (8.4) на декартові осі координат. Обираючи відповідні осі x і y і проектуючи на них, отримуємо:

$$\begin{aligned} v_{ax} &= v_{ex} + v_{rx} \\ v_{ay} &= v_{ey} + v_{ry}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

За величиною абсолютна швидкість:

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2}. \tag{8.7}$$

4.3. Додавання прискорень

Залежність між прискореннями точки в абсолютному, відносному та переносному рухах визначається **теоремою додавання прискорень**, або **теоремою Коріоліса**:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_{\text{кор}}. \tag{8.8}$$

Згідно з цією теоремою **абсолютне** прискорення точки $\vec{a}_a$ дорівнює геометричній сумі **переносного** прискорення $\vec{a}_e$, відносного прискорення $\vec{a}_r$

та **прискорення Коріоліса** (або коріолісово прискорення, або поворотне прискорення) $\vec{a}_{\text{кор}}$.

Для визначення **відносного** прискорення точки слід подумки відволіктися від переносного руху та обчислити відносне прискорення за правилами кінематики точки. Відносне прискорення характеризує зміну відносної швидкості у відносному русі точки.

Для визначення **переносного** прискорення точки слід подумки зупинити відносний рух точки та обчислити переносне прискорення за правилами кінематики точки як прискорення тієї точки рухомої системи координат, з якою збігається в даний момент часу рухома точка. Переносне прискорення характеризує зміну переносної швидкості у переносному русі точки.

Прискорення Коріоліса визначається за формулою:

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r, \qquad (8.9)$$

де $\vec{\omega}_e$ – вектор кутової швидкості переносного руху, $\vec{v}_r$ – вектор відносної швидкості точки. За величиною коріолісово прискорення дорівнює:

$$a_{\text{кор}} = 2\omega_e v_r \sin\left(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}\right). \qquad (8.10)$$

Напрям цього прискорення визначається за правилом векторного добутку.

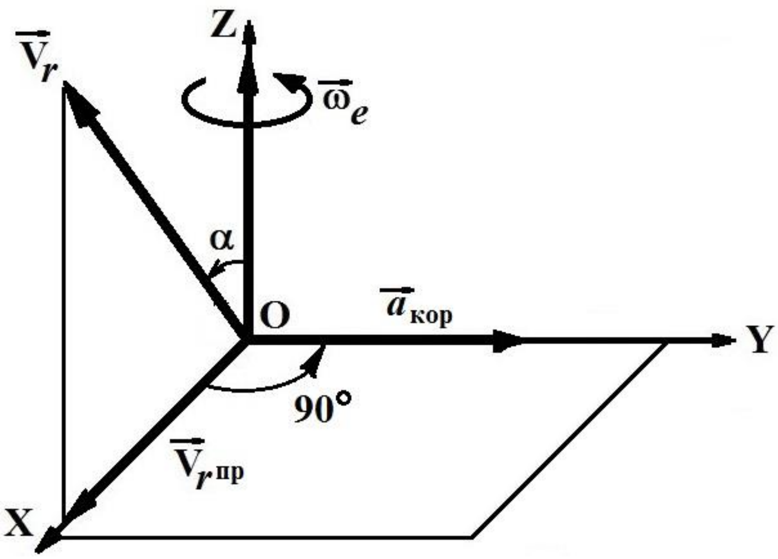


Рисунок 8.4.

Прискорення Коріоліса $\vec{a}_{\text{кор}}$ спрямовано перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{v}_r$, в той бік, щоб спостерігач по напряму вектора $\vec{a}_{\text{кор}}$ бачив поворот від вектора $\vec{\omega}_e$ до вектора $\vec{v}_r$ на найменший кут проти годинникової стрілки (рис. 8.4).

Поряд з визначенням напряму прискорення Коріоліса як векторного добутку $\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ існує та застосовується для знаходження напряму цього прискорення **правило Жуковського**:

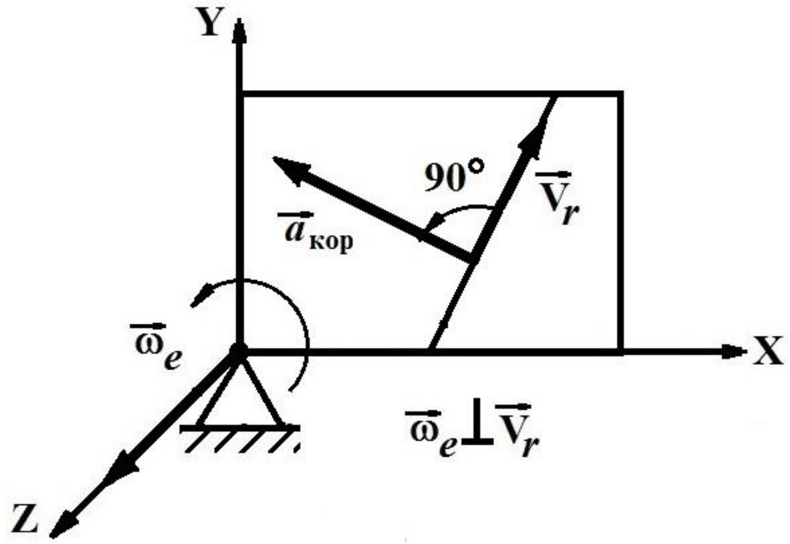


Рисунок 8.5.

Спроектуємо вектор відносної швидкості $\vec{v}_r$ на площину, перпендикулярну до вектора кутової швидкості $\vec{\omega}_e$, і повернемо проекцію в цій площині на кут $90°$ у бік обертання, який визначається напрямом $\vec{\omega}_e$, – це і буде напрямом прискорення Коріоліса (рис. 8.5).

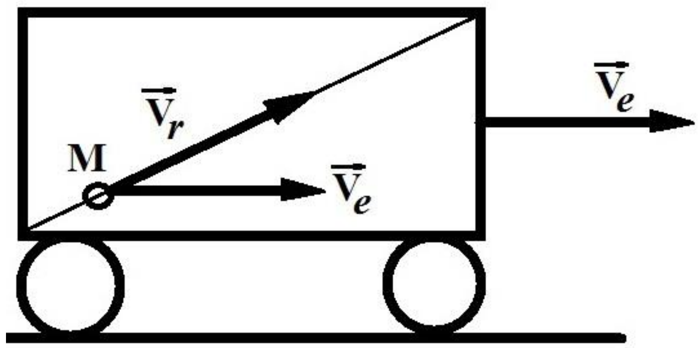


Рисунок 8.6.

Слід зауважити, що у випадку переносного поступального руху (рис. 8.6) кутова швидкість цього руху $\omega_e = 0$ і згідно з формулою (8.10) прискорення Коріоліса теж дорівнює нулю.

Залежність за теоремою про додавання прискорень (8.8) при переносному поступальному русі спрощується:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r. \tag{8.11}$$

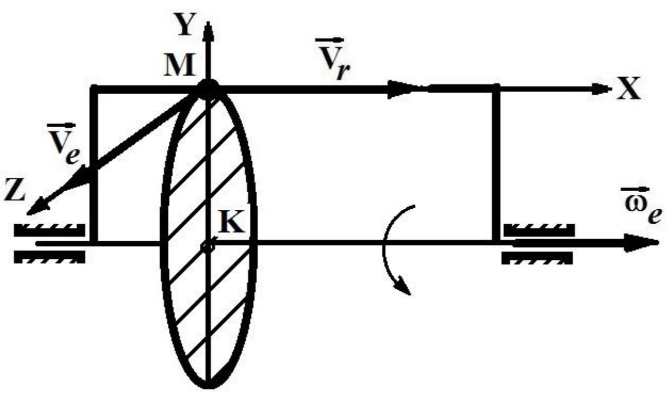


Рисунок 8.7.

Також прискорення Коріоліса дорівнює нулю, якщо кутова швидкість переносного руху паралельна відносній швидкості (рис. 8.7).

Прискорення Коріоліса дорівнює нулю і в моменти часу, коли $\omega_e = 0$ або $v_r = 0$.

Прискорення Коріоліса мають всі точки (тіла), що рухаються по поверхні Землі, наприклад, частинки води у ріках, потяги, автомобілі тощо.

Для тіл, які рухаються по поверхні Землі, її обертання навколо осі є переносним рухом, рух самого тіла – відносним.

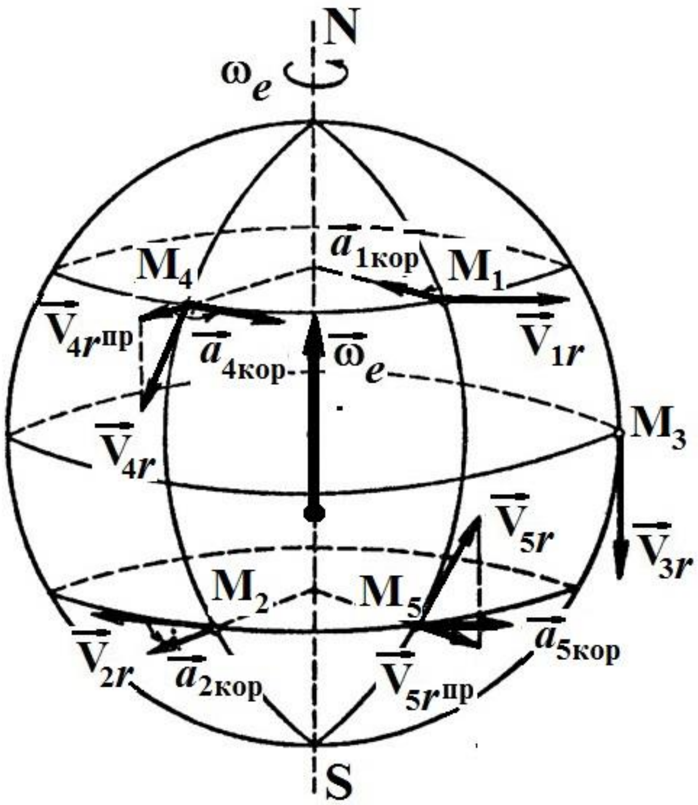


Рисунок 8.8.

Визначимо за правилом Жуковського прискорення Коріоліса точок M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, які рухаються по поверхні Землі у напрямах, вказаних на рис. 8.8. Через те, що точки M_1, M_2 рухаються у площинах, перпендикулярних осі обертання Землі, то модулі їх коріолісових прискорень визначають за формулами:

$$a_{1\text{кор}} = 2\omega_e v_{1r} \text{ і}$$

$$a_{2\text{кор}} = 2\omega_e v_{2r}.$$

Напрям цих прискорень отримуємо поворотом відносних швидкостей у бік обертання Землі.

Відносна швидкість точки M_3, яка рухається вздовж меридіану, в момент проходження через екватор стає паралельною осі обертання Землі і $\sin\left(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_{3r}}\right) = 0$, тому $a_{3\text{кор}} = 0$.

Модулі прискорень Коріоліса точок M_4, M_5, які рухаються вздовж меридіанів, знаходимо за формулами:

$$a_{4\text{кор}} = 2\omega_e v_{4r} \sin\left(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_{4r}}\right) \text{ і } a_{5\text{кор}} = 2\omega_e v_{5r} \sin\left(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_{5r}}\right).$$

Тут $\sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}) = \sin\varphi$, де φ – широта точки Землі. Напрями цих прискорень також визначаємо за правилом Жуковського.

Якщо траєкторії точок рухомої системи координат не є прямолінійними та відносний рух точки також є криволінійним, то доцільно обчислювати переносне прискорення як геометричну (векторну) суму нормального та дотичного переносних прискорень, а відносне прискорення як геометричну (векторну) суму нормального та дотичного відносних прискорень. При цьому формула (8.8) записується у вигляді:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_{\text{кор}}, \qquad (8.12)$$

де $\vec{a}_e^n$, $\vec{a}_r^n$ – відповідно нормальні прискорення у переносному та відносному рухах, $\vec{a}_e^\tau$, $\vec{a}_r^\tau$ – відповідно дотичні прискорення у переносному та відносному рухах. При русі за окружністю можна нормальне прискорення називати доцентровим, а тангенційне – обертальним.

Знаючи вектори швидкостей $\vec{v}_e$ і $\vec{\omega}_e$ переносного руху з радіусом кривизни R та $\vec{v}_r$ відносного руху з радіусом кривизни ρ, можна визначити прискорення за відомими формулами :

1) для переносного руху:

кутове прискорення $\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} = \vec{\varepsilon}_e$, з урахуванням якого тангенційне прискорення $a_e^\tau = R\varepsilon_e$;

нормальне прискорення $a_e^n = R\omega_e^2$;

2) для відносного руху:

тангенційне прискорення $\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r^\tau$;

нормальне прискорення $a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho}$.

3) Прискорення Коріоліса $a_{\text{кор}} = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r})$

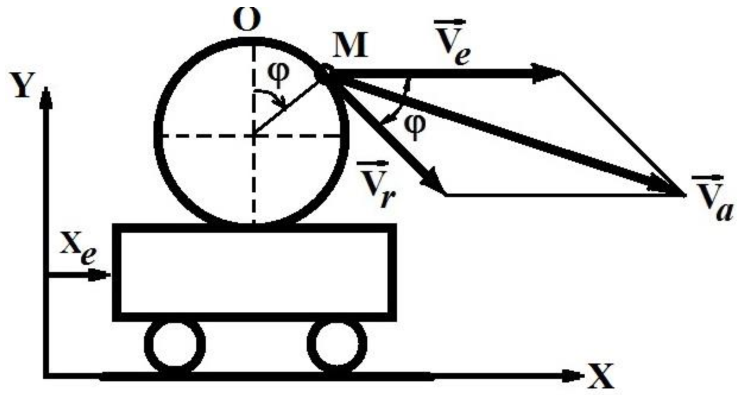
При використанні теореми додавання прискорень можна застосовувати метод проекцій. Обираючи нерухому систему координат xyz і проектуючи рівність (8.12) на кожну з цих осей, знаходимо:

$$a_{ax} = a_{ex}^n + a_{ex}^\tau + a_{rx}^n + a_{rx}^\tau + a_{\text{кор}x}$$
$$a_{ay} = a_{ey}^n + a_{ey}^\tau + a_{ry}^n + a_{ry}^\tau + a_{\text{кор}y}. \quad (8.13)$$
$$a_{az} = a_{ez}^n + a_{ez}^\tau + a_{rz}^n + a_{rz}^\tau + a_{\text{кор}z}$$

Модуль абсолютного прискорення визначаємо за формулою:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}. \quad (8.14)$$

Приклад визначення абсолютної швидкості (переносний рух поступальний)



Дано: $OM = S_r = 0{,}9\pi t^2$ м; $x_e = \sin \pi t$; $R = 0{,}3$ м.

Визначити: V_a при $t = 1/3$ с.

Розв'язання. Визначимо положення точки M:

$\varphi = \frac{OM}{R} = \frac{0{,}9\pi t^2}{0{,}3} = \frac{\pi}{3} = 60°.$

Визначимо відносну, переносну та абсолютну швидкості точки M:

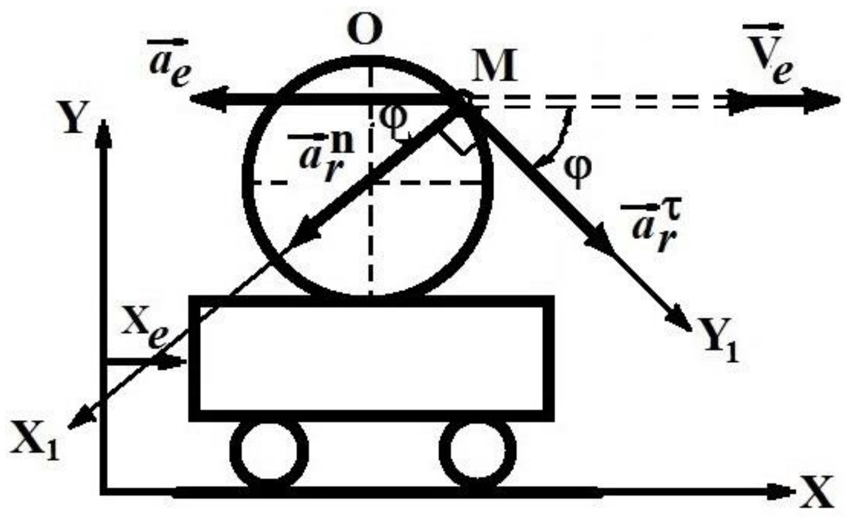
$V_r = \dot{S}_r = 1{,}8\pi t \approx 1{,}89$ м/с; $V_e = \dot{x}_e = \pi\cos\pi t \approx 1{,}57$ м/с.

$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, $\quad V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e\cos\varphi} \Rightarrow V_a \approx 3$ м/с.

Приклад визначення абсолютного прискорення (переносний рух поступальний)

Розв'язання. Вирази для визначення відносної та переносної швидкостей відповідно у вигляді:

$V_r = \dot{S}_r = 1{,}8\pi t$; $\quad V_e = \dot{x}_e = \pi\cos\pi t.$



Загальний вигляд виразу для абсолютного прискорення точки M – векторна сума відносного, переносного та прискорення Коріоліса, яке в даному випадку переносного руху дорівнює нулю.

$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{кор}$, $a_{кор} = 0$.

$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n}$.

Визначимо тангенційну та нормальну складові відносного прискорення, а також переносне прискорення точки M:

$a_r^{\tau} = \dot{V}_r = \ddot{S}_r = 1{,}8\pi = 5{,}66$ м/с²,

$a_r^{n} = \frac{V_r^2}{R} = \frac{(1{,}8\pi t)^2}{R} = 11{,}91$ м/с².

$a_e = \dot{V}_e = \ddot{x}_e = -\pi^2 \sin\pi t = -8{,}55$ м/с².

Величина a_e від'ємна, тому необхідно замінити попередньо обраний напрям дії прискорення на протилежний, в подальшому для розрахунків беручи значення $a_e = 8{,}55$ м/с².

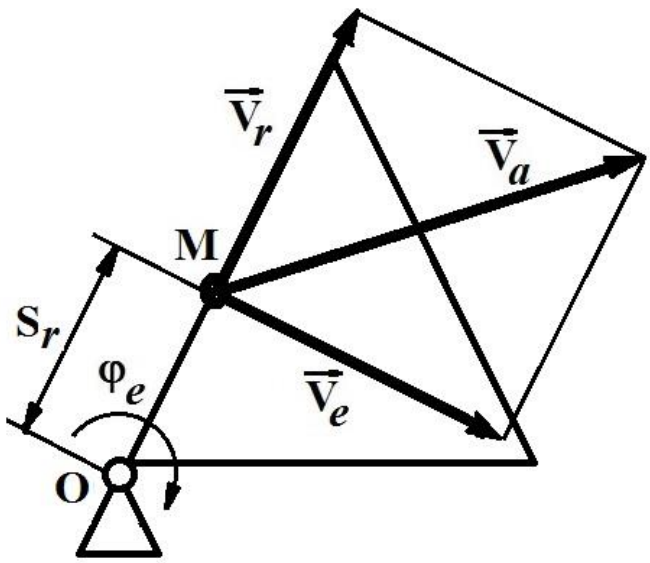
Уводячи осі координат, пов'язані з відносним рухом точки M, знаходимо проекції абсолютного прискорення на відповідні осі, а потім остаточно визначаємо абсолютне прискорення точки M:

$a_{ax_1} = a_r^{n} + a_e \sin\varphi = 19{,}31$ м/с²,

$a_{ay_1} = a_r^{\tau} + a_e \cos\varphi = 1{,}39$ м/с².

$a_a = \sqrt{a_{ax_1}^2 + a_{ay_1}^2} = 19{,}36$ м/с².

Приклад визначення абсолютної швидкості (переносний рух обертальний)



Дано: трикутник обертається за законом $\varphi_e = 0{,}9\pi t^2$. Точка M рухається за законом $S_r = 1{,}2\sin\pi t$.

Визначити: V_a при $t = 1/6$ с.

Розв'язання. Визначимо положення точки M:

$OM = S_r = 1{,}2\sin\pi t = 1{,}2\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}6$ м.

Відносна швидкість, кутова та лінійна швидкості у переносному русі точки M:

$V_r = \dot{S}_r = 1{,}2\pi\cos\pi t = 3{,}27$ м/с.

$\omega_e = \dot{\varphi}_e = 1{,}8\pi t = 0{,}9$ с$^{-1}$.

$V_e = \omega_e \cdot OM = 0{,}9 \cdot 0{,}6 = 0{,}54$ м/с.

Абсолютна швидкість точки M як векторна сума відносної та переносної швидкостей:

$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e, \quad V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 3{,}31$ м/с.

Приклад визначення абсолютного прискорення (переносний рух обертальний)

Визначити: a_a при $t = 1/6$ с.

Розв'язання. Загальний вигляд виразу для абсолютного прискорення точки M – векторна сума відносного, переносного та прискорення Коріоліса:

$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{\text{кор}}$.

$\omega_e = \dot{\varphi}_e = 1{,}8\pi t = 0{,}9$ с$^{-1}$.

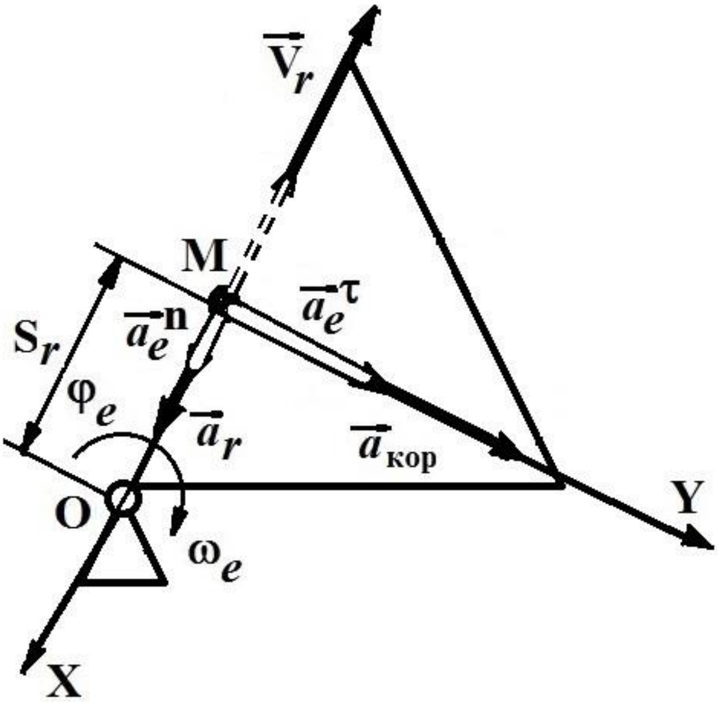
Кутове прискорення у переносному русі:

$\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = \ddot{\varphi}_e = 1{,}8\pi = 5{,}66$ с$^{-2}$.

Прискорення у відносному русі, причому для вказаного руху нормальна складова відносного прискорення дорівнює нулю (відносний рух прямолінійний):

$a_r = a_r^\tau = \dot{V}_r = \ddot{S}_r = -1{,}2\pi^2 \sin\pi t = -5{,}92$ м/с^2,

$a_r^n = 0$ м/с^2.



Величина a_r від'ємна, тому необхідно замінити попередньо обраний напрям дії прискорення на протилежний, в подальшому для розрахунків беручи значення $a_r = 5{,}92$ м/с^2.

Прискорення у переносному русі та прискорення Коріоліса:

$a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM = 0{,}49$ м/с^2.

$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot OM = 3{,}4$ м/с^2.

$a_{кор} = 2\omega_e V_r = 5{,}89$ м/с^2.

Уводячи осі координат, пов'язані з відносним рухом точки M, знаходимо проекції абсолютного прискорення на відповідні осі, а потім остаточно визначаємо абсолютне прискорення точки M:

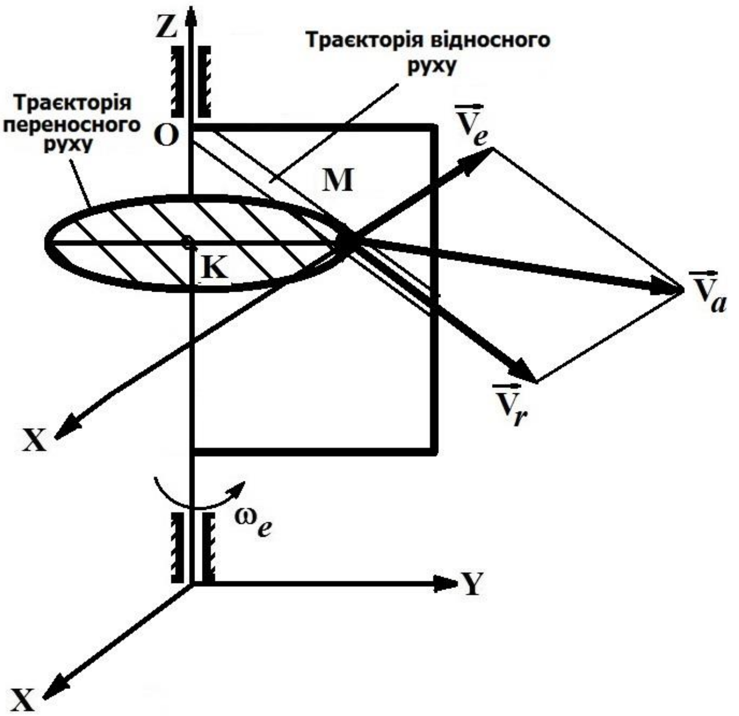
$a_{ax} = a_r + a_e^n = 6{,}41$ м/с^2,

$a_{ay} = a_{кор} + a_e^\tau = 9{,}29$ м/с^2.

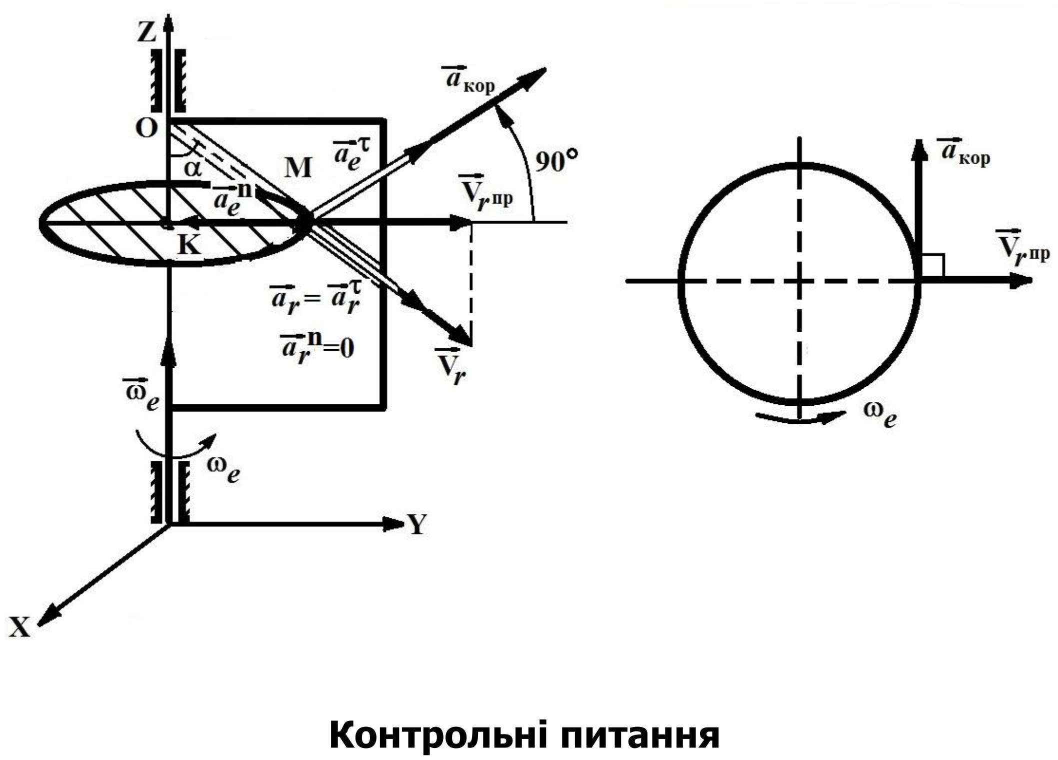
$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = 11{,}28$ м/с^2.

Слід зауважити, що, побудувавши у певному масштабі проекції відповідних швидкостей і прискорень, можна одержати напрямок абсолютної швидкості і напрямок абсолютного прискорення.

Приклад розподілу швидкостей (переносний рух обертальний)



Приклад розподілу прискорень (переносний рух обертальний)



Контрольні питання

1. В чому полягає задача кінематики складного руху точки ?
2. Дати визначення характеристик абсолютного, відносного та переносного рухів точки.

3. Сформулюйте теорему про додавання швидкостей.
4. Сформулюйте теорему про додавання прискорень, або теорему Коріоліса.
5. Як визначати відносне та переносне прискорення ?
6. Як визначають прискорення Коріоліса ? Які є способи ?
7. Наведіть приклади визначення прискорення Коріоліса.
8. Як визначають абсолютні швидкість і прискорення за переносного поступального руху ?
9. Як визначають абсолютні швидкість і прискорення за переносного обертального руху ?

Розділ Динаміка. Лекція № 9

План лекції

1. Основні поняття та визначення
2. Закони динаміки (закони Ньютона)
3. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки
4. Дві основні задачі динаміки точки
5. Приклад вирішення задач

Тема 1. Динаміка точки

1.1. Основні поняття та визначення

Динаміка – розділ механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл під дією сил з урахуванням інертності тіл.

Основними поняттями динаміки є: матеріальна точка, сила, маса, абсолютне тверде тіло.

Матеріальна точка (**МТ**) – **точка, яка має масу та не здійснює обертальний рух**

Сила – основна міра механічної дії на матеріальне тіло. Позначення $\vec{F}$. Сили в динаміці поділяють на сталі та змінні. У загальному випадку будемо вважати, що сила є функцією часу, радіус-вектора та швидкості МТ, до якої вона прикладена, тобто $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$.

Маса тіла – фізична величина, кількісна міра інертності матеріального тіла. Позначення m.

Кінематичні параметри: $\vec{r}$ – радіус-вектор точки, $\vec{v}$ – швидкість, $\vec{a}$ – прискорення

Через те, що різні точки тіла можуть рухатися неоднаково, деякі положення та висновки потрібно застосувати тільки для окремих МТ, а не для всього тіла. Тому динаміку поділяють на дві частини: динаміка матеріальної точки та динаміка системи матеріальних точок, або динаміка системи.

В основу динаміки покладено закони динаміки точки, які встановлені шляхом узагальнення результатів цілого ряду експериментів і спостережень, присвячених вивченню руху тіл, та перевірці їх практикою.

1.2. Закони динаміки (закони Ньютона)

Перший закон (закон інерції): **ізольована від зовнішніх впливів МТ зберігає свій стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір, поки прикладені сили не спонукають її змінити цей стан.**

Інерція – властивість МТ чинити опір зміні її швидкості.

Другий закон (основний закон динаміки): **зміна кількості руху тіла пропорційна прикладеній рушійній силі та відбувається в напрямі тієї прямої, вздовж якої ця сила діє:**

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}. \tag{9.1}$$

За умови $m = const$

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{9.2}$$

або:

добуток маси МТ на прискорення, яке вона отримує під дією цієї сили, дорівнює за модулем цій силі, а напрям прискорення збігається з напрямом сили.

Сила $\boldsymbol{F}$ (вага $\boldsymbol{G}$) уводиться на основі другого закону Ньютона (9.2). Припускаючи в цьому співвідношенні m=1 кг, a=1 м/с^2, одержимо: 1 одиниця сили=(1 кг)•(1 м/с^2)=1 кг•м/с^2. Розмір одиниці дорівнює (1 кг)•(1 м)**:**(1 с)^2. Найменування цієї одиниці «ньютон», скорочене позначення Н. Ньютон – сила, що надає тілу з масою 1 кг прискорення 1 м/с^2 у напрямку дії сили. Розмірність одиниці сили

$$[F] = [m] \cdot [a] = LMT^{-2}.$$

Інерціальна система відліку – в якій виконуються перший та другий закони. Під час розв’язання більшості технічних задач інерціальною, з достатньою для практики точністю, можна вважати систему відліку, жорстко пов’язану з Землею.

Третій закон (закон рівності дії та протидії, закон взаємодії тіл): **дві МТ діють одна на одну з силами, які рівні за модулем та спрямовані вздовж прямої, що з'єднує ці точки, в протилежні сторони.**

Підкреслимо, що із рівності дії та протидії та протилежності сил за напрямком зовсім не випливає їх взаємна рівновага, бо ці сили прикладені до різних тіл.

Четвертий закон (закон незалежності дії сил): **при одночасній дії на тіло кількох сил прискорення МТ дорівнює геометричній (векторній) сумі тих прискорень, які були б при роздільній дії на МТ цих сил**

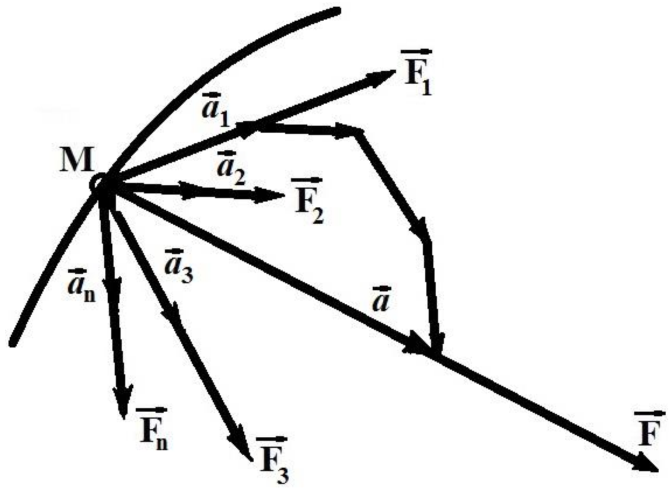


Рисунок 9.1.

$$m\vec{a}_i = \vec{F}_i, \ \ i = 1,2,\dots,n$$

$$m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{R}, \tag{9.3}$$

$\vec{R}$ – рівнодіюча (рис. 9.1). При визначенні швидкості МТ аналогічна суперпозиція (накладення) не виконується.

Рівняння (9.3) – це основне рівняння динаміки вільної матеріальної точки. Це рівняння є справедливим і для невільної МТ, на яку накладені в'язі. Потрібно тільки до прикладених сил додати реакції в'язей, тобто:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{k=1}^{m} \vec{R}_k, \tag{9.4}$$

де $\vec{R}_k$ – реакція k-ої в'язі. Рівняння (9.4) – основне рівняння динаміки невільної точки.

1.3. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

З кінематики відомо, що рух МТ в просторі можна описати трьома способами: векторним, координатним і натуральним. Кожному із цих способів відповідають диференціальні рівняння руху МТ, які встановлюють на підставі основного рівняння динаміки точки (9.3) або (9.4).

1. Рівняння у векторній формі

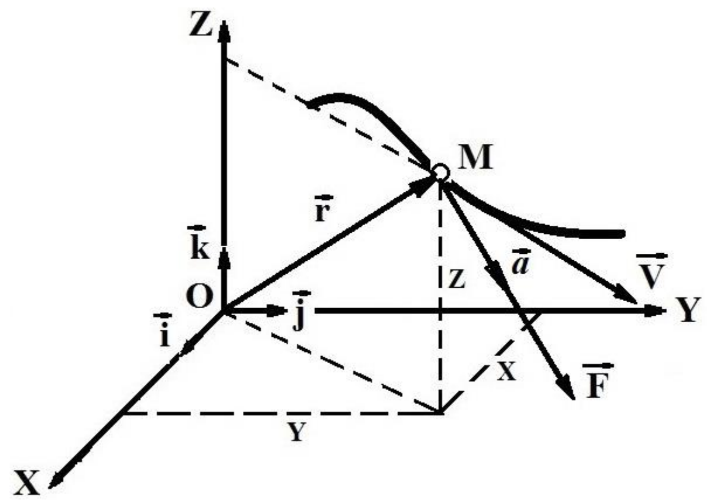


Рисунок 9.2.

Розглянемо МТ, положення якої M визначається радіус-вектором $\vec{r}(t)$ в інерціальній системі відліку (рис. 9.2). Сила $\vec{F}$, яка діє на МТ, залежна від часу t, радіус-вектора $\vec{r}(t)$, швидкості $\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$, тому $\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, t\right)$ та

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, t\right). \qquad (9.5)$$

Рівняння (9.5) називають **диференціальним рівнянням руху МТ у векторній формі.**

2. Рівняння в декартових координатах

Диференціальне рівняння у векторній формі еквівалентне 3-м скалярним рівнянням. Проектуючи обидві частини рівності (9.5) на осі X, Y, Z, маємо:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_k F_{kx}, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_k F_{ky},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum_k F_{kz},$$

або

$$m\ddot{x} = \sum_k F_{kx}, \;\; m\ddot{y} = \sum_k F_{ky}, \;\; m\ddot{z} = \sum_k F_{kz}. \qquad (9.6)$$

де $\vec{F}\left(F_x, F_y, F_z\right)$, $\vec{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $\vec{a}(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$.

Рівняння (9.6) називають **диференціальним рівнянням руху МТ у координатній (декартовій) формі.**

3. Рівняння в проекціях на осі натурального тригранника (осі $M\tau nb$)

Якщо рух МТ масою m описують у натуральний спосіб (рис. 9.3), тобто її положення на траєкторії визначається дуговою координатою $S = S(t)$, то диференціальне рівняння руху цієї точки в проекціях на осі натурального тригранника $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ мають вигляд:

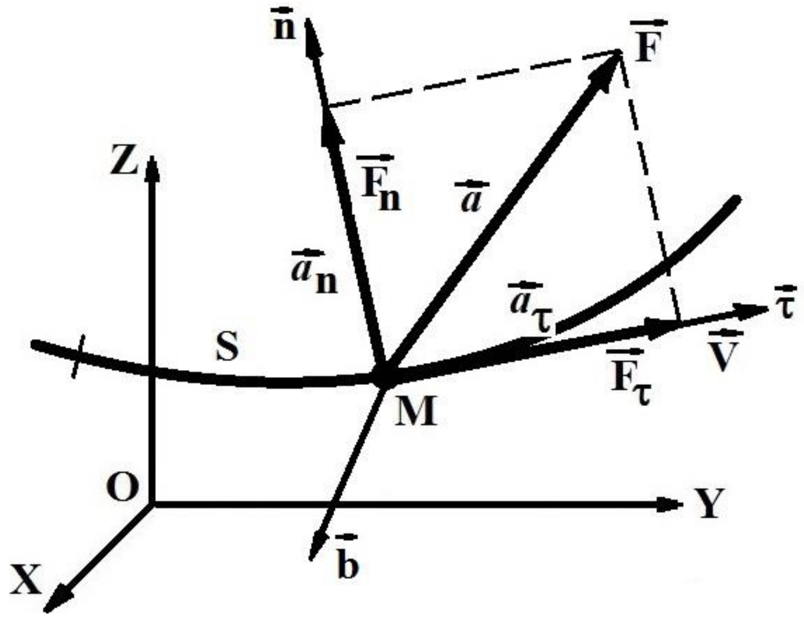


Рисунок 9.3.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n =$$

$$\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

$$m\left(\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}\right) = \vec{F}$$

Проектуючи це рівняння на дотичну $\vec{\tau}$, головну нормаль $\vec{n}$ та бінормаль $\vec{b}$, отримуємо:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b. \tag{9.7}$$

1.4. Дві основні задачі динаміки точки

1. Перша (пряма) основна задача (визначення сил за заданим рухом).

У динаміці розв’язують дві основні задачі. **Прямою** називається задача, в якій за заданими рухом та масою МТ визначається рівнодіюча сил, які прикладені до цієї МТ.

Дано: рівняння руху МТ в декартових координатах $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$.

Потрібно визначити: проекції сили $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, яка призводе до руху.

Розв'язання: через диференціювання заданих рівнянь руху МТ

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \tag{9.8}$$

$$\cos(x, \vec{F}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(y, \vec{F}) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(z, \vec{F}) = \frac{F_z}{F}. \tag{9.9}$$

2. Друга (зворотна) основна задача (визначення закону руху за заданими силами).

Зворотною називається задача, в якій за заданими силами, або їхньою рівнодіючою, та масою МТ визначається закон руху цієї МТ.

Наведемо алгоритм розв'язування другої задачі динаміки, використовуючи рівняння руху МТ в координатній формі (9.6). Встановлення закону руху в цьому разі зводять до інтегрування системи трьох диференціальних рівнянь другого порядку (9.6), в яких невідомими функціями є координати x, y, z, а аргументом є час t.

Дано: сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,..., $\vec{F}_n$, прикладені до МТ масою m.

Потрібно визначити: закон руху МТ.

Розв'язання: через інтегрування системи диференціальних рівнянь руху у обраній системі відліку:

$$m\ddot{x} = \sum_k F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_k F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_k F_{kz},$$

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t). \tag{9.10}$$

При інтегруванні 3-х диференціальних рівнянь 2-го порядку з'являються 6 довільних сталих C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, для визначення яких використовують **початкові умови руху.**

При $t = t_0$ (будь-який початковий момент часу, найчастіше приймають $t = 0$):

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \tag{9.11}$$

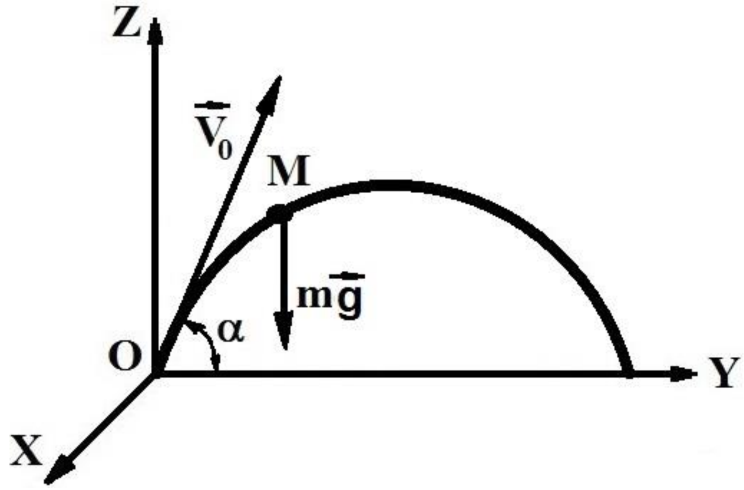
(початкове положення МТ)

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 \tag{9.12}$$

(початкова швидкість МТ)

Якщо рух відбувається у площині, «зникає» координата, вісь якої перпендикулярна до цієї площини. Для прямолінійного руху залишається тільки координата одна координата. Відповідно, зменшується кількість необхідних початкових умов.

Приклад 1. Знайти рівняння руху тіла масою m, кинутого під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Поле тяжіння однорідне, опором повітря знехтувати, тіло прийняти за МТ.



Розв'язання. У процесі руху на тіло діє тільки сила тяжіння. Тому вісь OZ декартової системи спрямуємо вгору, початок сумістимо з початковим положенням МТ та будемо вважати, що рух відбувається у площині ZOY.

Проекції діючої на МТ сили тяжіння на осі координат дорівнюють:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg$$

або після скорочення на масу m

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g. \tag{9.13}$$

Аналізуючи рух у площині ZOY, відкидаємо координату x, що дає:

$$\ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g.$$

Перший інтеграл дає:

$$\dot{y}(t) = C_1, \quad \dot{z}(t) = -gt + C_2, \tag{9.14}$$

а другий інтеграл має вигляд

$$y(t) = C_1 t + C_3, \qquad z(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4. \tag{9.15}$$

Для визначення постійних інтегрування C_1, C_2, C_3, C_4 необхідно визначити початкові умови при $t = 0$:
для швидкості:

$$\dot{y}_0 = v_0 \cos\alpha, \quad \dot{z}_0 = v_0 \sin\alpha, \tag{9.16}$$

та для переміщення:

$$y_0 = 0, \quad z_0 = 0. \tag{9.17}$$

Підставляючи (9.16) в (9.14), (9.17) в (9.15), маємо:

$$C_1 = v_0 \cos\alpha, \quad C_2 = v_0 \sin\alpha, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0.$$

Підставляючи ці значення в загальне рішення (1.12), отримуємо рівняння руху МТ, кинутої під кутом до горизонту:

$$y(t) = v_0 \cos\alpha\, t, \quad z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha\, t.$$

Для визначення траєкторії руху можна виразити час $t = \frac{y}{v_0 \cos\alpha}$,

та, підставляючи у вираз для z, остаточно отримати:

$$z = y\mathrm{tg}\alpha - y^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

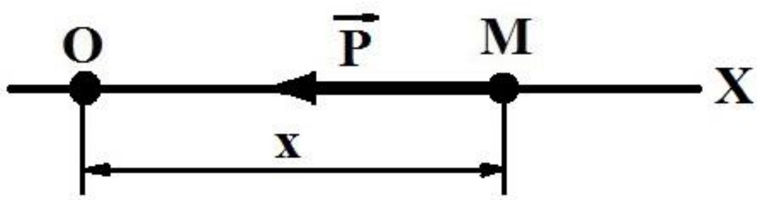
Траєкторією МТ є парабола.

Приклад 2. Визначити закон руху точки, на яку діє сила, яка залежна від переміщення.

Розв'язання. Приймаємо прямолінійну траєкторію руху точки M за вісь X і помістимо початок координат O в положення, в якому точка M мала б знаходитися у стані спокою. Якщо точка M виведена зі стану спокою, то на неї за віссю X діє тільки відновлювальна сила $\vec{P}$.

Якщо в деякий момент часу t точка M має координату x, то модуль відновлювальної сили дорівнює:

$$P = c \cdot OM = c|x|,$$



де c – коефіцієнт жорсткості пружини, чисельно рівний силі пружності її при деформації, яка дорівнює одиниці.

Через те, що відновлювальна сила в довільному положенні спрямована до точки O, то її проекція на вісь X завжди має знак, протилежний координаті x:

$$P_x = -cx. \tag{9.18}$$

Складемо диференціальне рівняння прямолінійного руху точки M під дією відновлювальної сили $\vec{P}$:

$$m\ddot{x} = \sum X_i = P_x.$$

Використовуючи вираз (9.18):

$$m\ddot{x} = -cx \text{ або } \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Позначимо $\frac{c}{m} = k^2$, тоді:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{9.19}$$

Рівняння (9.19) називають **диференціальним рівнянням вільних коливань матеріальної точки**.

Для інтегрування цього однорідного лінійного рівняння з постійними коефіцієнтами складемо характеристичне рівняння, уводячи рішення у вигляді $x = e^{kz}$:

$$z^2 + k^2 = 0.$$

Його корені $z_1 = +ik$ і $z_2 = -ik$.

Загальне рішення рівняння (9.19) має вигляд:

$$x = C_1 coskt + C_2 sinkt. \tag{9.20}$$

Для визначення постійних C_1 і C_2 знайдемо рівняння, що визначає швидкість точки, продиференціювавши рівняння (9.20):

$$\dot{x} = -kC_1 sinkt + kC_2 coskt. \tag{9.21}$$

Нехай у початковий момент часу $t = 0$ точка має координату x_0 і проекцію швидкості на вісь X $\dot{x}_0$. Тоді, підставивши початкові умови в рівняння (9.20) і (9.21), знайдемо:

$$C_1 = x_0, \quad \dot{x}_0 = kC_2,$$

звідки $\frac{\dot{x}_0}{k} = C_2$. Підставляючи значення C_1 і C_2 в рівняння (9.20), отримуємо рівняння руху точки M:

$$x = x_0 coskt + \frac{\dot{x}_0}{k} sinkt. \tag{9.22}$$

Рівнянню (9.22) можна надати іншого вигляду, уводячи замість C_1 і C_2 дві нові змінні a і β, поклавши:

$$C_1 = asin\beta; \qquad C_2 = acos\beta.$$

Підставляючи ці вирази у рівняння (9.20), отримуємо:

$$x = asin(kt + \beta). \tag{9.23}$$

Рівняння (9.23) є рівнянням гармонійного коливального руху точки. Більш докладно про це у курсі «Теорія коливань», в якому розглядають різні варіанти руху МТ з урахуванням опору та під дією прикладених до точки сил.

Контрольні питання

1. Що вивчає динаміка ?
2. В яких системах відліку виконуються перший та другий закони динаміки ?
3. Назвіть основні фізичні величини, які використовуються в динаміці.
4. Скільки існує форм рівнянь руху матеріальної точки ?
5. Яким чином розв’язується перша основна задача динаміки ?
6. В чому полягає фізична суть довільних сталих при інтегруванні зворотної задачі динаміки ?

Розділ Динаміка. Лекція № 10

План лекції

1. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки. Імпульс сили
2. Поняття моменту кількості руху матеріальної точки
3. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки
4. Робота сили. Потужність
5. Теорема про зміну кінетичної енергії точки

Тема 2. Основні теореми динаміки матеріальної точки

У теоретичній механіці розроблено методи, які дозволяють обійти основні труднощі, що виникають при використанні диференціальних рівнянь руху механічної системи. З цією метою введені деякі векторні та скалярні величини, що характеризують рух усієї системи (так звані міри руху). До них належать:

- вектор кількості руху;
- вектор моменту кількості руху;
- кінетична енергія;
- сила інерції та головний вектор сил інерції;
- момент сил інерції та головний момент сил інерції.

Загальні теореми динаміки є перетворенням диференціальних рівнянь руху, причому в різних теоремах виділені та пов'язані між собою ті чи інші характеристики руху. В результаті отримуємо зручні залежності, які використовуються для розв'язання задач динаміки. Як завжди, почнемо з визначення наведених величин у прив'язці до матеріальної точки.

2.1. Теорема про зміну кількості руху МТ. Імпульс сили

Основними характеристиками руху МТ та механічної системи є кількість руху та кінетична енергія. Означення кількості руху МТ як міри механічного руху було наведено у Лекції № 9 при формулюванні другого закону Ньютона, який є основним рівнянням динаміки і за умови $m = const$:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{або} \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}, \tag{10.1}$$

звідки:

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt. \qquad (10.2)$$

Кількість руху матеріальної точки – вектор $\vec{q} = m\vec{v}$, який дорівнює добутку маси МТ на її швидкість. Вектор $\vec{q}$ спрямований так само, як і вектор швидкості точки $\vec{v}$, тобто за дотичною до траєкторії руху точки.

Одиниця вимірювання кількості руху визначається з наведеної формули. Припускаючи в цьому співвідношенні m=1 кг, v=1 м/с, одержимо: 1 одиниця=(1 кг)•(1 м/с)=1 кг•м/с. Розмір одиниці дорівнює (1 кг)• (1 м)**:**(1 с). Розмірність одиниці кількості руху

$$[q] = [m] \cdot [v] = LMT^{-1}.$$

Для характеристики дії сили на тіло за деякий проміжок часу використовують поняття **імпульсу сили**. Спочатку розглянемо елементарний імпульс сили, тобто імпульс сили за нескінченно малий проміжок часу dt.

Елементарний імпульс сили – добуток вектора сили на елементарний проміжок часу $d\vec{S} = \vec{F}dt$, він спрямований в той же бік, що і вектор сили.

Вираз (10.2) є математичним записом теореми про зміну кількості руху МТ у диференціальній формі:

елементарна зміна кількості руху МТ дорівнює елементарному імпульсу сили, прикладеному до цієї точки.

Імпульсом сили $\vec{S}$ за скінчений проміжок часу називається інтеграл за часом від елементарного імпульсу, взятий в границях вказаного проміжку часу:

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt. \qquad (10.3)$$

Якщо сила за модулем і напрямом є сталою, імпульс сили дорівнює добутку вектора сили на величину проміжку часу:

$$\vec{S} = \vec{F}(t_2 - t_1), \quad \vec{F} = const. \qquad (10.4)$$

Якщо сила задана своїми проекціями F_x, F_y, F_z на відповідні осі координат, то проекції імпульсу сили можна знайти за формулами:

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt, \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt, \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt. \qquad (10.5)$$

Використовуючи проекції вектора імпульсу сили на осі, можна побудувати вектор $\vec{S}$, знайти його модуль, а також кути з осями координат.

Одиниця вимірювання імпульсу сили визначається з формули (10.4). Припускаючи в цьому співвідношенні F=1 Н, t=1 с, одержимо: 1 одиниця=(1 Н)•(1 с)=(1 кг)•(1 м/с^2)•(1 с)=1 кг•м=1 Н•с. Розмір одиниці дорівнює (1 кг)• (1 м)**:**(1 с). Розмірність одиниці імпульсу сили

$$[S] = [F] \cdot [t] = LMT^{-1}$$

Отже, розмірності кількості руху та імпульсу сили збігаються.

Запишемо основне рівняння руху МТ за умов прикладення до неї системи сил $\vec{F}_k$, $k = 1, \dots, N$:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \quad \text{або} \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k. \qquad (10.6)$$

В цій формі рівняння виражає теорему про зміну кількості руху в диференціальній формі:

похідна за часом від вектору кількості руху дорівнює геометричній сумі діючих на точку сил.

Помножимо обидві частини (10.6) на dt:

$$d(m\vec{v}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \, dt = \sum_{k=1}^{n} d\vec{S}_k. \qquad (10.7)$$

Це друга форма теореми:

диференціал кількості руху МТ дорівнює геометричній сумі елементарних імпульсів сил, діючих на точку.

Нехай точка масою m рухається під дією сили $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$ та має в моент часу t_1 швидкість $\vec{v}_1$, а в момент часу t_2 швидкість $\vec{v}_2$. Тоді після інтегрування в інтервалі часу від t_1 до t_2 одержимо теорему про зміну кількості руху МТ в інтегральній формі:

зміна кількості руху МТ за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів сил, діючих на точку за той же проміжок часу:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{q}_2 - \vec{q}_1 = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k. \tag{10.8}$$

де $\vec{q}_1$ відповідає початковому моменту часу, а $\vec{q}_2$ кінцевому. В проекціях на осі координат теорема має вигляд:

$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_x(\vec{F}_k),$$

$$m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_y(\vec{F}_k),$$

$$m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_z(\vec{F}_k).$$

Зауважимо, що вираз (10.8) є наслідком другого закону Ньютона, який, у цьому разі, можна трактувати як теорему про зміну кількості руху в диференціальній формі. Проте, завжди слід пам'ятати, що другий закон Ньютона є первинним і на ньому ґрунтуються доведення всіх теорем динаміки МТ в інерціальній системі відліку.

2.2. Поняття моменту кількості руху МТ

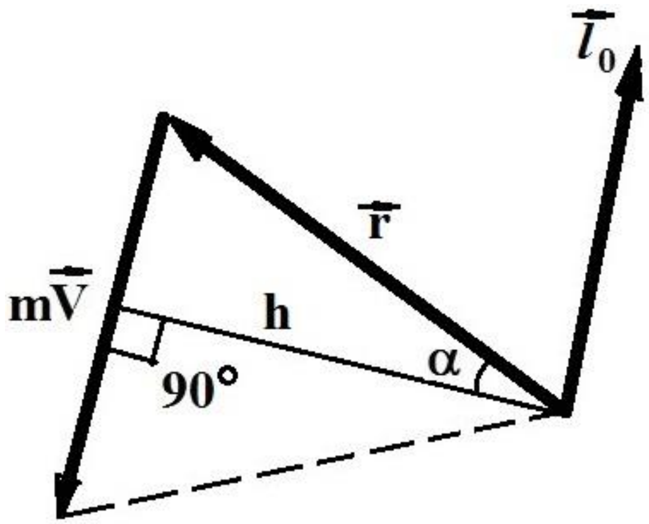


Рисунок 10.1.

Іноді при вивченні руху МТ замість зміни кількості руху $m\vec{v}$ виникає необхідність розглядати зміну моменту кількості руху.

Використовуючи вираз для кількості руху, помножимо його на радіус-вектор $\vec{r}(t)$, отримавши векторний добуток (позначається символом ×) (рис. 10.1):

$$\vec{r} \times m\vec{v},$$

який називається **момент кількості руху відносно нерухомої точки – вектор $\vec{l}_O$, величина і напрям якого визначається векторним добутком**

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times m\vec{v}. \tag{10.9}$$

Вектор $m\vec{v}$ вважають прикладеним до рухомої точки (рис. 10.1). Модуль цього вектору дорівнює:

$$l_O = mvr\sin\alpha = mvh, \tag{10.10}$$

де h – плече, довжина перпендикуляра, опущеного із центра на напрямок вектора $m\vec{v}$.

Одиниця вимірювання моменту кількості руху визначається з формули (2.10). Припускаючи в цьому співвідношенні m=1 кг, v=1 м/с, h=1 м, одержимо: 1 одиниця=(1 кг)•(1 м/с)•(1 м)= 1 кг•м^2/с. Розмір одиниці дорівнює (1 кг)•(1 м^2)**:**(1 с). Розмірність одиниці кількості руху

$$[l_O] = [m]\cdot[v]\cdot[h] = L^2MT^{-1}.$$

Неважко відстежити повну аналогію між поняттям, як відомо із статики, моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O:

$$\overrightarrow{M}_O = \vec{r}\times\vec{F}, \tag{10.11}$$

та моментом кількості руху в динаміці:

$$\vec{l}_O = \vec{r}\times\vec{q} = \vec{r}\times m\vec{v}$$

2.3. Теорема про зміну моменту кількості руху МТ

Знайдемо для МТ, що рухається під дією сили $\vec{F}$, залежність між моментами векторів $m\vec{v}$ та $\vec{F}$ відносно довільного центру. Використовуючи основне рівняння динаміки (9.2), отримуємо:

$$\vec{r}\times m\vec{a} = \vec{r}\times\vec{F}.$$

З урахуванням $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, перетворимо ліву частину рівняння наступним чином:

$$\vec{r}\times m\vec{a} = \vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v}) - \frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}. \tag{10.12}$$

Але $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ і векторний добуток паралельних векторів $\vec{v}\times m\vec{v}$ дорівнює нулю. Тому остаточно:

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (10.13)$$

З урахуванням (10.11) та (10.12):

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{M}_O. \qquad (10.14)$$

Це рівняння виражає **теорему про зміну кількості руху МТ**: **перша похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно будь-якого центру дорівнює моменту сили, прикладеної до точки, відносно того ж центру.**

Векторне рівняння (10.14) еквівалентне трьом скалярним рівнянням:

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_X & F_Y & F_Z \end{vmatrix},$$

Звідки

$$m\frac{d}{dt}(y\dot{z} - z\dot{y}) = yF_Z - zF_Y, \qquad \frac{dl_{OX}}{dt} = M_{OX},$$

$$m\frac{d}{dt}(z\dot{x} - x\dot{z}) = zF_X - xF_Z, \qquad \frac{dl_{OY}}{dt} = M_{OY},$$

$$m\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = xF_Y - yF_X, \qquad \frac{dl_{OZ}}{dt} = M_{OZ}.$$

Отриманий результат можна сформулювати наступним чином:
похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно будь-якої осі дорівнює моменту сили, прикладеної до точки, відносно тієї ж осі.

2.4. Робота сили. Потужність

Для характеристики дії сили, що діє на тверде тіло, використовують поняття роботи сили. Робота сили характеризує ту дію сили, яка визначає зміну модуля швидкості рухомої точки.

Робота є однією з основних характеристик дії прикладеної сили на МТ. Розглянемо рух МТ під дією сили $\vec{F}$. Точка рухається з прискоренням, спрямованим за напрямом сили. Використовуючи натуральну форму опису руху точки, уведемо поняття елементарної роботи сили на нескінченно малому переміщенні ds.

Елементарною роботою dA сили $\vec{F}$ називається скалярна величина, яка дорівнює добутку проекції сили на дотичну та величини елементарного переміщення точки вздовж дотичної:

$$dA = F_\tau ds. \quad (10.15)$$

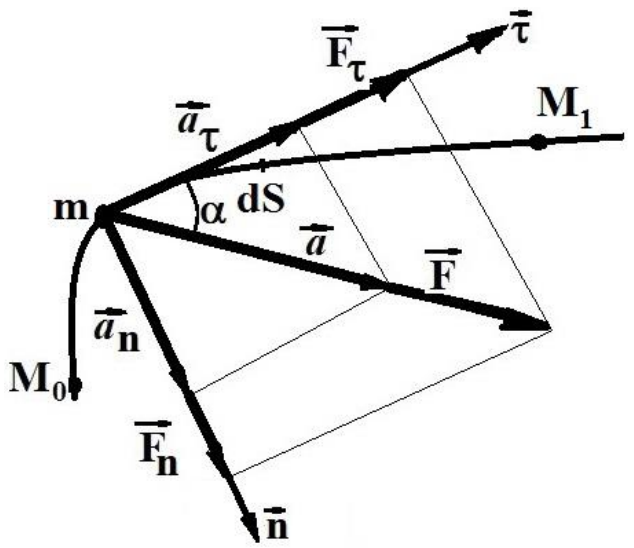


Рисунок 10.2.

Сила та прискорення розкладаються на нормальну (зумовлює зміну напряму руху) та дотичну (зумовлює зміну величини швидкості) складові, а саме $\vec{F}_n$, $\vec{F}_\tau$, $\vec{a}_n$, $\vec{a}_\tau$ (рис. 10.2).

Робота характеризує ту дію сили, якою визначається зміна модуля швидкості точки, що рухається.

Одиниця вимірювання роботи визначається з формули (10.15). Припускаючи в цьому співвідношенні F=1 Н, s=1 м, одержимо: 1 одиниця=(1 Н)•(1 м)=1 Н•м= 1 кг•м/с^2•м=1 кг•м^2/с^2. Ця величина має назву «джоуль» і позначається «Дж». Розмір одиниці дорівнює (1 кг)•(1 м^2)**:**(1 с^2). Розмірність одиниці роботи

$$[A] = [F] \cdot [s] = L^2MT^{-2}.$$

Складова $\vec{F}_n$ змінює напрямок вектора швидкості $\vec{v}$, або, під час невільного руху, змінює тиск на в’язь. Оскільки $\vec{F}_\tau = \vec{F}\cos\alpha$

$$dA = F\cos\alpha\, ds.$$

Тобто елементарна робота сили дорівнює добутку модуля сили на елементарне переміщення та косинус кута між напрямом сили та напрямом переміщення. Робота є додатною (прискорює рух МТ), якщо кут α гострий, від’ємною (сповільнює рух МТ), якщо кут тупий, і дорівнює 0, якщо $\alpha = 90°$.

Знак роботи має такий зміст: робота додатна, коли дотична складова сили спрямована в бік руху, тобто коли сила прискорює рух; робота від'ємна, коли дотична складова сили спрямована в бік, протилежний руху, тобто сила сповільнює рух.

За координатного способу опису руху в декартовій системі координат проекції лежать на своїх осях, тому, проектуючи вектор сили $\vec{F}$ по осях, вздовж переміщень dx, dy, dz, отримуємо вираз для роботи сили на переміщенні ds:

$$dA = F_X dx + F_Y dy + F_Z dz. \tag{10.16}$$

Роботою сили на довільному переміщенні $M_0 M_1$ називається інтеграл від елементарної роботи, визначений вздовж цієї траєкторії:

$$A(M_0 M_1) = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau ds,$$

або

$$A(M_0 M_1) = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{M_0}^{M_1} (F_X dx + F_Y dy + F_Z dz). \tag{10.17}$$

Для обчислення роботи сил, які залежать від часу або швидкості руху точки, необхідно знати закон її руху, тобто координати x, y, z як функції часу. Тоді всі змінні величини можна виразити через t й обчислити інтеграл (10.17).

Потужність N характеризує роботу, яку виконує сила за одиницю часу:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau v. \tag{10.18}$$

Отже, робота дорівнює добутку дотичної складової силт на швидкість руху. Якщо робота виконується рівномірно (t – час, протягом якого виконується робота):

$$N = \frac{A}{t}. \tag{10.19}$$

Одиниця вимірювання потужності визначається з формули (10.19). Припускаючи в цьому співвідношенні A=1 Дж, t=1 с, одержимо: 1 одиниця=(1 Дж)/(1 с)=1 Дж/с= 1 кг•м/с^2•м/с=1 кг•м^2/с^3. Ця величина має назву «ватт» и позначається «Вт». Розмір одиниці дорівнює (1 кг)•(1 м^2)**:**(1 с^3). Розмірність одиниці потужності

$$[N]=[A]/[t]=L^2MT^{-3}.$$

В загальному випадку

$$N=\frac{dA}{dt}=\frac{F_\tau ds}{dt}=F_\tau dv.$$

2.5. Теорема про зміну кінетичної енергії точки

Скалярною мірою руху МТ є кінетична енергія – половина добутку маси на квадрат її швидкості:

$$T=\frac{mv^2}{2}. \tag{10.20}$$

Як і робота, енергія вимірюється в джоулях.

Нехай точка з масою m в початковий момент часу t_0 знаходиться в положенні M_0 і має швидкість v_0, а в момент часу t_1 в положенні M_1 має швидкість v_1. Запишемо основне рівняння руху МТ:

$$m\vec{a}=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k. \tag{10.21}$$

Спроектуємо його на дотичну до траєкторії руху в точці:

$$ma_\tau=\sum_{k=1}^{n}F_{k\tau}. \tag{10.22}$$

У цьому виразі дотичне прискорення дорівнює похідній за часом від модуля швидкості:

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=v\frac{dv}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Рівняння (10.22) можна переписати у вигляді:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}F_{k\tau}ds=\sum_{k=1}^{n}dA_k. \tag{10.23}$$

Вираз (10.23) є записом **теореми про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі: повний диференціал кінетичної енергії точки дорівнює елементарній роботі усіх діючих на точку сил**.

Проінтегрувавши рівняння (10.23) вздовж траєкторії від початкового положення M_0 до кінцевого положенні M_1 в межах, що відповідають значенням швидкостей точки в початковому та кінцевому положеннях, отримуємо **теорему про зміну кінетичної енергії в інтегральній формі: зміна кінетичної**

енергії матеріальної точки на переміщенні дорівнює сумі робіт діючих на точку сил на тому ж переміщенні:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{F}_k\right). \qquad (10.24)$$

Будемо вважати, що всі складові, що входять до виразу (10.23), залежать від часу t. Розділивши обидві частини виразу на dt, одержимо (третя форма теореми):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{1}{dt}\sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}ds = \frac{1}{dt}\sum_{k=1}^{n} dA_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{dA_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} dN_k. \qquad (10.25)$$

Отже, повна похідна за часом від кінетичної енергії МТ дорівнює сумарній потужності сил, що діють на точку.

Контрольні питання

1. Яка величина використовується як векторна міра кількості руху ?
2. Чому дорівнює зміна кількості руху матеріальної точки ?
3. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху механічної системи.
4. За якої умови зберігається кількість руху механічної системи ?
5. Сформулюйте поняття моменту кількості руху.
6. Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту точки.
7. Дайте визначення роботи сили та потужності.
8. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.

Розділ Динаміка. Лекція № 11

План лекції

1. Сили, що діють на точки механічної системи
2. Маса механічної системи. Центр мас
3. Момент інерції
4. Осьові моменти інерції деяких простих тіл
5. Диференціальні рівняння руху механічної системи
6. Теорема про рух центру інерції механічної системи

Тема 3. Система матеріальних точок

3.1. Сили, що діють на точки механічної системи

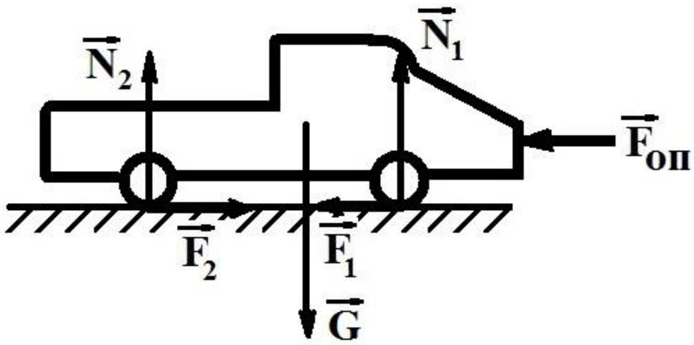
Система матеріальних точок (**СМТ або система**) – **така сукупність точок або тіл, в якій положення або рух кожної точки (тіла) залежить від положення та руху всіх інших точок (тіл).**

Матеріальне тіло будемо розглядати як систему матеріальних частин (точок), які утворюють це тіло.

Діючі на механічну систему активні сили $\vec{F}_k^a$ і реакцій в'язей $\vec{N}_k$ поділяють на зовнішні $\vec{F}_k^e$ і внутрішні $\vec{F}_k^i$ (індекси e та i від латинських $exterior$ - зовнішній і $interior$ - внутрішній).

Зовнішніми називають **сили, що діють на точки системи з боку інших точок або тіл, які не входять до складу даної системи**.

Внутрішніми називають **сили, з якими точки або тіла даної системи діють один на одного.**



Як зовнішні, та і внутрішні сили можуть бути активними або реакціями в'язей. Для ілюстрації введених понять розглянемо сили, що прикладені до автомобіля, що рухається прямолінійно по горизонтальній дорозі.

Передусім, на автомобіль діє сила тяжіння $\vec{G}$. Ця сила зовнішня, через те, що вона зумовлена дією Землі – тіла, що не входить до системи (автомобіля). Вона також є активною, вона незалежна від в'язей. До активних зовнішніх сил відноситься аеродинамічна сила опору повітря , ця сила не залежить від в'язей і викликана опором навколишнього середовища $\vec{F}_{оп}$. За принципом звільнення замінимо дію в'язі (дороги) її реакціями $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$. Перші дві сили є рівнодіючими нормальних реакцій дороги до передніх і задніх коліс. Сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ – рівнодіючі сил тертя, що викликані обертанням ведених і ведучих коліс. Сили $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ – зовнішні, вони зумовлені дією дороги, яка не входить до системи. Таким чином, до автомобіля прикладено шість зовнішніх сил.

В деяких випадках зовнішні сили виникають за рахунок дії внутрішніх сил. Зовнішня сила тертя ковзання $\vec{F}_2$ між задніми колесами автомобіля та дорогою не може виникнути без внутрішніх сил, які передають обертальний момент на ведучі колеса. Якщо ведучими є задні колеса, сила тертя $\vec{F}_2$ спрямована за напрямом руху.

Сила тиску газів на поршні двигуна, сили тиску поршнів на шатуни і шатунів на кривошипи колінчастого вала, сили тертя на осях коліс тощо – це все внутрішні сили системи.

Внутрішні сили мають наступні властивості.

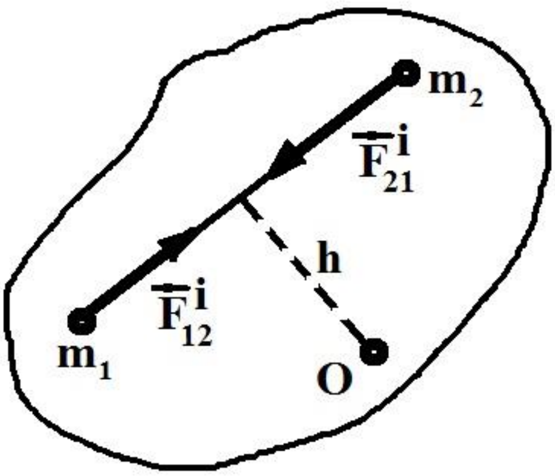


Рисунок 11.1.

1. Геометрична сума (головний вектор) всіх внутрішніх сил системи або сума проекцій цих сил на довільну вісь дорівнює нулю. Згідно з 3-м законом динаміки будь-які дві точки діють одна на одну з рівними за модулем і протилежно спрямованими силами. Їх сума дорівнює нулю (рис. 11.1). Аналогічний результат має місце для довільної пари точок, тому:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i = 0. \quad (11.1)$$

2. Геометрична сума моментів (головний момент) всіх внутрішніх сил системи відносно довільного центру або осі дорівнює нулю. Дійсно, як видно з рис. 11.1, сума моментів сили $\vec{F}^i_{12}$ та $\vec{F}^i_{21}$ відносно центру О дорівнює нулю. Додаючи моменти попарно, отримуємо:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}^i_k\right) = 0. \qquad (11.2)$$

З доведених властивостей не випливає, що внутрішні сили взаємно урівноважені та не впливають на рух системи, оскільки ці сили прикладені до різних МТ і можуть викликати взаємне переміщення точок. Урівноваженими внутрішні сили можуть бути лише тоді, коли система, яку розглядають, є абсолютно твердим тілом.

3.2. Маса механічної системи. Центр мас

Рух системи залежить не тільки від сил, які на неї діють, а також від її сумарної маси та розподілу мас. Кожна точка M_k механічної системи має певну масу m_k, а її положення відносно системи відліку $Oxyz$ в кожний момент часу визначається радіус-вектором $\vec{r}_k$ або трьома координатами x_k, y_k, z_k.

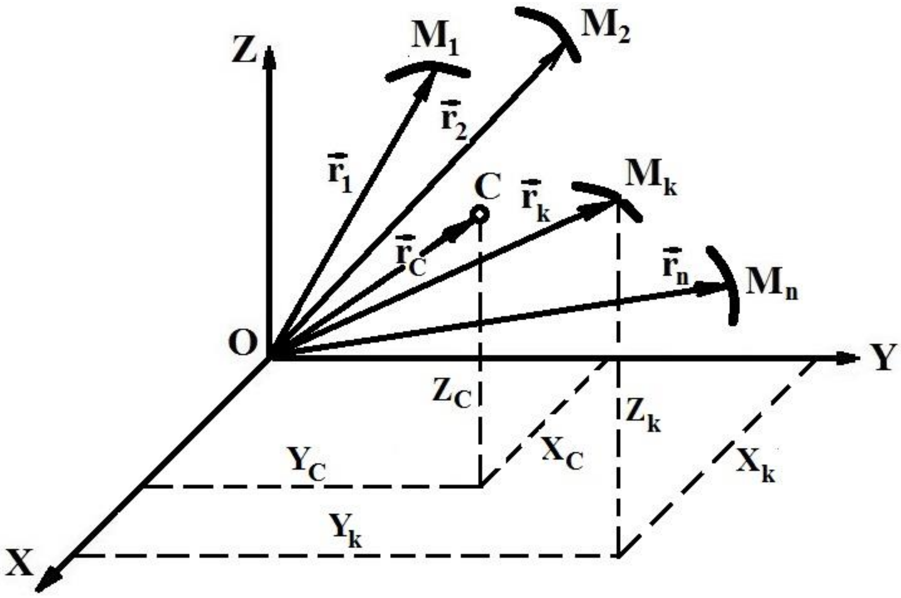


Рисунок 11.2.

Центром мас або **центром інерції механічної системи** називається геометрична точка C, радіус-вектор якої визначається залежністю (рис. 11.2):

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k m_k}{M}, \quad M = \sum_{k=1}^{n} m_k, \qquad (11.3)$$

де M – маса системи, яка дорівнює арифметичній сумі мас всіх точок або тіл, що утворюють систему.

Проектуючи цю формулу на осі координат, одержимо формули для координат центру мас системи:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} x_k m_k, \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} y_k m_k, \quad z_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} z_k m_k. \tag{11.4}$$

Отримані співвідношення справедливі і для твердого тіла.

Якщо помножимо чисельник і знаменник у виразах (11.3) і (11.4) на g (прискорення земного тяжіння), то отримуємо радіус-вектор та координати центра ваги системи.

3.3. Момент інерції

Для характеристики розподілу маси системи або твердого тіла для дослідження обертального руху необхідно ввести поняття моменту інерції.

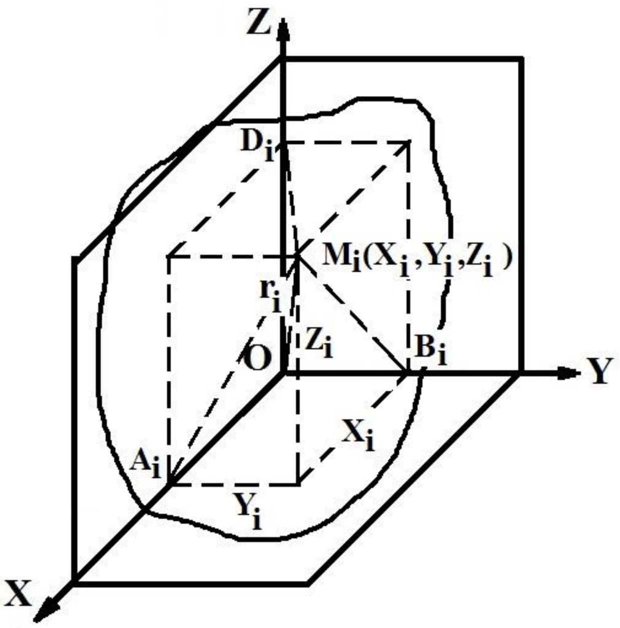


Рисунок 11.3.

Моментом інерції матеріальної системи (тіла) відносно осі є **скалярна величина, що дорівнює сумі добутків мас точок системи (тіла) на квадрати відстаней до осі**. При неперервному розподілі маси сума переходить в інтеграл.

Для визначення моментів інерції системи (тіла) відносно осей опустимо з кожної точки тіла M_i на осі x, y, z перпендикуляри M_iA_i, M_iB_i, M_iD_i. (рис. 11.3).

Квадрати цих перпендикулярів:

$$(M_iA_i)^2 = y_i^2 + z_i^2, \quad (M_iB_i)^2 = z_i^2 + x_i^2, \quad (M_iD_i)^2 = x_i^2 + y_i^2. \tag{11.5}$$

Позначимо моменти інерції відносно координатних осей через I_X, I_Y, I_Z.

$$I_X = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right),\ I_Y = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(z_i^2 + x_i^2\right),$$
$$I_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right), \quad (11.6)$$

де x_i, y_i, z_i – координати матеріальних точок системи.

Моментом інерції відносно полюса (**полярним моментом інерції**) називається **скалярна величина, що дорівнює сумі добутків маси кожної точки тіла на квадрат відстані від точки до цього полюса**:

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right). \quad (11.7)$$

З урахуванням (11.6) і (11.7) отримуємо:

$$I_X + I_Y + I_Z = 2I_O.$$

Момент інерції відносно заданої осі, наприклад осі Z, можна представити у вигляді **добутку маси тіла на квадрат лінійної величини, що називається радіус інерції тіла відносно цієї осі**:

$$I_Z = m i_Z^2, \quad (11.8)$$

де m – маса тіла, i_Z - радіус інерції тіла відносно осі Z. Радіусом інерції тіла відносно осі називають відстань від цієї осі, на якій потрібно розмістити всю масу тіла, не змінюючи моменту інерції тіла.

За умов неперервності розподілу маси тіла переходимо до інтегралу. Тоді відносно осі буде:

$$I_{\text{осі}} = \int_{(V)} r^2 dm = \int_{(V)} r^2 \rho dV. \quad (11.9)$$

де ρ, V – відповідно густина та об'єм тіла.

Момент інерції ТТ завжди додатний. Розмірність:

$$[I] = [m] \cdot [r^2] = \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

3.4. Осьові моменти інерції деяких простих тіл

1. Момент інерції однорідного тонкого стержня.

Обчислимо його момент інерції відносно осі Z, яка перпендикулярна до стержня та проходить через його кінець (рис. 11.4). Для нього довжина l, маса m.

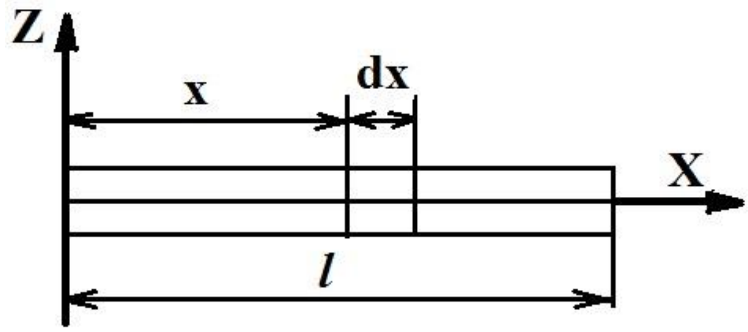


Рисунок 11.4.

Виділимо вздовж осі стержня X елементарну ділянку – відрізок dx, для якого маса $dm = \rho dx$, де $\rho = m/l$ - маса одиниці довжини стержня. В результаті з урахуванням (11.9) маємо інтеграл:

$$I_Z = \int_0^l x^2\, dm = \int_0^l x^2\, \rho dx = \rho \frac{l^3}{3}.$$

Підставляючи $\rho = m/l$, отримуємо:

$$I_Z = \frac{ml^2}{3}. \qquad (11.10)$$

2. Момент інерції однорідної круглої пластинки малої товщини.

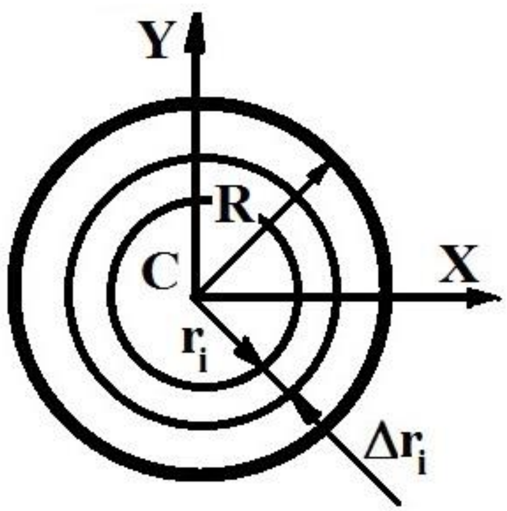


Рисунок 11.5.

Знайдемо момент інерції круглої пластини відносно осі Z, яка перпендикулярна до площини пластини та проходить через її центр (рис. 11.5). Для цього виділимо елементарне кільце радіусом r_i і шириною Δr_i. Площа цього кільця дорівнює $2\pi\Delta r_i$, а маса – $\rho 2\pi\Delta r_i$, ρ – маса одиниці площі пластини. Після інтегрування отримуємо:

$$I_Z = \frac{mR^2}{2}. \qquad (11.11)$$

Моменти інерції круглої пластини відносно осей і відповідно вдвічі менше:

$$I_X = I_Y = \frac{mR^2}{4}. \qquad (11.12)$$

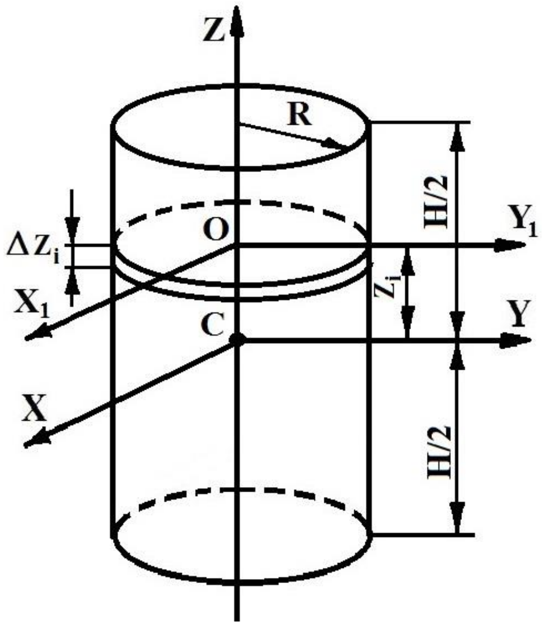


Рисунок 11.6.

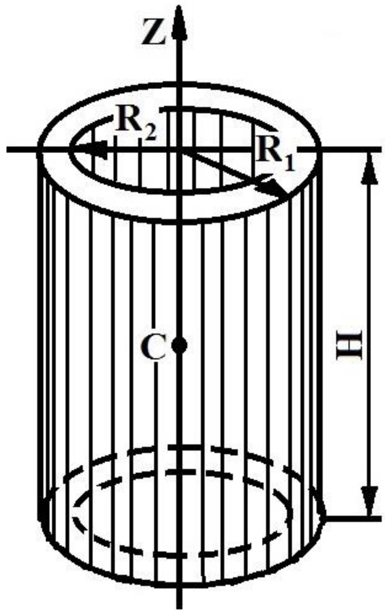


Рисунок 11.7.

3. Момент інерції однорідного круглого циліндра (рис. 11.6)

Вважаємо циліндр набором тонких круглих пластинок, які сумарно дають:

$$I_Z = \frac{mR^2}{2}. \quad (11.13)$$

4. Момент інерції полого циліндра (рис. 11.7).

Вважаємо, що ця фігура складається з циліндра радіусом R_1, в якому вирізано циліндр радіусом R_2. Використовуючи формулу (11.9), отримуємо:

$$I_Z = \frac{m_1 R_1^2}{2} - \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

Маси суцільних циліндрів $m_1 = \rho H \pi R_1^2$ і $m_2 = \rho H \pi R_2^2$. Маса полого циліндра $m = m_1 - m_2$. Після перетворень маємо

$$I_Z = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)\ . \quad (11.14)$$

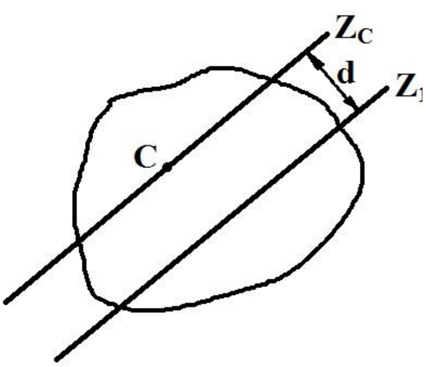


Рисунок 11.8.

Якщо потрібно визначити моменти інерції тіла відносно паралельних осей , то за **теоремою Штейнера** момент інерції відносно деякої осі z_1 дорівнює сумі моменту інерції відносно центральної осі z_C, яка проходить через центр мас паралельно до осі z_1 і добутку маси тіла на квадрат відстані d між осями (рис. 11.8):

$$I_Z = I_{ZC} + md^2. \tag{11.15}$$

3.5. Диференціальні рівняння руху механічної системи

Розглянемо рух механічної системи, яка складається з n матеріальних точок M_1, M_2,.., M_n з масами m_1, m_2, , m_n (рис. 11.9).

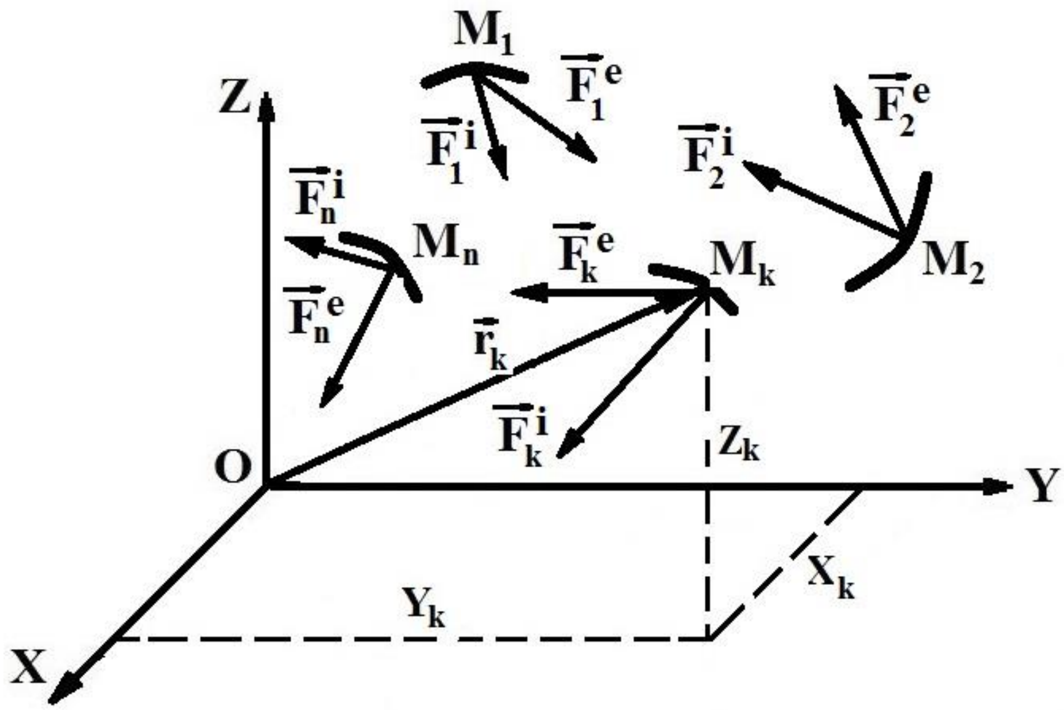


Рисунок 11.9.

Позначимо рівнодіючу зовнішніх сил, які діють на k-у точку через $\vec{F}_k^e$ та рівнодіючу внутрішніх сил $\vec{F}_k^i$. Згідно з основним рівнянням динаміки МТ:

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i. \tag{11.16}$$

Спроектувавши рівняння (11.16) на осі координат, одержимо $3n$ диференціальних рівнянь в проекціях на осі $(k = 1, \dots, n)$:

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= \vec{F}_{kx}^e + \vec{F}_{kx}^i \\ m_k \ddot{y}_k &= \vec{F}_{ky}^e + \vec{F}_{ky}^i \\ m_k \ddot{z}_k &= \vec{F}_{kz}^e + \vec{F}_{kz}^i. \end{aligned} \tag{11.17}$$

Повний розв’язок основної задачі динаміки полягає в тому, щоб, знаючи задані сили, проінтегрувати відповідні диференціальні рівняння та визначити закон руху кожної точки системи. У більшості задач практики механічна система складається з великої кількості точок, причому поряд з заданими силами на точки системи діють невідомі реакції в’язей. Для знаходження руху системи, яка складається з твердих тіл, немає необхідності знати рух кожної точки, достатньо знати для кожного тіла закон руху полюса (3 лінійні координати) і закон обертального руху навколо полюса (3 кута повороту), тобто 6 параметрів як функцій часу.

3.6. Теорема про рух центру інерції механічної системи

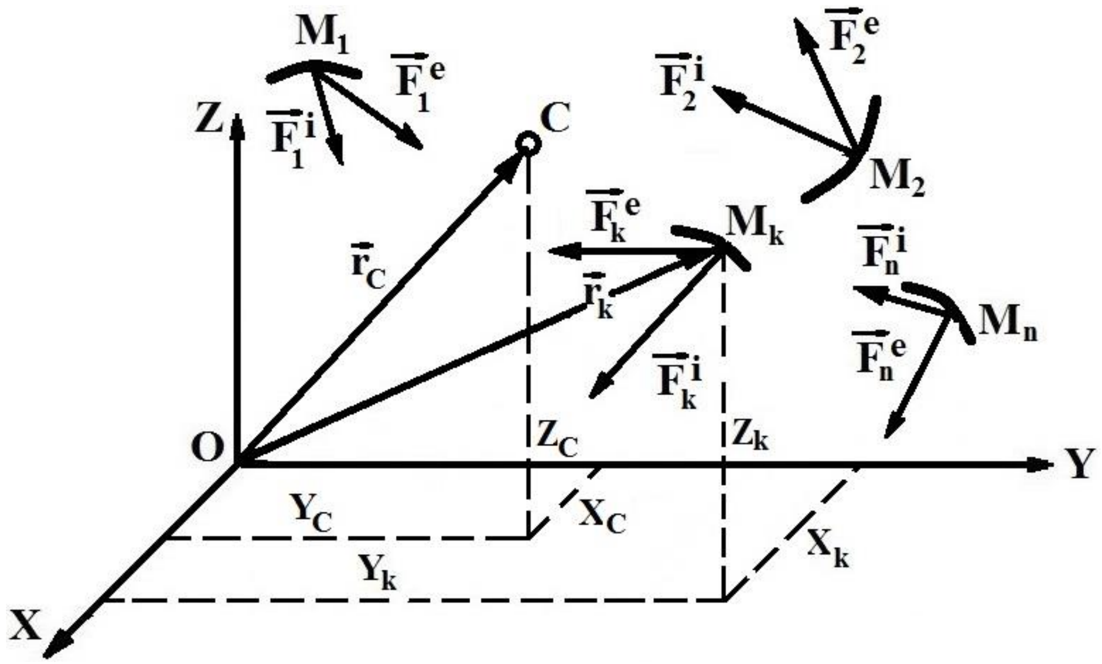


Рисунок 11.10.

Розглянемо рухому систему МТ, що знаходиться під дією зовнішніх та внутрішніх сил (рис. 11.10). Рух системи залежить не тільки від сил, які на неї діють, а також від її сумарної маси та розподілу мас.

За формулою (11.3) дано визначення центру інерції (центру мас) системи матеріальних точок:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k m_k}{M}, \quad M = \sum_{k=1}^{n} m_k,$$

Використовуючи співвідношення (11.4), отримуємо залежності між швидкістю центру мас і точок системи:

$$\vec{v}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} \vec{v}_k m_k,$$

$$\dot{x}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k m_k, \quad \dot{y}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} \dot{y}_k m_k,$$

$$\dot{z}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} \dot{z}_k m_k. \qquad (11.18)$$

Для знаходження закону руху візьмемо похідну за часом від швидкості у виразах (11.18):

$$M\ddot{x}_c = \sum_{k=1}^{n} \ddot{x}_k m_k = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e,$$

$$M\ddot{y}_c = \sum_{k=1}^{n} \ddot{y}_k m_k = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e, \qquad (11.19)$$

$$M\ddot{z}_c = \sum_{k=1}^{n} \ddot{z}_k m_k = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e.$$

Оскільки $\vec{a}_C = \ddot{x}_c\vec{\imath} + \ddot{y}_c\vec{\jmath} + \ddot{z}_c\vec{k}$

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_k m_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e = \vec{R}^e. \qquad (11.20)$$

Рівняння (11.20) виражає **теорему про рух центра мас системи**, яка формулюється наступним чином:

Центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка масою, яка дорівнює масі всієї системи, до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на систему.

З рівнянь (11.19) і (11.20) витікає, що внутрішні сили безпосередньо не впливають на рух центра мас. Відзначимо деякі властивості цієї теореми.

1. Теорема обґрунтовує методи динаміки точки. З рівнянь видно, що розв'язок, який ми отримуємо, вважаючи дане тіло матеріальною точкою, визначає закон руху центра мас цього тіла.

Якщо тіло рухається поступально, його рух повністю визначається рухом центра мас. Таким чином, рух твердого тіла, що рухається поступально, можна розглядати як рух матеріальної точки, маса якої дорівнює масі тіла. В інших випадках тіло можна розглядати як матеріальну точку лише тоді, коли для визначення положення тіла достатньо знати положення його центра мас.

2. Теорема дозволяє при визначенні закону руху центра мас довільної системи виключити з розгляду всі невідомі внутрішні сили.

З теореми про рух центра мас отримуємо важливі наслідки.

1. Якщо головний вектор зовнішніх сил залишається весь час рівним нулю, то центр мас механічної системи знаходиться в стані спокою або рухається прямолінійно та рівномірно.

$$\vec{R}^e = 0,\ \vec{a}_C = 0,\ \vec{v}_C = const$$

2. Якщо проекція головного вектору зовнішніх сил на будь-яку нерухому вісь залишається весь час рівною нулю, то проекція центру мас механічної системи на цю вісь або нерухома, або рухається рівномірно.

Наприклад,

$$\ddot{x}_c = \dot{v}_{Cx} = 0,\ v_{Cx} = const$$

Контрольні питання

1. Дати визначення механічної системи.
2. Сформулювати дві властивості внутрішніх сил.
3. Як визначається центр мас механічної системи ?
4. Дати визначення осьового моменту інерції.
5. Як визначаються моменти інерції відносно паралельних осей (за теоремою Штейнера) ?
6. Поясніть рух автомобіля з точки зору теореми про рух центру інерції.
7. Які наслідки випливають з теореми про рух центра мас системи ?

Розділ Динаміка. Лекція № 12

План лекції

1. Кількість руху системи матеріальних точок
2. Теорема про зміну кількості руху системи
3. Теорема про рух центра мас
4. Момент кількості руху системи матеріальних точок
5. Теорема про зміну моменту кількості руху системи матеріальних точок (теорема моментів)
6. Диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Тема 4. Кількість руху і момент кількості руху механічної системи

4.1. Кількість руху системи матеріальних точок (СМТ)

Як було показано в Лекції № 10, **кількість руху матеріальної точки** – **вектор $\vec{q} = m\vec{v}$, який дорівнює добутку маси МТ на її швидкість.**

Кількістю руху системи матеріальних точок (СМТ) називається вектор $\vec{Q}$, який дорівнює сумі кількостей руху (головний вектор кількостей руху) точок, які входять до системи:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k. \tag{12.1}$$

В (12.1) m_k – маса окремої k-ої точки, $\vec{v}_k$ – її швидкість. З урахуванням $\vec{v}_k = \dot{\vec{r}}_k$, де $\vec{r}_k$ – радіус-вектор k-ої точки, який проведено з точки початку інерціальної системи відліку, рівність (4.1) можна перетворити наступним чином (маси точок вважаємо незмінними):

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k.$$

Користуючись виразом (Лекція № 11, (11.3)):

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k m_k}{M}, \quad M = \sum_{k=1}^{N} m_k,$$

суму, яка стоїть під знаком похідної, замінимо добутком $M\vec{r}_C$, де M – маса всієї системи, а $\vec{r}_C$ – радіус-вектор центра мас:

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt}(M\vec{r}_C) \quad \text{або} \quad \vec{Q} = M\frac{d\vec{r}_C}{dt}.$$

Похідна $\frac{d\vec{r}_C}{dt}$ є швидкістю $\vec{v}_C$ центра мас системи. Остаточно маємо:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_C, \tag{12.2}$$

тобто **кількість руху матеріальної системи дорівнює масі всій системи, яка помножена на швидкість її центра інерції**.

Рівність (12.2) можна прочитати наступним чином: **кількість руху матеріальної системи дорівнює кількості руху її центра мас, якщо помістити в ньому масу всієї системи.**

Вектор кількості руху $\vec{Q}$ може бути заданий своїми проекціями, вирази для яких безпосередньо слідують з формул (12.1) і (12.2) і теореми про проекції суми векторів:

$$\begin{gathered} Q_x = \sum_{k=1}^{N} m_k\,\dot{x}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k\,v_{kx} = M\dot{x}_C = Mv_{Cx} \\ Q_y = \sum_{k=1}^{N} m_k\,\dot{y}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k\,v_{ky} = M\dot{y}_C = Mv_{Cy}, \\ Q_z = \sum_{k=1}^{N} m_k\,\dot{z}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k\,v_{kz} = M\dot{z}_C = Mv_{Cz} \end{gathered} \tag{12.3}$$

де $\vec{Q} = Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k}$.

Модуль головного вектора кількості руху системи:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}.$$

Кількість руху системи характеризує її поступальний рух разом з центром мас.

4.2. Теорема про зміну кількості руху системи

Теорема. **Похідна за часом вектора кількості руху СМТ дорівнює головному вектору всіх зовнішніх сил, які діють на систему**.

Перепишемо диференціальні рівняння руху СМТ (Лекція № 11, (11.16))

$$m_k\vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$$

в наступній формі:

$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \dots, m_n\frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i \qquad (12.4)$$

і складемо почленно всі рівняння:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^i.$$

Перша сума, що стоїть у правій частині рівняння, дорівнює головному вектору всіх зовнішніх сил $\vec{F}^e$, а друга сума через властивості внутрішніх сил дорівнює нулю. Після перетворень лівої частини отримуємо:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k\vec{v}_k = \vec{F}^e,$$

та з урахуванням (12.1):

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e. \qquad (12.5)$$

З цієї теореми витікає декілька наслідків.

1. **Внутрішні сили безпосередньо не впливають на зміну кількості руху СМТ** (вони можуть впливати непрямим способом через зовнішні сили).
2. **Якщо головний вектор всіх зовнішніх сил, які діють на СМТ, дорівнює нулю, то вектор кількості руху СМТ залишається постійним за величиною та напрямом**.

Дійсно, за умовою $\vec{F}^e$=0. Тоді $\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0$, звідки:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 = const, \qquad (12.6)$$

де $\vec{Q}_0$ – початкова величина вектора $\vec{Q}$.

3. **Якщо проекція головного вектора всіх зовнішніх сил, прикладених до СМТ, на деяку нерухому вісь дорівнює нулю, то проекція кількості руху СМТ на цю вісь залишається постійною**.

Дійсно, наприклад для осі x, $\frac{dQ_x}{dt} = 0$, звідки:

$$Q_x = Q_{x0} = const. \tag{12.7}$$

Вирази (12.6) і (12.7) називаються **законами збереження кількості руху СМТ**. З них випливає, що внутрішні сили не можуть змінити кількість руху системи.

Користуючись введеним раніше поняттям імпульса сили, перетворимо рівняння (12.5). Для цього помножимо обидві частини на dt і проінтегруємо в границях від t_0 до t_1:

$$\int_{t_0}^{t_1} d\vec{Q} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}^e dt,$$

або

$$\vec{Q}(t) - \vec{Q}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}^e dt,$$

або остаточно, користуючись виразом для імпульсу сил:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \vec{S}^e, \tag{12.8}$$

де $\vec{Q} = M\vec{v}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e$ – головний вектор імпульсів всіх зовнішніх сил. Таким чином, переходимо до теореми про зміну кількості руху СМТ в інтегральній формі (теорема імпульсів):

зміна кількості руху СМТ за проміжок часу $[t_0, t_1]$ дорівнює головному вектору імпульсів всіх зовнішніх сил, прикладених до системи, за той же проміжок часу.

Векторне рівняння (12.8) еквівалентне трьом скалярним рівнянням в проекціях на осі системи координат:

$$Q_x - Q_{0x} = S_x^e, \quad Q_y - Q_{0y} = S_y^e, \quad Q_z - Q_{0z} = S_z^e. \tag{12.9}$$

В цих формулах S_x^e, S_y^e, S_z^e – проекції головного вектора імпульсів всіх зовнішніх сил на осі координат, а Q_x, Q_y, Q_z і Q_{0x}, Q_{0y}, Q_{0z} – величини проекцій кількості руху СМТ в моменти часу t і t_0.
Теорема імпульсів широко застосовується в теорії удару.

4.3. Теорема про рух центра мас

З урахуванням (12.2) і (12.5) та незмінності маси отримуємо:

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}_C) = \vec{F}^e \quad \text{або} \quad M\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}^e. \tag{12.10}$$

Ця рівність за виглядом збігається з 2-м законом Ньютона, який записано для точки масою M і прискоренням $\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt}$, до якої прикладена сила $\vec{F}^e$.
Рівність (12.10) є математичним записом теореми про рух центра мас:
центр мас СМТ рухається як матеріальна точка, в якій зосереджена вся маса системи і до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на систему.
З цієї теореми витікає декілька наслідків.

1. **Тільки внутрішніми силами неможливо змінити характер руху центра мас СМТ**.
2. **Якщо головний вектор всіх зовнішніх сил, які діють на СМТ, дорівнює нулю, то центр мас СМТ знаходиться у стані спокою або рухається рівномірно та прямолінійно**.

Дійсно, якщо $\vec{F}^e = 0$, то з (4.10) маємо $M\frac{d\vec{v}_C}{dt} = 0$, звідки

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{0C} = const, \tag{12.11}$$

$\vec{v}_{0C}$ – початкова швидкість центра мас.

3. **Якщо проекція головного вектора всіх зовнішніх сил СМТ на деяку нерухому вісь дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас СМТ на цю вісь не змінюється**.

$$M\frac{dv_{Cx}}{dt} = 0 \quad v_{Cx} = const. \tag{12.12}$$

4. **Пара сил, прикладена до твердого тіла, не може змінити рух його центра мас (вона може тільки викликати обертання тіла).**

4.4. Момент кількості руху СМТ

На Лекції № 10 було введено поняття моменту кількості руху матеріальної точки, деякі поняття нагадаємо тут.

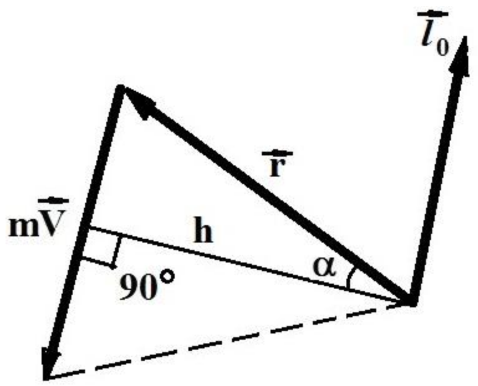


Рисунок 12.1.

Використовуючи вираз для кількості руху $m\vec{v}$, помножимо його на радіус-вектор $\vec{r}(t)$, отримавши векторний добуток (позначається символом $\times$) (рис. 12.1):

$$\vec{r} \times m\vec{v},$$

який називається **момент кількості руху відносно нерухомої точки** – **вектор $\vec{l}_O$, величина і напрям якого визначається векторним добутком**

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Модуль цього вектору дорівнює $l_O = mvr\sin\alpha = mvh$, де h – плече.

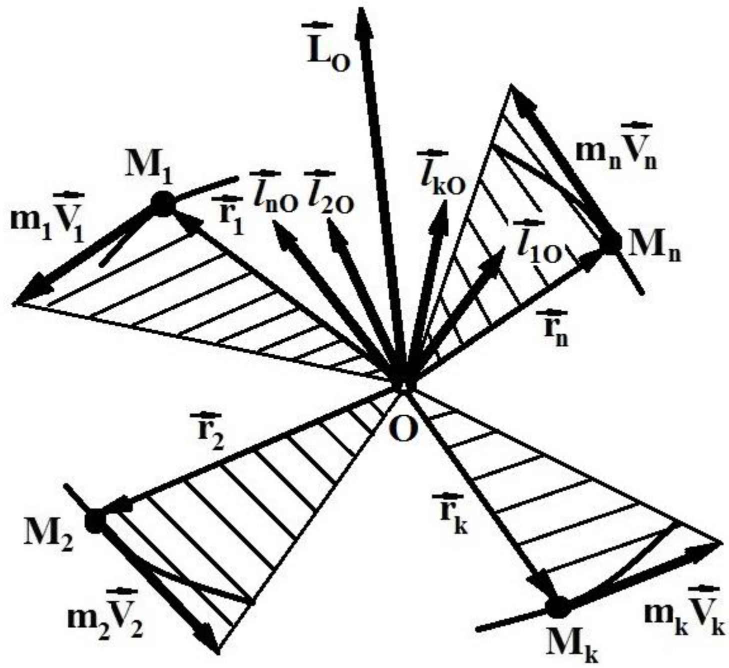


Рисунок 12.2.

Уведемо поняття моменту кількості руху для системи матеріальних точок. **Головний момент** $\vec{L}_O$ (використовують також позначення $\vec{K}_O$) **кількості руху СМТ (кінетичний момент) відносно центру O дорівнює векторній сумі моментів кількості руху матеріальних точок відносно того ж центра** (рис. 12.2).

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{l}_{kO} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k \times \vec{q}_k) = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k).$$

(12.13)

В цьому рівнянні $\vec{r}_k$ – радіус-вектор k-ої матеріальної точки з початком у центрі O, m_k і $\vec{v}_k$ – маса і швидкість цієї точки. Розкриваючи векторний добуток, запишемо проекції на осі координат:

$$L_x = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) = \sum_{k=1}^{n} l_{kx},$$

$$L_y = \sum_{k=1}^{n} m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k) = \sum_{k=1}^{n} l_{ky},$$

$$L_z = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) = \sum_{k=1}^{n} l_{kz}.$$

(12.14)

Кількість руху системи характеризує поступальний рух, головний момент кількості руху системи характеризує обертальний рух.

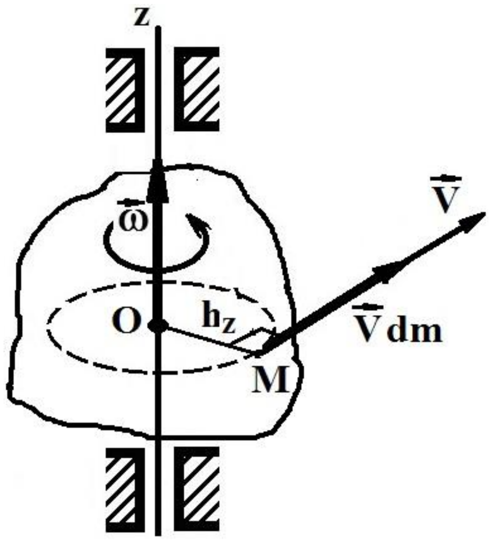


Рисунок 12.3.

Визначення вектора кінетичного моменту зводять до визначення його проекцій на відповідні осі. Викликає інтерес визначення моменту кількості руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі z (рис. 12.3) з кутовою швидкістю $\omega = \omega_z$.

Виділимо елемент об′єму з масою dm, який рухається за окружністю з центром в точці O і радіусом h_z.

Проекція швидкості на дотичну до окружності дорівнює $\omega_z h_z$, а проекція кількості руху на ту ж вісь буде:

$$v_\tau dm = \omega_z h_z dm.$$

Момент кількості руху елемента відносно осі z дорівнює:

$$v_\tau dm h_z = \omega_z h_z h_z dm.$$

Для всього тіла маємо:

$$L_z = \int \omega_z h_z^2 dm,$$

де інтегрування проводимо за масою всього тіла. Проекція кутової швидкості ω_z однакова для усіх точок тіла, тому :

$$L_z = \omega_z \int h_z^2 dm = \omega_z I_z. \qquad (12.15)$$

В (12.15) I_z – момент інерції тіла відносно осі z, тобто **момент кількості руху твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, відносно осі обертання дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно цієї осі на проекцію кутової швидкості на ту ж саму вісь**.

Можна знайти аналогію між формулами для визначення кількості руху та моменту кількості руху: кількість руху дорівнює добутку маси (величина, що характеризує інертність тіла при поступальному русі) на швидкість; кінетичний момент дорівнює добутку моменту інерції (величина, що характеризує інертність тіла при обертальному русі) на кутову швидкість.

4.5. Теорема про зміну моменту кількості руху СМТ (теорема моментів)

Теорема моментів, яка доведена для однієї точки, буде справедлива для кожної точки системи. Розглянемо СМТ. До кожної точки системи можна застосувати теорему про зміну моменту кількості руху:

$$\frac{d\vec{l}_{O1}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_1^e) + \vec{M}_O(\vec{F}_1^i),$$

…………………………………………………..

$$\frac{d\vec{l}_{On}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_n^e) + \vec{M}_O(\vec{F}_n^i).$$

Складемо почленно, отримуємо:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d\vec{l}_{Ok}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k^i).$$

В лівій частині знак похідної можна винести за знак суми, в правій частині перша сума дорівнює головному моменту $\vec{M}_O^e$ всіх зовнішніх сил відносно центру O, а друга сума за властивостями внутрішніх сил дорівнює нулю. Маємо:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\vec{l}_{Ok} = \vec{M}_O^e = \frac{d\vec{L}_O}{dt}. \qquad (12.16)$$

Це рівняння є математичним записом теореми про зміну кількості руху СМТ: **Повна похідна за часом від вектора моменту кількості руху СМТ, який обчислено відносно нерухомого центру, дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил відносно того ж центру**.

В проекціях на нерухомі осі векторне рівняння (12.16) еквівалентне трьом скалярним:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^e, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^e, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^e. \qquad (12.17)$$

Ці рівняння виражають теорему моментів відносно довільної нерухомої осі. Доведеною теоремою широко користуються для вивчення обертального руху твердого тіла, а також в теорії гіроскопів та в теорії удару. Практична цінність теореми моментів у тому, що вона, аналогічно теоремі про зміну кількості руху, дозволяє виключити з розгляду невідомі внутрішні сили.

З теореми витікає декілька наслідків.

1. **Внутрішні сили безпосередньо не впливають на зміну моменту кількості руху СМТ** (вони можуть впливати непрямим способом через зовнішні сили).

2. **Якщо головний момент всіх зовнішніх сил, які діють на СМТ, відносно деякого нерухомого центру дорівнює нулю, то момент кількості руху СМТ відносно того ж центру залишається постійним за величиною та напрямом**.

Дійсно, за умовою $\vec{M}_O^e$=0. Тоді $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$, звідки:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_O^0 = const, \qquad (12.18)$$

де $\vec{L}_O^0$ – початкова величина вектора $\vec{L}_O$.

3. **Якщо головний момент всіх зовнішніх сил, прикладених до СМТ, відносно деякої нерухомої осі дорівнює нулю, то момент кількості руху СМТ відносно цієї осі залишається постійною в процесі руху**.

Дійсно, наприклад для осі x, $\frac{dL_x}{dt} = 0$, звідки

$$L_x = L_x^0 = const. \qquad (12.19)$$

Вирази (12.18) і (12.19) називаються **законами збереження кількості руху СМТ**.

4.6. Диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

За (12.15)

$$L_z = \omega_z \int h_z^2 dm = \omega_z I_z.$$

З урахуванням третього рівняння (12.17) отримуємо диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі:

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z^e \quad \text{або} \quad I_z \ddot{\varphi} = M_z^e, \qquad (12.20)$$

де φ – кут повороту твердого тіла навколо осі. Звідси такі висновки:

а) якщо система незмінна, тобто $I_z = const$, то $\omega_z = const$, тобто тверде тіло, закріплене на осі, обертається зі сталою швидкістю;

б) якщо система змінна, то під дією внутрішніх або зовнішніх сил її точки віддаляються або наближаються до осі z, що є причиною збільшення або зменшення моменту інерції I_z. Оскільки $\omega_z I_z = const$, то за збільшення I_z кутова швидкість ω_z буде зменшуватися, а за зменшення I_z – збільшуватися. Таким чином, дією внутрішніх сил можна змінювати кутову швидкість обертання системи.

Останнє можна проілюструвати на прикладі обертання людини навколо своєї осі, коли притискання рук до тіла або їх розмах змінює кутову швидкість обертання.

Порівняємо з диференціальним рівнянням прямолінійного поступального руху твердого тіла (M – маса тіла):

$$M \frac{dv_z}{dt} = F_z^e \quad \text{або} \quad M\ddot{z} = F_z^e. \qquad (12.21)$$

Порівнюючи (12.20) і (12.21), можна провести аналогію:

лінійній швидкості $\vec{v}$ поступального руху відповідає його кутова швидкість $\vec{\omega}$ при обертанні навколо нерухомої осі; силам, що викликають поступальний рух, відповідають моменти сил, які викликають обертальний рух; масі тіла відповідає момент інерції. У табл. 1 наведено порівняння відповідних характеристик.

Таблиця 1.

Поступальний рух	Обертальний рух
Переміщення r	Кут повороту φ
Лінійна швидкість $v = \dfrac{dr}{dt}$	Кутова швидкість $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$
Прискорення $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2r}{dt^2}$	Кутове прискорення $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$
Міра інертності – маса m, M	Міра інертності – момент інерції відносно осі I
Зовнішня сила F	Момент зовнішньої сили M
Головний вектор	Головний момент

Контрольні питання

1. Яка величина використовується як векторна міра кількості руху ? Яка відповідна міра дії сили ?
2. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху механічної системи.
3. Сформулюйте поняття моменту кількості руху.
4. Як визначається момент кількості руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі ?
5. Сформулюйте закони збереження кількості руху механічної системи.

Розділ Динаміка. Лекція № 13

План лекції

1. Дві міри механічного руху
2. Кінетична енергія матеріальної системи та способи її обчислення
3. Кінетична енергія твердого тіла
4. Робота сил, які прикладені до системи матеріальних точок
5. Теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок

Тема 5. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

5.1. Дві міри механічного руху

В динаміці розглядаються два випадки перетворення механічного руху МТ або СМТ:

1) механічний рух переноситься з однієї системи на іншу як механічний рух;
2) механічний рух перетворюється в іншу форму руху матерії (у форму потенційної енергії, теплоти, електрики тощо).

Кожний з цих випадків має свої вимірювачі як механічного руху, так і дії сили.

Коли розглядається перетворення механічного руху без переходу в іншу форму руху, його мірою є вектор кількості руху МТ $\vec{q} = m\vec{v}$ або СМТ $\vec{Q} = M\vec{v}_C$. Мірою взаємодії є вектор імпульса сили $\vec{S}$.

Коли механічний рух перетворюється в іншу форму руху матерії, мірою механічного руху є кінетична енергія МТ або СМТ, яка позначається T.

Через те, що зміна величини кінетичної енергії пов'язана з роботою прикладених до тіла сил, робота є кількісною мірою перетворення механічного руху в будь-яку іншу форму руху.

Кінетична енергія є характеристикою поступального та обертального рухів системи, тому теорему про зміну кінетичної енергії часто використовують для розв'язку задач. Головна відмінність кінетичної енергії від уведених раніше характеристик $\vec{Q}$ та $\vec{L}_O$ полягає в тому, що кінетична енергія є величиною скалярною та додатною. Тому вона не залежить від напрямку руху частин системи і не характеризує зміну цих напрямків.

Відмітимо ще одну важливу обставину. Внутрішні сили, що діють на систему, не змінюють векторні характеристики $\vec{Q}$ та $\vec{L}_O$. Але, якщо під дією внутрішніх сил змінюються модулі швидкостей точок системи, то при цьому змінюється й величина T.

Поняття роботи сили, потужності, кінетичної енергії точки, теорему про зміну кінетичної енергії точки було введено і розглянуто в Лекції № 11. В цій лекції ми узагальнимо це на систему матеріальних точок.

5.2. Кінетична енергія матеріальної системи та способи її обчислення

Кінетичною енергією матеріальної системи називається сума кінетичних енергій всіх точок, які входять до системи. За визначенням

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2. \tag{13.1}$$

У випадку плоского руху його можна розкласти на поступальний рух центру мас та обертальний навколо цього центру. Тоді за теоремою Кеніга:

$$T = {}^{1}\!/_{2}\, M v_C^2 + T_{Cr}. \tag{13.2}$$

Кінетична енергія матеріальної системи в її абсолютному русі складається з кінетичної енергії ($^{1}\!/_{2}\, M v_C^2$) центру мас (вважається, що в ньому зосереджена маса всієї системи) і кінетичної енергії (T_{Cr}) системи в її русі відносно осей, які поступально переміщуються в інерційному просторі разом з центром мас осей.

5.3. Кінетична енергія твердого тіла

Матеріальна система дуже часто є твердим тілом або сукупністю твердих тіл. Тому потрібно вміти визначати кінетичну енергію твердого тіла, яке може здійснювати різні рухи. Тверде тіло розглядається як неперервно розподілена маса, тому всі суми, що входять у вирази для кінетичної енергії системи, переходять в інтеграли, а маса m_k окремої точки замінюється диференціалом dm. Тому для твердого тіла формула (13.1) набуває вигляду:

$$T = \frac{1}{2}\int v^2\, dm, \tag{13.3}$$

де інтегрування проводиться по масі всього тіла.

Розглянемо обчислення кінетичної енергії твердого тіла для різних варіантів руху.

1. Кінетична енергія твердого тіла, що рухається поступально.

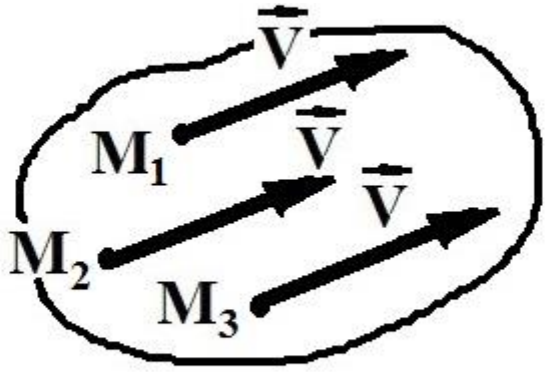


Рисунок 13.1.

При поступальному русі твердого тіла швидкості усіх його точок однакові (рис. 13.1). Тому

$$T = \frac{1}{2} v^2 \int dm,$$

або з урахуванням $\int dm = M$, де M – маса всього тіла,

$$T = \frac{1}{2} M v^2. \qquad (13.4)$$

Таким чином, **кінетична енергія твердого тіла, що рухається поступально, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат його швидкості**.

Аналогічний вираз отримуємо і для СМТ.

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_C^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{1}{2} M v_C^2. \qquad (13.5)$$

2. Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

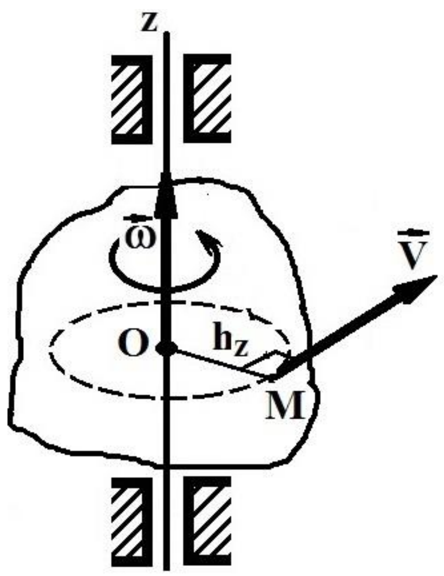


Рисунок 13.2.

Модуль швидкості довільної точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює ωh_z, де ω – модуль кутової швидкості твердого тіла, а h_z – відстань від точки до осі обертання z (рис. 13.2). Підставляючи в (13.3) $v = \omega h_z$, отримуємо з урахуванням $\omega = const$ для всіх точок тіла:

$$T = \frac{1}{2} \int \omega^2 h_z^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int h_z^2 dm = {}^1\!/_2\, I_z \omega^2, \qquad (13.6)$$

тобто **кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості тіла**.

3. Кінетична енергія твердого тіла при плоскому (плоскопаралельному) русі.

При плоскопаралельному русі швидкості точок тіла в кожний момент часу розподілені так, немов би тіло обертається навколо осі z, перпендикулярної до площини руху, що проходить через миттєвий центр швидкостей. За теоремою Штейнера можна виразити момент інерції тіла відносно цього центру. Опускаючи перетворення, отримуємо:

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_{Cz}\omega^2 = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2. \qquad (13.7)$$

Вісь z поступально переміщується, тому момент інерції $I_{Cz} = I_C$ є незмінним.

Якщо матеріальна система складається з декількох тіл, то її кінетична енергія T дорівнює сумі кінетичних енергій T_i усіх тіл, які складають систему.

Обчислення кінетичної енергії СМТ є одним з етапів вирішення задач при використанні теореми про зміну кінетичної енергії системи або при складанні рівнянь Лагранжа другого роду.

5.4. Робота сил, які прикладені до СМТ

Припустимо, що при русі СМТ перейшла з одного положення до іншого. Позначимо через A повну роботу, яку виконують при цьому переміщенні СМТ всі прикладені до неї сили, причому роботи зовнішніх і внутрішніх сил будемо позначати відповідно A^e та A^i:

$$A = A^e + A^i. \qquad (13.8)$$

Для усіх точок системи маємо:

$$A^e = \sum_{k=1}^{n} A_k^e,\ A^i = \sum_{k=1}^{n} A_k^i. \qquad (13.9)$$

1. Робота сил тяжіння.

На тіло масою M діє сила тяжіння $G = Mg$, яка спрямована вертикально вниз. Сила вважається прикладеною до центру мас тіла, координата якого z_{0C} у початковий момент часу та z_C у кінцевий після введення осі z, спрямованої вгору. Тоді повна робота сили тяжіння при переході системи з початкового положення до кінцевого визначається рівністю:

$$A^e = Mg(z_{0C} - z_C) = G(z_{0C} - z_C). \tag{13.10}$$

Таким чином, **повна робота сили тяжіння системи дорівнює вазі всій системи, помноженої на вертикальне переміщення її центра ваги.**

При переміщенні тіла вниз у напрямі дії сили тяжіння робота є додатною, а вгору – від'ємною. З отриманого результату видно, що робота сили тяжіння не залежить від траєкторії руху. Сили, які мають таку властивість, називають потенціальними.

2. Робота внутрішніх сил твердого тіла (без доказу).

Сума робіт всіх внутрішніх сил абсолютно твердого тіла на довільному його переміщенні дорівнює нулю.

3. Робота сил, прикладених до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

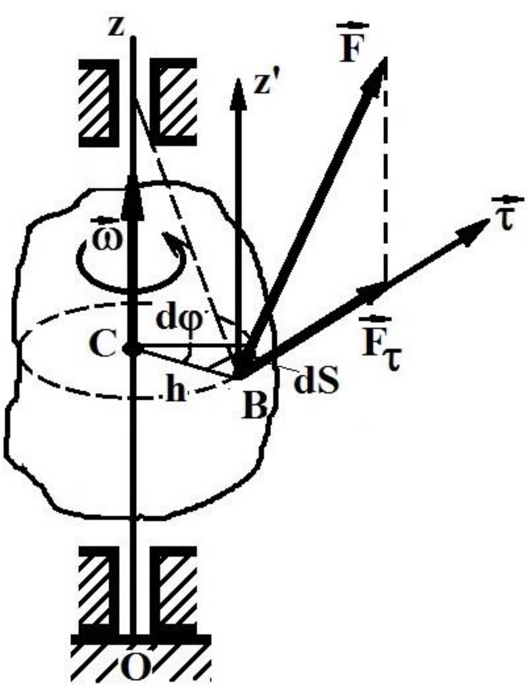


Рисунок 13.3.

Нехай сила $\vec{F}$ прикладена до деякої точки тіла (рис. 13.3), яка знаходиться на відстані h від нерухомої осі обертання z. Елементарна робота прикладеної до тіла сили $\vec{F}$ дорівнює (F_τ – проекція вектора $\vec{F}$ на вісь $\vec{\tau}$ натурального тригранника, дотична до траєкторії обертання):

$$dA^e = F_\tau ds = F_\tau h d\varphi,$$

тому що $ds = hd\varphi$, де $d\varphi$ – елементарний кут повороту.

В той же час, $F_\tau h = m_z(\vec{F}) = M_z$ – **обертальний момент**. Тоді отримуємо:

$$dA^e = M_z d\varphi. \tag{13.11}$$

Отже, елементарна робота дорівнює добутку обертального моменту на елементарний кут повороту. Формула (13.11) справедлива і за умов дії декількох сил, якщо вважати $M_z = \sum m_z(\vec{F}_k)$.

Робота на кінцевому куті повороту визначається рівністю:

$$A^e = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z d\varphi, \tag{13.12}$$

де φ і φ_0 – кінцеве та початкове значення кута φ, яке визначає положення тіла. Якщо момент M_z залежний не тільки від кута повороту φ, а і від кутової швидкості ω і часу t, необхідно перейти до нової змінної інтегрування.

Якщо момент зовнішньої сили не змінюється під час руху тіла, тобто $M_z = const$, то:

$$A^e = M_z(\varphi - \varphi_0). \tag{13.13}$$

Знак роботи не залежить від знаку моменту M_z. Робота буде додатною тоді, коли напрям обертання та напрям моменту M_z однакові. За різних напрямів обертання та моменту робота буде від'ємною.

5.5. Теорема про зміну кінетичної енергії СМТ

Використовуючи рівняння (10.24) для МТ, перейдемо до СМТ, яка складається з n точок. Нехай $\vec{F}_k^e$ і $\vec{F}_k^i$ – рівнодіючі усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точки M_k системи. Розглянемо 2 моменти часу: початковий t_0 і поточний (або кінцевий) t. Нехай швидкості точки M_k в момент часу t_0 дорівнює v_{0k}, а в момент часу $t -\ v_k$. Тоді для кожної точки системи буде справедлива теорема про зміну кінетичної енергії:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 v_{01}^2}{2} = A_1^e + A_1^i, \quad ,$$

$$\frac{m_n v_n^2}{2} - \frac{m_n v_{0n}^2}{2} = A_n^e + A_n^i,$$

де A_k^e і A_k^i – робота сил $\vec{F}_k^e$ і $\vec{F}_k^i$ на дійсном переміщенні точки M_k.
Складаючи почленно всі рівності, отримуємо:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_{0k}^2 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i,$$

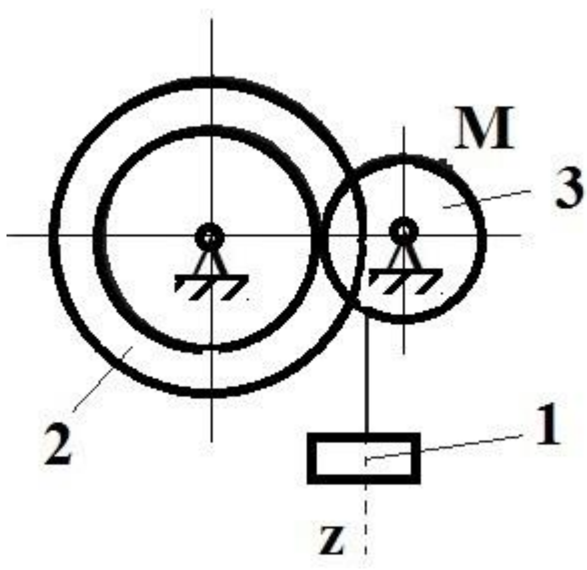
або, з позначенням виразу для кінетичної енергії:

$$T - T_0 = A^e + A^i, \qquad (13.14)$$

де T_0 – початкова величина кінетичної енергії, A^e і A^i – робота всіх зовнішніх і внутрішніх сил системи. Отримана рівність є математичним записом теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної системи:
зміна кінетичної енергії матеріальної системи при переході її з початкового до поточного (кінцевого) положення дорівнює сумі робіт на цьому переміщенні всіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок системи.
В цій теоремі внутрішні сили, порівняно з іншими теоремами динаміки, не виключаються.
Розглянемо 2 важливих випадка.
1. Незмінна система – це така механічна система, в якій відстань між довільними двома взаємодіючими точками залишається під час руху постійними (абсолютно тверде тіло).
Сума робіт всіх внутрішніх сил дорівнює нулю.
2. Система з ідеальними в'язями (в'язі без тертя, абсолютно гнучка і нерозтяжна нить).
Робота ідеальних в'язей дорівнює нулю.

Розв'язання задач за допомогою вказаної теореми потрібно проводити у наступній послідовності:
1. Показати на рисунку усі зовнішні та внутрішні сили (для незмінної системи – тільки зовнішні).
2. Обчислити суму робіт усіх зовнішніх та внутрішніх сил (для незмінної системи – тільки зовнішніх).
3. Обчислити кінетичну енергію СМТ у початковому та кінцевому положенні.
4. Записати теорему (з урахуванням отриманих результатів за пунктами 2 і 3) про зміну кінетичної енергії СМТ і отримати шукану величину.

Приклад.



Дано: m_1 =12 кг, m_2 =8 кг, m_3 =4 кг. R_2 =12 см, R_3 =4 см, r_2 =8 см, i_{x2} =10 см, M =80 Н·см

Визначити: закон руху тіла 1, використовуючи теорему про зміну кінетичної енергії системи (натяжіння ниті не враховувати)

Розв'язання. Використовуємо теорему про зміну кінетичної енергії:

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

T, T_0 – кінетична енергія в кінцевий та початковий момент руху; $\sum_{i=1}^{n} A_i$ – сума робіт всіх зовнішніх сил та моментів.

У початковий момент часу система тіл була нерухома, тому швидкості всіх точок та тіл дорівнювали нулю. Таким чином, кінетична енергія в початковий момент руху $T_0 = 0$.

Припускаємо, що тіло 1 рухається вниз і має переміщення s_1 та швидкість v_1

Визначимо кінетичну енергію матеріальної системи.

Матеріальна система складається з трьох тіл певної маси, тому кінетична енергія матеріальної системи дорівнює сумі кінетичних енергій трьох тіл:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

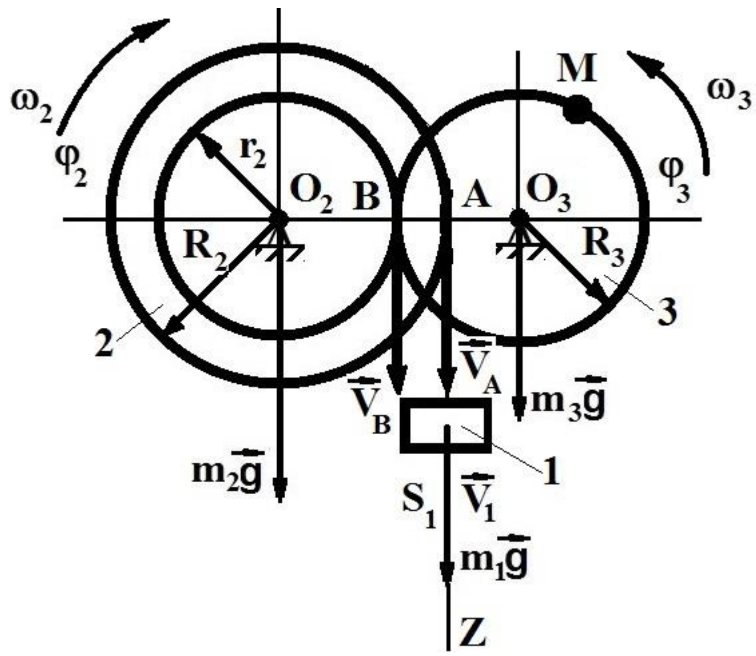
$T_1 = {m_1 v_1^2}/{2}$ – кінетична енергія 1-го тіла, яке рухається поступально;

$T_2 = {I_2 \omega_2^2}/{2}$ – кінетична енергія 2-го тіла, яке обертається;

$T_3 = {I_3 \omega_3^2}/{2}$ – кінетична енергія 3-го тіла, яке обертається;

I_2, I_3 – моменти інерції 2-го та 3-го тіла;

ω_2, ω_3 – кутові швидкості 2-го та 3-го тіла.



Швидкість точки A дорівнює швидкості тіла 1, тобто $v_1 = v_A$. Крім того, точка A належить тілу 2, що здійснює обертальний рух, тому швидкість цієї точки визначаємо за формулою:

$$v_A = \omega_2 R_2.$$

Виходячи з цього, маємо залежність між кутовою швидкістю ω_2 та швидкістю v_1

$$\omega_2 = {}^{v_1}/_{R_2}.$$

Визначимо залежність між кутовою швидкістю ω_3 та швидкістю v_1. Для цього скористаємось тим, що точка B належить тілу 2 та тілу 3,тобто маємо:

$$v_B = \omega_3 R_3 = \omega_2 r_2.$$

Таким чином:

$$\omega_3 = \omega_2 {}^{r_2}/_{R_3} = v_1 \frac{r_2}{R_2 R_3}.$$

Моменти інерції 2-го та 3-го тіла визначаємо за формулами:

$$I_2 = m_2 i_{x2}^2,\ I_3 = m_3 \frac{R_3^2}{2}.$$

Запишемо кінетичні енергії тіл матеріальної системи через швидкість 1-го тіла:

$T_1 = {}^{m_1 v_1^2}/_2 = \frac{12 v_1^2}{2} = 6 v_1^2$ – кінетична енергія 1-го тіла

$T_2 = {}^{I_2 \omega_2^2}/_2 = \frac{m_2 i_{x2}^2}{2} \left({}^{v_1}/_{R_2}\right)^2 = \frac{8 \cdot 10^2}{2} \left(\frac{v_1}{12}\right)^2 = 2{,}78 v_1^2$ – кінетична енергія 2-го тіла

$$T_3 = {}^{I_3\omega_3^2}/_2 = \frac{1}{2} m_3 \frac{R_3^2}{2}\left(v_1 \frac{r_2}{R_2 R_3}\right)^2 = \frac{1}{2} 4 \frac{4^2}{2}\left(v_1 \frac{8}{12\cdot 4}\right)^2 = 0{,}44 v_1^2$$ –

кінетична енергія 3-го тіла.

Кінетична енергія матеріальної системи:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 6v_1^2 + 2{,}78v_1^2 + 0{,}44v_1^2 = 9{,}22v_1^2.$$

Визначимо роботу сил та моментів, що діють на матеріальну систему

1) сили тяжіння m_1g, m_2g, m_3g, які прикладені до центру ваги тіл 1-3;
2) обертальний момент M, прикладений до 3-го тіла.

За визначенням робота сили є скалярний добуток вектора сили на вектор переміщення точки прикладення сили. Робота моменту є добуток моменту на кут обертання тіла до якого прикладений момент. Таким чином, маємо:

$$A(m_1g) = m_1g \cdot s_1 = 120s_1,$$
$$A(m_2g) = m_2g \cdot s_{O2} = 0,$$
$$A(m_3g) = m_3g \cdot s_{O3} = 0,$$
$$A(M) = M \cdot \varphi_3.$$

Визначимо роботу моменту через переміщення s_1. Для цього скористаємось співвідношенням:

$$\omega_3 = v_1 \frac{r_2}{R_2R_3} \rightarrow \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{ds_1}{dt}\frac{r_2}{R_2R_3} \rightarrow d\varphi_3 = ds_1 \frac{r_2}{R_2R_3} \rightarrow \varphi_3 = s_1 \frac{r_2}{R_2R_3}$$

$$A(M) = M \cdot \varphi_3 = M \cdot s_1 \frac{r_2}{R_2R_3} = 80 \cdot s_1 \frac{8}{12\cdot 4} = 13{,}33s_1.$$

Повна робота дорівнює алгебраїчній сумі всіх робіт:

$$A = \sum_{i=1}^{4} A_i = A(m_1g) + A(m_2g) + A(m_3g) + A(M) =$$
$$= 120s_1 + 0 + 0 + 13{,}33s_1 = 133{,}33s_1.$$

Використовуємо закон зміни кінетичної енергії матеріальної системи, звідки:

$$9{,}22v_1^2 = 133{,}33s_1 \quad v_1^2 = 14{,}44s_1$$

$$v_1 = \sqrt{14{,}44s_1}$$ або $$\frac{ds_1}{dt} = s_1^{0,5}\sqrt{14{,}44}.$$

$$s_1^{-0,5} ds_1 = \sqrt{14,44}dt$$

$$\int s_1^{-0,5} ds_1 = \int \sqrt{14,44}dt.$$

Остаточно маємо:

$$s_1 = 3,61t^2, \quad v_1 = 7,22t.$$

Контрольні питання

1. Назвіть дві міри механічного руху
2. Що називається кінетичною енергією механічної системи ?
3. Як обчислюється кінетична енергія матеріальної системи ?
4. Як обчислюється кінетична енергія твердого тіла при поступальному русі та при обертанні навколо нерухомої осі ?
5. Як визначається робота сил, які прикладені до твердого тіла ?
6. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок.

Розділ Динаміка. Лекція № 14

План лекції

1. Принцип Д’Аламбера
2. Метод кінетостатики
3. Приклади використання принципу Д’Аламбера
4. Сили інерції. Приведення сил інерції до простішого вигляду
5. Статичні та додаткові динамічні реакції

Тема 6. Принцип Д’Аламбера для матеріальної точки та механічної системи. Кінетостатика

6.1. Принцип Д’Аламбера

Усі методи вирішення задач динаміки, які були розглянуті на попередніх лекціях, ґрунтуються на рівняннях, що випливають з законів Ньютона безпосередньо або ж з загальних теорем, які є наслідком цих законів. Однак цей шлях не єдиний. Виявляється, що рівняння руху або умови рівноваги механічної системи можна отримати, поклавши в основу замість законів Ньютона інші загальні положення, які називають **принципами механіки**. У багатьох випадках застосування цих принципів дозволяє знайти більш ефективні методи вирішення відповідних задач. У цій лекції буде розглянуто один із загальних принципів механіки, який називають **принципом Д’Аламбера**. Особливо зручний цей принцип (метод кінетостатики), якщо потрібно визначити реакції в’язей, коли відомий закон руху точки та активні сили.

У статиці будь-яке тіло або МТ знаходиться у рівновазі, якщо діючі на них силові фактори урівноважують один одного. Завдяки засобам, розробленим для розв’язання задач статики, можна визначати невідомі активні або реактивні сили, застосувавши прості математичні прийоми та геометричні побудови.

Виникає питання, чи можна ці прийоми використовувати для рухомих тіл, які рухаються з прискоренням.

Нехай МТ масою m рухається з прискоренням $\vec{a}$ під дією деякої системи активних і реактивних сил, рівнодіюча яких дорівнює $\vec{F}+\vec{R}$. Скористаємось другим законом динаміки $m\vec{a}=\vec{F}+\vec{R}$ для того, щоб рівняння руху цієї МТ записати у формі рівнянь рівноваги:

$$\vec{F}+\vec{R}+(-m\vec{a})=0. \tag{14.1}$$

Вираз, який стоїть у дужках, називають **силою інерції** і позначають $\vec{\Phi}$. Таким чином, $\vec{\Phi}=-m\vec{a}$. Зауважимо, що використовують також інші позначення цієї сили, наприклад, $\vec{F}^{\text{ін}}$, $\vec{J}$.

Сила інерції (або даламберовою силою інерції) є вектор, який дорівнює добутку маси МТ на її прискорення в заданий момент часу, і спрямований у бік, протилежну прискоренню. На основі цього рівняння можна записати:

$$\vec{F}+\vec{R}+\vec{\Phi}=0. \tag{14.2}$$

Вираз (14.2) є математичним виразом принципу Д'Аламбера: **активні та реактивні сили, діючі на МТ, разом з силами інерції утворюють систему взаємно урівноважених сил, які задовольняють всім умовам рівноваги**.

Нагадаємо, що силою в теоретичній механіці називають міру механічної взаємодії матеріальних тіл. З цього погляду, сила інерції не є силою, тому що неможливо вказати інше тіло, яке взаємодіє з даними із силою $\vec{\Phi}$. В той же час, $\vec{\Phi}$ – векторна величина, вона має розмірність сили, тому зручно назвати її силою. Д'Аламбер запропонував спосіб застосування методів статики до рухомих МТ, використовуючи при цьому як основний інструмент поняття інертності та сили інерції (рис. 14.1).

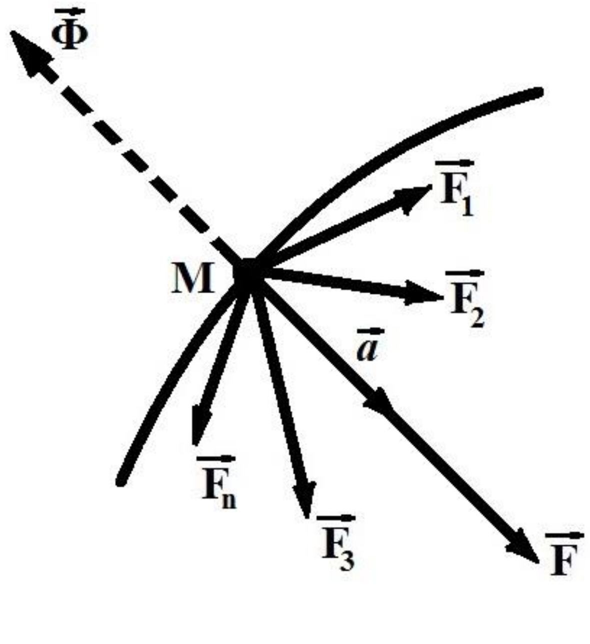


Рисунок 14.1.

Слід зазначити, що сила інерції є поняттям умовним, тобто фактично такої сили в природі не існує, на відміну від поняття **інертності** – властивості довільних матеріальних тіл і точок, яке проявляє у намаганні зберегти свій стан. Але саме умовне урівноваження силою інерції тіл, які рухаються з прискоренням, дозволило використовувати при розв’язанні задач динаміки прийоми статики, створивши розділ механіки – **кінетостатику**.

6.2. Метод кінетостатики

Методом кінетостатики називають формальний прийом, який дає можливість записати рівняння руху у вигляді рівнянь рівноваги. Застосовуючи метод кінетостатики до рухомої МТ, слід записати умову її «рівноваги» (14.1) під дією активних сил, реакції в’язів, а також фіктивних сил інерції у термінах рівнодіючої:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0,$$

де $\vec{F}$ – рівнодіюча активних сил, прикладених до МТ; $\vec{R}$ – рівнодіюча реакцій в’язей, накладених на МТ; $\vec{\Phi}$ – сила інерції МТ.

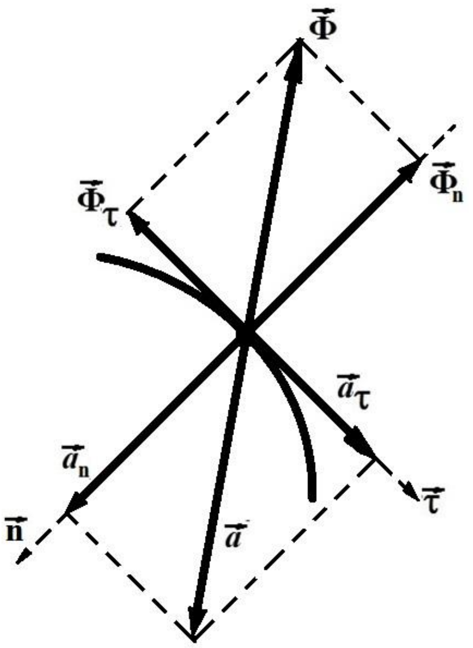


Рисунок 14.2.

Під час руху МТ по кривій (рис. 14.2) силу інерції можна розкласти на дві складові, що відповідають дотичному і нормальному прискоренням: дотичну силу інерції і нормальну силу інерції, причому:

$$\vec{\Phi}_n = -m\vec{a}_n, \vec{\Phi}_\tau = -m\vec{a}_\tau, \qquad (14.3)$$

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a} = \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_\tau. \qquad (14.4)$$

За модулем:

$$\Phi_\tau = m|a_\tau| = mr|\varepsilon|,$$

$$\Phi_n = m|a_n| = mr\omega^2,$$

$$\Phi = m\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Метод кінетостатики для невільної СМТ приводить до системи рівнянь:

$$\begin{aligned} &\vec{F}_1 + \vec{R}_1 + \vec{\Phi}_1 = 0, \\ &\vec{F}_2 + \vec{R}_2 + \vec{\Phi}_2 = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k = 0. \end{aligned} \tag{14.5}$$

Кількість векторних рівнянь дорівнює кількості МТ системи. Якщо скласти наведені рівняння, то:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{\Phi}_k = 0, \tag{14.6}$$

Тобто геометрична сума головного вектора зовнішніх активних сил, головного вектора зовнішніх реакцій в'язів і головного вектора сил інерції СМТ дорівнює нулю. На підставі (14.6) сформулюємо принцип Д'Аламбера для системи: **якщо в будь-який момент часу до кожної з точок системи, окрім внутрішніх і зовнішніх сил, які діють на точки системи, прикласти відповідні сили інерції, то отримана система сил буде перебувати в рівновазі і до неї можна застосувати рівняння статики**.

Помножимо кожне рівняння системи (14.5) векторно на радіус-вектор відповідної точки:

$$\vec{r}_k \times \vec{F}_k + \vec{r}_k \times \vec{R}_k + \vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k = 0. \tag{14.7}$$

Векторний добуток радіус-вектора на вектор сили є моментом сили відносно початку координат. Складаючи рівняння (14.7) для усіх точок СМТ, одержимо:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_o\left(\vec{F}_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_o\left(\vec{R}_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_o\left(\vec{\Phi}_k\right) = 0, \tag{14.8}$$

тобто **геометрична сума головних моментів зовнішніх активних сил, реакцій зовнішніх в'язей і сил інерції відносно будь-якого центру дорівнює нулю.**

Спроектувавши рівняння (14.6) і (14.8) на осі координат, одержимо шість рівнянь рівноваги для задач динаміки.

Методом кінетостатики можна користуватися при розв'язанні прямих задач динаміки невільної СМТ, тобто при розв'язанні задач, в яких по заданому закону руху визначаються невідомі сили. Однак всі ці задачі можна розв’язувати звичайним шляхом – через застосування основного рівняння динаміки для кожної точки СМТ.

При вирішенні зворотних задач, тобто в яких по заданим силам визначається закон руху, застосування методу кінетостатики недоцільно.

Методом кінетостатики можна користуватися, коли до числа заданих і невідомих величин входять: маси МТ, моменти інерції твердих тіл, швидкості та прискорення точок, кутові швидкості та кутові прискорення твердих тіл, сили та моменти сил.

Приклади використання принципу Д’Аламбера.
Приклад 1.

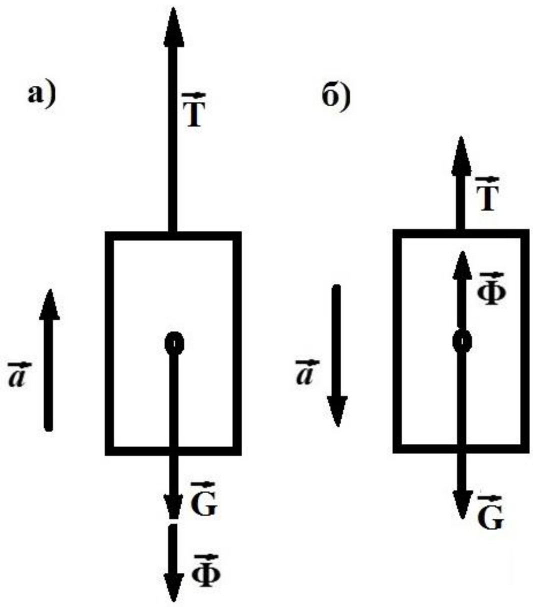


Рисунок 14.3.

Підйомник вагою 7350 Н піднімається рівноприскорено і за перші 5 с проходить 25 м. Визначити натяжіння його троса.

Розв’язання.

Прикладемо до підйомника діючі на нього сили: силу тяжіння $\vec{G}$, реакцію троса $\vec{T}$. (рис. 14.3, а). Умовно прикладемо до підйомника його силу інерції $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$, спрямуваши її проти прискорення $\vec{a}$, тобто вниз. Тоді геометрична сума сил $\vec{G}$, $\vec{T}$, $\vec{\Phi}$ дорівнює нулю:

$$\vec{G} + \vec{T} + \vec{\Phi} = 0.$$

Через те, що сили спрямовані вздовж однієї прямої, то:

$$T - G - \Phi = 0.$$

звідки

$$T = G + \Phi.$$

Для визначення реакції троса знайдемо модуль сили інерції підйомника, визначивши попередньо його прискорення. Рівняння рівноприскореного руху зі стану спокою:

$$H = \frac{at^2}{2}, \quad \text{звідки} \quad a = \frac{2H}{t^2}.$$

Модуль сили інерції

$$\Phi = ma = \frac{G}{g}a = \frac{7350}{9{,}8}2 = 1500 \text{ Н}.$$

Знаходимо реакцію троса, яка дорівнює його натяжінню:

$$T = G + \Phi = 7350 + 1500 = 8850 \text{ Н}.$$

При русі підйомника вниз з тим же прискоренням (рис. 14.3, б)

$$T = G - \Phi = 7350 - 1500 = 5850 \text{ Н}.$$

За умов рівномірного руху і вгору, і вниз $a = 0$, $\Phi = 0$, тому

$$T = G = 7350 \text{ Н}.$$

Приклад 2. Кулька A вагою $G = 50$ сН підвішена на ниті довжиною l, закріпленою у нерухомій точці O. Кулька здійснює рівномірний рух по окружності в горизонтальній площині, при якому нить складає з вертикаллю кут $\alpha = 30°$. Визначити натяжіння ниті і швидкість кульки цього конічного маятника (рис. 14.4, а).

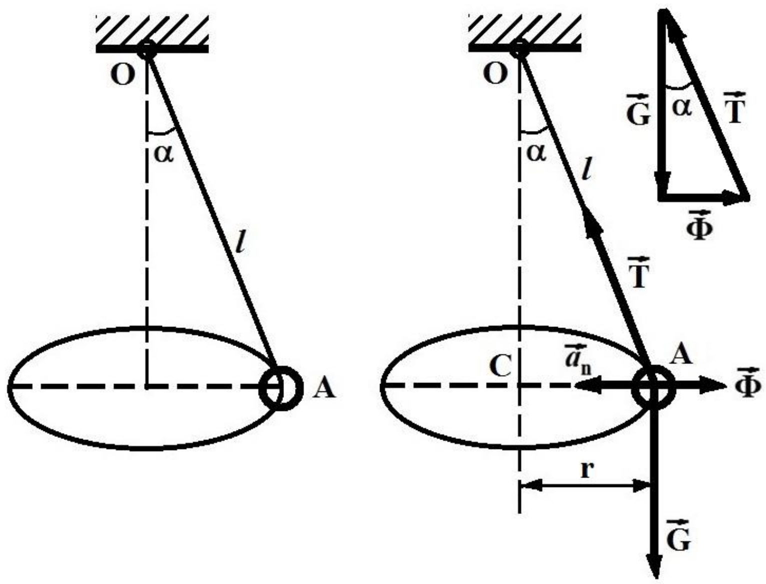


Рисунок 14.4.

Розв'язання.

Прикладаємо до кульки діючі на неї сили (рис. 14.4, б): вагу $\vec{G}$, реакцію ниті $\vec{T}$. Умовно прикладаємо силу інерції $\vec{\Phi}$.

За рівномірного руху сила інерції кульки $\vec{\Phi}$ дорівнює нормальній силі інерції $\vec{\Phi}_n$, спрямованої протилежно нормальному прискоренню $\vec{a}_n$.

За модулем:

$$\Phi = \Phi_n = \frac{mv^2}{r}, \quad \text{де} \quad r = l\sin\alpha.$$

Побудуємо замкнений трикутник сил $\vec{G}$, $\vec{T}$, $\vec{\Phi}$. З трикутника визначаємо модулі сил $\vec{T}$ і $\vec{\Phi}$:

$$T = \frac{G}{\cos\alpha} = \frac{50}{0,866} = 57,7 \text{ сН};$$

$$\Phi = Gtg\alpha = 50 \cdot 0,577 = 28,85 \text{ сН}.$$

Визначивши модуль сили інерції, знаходимо швидкість кульки A:

$$v = \sqrt{\frac{\Phi \cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{\Phi g l \sin\alpha}{G}} = \sqrt{\frac{0,2885 \cdot 9,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5}{0,5}} = 1,06 \text{ м/с}.$$

6.3. Сили інерції. Приведення сил інерції до простішого вигляду

Як відомо зі статики, систему сил можна привести до сили, яка векторно дорівнює головному вектору, і до пари сил з моментом, який векторно дорівнює головному моменту. Приведення сил інерції дає наступні результати:
а) **при поступальному русі твердого тіла** (рис. 14.5) сили інерції приводяться до рівнодіючої, прикладеної до центру ваги.

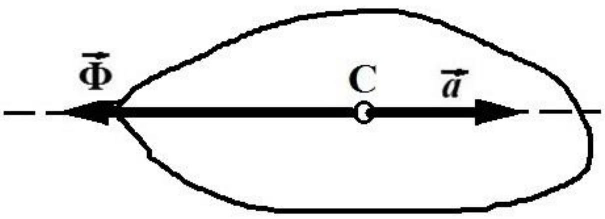


Рисунок 14.5.

Рівнодіюча $\vec{\Phi}$ дорівнює за модулем добутку маси твердого тіла на прискорення його довільної точки і спрямована протилежно цьому прискоренню.

б) **при обертанні плоскої фігури навколо перпендикулярної до неї нерухомої осі** (рис. 14.6) сили інерції приводяться до рівнодіючої, прикладеної у центрі кочення відповідного фізичного маятника , вісь доважку якого поєднана з нерухомою віссю даного твердого тіла (центр кочення K на відстані, що дорівнює приведеній довжині фізичного маятника

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_Z}{mr},$$

I_Z – момент інерції твердого тіла відносно осі доважку;

r – відстань від осі доважку до центру ваги.

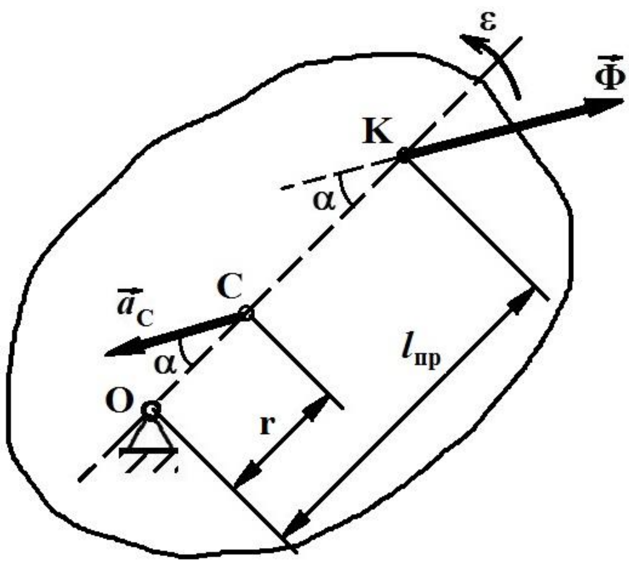


Рисунок 14.6.

Рівнодіюча сил інерції $\vec{\Phi}$ дорівнює за модулем добутку маси твердого тіла на прискорення його центру ваги і спрямована у бік, протилежний цьому прискоренню:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_C, \qquad (14.9)$$

з урахуванням $a_C = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, то $\Phi = mr\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Напрям сили $\vec{\Phi}$ визначається кутом α, який знаходимо зі співвідношення

$$tg\alpha = \varepsilon/\omega^2.$$

Якщо за центр приведення вибрати центр ваги C твердого тіла, то сили інерції приводяться до сили, яка векторно дорівнює головному вектору $\vec{R}^\Phi$, і до пари сил з моментом, який дорівнює головному моменту $\vec{M}^\Phi$

Головний вектор сил інерції $\vec{R}^\Phi$ дорівнює за модулем добутку маси твердого тіла на прискорення його центру ваги і спрямований у бік, протилежний цьому прискоренню:

$$\vec{R}^\Phi = -m\vec{a}_C, \qquad (14.10)$$

$$R^\Phi = mr\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \; tg\alpha = \varepsilon/\omega^2. \qquad (14.11)$$

Головний момент сил інерції $\vec{M}^\Phi$ відносно осі, що проходить через центр ваги C паралельно осі обертання, дорівнює за модулем добутку моменту інерції твердого тіла відносно осі C на модуль кутового прискорення твердого тіла $\vec{\varepsilon}$.

Покажемо зв'язок з кількістю руху та моментом кількості руху.
Якщо згадати вираз для кількості руху СМТ

$$\vec{Q} = m\vec{v}_C,$$

то, продиференціювавши його за часом, одержимо:

$$\vec{R}^{\Phi} = -\frac{d\vec{Q}}{dt}. \qquad (14.12)$$

Головний вектор сил інерції дорівнює похідній за часом від кількості руху механічної системи, узятій із знаком мінус.
Для головного моменту сил інерції

$$\vec{M}^{\Phi} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}(\vec{\Phi}_k) = \sum_{k=1}^{n} [\vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k] =$$
$$-\sum_{k=1}^{n} [\vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k] = -\sum_{k=1}^{n} \left[\vec{r}_k \times \frac{d}{dt}(m_k \vec{v}_k)\right] =$$
$$-\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} [\vec{r}_k \times (m_k \vec{v}_k)] + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{d\vec{r}_k}{dt} \times (m_k \vec{v}_k)\right] = -\frac{d}{dt}\vec{L}.$$
(14.13)

Другий доданок у останньому виразі дорівнює нулю через $\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{v}_k$, і векторний добуток $\vec{v}_k \times (m_k \vec{v}_k) = 0$ (вектори паралельні або збігаються). Таким чином, **головний момент сил інерції механічної системи відносно центру дорівнює похідній за часом від кінетичного моменту (моменту кількості руху) системи відносно того ж центру, узятому зі знаком мінус**.

Знак головного моменту сил інерції протилежний знаку проекції кутового прискорення:

$$M_C^{\Phi} = -I_C \varepsilon, \qquad (14.14)$$

ε – проекція кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ на вісь обертання, наприклад, вісь z).

Якщо за центр приведення вибрати точку O, що лежить на нерухомій осі, то сили інерції приводяться до сили, що дорівнює головному вектору $\vec{R}^{\Phi}$, і пари сил, момент якої дорівнює головному моменту $\vec{M}^{\Phi}$. Так само,

$$\vec{R}^{\Phi} = -m\vec{a}_C,$$

а у виразі головного моменту замість I_C входить I_O, тобто:

$$M_O^{\Phi} = -I_O \varepsilon, \text{ де } I_O = I_C + mr^2.$$

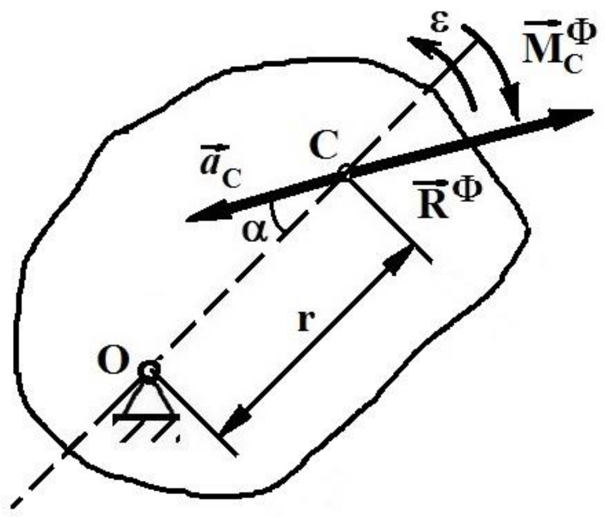


Рисунок 14.7.

У випадку, коли центр ваги C лежить на осі обертання плоскої фігури, головний вектор сил інерції $\vec{R}^{\Phi}$ дорівнює нулю, отже, система сил інерції приводиться тільки пари сил з моментом $M_O^{\Phi} = -I_O\varepsilon$ (рис. 14.7).

При розв'язанні задач за формулами (14.10) та (14.14) обчислюють модулі відповідних величин, а їх напрямки вказують на рисунку до задачі.

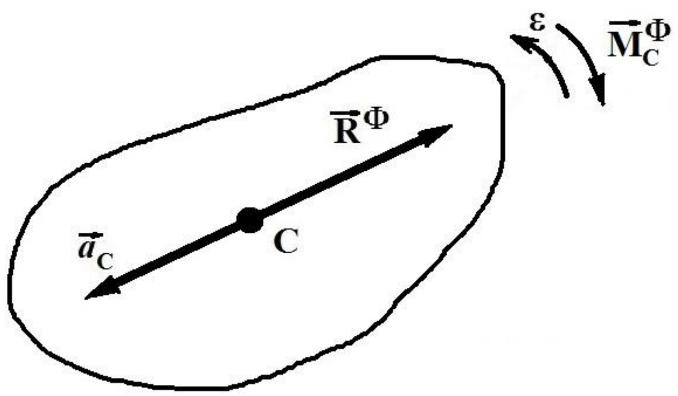


Рисунок 14.8.

в) **при русі плоскої фігури** сили інерції (рис. 14.8) приводяться до сили, яка дорівнює головному вектору $\vec{R}^{\Phi}$, і яка прикладена у центрі приведення, і до пари сил, момент якої $\vec{M}_C^{\Phi}$ дорівнює головному моменту відносно осі, що проходить через центр приведення перпендикулярно до нерухомої площини:

$$\vec{R}^{\Phi} = -m\vec{a}_C,\ M_C^{\Phi} = -I_C\varepsilon. \qquad (14.15)$$

Приведення сил інерції до сили, яка дорівнює головному вектору, і пари сил, момент якої дорівнює головному моменту, є одним з важливих етапів розв'язання задач динаміки невільної СМТ у випадку застосування методу кінетостатики або загального рівняння динаміки.

6.4. Статичні та додаткові динамічні реакції

Запишемо рівняння для головних векторів і головних моментів зовнішніх сил, реакцій в'язів і сил інерції.

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0,$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{R}) + \vec{M}_O(\vec{\Phi}) = 0.$$

Реакції в’язей містять статичні реакції (позначка «ст») та додаткові динамічні реакції (позначка «д»):

$$\vec{R} = \vec{R}^{\text{СТ}} + \vec{R}^{\text{Д}}, \tag{14.16}$$

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{M}_O(\vec{R}^{\text{СТ}}) + \vec{M}_O(\vec{R}^{\text{Д}}). \tag{14.17}$$

Складаємо рівняння для визначення статичних реакцій:

$$\vec{F} + \vec{R}^{\text{СТ}} = 0,\ \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{R}^{\text{СТ}}) = 0,$$

та для визначення динамічних реакцій:

$$\vec{R}^{\text{Д}} + \vec{\Phi} = 0,\ \vec{M}_O(\vec{R}^{\text{Д}}) + \vec{M}_O(\vec{\Phi}) = 0.$$

Приклад 3.

Лебідка, що піднімає вантаж B вагою $P = 20$ кН, поставлена на балці, яка спирається на опори C і D; $CD = 8$ м, $AC = 3$ м. Вантаж піднімається рівноприскорено з прискоренням 0,5 м/с^2. Визначити додатковий тиск на опори C і D, що виникає внаслідок дії сили інерції вантажа (рис. 14.9)

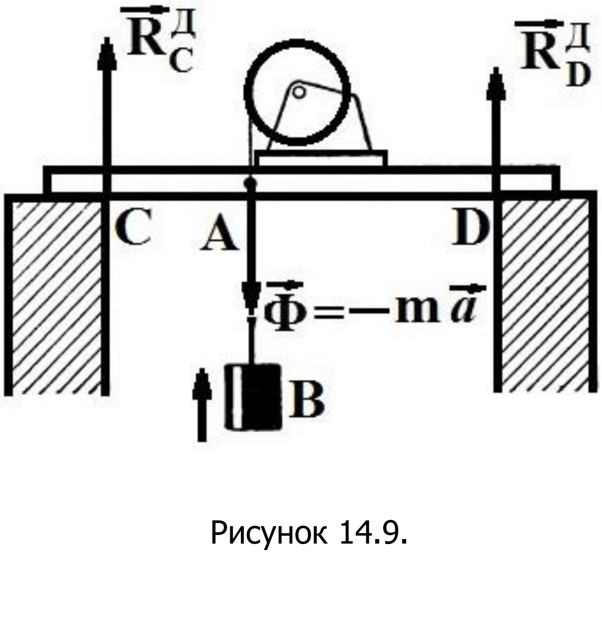


Рисунок 14.9.

Розв’язання. Коли вантаж B не піднімається, то виникають статичні опорні реакції, які урівноважують активні сили, що діють на балку (вага вантажу, вага балки, вага лебідки). При підйомі вантажа B виникає сила інерції, спрямована вниз, яка прикладена до балки, і, отже, діє на опори C і D.

З боку опор C і D виникають додаткові опорні реакції $\vec{R}_C^{Д}$ і $\vec{R}_D^{Д}$, діючі на балку. Для знаходження цих реакцій запишемо умови статичної рівноваги сили інерції $\vec{\Phi}$ і реакцій $\vec{R}_C^{Д}$ і $\vec{R}_D^{Д}$:

$$\vec{R}_C^{Д} + \vec{R}_D^{Д} + \vec{\Phi} = 0,$$

$$\vec{M}_A\left(\vec{R}_C^{Д}\right) + \vec{M}_A\left(\vec{R}_D^{Д}\right) + \vec{M}_A\left(\vec{\Phi}\right) = 0.$$

В аналітичній формі ці векторні умови можна представити у наступному вигляді, складаючи рівняння моментів відносно точки A:

$$R_C^{Д} + R_D^{Д} - \Phi = 0,$$

$$R_D^{Д} \cdot AD - R_C^{Д} \cdot AC = 0.$$

Звідси знаходимо, що

$$R_C^{Д} = \frac{\Phi \cdot AD}{AD + AC} = \frac{P \cdot a \cdot AD}{g(AD + AC)} = \frac{20000 \cdot 0{,}5 \cdot 5}{9{,}81(5+3)} \approx 637 \text{ Н},$$

$$R_D^{Д} = \Phi - R_C^{Д} = \frac{P}{g} a - 637 = \frac{20000}{9{,}81} 0{,}5 - 637 \approx 382 \text{ Н}.$$

Контрольні питання

1. Сформулюйте принцип Д’Аламбера для матеріальної точки.
2. Чому дорівнює головний вектор сил інерції ?
3. Що називають методом кінетостатики ?
4. Як приводяться сили інерції при поступальному русі твердого тіла ? При обертанні плоскої фігури навколо перпендикулярної до неї нерухомої осі ?
5. Наведіть приклади визначення реакцій з використанням принципу Д’Аламбера.

Розділ Динаміка. Лекція № 15

План лекції

1. Основні поняття аналітичної механіки
2. Узагальнені координати
3. Віртуальні переміщення. Ідеальні в’язі
4. Принцип віртуальних переміщень
5. Узагальнені сили
6. Принцип віртуальних переміщень у випадку руху системи. Загальне рівняння динаміки

Тема 7. Вступ до аналітичної механіки

На попередніх лекціях було розглянуто основні теореми динаміки. Ці теореми встановлюють залежності між мірами руху механічних систем (кількість руху, кінетичний момент, кінетична енергія) і мірами дії усіх активних сил і реакцій в’язів (для невільного руху).

Загальні теореми динаміки та отримані з них наслідки дають наочні та потужні засоби дослідження руху СМТ. Користуючись ними, можна скласти диференціальні рівняння, розв’язання яких визначає рух системи.

Однак, практично неможливо строго класифікувати задачі та вказати, в якому випадку яка теорема швидше дозволить вирішити задачу.

Для невільного руху всі сили, що діють на механічну систему, поділяються на активні сили та реакцій в’язей. При вивченні невільного руху силами, що задаються, є активні сили, а реакції в’язів, які виникають при дії активних сил, є невідомими, що суттєво ускладнює задачу – збільшується кількість рівнянь, вводяться нові невідомі, визначення яких не завжди потрібно за умовою задачі.

Аналітична механіка дає загальні методи, за допомогою яких можна скласти диференціальні рівняння руху, не вводячи реакції ідеальних в’язей. Методи аналітичної механіки є корисними не тільки в теоретичних дослідженнях, але й в практичних інженерних розрахунках.

7.1. Основні поняття аналітичної механіки

Сукупність матеріальних точок називається системою матеріальних точок (СМТ), якщо рух кожної з них окремо залежний від руху та положення решти точок. Це означає, що між точками СМТ існують сили взаємодії. Нагадаємо деякі поняття, які були уведені на попередніх лекціях і які нам будуть потрібні під час викладання поточної та наступної лекцій.

Внутрішні сили – сили взаємодії між точками матеріальної системи

Зовнішні сили – сили, що діють на точки матеріальної системи з боку точок і тіл, які не належать до даної системи.

Матеріальна система, для якої відстань між будь-якими двома точками не змінюється, називається **твердим тілом**.

Якщо кожна точка СМТ може зайняти будь-яке положення у просторі і мати будь-яку швидкість, то таку СМТ називають **вільною**.

Якщо внаслідок будь-яких обмежень (умов) точки та тіла, що складають СМТ, не можуть зайняти довільного положення у просторі та мати довільні швидкості, така СМТ називається **невільною**.

Обмеження (умови), які не дозволяють точкам СМТ займати довільне положення у просторі та мати довільні швидкості, називають **в’язями**. В’язь накладає обмеження на зміну координат і швидкостей точок. Аналітично ці обмеження записуються у вигляді рівнянь або нерівностей. В аналітичній механіці необхідно більш докладно розглядати в’язі, що накладені на точки механічної системи.

Нехай СМТ складається з n точок, а декартовими координатами i-ої точки будуть x_i, y_i, z_i $(i = 1,2, \dots, n)$. Якщо на СМТ накладена одна в’язь, то в загальному випадку аналітично це можна записати у вигляді:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots,, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) \leq 0, \tag{15.1}$$

де $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ $(i = 1,2, \dots, n)$ – проекції швидкості i-ої точки на осі декартової системи координат, а t – час. У випадку знаку рівності у виразі (15.1), в’язь називається **утримуючою (двобічною)**; якщо стоїть знак нерівності, то в’язь називається **неутримуючою (однобічною)**.

Нехай дві МТ, положення яких визначається відповідно координатами x_1, y_1, z_1 і x_2, y_2, z_2 пов'язані між собою жорстким стержнем довжиною l (рис. 15.1, а). В цьому випадку в'язь є утримуючою та її рівняння має вигляд:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0,$$

тобто відстань між цими точками весь час залишається незмінною.

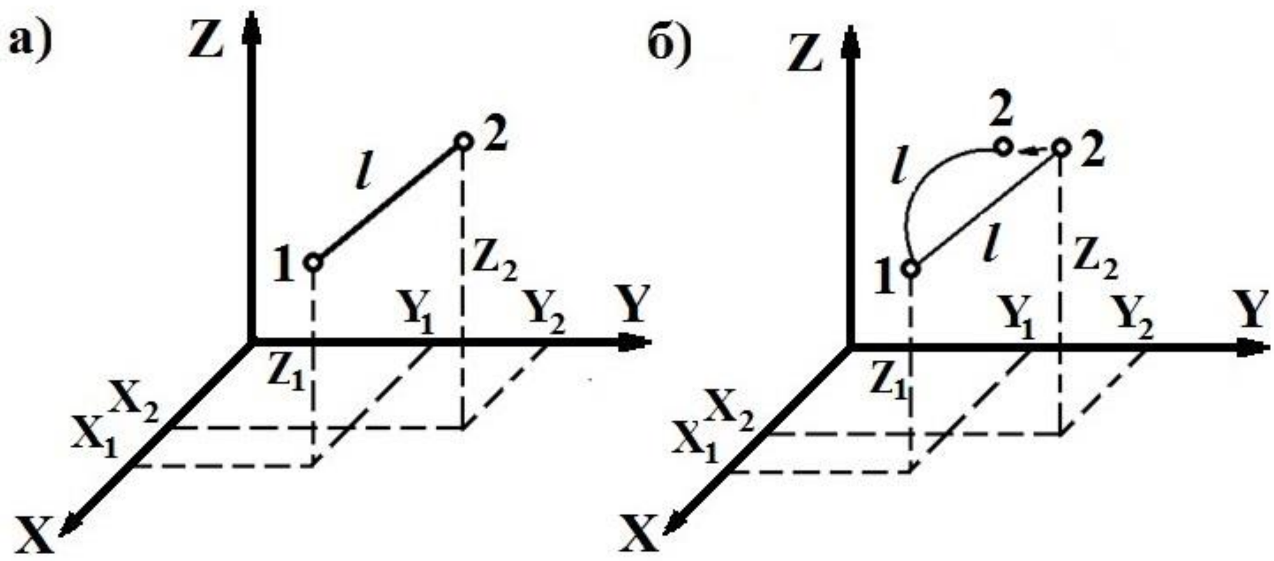


Рисунок 15.1.

Якщо стержень замінити гнучкою нерозтяжною ниткою, то точки отримують можливість наближатися, але віддалятися одна від одної на відстань більше не можуть (рис. 15.1, б). В цьому випадку в'язь є неутримуючою і обмеження на координати запишуться у вигляді нерівності:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 \leq 0.$$

Коли нитка натягнута, то в наведеній залежності має місце знак рівності, коли нитка не натягнута – знак нерівності. У такому разі рух системи можна розділити на частини так, що на одних в'язь буде утримуючою (знак рівності). А на інших в'язь можна вважати відсутньою (знак нерівності). В подальшому будемо розглядати тільки утримуючі в'язі.

Під час руху механічної системи координати точок ті їхні похідні за часом, які входять до рівнянь в'язей, можуть залежати від часу. Якщо рівняння такої в'язі:

$$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t\ ) = 0 \qquad (15.2)$$

має явно час t, то в'язь називають **реономною** або **нестаціонарною**.

Прикладом такої в’язі може бути негнучкий стержень, що з’єднує дві МТ та змінює свою довжину заданим чином, наприклад, $l = l_1 + l_0 \sin t$. Рівняння в’язі в такому випадку має час t:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (l_1 + l_0 \sin t)^2 = 0,$$

де x_1, y_1, z_1 і x_2, y_2, z_2 – координати точок.

Якщо рівняння в’язі не має часу t, тобто рівняння в’язі має вигляд:

$$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0,$$

то в’язь називається **склерономною** або **стаціонарною**.

В’язь, що накладає обмеження тільки на координати точок системи, тобто в’язь, рівняння якої не має похідних від координат:

$$f(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad (15.3)$$

називається **геометричною** або **голономною**. З голономних в’язей диференціюванням можна отримати в’язі, рівняння яких містять похідні. В’язь, рівняння якої має вигляд (15.2), називається **кінематичною**.

Якщо рівняння (15.2) кінематичної в’язі шляхом інтегрування неможливо привести до вигляду (15.3), в якому немає похідних, то ця в’язь називається **неголономною** або **неінтегруємою**. З неголономних в’язей голономні отримати неможливо.

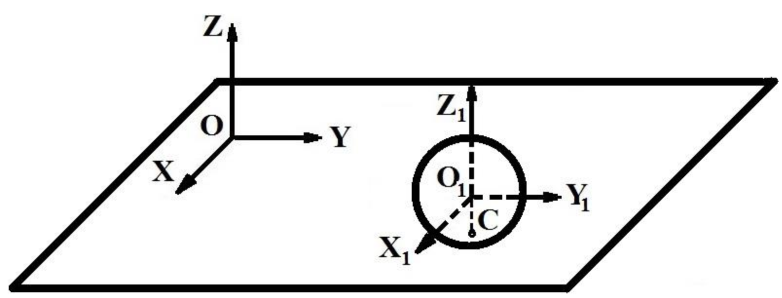


Рисунок 15.2.

Наприклад, кулька, яка котиться по поверхні (рис. 15.2), в точці контакту з поверхнею має нульову швидкість, тобто рівняння в’язі записується відносно похідної.

На кульку, що котиться по поверхні без ковзання, накладено наступні обмеження: 1) відстань від центру O_1 до площини дорівнює постійній величині – радіусу r, в’язь $z = r$; 2) швидкість точки дотику C у кожний момент часу дорівнює нулю, в’язь $v_C = 0$ (миттєвий центр швидкостей).

Якщо на СМТ накладено k в’язей, то буде k рівнянь в’язі наступного вигляду:

$$f_j(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t\ ) = 0, \quad (j = 1,2, \dots, k).$$

СМТ, на яку накладені голономні в’язі, називається **голономною**, а СМТ з неголономними в’язями – **неголономною**. В нашому курсі основна увага приділяється голономним системам, на які накладено в’язі, рівняння яких можуть бути записані у вигляді:

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t\ ) = 0,\ (j = 1,2, \dots, k), \tag{15.4}$$

де k – кількість в’язей.

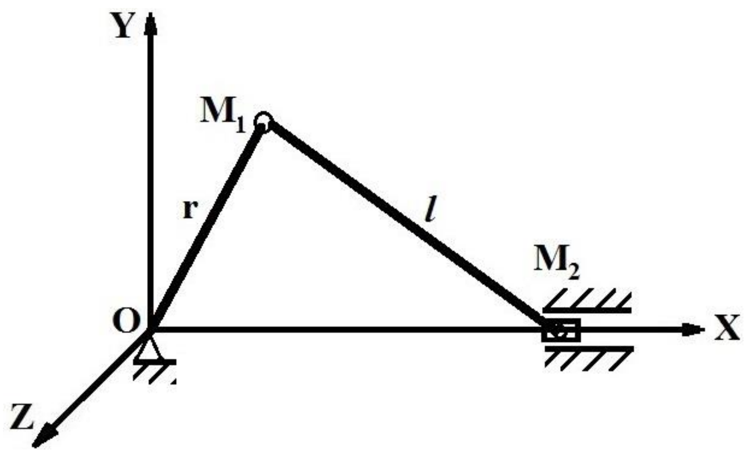


Рисунок 15.3.

На рис. 15.3 показано приклад голономних в’язей. Для точок M_1 і M_2 кривошипно-шатунного механізму рівняння в’язей мають вигляд:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad y_2 = 0,$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2 = 0,$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0,$$

де x_1, y_1, z_1 і x_2, y_2, z_2 – відповідно координати точок M_1 і M_2.

Числом ступенів вільності голономної матеріальної системи називається число незалежних параметрів, які повністю визначають її положення (конфігурацію), тобто визначають положення будь-якої точки системи.

Тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі, має одну ступінь вільності, положення твердого тіла визначається кутом повороту φ навколо осі обертання.

Тверде тіло, що здійснює плоский рух, має три ступеня вільності, положення будь-якого його перерізу, проведеного паралельно нерухомій площині, визначається двома координатами центру ваги перерізу x_C, y_C і кутом повороту φ.

Системою з трьома ступенями вільності є тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої точки. Його положення визначається трьома кутами Ейлера φ, ψ, θ.

Системою з шістьма ступенями вільності є вільне тверде тіло, його положення визначається шістьма незалежними параметрами: трьома координатами центру ваги x_C, y_C і z_C, та трьома кутами Ейлера φ, ψ, θ.

Пружне тіло має нескінчену кількість ступенів вільності.

7.2. Узагальнені координати

Положення СМТ, на яку накладено k голономних в'язей, визначається $s = 3n - k$ незалежними декартовими координатами. Однак у багатьох випадках використання декартових координат приводить до громіздких викладок, тому для визначення положення СМТ можна використовувати інші незалежні один від одного параметри q_1, q_2, , q_s. Ці параметри можуть мати різну розмірність – це можуть бути кути, довжини дуг, площини тощо. Всі $3n$ декартових координат можна виразити через введені параметри q_1, q_2, , q_s:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ , q_s, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ , q_s, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ , q_s, t) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,2, \dots, n). \qquad (15.5)$$

Ці функції перетворюють на тотожність рівняння в'язей (15.4)

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t\ ) = 0, \ (j = 1,2, \dots, k).$$

Будемо вважати, що довільне положення СМТ, сумісне з в'язами, однозначно визначається за допомогою функцій (15.5) деякими значеннями параметрів q_1, q_2, , q_s. **Незалежні параметри, які визначають положення системи у кожний момент її руху, називають узагальненими координатами системи**.

Задання узагальнених координат повністю визначає положення точок системи відносно обраної системи відліку.

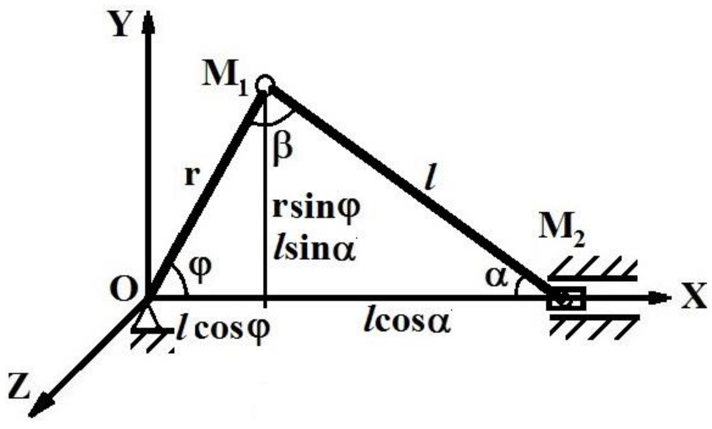


Рисунок 15.4.

На рис. 15.4 показано, що положення точок M_1 і M_2 кривошипно-шатунного механізму (довжина кривошипу r і шатуна l) визначається кутом повороту кривошипа φ. Дійсно, якщо прийняти роботу механізму у площині XOY, координати $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, решта:

$$x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\cos\varphi + l\cos\alpha,$$

де кут α знаходимо зі співвідношення:

$$l\sin\alpha = r\sin\varphi \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right),$$

і остаточно:

$$x_2 = r\cos\varphi + l\cos\left(\arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)\right),$$

$$y_1 = r\sin\varphi,\ y_2 = 0.$$

Таким чином, наведений механізм є з одним ступенем вільності та узагальненою координатою φ.

Визначення ступені рухомості, тобто кількості узагальнених координат, механізму є необхідним кроком під час розв'язання задач у курсі «Теорія механізмів і машин». Для визначення ступеня рухомості просторового механізму використовують формулу Сомова-Малишева, а для плоского механізму – формулу Чебишева.

7.3. Віртуальні переміщення. Ідеальні в'язі

Для формулювання принципу можливих переміщень, який визначає умови рівноваги механічної системи, слід розглянути поняття можливого, або віртуального, переміщення. Введемо математичне поняття варіації функції.

Варіацією функції $\boldsymbol{\delta y}$ називається приріст функції, зумовлений зміною вигляду функції, за фіксованого значення аргументу (рис. 15.5). При переході від функції $y_1 = f_1(x)$ до функції $y_2 = f_2(x)$, нескінченно близької до першої, варіація δy буде:

$$\delta y = y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x).$$

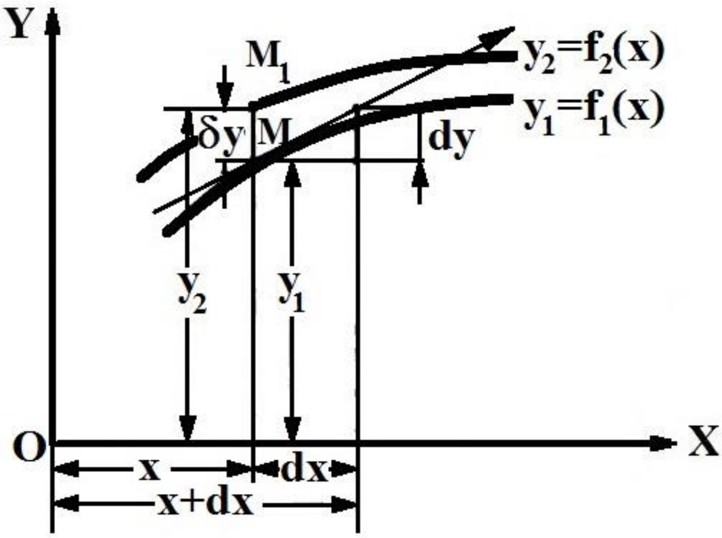


Рисунок 15.5.

На відміну від варіації функції δy, диференціал функції dy є головною частиною приросту функції, що утворюється за рахунок приросту аргументу dx.

Операції диференціювання та варіювання, які є незалежними один від одного операціями, мають властивість **комутативності** у послідовності їх застосування.

Також варіація визначеного інтегралу з постійними границями інтегрування дорівнює визначеному інтегралу від варіації підінтегральної функції. Для узагальненої координати q справедливі співвідношення:

$$\frac{d}{dt}\delta q = \delta \frac{dq}{dt}, \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} q dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta q dt.$$

Віртуальним (уявним, можливим) називається нескінченно мале переміщення точки з даного положення, яке допускається в'язями, що накладені на цю точку. Так, якщо МТ знаходиться на нерухомій горизонтальній площині, то віртуальним є будь-яке уявне переміщення точки з даного положення по площині.

Віртуальне переміщення є уявним переміщенням в певний момент (тобто за фіксованого значення аргументу – часу t). Для цього переміщення не потрібен час на його виконання. На відміну від цього дійсне переміщення точки відбувається в певному напрямі під дією прикладених сил за неперервної зміни аргументу – часу. Тому віртуальне переміщення є варіацією, а дійсне переміщення – диференціалом.

Застосовуючи поняття можливого переміщення, можна визначити роботу сили на цьому переміщенні, наприклад:

$$\delta A = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z.$$

Для механічної системи з n точок, до яких прикладені сили, елементарна робота цих сил на будь-якому можливому переміщенні системи відповідно:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k. \qquad (15.6)$$

Позначимо сили реакцій в’язей для точок системи $\vec{R}_k$. Голономні та неголономні в’язі, елементарна робота сил реакцій яких на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю, називають ідеальними в’язями без тертя. Для них виконується умова:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0, \qquad (15.7)$$

де $\vec{R}_k$ – рівнодіюча реакцій в’язей, діючих на k-ту точку, $\delta \vec{r}_k$ – віртуальне переміщення k-ої матеріальної точки системи.

Прикладом ідеальної в’язі є абсолютно гладка поверхня (рис. 15.6, а). Реакція в’язі $\vec{N}$ спрямована перпендикулярно до поверхні, тому:

$$\delta A = \vec{N} \cdot \delta \vec{r} = 0.$$

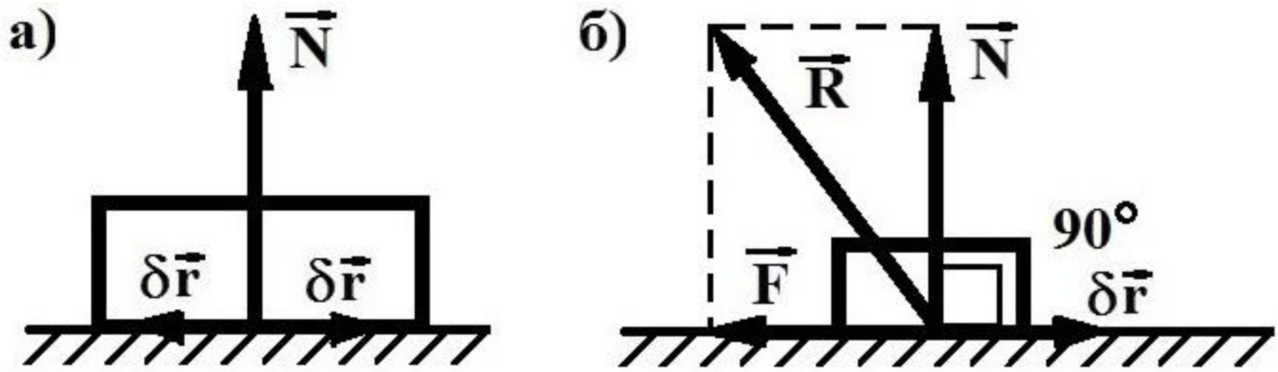


Рисунок 15.6.

Негладка поверхня не є ідеальною в’яззю (рис. 15.6, б). Сила реакції поверхні $\vec{R}$ є сумою двох її складових: нормальної $\vec{N}$, перпендикулярної до поверхні в точці, і дотичної, яка є силою тертя $\vec{F}$ точки по поверхні. Віртуальне переміщення $\delta \vec{r}$ спрямовуємо вздовж поверхні. При обчисленні роботи $\delta A =$

$\vec{N} \cdot \delta\vec{r} = 0$, а для сили тертя $\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} \neq 0$. Отже, умова, що визначає ідеальність в'язі, не виконується.

У абсолютно твердому тілі точки зв'язані ідеальними в'язями. Силами реакцій у цьому випадку є внутрішні сили, для яких сума елементарних робіт цих сил на будь-яких елементарних переміщеннях точок дорівнює нулю.

Закріплені точки системи є ідеальними в'язями, бо їхні можливі переміщення дорівнюють нулю.

Шорстка поверхня для котків, що котяться без ковзання за відсутності тертя кочення і з однією точкою дотику, є ідеальною в'яззю, бо можливі переміщення в точці дотику дорівнюють нулю.

7.4. Принцип віртуальних переміщень

Для рівноваги СМТ необхідно та достатньо, щоб суми всіх сил, діючих на кожну точку системи, і швидкості всіх точок у початковий момент часу дорівнювали нулю. Якщо позначити через $\vec{F}_k$ і $\vec{R}_k$ рівнодіючі всіх активних сил і реакцій в'язей, прикладених до k-ої точки, то математично умову рівноваги можна записати:

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k = 0,\ \vec{v}_k(0) = 0,\ (k = 1,2, \dots, n). \qquad (15.8)$$

Ці умови мають один істотний недолік – вони потребують урахування всіх сил, включаючи і реакції в'язей, діючих на кожну точку системи.

Надаємо системі віртуальне переміщення $\delta\vec{r}_1,\ \delta\vec{r}_2, \dots,\ \delta\vec{r}_n$. Домножимо доданки у кожному рівнянні (15.8) на $\delta\vec{r}_k$ і складемо їх почленно:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\vec{F}_k + \vec{R}_k\right) \cdot \delta\vec{r}_k = 0,$$

або

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0.$$

Друга сума дорівнює нулю (в'язі ідеальні), тому за рівноваги системи має дорівнювати нулю і перша сума.

В механіці вводять поняття принципу віртуальних переміщень, за яким **для рівноваги СМТ, на яку накладено ідеальні стаціонарні в'язі,**

необхідно та достатньо, щоб сума робіт активних сил на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнювала нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0, \tag{15.9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k\right) = 0.$$

Перевагою цього принципу є відсутність в його формулюванні реакцій ідеальних в’язей.

Принцип віртуальних переміщень широко застосовується в механіці. За його допомогою можна достатньо просто вирішувати задачі про рівновагу твердого тіла та систем твердих тіл, а також визначати залежності між величинами активних сил.

Під час вирішення задач необхідно враховувати наступні зауваження.

1. Якщо в’язі неідеальні, то їх реакції (наприклад, сили тертя) слід віднести до активних сил.
2. В тих випадках, коли потрібно визначити реакцію ідеальної в’язі, необхідно подумки відкинути цю в’язь, а відповідну реакцію розглядати як активну силу.

7.5. Узагальнені сили

Для узагальненої координати q було введено поняття **варіації** δq. З урахуванням виразу для віртуальної роботи (роботи на віртуальному переміщенні), маємо:

$$\delta A = \sum_{m=1}^{s} Q_m \delta q_m = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_s\delta q_s. \tag{15.10}$$

Вираз (15.10) дозволяє дати наступне визначення узагальнених сил: **узагальненими силами називаються коефіцієнти при варіаціях узагальнених координат у виразах для віртуальної роботи**.

Узагальнена сила Q_m при варіації узагальненої координати δq_m в загальному випадку не є силою у звичайному розумінні. Її розмірність залежить від розмірності цієї координати і визначається рівністю:

$$[Q_m] = [A]/[q_m],$$

де $[A]$ – розмірність роботи, Дж. Тобто розмірність узагальненої сили дорівнює розмірності роботи сили, поділеної на розмірність узагальненої координати, до якої віднесена узагальнена сила.

При поступальному русі робота визначається як добуток сили на переміщення – q лінійна величина, тому узагальненою силою є звичайна сила з розмірністю Н. При обертальному русі робота визначається як добуток моменту на кут повороту – q є кутом з розмірністю 1, тому узагальненою силою є момент з розмірністю Н·м. Якщо q – об'єм (наприклад, положення поршня в циліндрі можна визначити об'ємом запоршневого простору), то узагальнена сила вимірюється у Н/м^2 і має розмірність тиску.

7.6. Принцип віртуальних переміщень у випадку руху системи. Загальне рівняння динаміки

Принцип віртуальних переміщень (15.9), який дає загальний метод розв'язання задач статики, можна застосувати до вирішення задач динаміки. З іншого боку, принцип Д'Аламбера дозволяє застосовувати методи статики для вирішення задач динаміки. Поєднуючи ці два принципи одночасно, можна отримати загальний метод розв'язання задач динаміки.

За принципом Д'Аламбера, який було введено на Лекції № 14: **активні та реактивні сили, діючі на МТ, разом з силами інерції утворюють систему взаємно урівноважених сил, які задовольняють всім умовам рівноваги:**

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0.$$

Для довільної k-ої точки:

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k = 0, \ (k = 1,2, \dots, n).$$

Якщо система отримує віртуальне переміщення, при якому кожна точка має своє віртуальне переміщення $\delta\vec{r}_k$, то сума робіт цих сил на переміщенні $\delta\vec{r}_k$ має дорівнювати нулю:

$$\left(\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k\right) \cdot \delta\vec{r}_k = 0, \ (k = 1,2, \dots, n).$$

Складаючи всі n рівнянь,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k+\vec{R}_k+\vec{\Phi}_k\right)\cdot\delta\vec{r}_k=0. \qquad (15.11)$$

Припустимо, що всі в’язі в СМТ ідеальні (сили тертя за наявності можна віднести до активних сил, які задаються). Тоді сума робіт реакцій в’язей на віртуальних переміщеннях дорівнює нулю, що призводить до рівняння:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k+\vec{\Phi}_k\right)\cdot\delta\vec{r}_k=0. \qquad (15.12)$$

Вираз (15.12) називається загальним рівнянням динаміки:
у будь-який момент часу сума робіт всіх активних сил и сил інерції матеріальних точок невільної механічної системи з ідеальними в’язями на довільному віртуальному переміщенні дорівнює нулю.
Проектуючи на осі координат з урахуванням

$$\vec{F}_k=F_{kx}\vec{\imath}+F_{ky}\vec{\jmath}+F_{kz}\vec{k},$$

$$\delta\vec{r}_k=\delta x_k\vec{\imath}+\delta y_k\vec{\jmath}+\delta z_k\vec{k},$$

Отримуємо:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(F_{kx}+\Phi_{kx})\cdot\delta x_k+\left(F_{ky}+\Phi_{ky}\right)\cdot\delta y_k+(F_{kz}+\Phi_{kz})\cdot\delta z_k\right]=0. \qquad (15.13)$$

Рівняння (15.13) дозволяють скласти диференціальні рівняння руху механічної системи. Запишемо рівняння (15.12) і (15.13) в іншій формі:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k-m_k\vec{a}_k\right)\cdot\delta\vec{r}_k=0.$$

Якщо

$$\vec{a}_k=\ddot{x}_k\vec{\imath}+\ddot{y}_k\vec{\jmath}+\ddot{z}_k\vec{k},$$

то загальне рівняння динаміки має вигляд:

$$\sum_{k=1}^{n}\begin{matrix}\left[(F_{kx}-m_k\ddot{x}_k)\cdot\delta x_k+\left(F_{ky}-m_k\ddot{y}_k\right)\cdot\delta y_k+\right.\\ \left.(F_{kz}-m_k\ddot{z}_k)\cdot\delta z_k\right]=0\end{matrix}. \qquad (15.14)$$

Як ми бачимо, у дужках записано рівняння руху у проекціях на координатні осі. Великою перевагою загального рівняння динаміки у порівнянні з іншими теоремами є відсутність реакцій ідеальних в’язей.

Якщо при цьому система є сукупністю будь-яких твердих тіл, то для складання рівнянь руху необхідно до діючих на кожне тіло активних сил додати прикладену в довільному центрі силу, яка дорівнює головному вектору інерції, і пару з моментом, який дорівнює головному моменту сил інерції відносно цього центру. Після цього застосувати принцип віртуальних переміщень.

Обчислення суми робіт сил інерції на віртуальних переміщеннях точок твердого тіла проводиться за формулами:

1) При поступальному русі:

$$\delta A = \vec{\Phi} \cdot \delta \vec{r},$$

де $\vec{\Phi}$ – рівнодіюча сил інерції ($\vec{\Phi} = -m\vec{a}$, $\vec{a}$ – прискорення довільної точки твердого тіла), $\delta \vec{r}$ – віртуальне переміщення довільної точки твердого тіла. Поступальне можливе переміщення для всіх точок тіла однакове, однакові також і прискорення.

2) При обертанні навколо нерухомої осі:

$$\delta A = M_Z^{\text{ін}} \cdot \delta \varphi,$$

де $M_Z^{\text{ін}}$ – головний момент сил інерції відносно осі обертання Z ($M_Z^{\text{ін}} = -I_Z \varepsilon_Z$), $\delta \varphi$ – віртуальне кутове переміщення твердого тіла.

3) При плоскому русі:

$$\delta A = \vec{V}_C^{\text{ін}} \cdot \delta \vec{r}_C + M_C^{\text{ін}} \cdot \delta \varphi,$$

де $\vec{V}_C^{\text{ін}}$ – головний вектор сил інерції ($\vec{V}_C^{\text{ін}} = -\, m\vec{a}_C$, $\vec{a}_C$ – прискорення центру ваги твердого тіла), $M_C^{\text{ін}}$ – головний момент сил інерції відносно осі, що проходить через центр ваги C твердого тіла перпендикулярно до площини руху ($M_C^{\text{ін}} = -I_C \varepsilon_Z$), $\delta \vec{r}_C$ – віртуальне переміщення центру ваги C твердого тіла, $\delta \varphi$ – віртуальне кутове переміщення твердого тіла.

Із загального рівняння динаміки витікають диференціальні рівняння руху СМТ, до яких не входять реакції ідеальних в’язей. Можливо розв’язання як прямих (визначення сил за заданим рухом), так і зворотних задач (визначення руху за заданими силами) динаміки. При вирішенні зворотних задач приходиться інтегрувати складену систему диференціальних рівнянь руху.

Контрольні питання

1. В чому полягає сутність аналітичної механіки ?
2. Які існують в’язі ?
3. Що називають число ступенів вільності матеріальної системи ?
4. Дайте визначення узагальнених координат.
5. Що називають віртуальним переміщенням ? Чим вони відрізняються від дійсних ?
6. Дайте визначення ідеальних в’язей.
7. Що таке узагальнена сила ?
8. Сформулюйте загальне рівняння динаміки.

Розділ Динаміка. Лекція № 16

План лекції

1. Рівняння Лагранжа II-го роду
2. Методика застосування методу віртуальних переміщень
3. Методика застосування Рівняння Лагранжа II-го роду

Тема 7. Вступ до аналітичної механіки

7.7. Рівняння Лагранжа II-го роду

Припустимо, що механічна система з n матеріальних точок має n ступенів вільності. У випадку голономних нестаціонарних в’язей радіус-вектор $\vec{r}_i$ довільної точки M цієї системи є функцією узагальнених координат $q_1(t)$, $q_2(t)$,..., $q_n(t)$ і часу t:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\big(q_1, q_2, \dots, q_{n,} t\,\big), \tag{16.1}$$

Узагальнені координати системи $q_1(t)$, $q_2(t)$,..., $q_n(t)$ є функціями часу. Тому радіус-вектор $\vec{r}_i$ також є складною функцією часу і вектор швидкості точки $\vec{v}_i$ визначається за правилами диференціювання складної функції:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial q_n}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \tag{16.2}$$

або з урахуванням $\frac{\partial q_1}{\partial t} = \dot{q}_1$, $\frac{\partial q_2}{\partial t} = \dot{q}_2$,..., $\frac{\partial q_n}{\partial t} = \dot{q}_n$, перепишемо (16.2):

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \tag{16.2}$$

і записуємо у вигляді суми:

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \tag{16.3}$$

У випадку стаціонарних в’язей $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$,

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j. \qquad (16.4)$$

Похідні від узагальнених координат за часом $\dot{q}_j$ називаються **узагальненими швидкостями**, які відповідають узагальненим координатам q_j.

З виразу (16.2) слідує, що частинна похідна від $\vec{v}_i$ за будь-якої узагальненої швидкості $\dot{q}_j$ дорівнює коефіцієнту при $\dot{q}_j$ у правій частині цього виразу, тобто дорівнює частинній похідній від $\vec{r}_i$ за координатою q_j:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}, \quad , \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \ldots, \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n}. \qquad (16.5)$$

Кінетична енергія механічної системи, яка складається з n матеріальних точок, визначається за формулою:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i. \qquad (16.6)$$

З виразу (16.4) слідує, що вектор швидкості $\vec{v}_i$ у випадку голономних нестаціонарних в’язей є функцією узагальнених координат, які містяться у виразах $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$, узагальнених швидкостей $\dot{q}_j$ і часу t:

$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t). \qquad (16.7)$$

Визначимо частинні похідні від кінетичної енергії за узагальненою координатою q_j і узагальненою швидкістю $\dot{q}_j$, диференціюючи вираз (16.6) як складну функцію:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Перетворимо останнє рівняння на основі (16.5):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Продиференціюємо цей вираз за часом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right). \qquad (16.8)$$

Розглянемо дві суми, що входять до правої частини рівності (16.8), враховуючи, що для невільної матеріальної точки $m_i \vec{a}_i = \vec{P}_i + \vec{R}_i$.

1) За допомогою рівності, що визначає узагальнену силу

$$Q_j = \frac{\delta A_{q_j}}{\delta q_j} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},$$

знаходимо:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = Q_j + Q_j^R.$$

2) Для встановлення значення другої суми розглянемо вираз $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)$.

Частинна похідна $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ є функцією тих самих змінних, від яких залежний радіус-вектор $\vec{r}_i$. Диференціюємо $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ як складну функцію часу:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial q_n} \cdot \frac{dq_n}{dt} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial t}. \qquad (16.9,а)$$

З урахуванням позначень

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = \dot{q}_1,\ \frac{\partial q_2}{\partial t} = \dot{q}_2, \ldots,\ \frac{\partial q_n}{\partial t} = \dot{q}_n,$$

запишемо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial t}. \qquad (16.9,б)$$

Визначимо частинну похідну $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$, диференціюючи за q_j вираз (16.2):

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_1 \cdot \partial q_j} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_2 \cdot \partial q_j} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_n \cdot \partial q_j} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial t}. \tag{16.10}$$

Праві частини виразів (16.9, б) і (16.10) відрізняються лише послідовністю диференціювання, яка для неперервних функцій не має значення, отже:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}.$$

Користуючись цим, перетворимо другу суму в правій частині рівності (16.8):

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Підставляємо знайдені значення обох сум в рівність (16.8) і розглядаємо механічну систему зі стаціонарними ідеальними в’язями, для яких $Q_j^R = 0$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j},$$

або

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j,\ (j = 1,2,\ldots,n) \tag{16.11}$$

Систему n диференціальних рівнянь (16.11) називають **рівняннями Лагранжа ІІ-го роду**, кількість яких дорівнює числу ступенів вільності системи. Ці рівняння є диференціальними рівняннями другого порядку відносно узагальнених координат системи $q_1(t)$, $q_2(t)$,…, $q_n(t)$. Інтегруючи ці диференціальні рівняння та визначаючи за початковими умовами постійні інтегрування, отримуємо рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах.

Рівняння Лагранжа ІІ-го роду дають єдиний та достатньо простий метод вирішення задач динаміки. Важлива перевага цих рівнянь полягає в тому, що їхній вигляд і кількість не залежать ані від кількості тіл, що складають дану систему, ані від того, як ці тіла рухаються. Крім того, за ідеальних в’язей до правих частин рівнянь входять узагальнені сили та ці рівняння дозволяють заздалегідь виключити з розгляду всі невідомі реакції в’язей.

Припустимо, що на механічну систему поряд з силами, які мають потенціал (консервативними силами, робота яких не залежить від траєкторії руху, наприклад, сила тяжіння), діють сили, які не мають потенціалу (неконсервативними силами, робота яких залежить від траєкторії руху, наприклад, сила тертя). При цьому узагальнену силу Q_j зручно представити у вигляді суми узагальненої сили Q_j^P, яка відповідає консервативним силам $\vec{P}_i$, і узагальненої сили Q_j^F, яка відповідає неконсервативним силам $\vec{F}_i$:

$$Q_j = Q_j^P + Q_j^F.$$

Тоді з урахуванням $Q_j^P = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$ рівняння Лагранжа II-го роду має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j^F. \qquad (16.12)$$

7.8. Методика застосування методу віртуальних переміщень

Далі продемонструємо застосування принципу можливих переміщень для визначення опорних реакцій статично невизначеної системи. Це статична задача, але вважаю за доцільне показати ефективність застосування цього принципу.

Задача. Складена балка AD, яка лежить на 3-х опорах, складається з двох балок AC і CD, що шарнірно з'єднані в точці C. До балки AC прикладено вертикальні сили P_1 =80 кН і P_2 =60 кН, а до балки CD – момент $M = 40a$ кН·м, спрямований проти годинникової стрілки. Розміри і навантаження вказано на рис. 16.1, а.

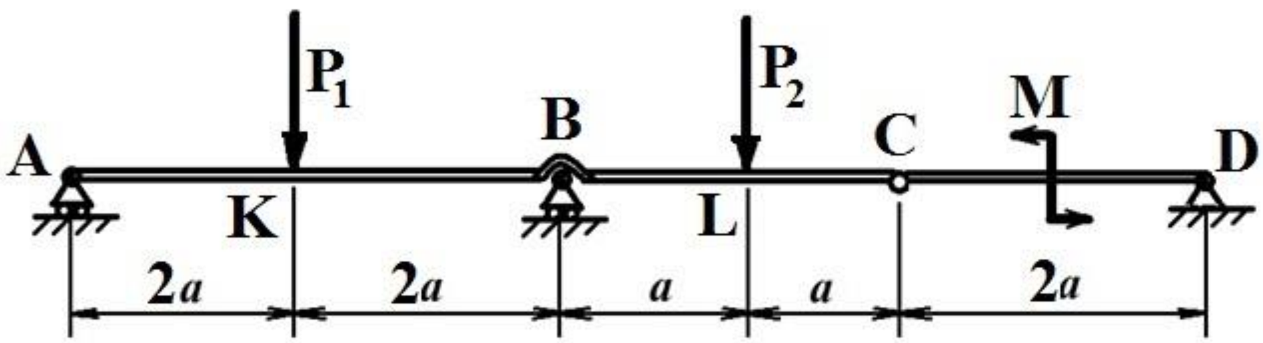


Рисунок 16.1, а.

Визначити опорні реакції в точках A, B, D. Вагою балок знехтувати.

Розв'язання. Складена балка AD є системою двох твердих тіл – балок AC і CD, які знаходяться у рівновазі.

Вирішуючи цю задачу методами статики, потрібно, подумки розірвавши шарнір C, відкинути одну з балок, замінити дію відкинутої балки на частину, що залишилась, двома складовими реакції шарніра C і скласти рівняння рівноваги для частини, що залишилась. Потім, застосувавши ті ж самі дії до відкинутої частини, записати для неї рівняння рівноваги. Нарешті, розв'язавши систему рівнянь рівноваги, складених для кожної з балок, визначити шукані опорні реакції. Таке рішення є достатньо громіздким.

Застосовуючи принцип віртуальних переміщень, можна довільну опорну реакцію визначити з одного відповідним чином складеного рівняння. Це істотно спрощує розв'язання задачі, особливо у тих випадках, коли потрібно визначити тільки одну опорну реакцію.

Проілюструємо це твердження послідовним, незалежним одним від одного визначенням опорних реакцій A, B, D за допомогою принципу віртуальних переміщень.

Для визначення реакції R_A відкидаємо подумки опору A, компенсуючи відсутність цієї в'язі опорною реакцією R_A.

Надаємо віртуальне переміщення δr_A точці A за вертикаллю вгору. При цьому балка приймає положення, яке показано на рис. 16.1, б.

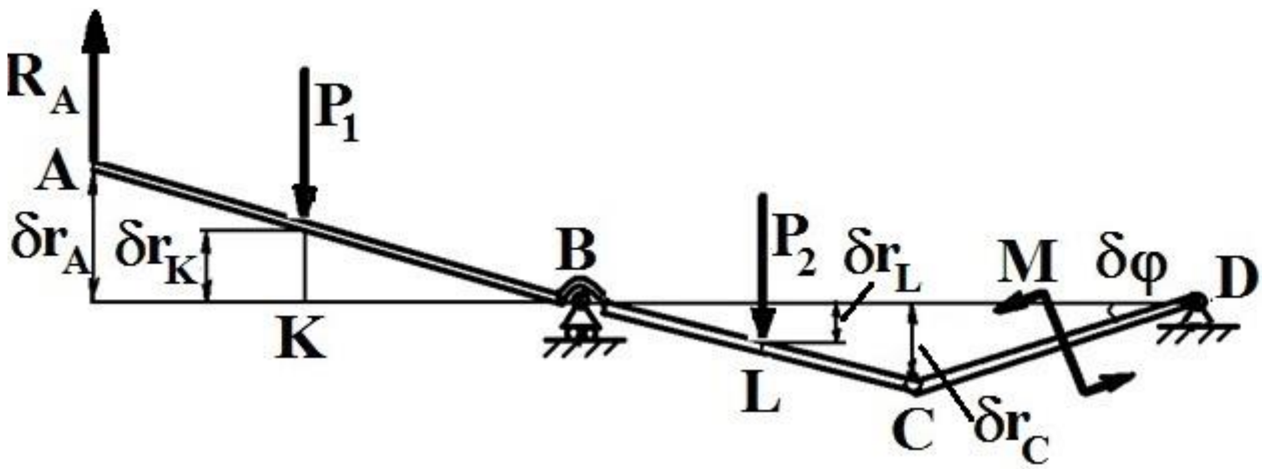


Рисунок 16.1, б.

Позначимо через δr_K і δr_L віртуальні переміщення точок прикладення K і L сил P_1 і P_2 і через $\delta\varphi$ – кутове переміщення балки CD.

Виразимо, скориставшись подібністю трикутників, залежність між лінійними віртуальними переміщеннями:

$$\delta r_A = 2\delta r_K = 4\delta r_L = 2\delta r_C = 4a\delta\varphi. \qquad (16.13)$$

Застосувавши принцип віртуальних переміщень, прирівнюємо суму робіт всіх активних сил і моментів, а також реакції на відповідних віртуальних переміщеннях до нуля:

$$R_A\delta r_A - P_1\delta r_K + P_2\delta r_L + M\delta\varphi = 0. \qquad (16.14)$$

Скориставшись співвідношенням (16.13), після почленного скорочення рівняння (16.14) на δr_A знаходимо:

$$R_A - \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4a}M = 0,$$

звідки після підстановки числових значень отримуємо: $R_A = 15$ кН.

Для визначення опорної реакції R_B подумки відкидаємо опору B, компенсуючи відсутню в’язь опорною реакцією R_B.

Надаємо віртуальне переміщення δr_C шарніру C за вертикаллю вгору. При цьому балка приймає положення, яке показано на рис. 16.1, в.

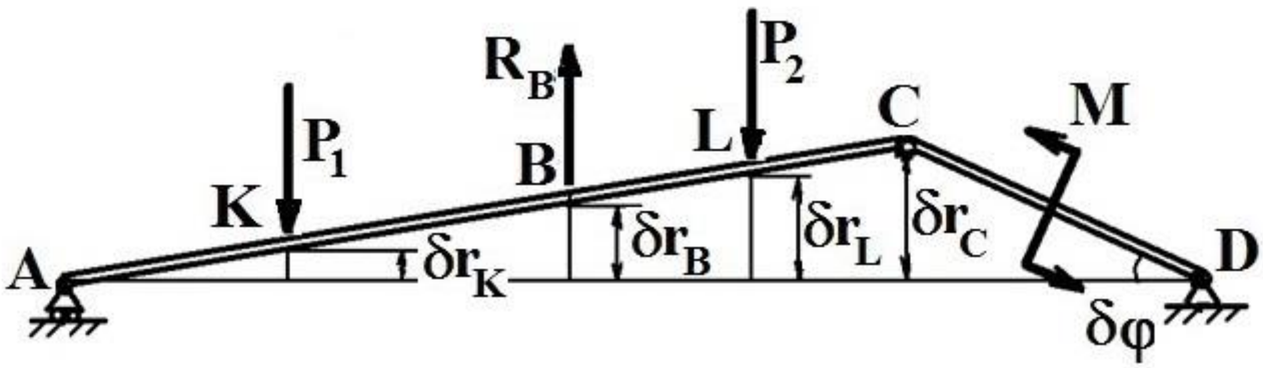


Рисунок 16.1, в.

Позначимо через δr_K, δr_L, δr_B віртуальні переміщення точок прикладання K, L, B сил P_1, P_2, R_B і віртуальне кутове переміщення балки CD через $\delta\varphi$, виразимо зв'язок між ними:

$$\delta r_C = \frac{6}{5}\delta r_L = \frac{3}{2}\delta r_B = 3\delta r_K = 2a\delta\varphi. \qquad (16.15)$$

Застосувавши принцип віртуальних переміщень, запишемо (напрям $\delta\varphi$ проти годинникової стрілки вважаємо додатним, за годинниковою стрілкою – від'ємним):

$$-P_1\delta r_K + R_B\delta r_B - P_2\delta r_L - M\delta\varphi = 0. \qquad (16.16)$$

Скориставшись формулою (3), після почленного скорочення рівняння (16.16) на δr_C знаходимо:

$$-\frac{1}{3}P_1 + \frac{2}{3}R_B - \frac{5}{6}P_2 - \frac{1}{2a}M = 0.$$

звідки після підстановки числових значень отримуємо: $R_B = 145$ кН.

Залишається визначити опорну реакцію R_D. Знову застосовуючи принцип звільнення від в'язей, подумки відкидаємо опору D, компенсуючи її відсутність опорною реакцією R_D (рис. 16.1, г.).

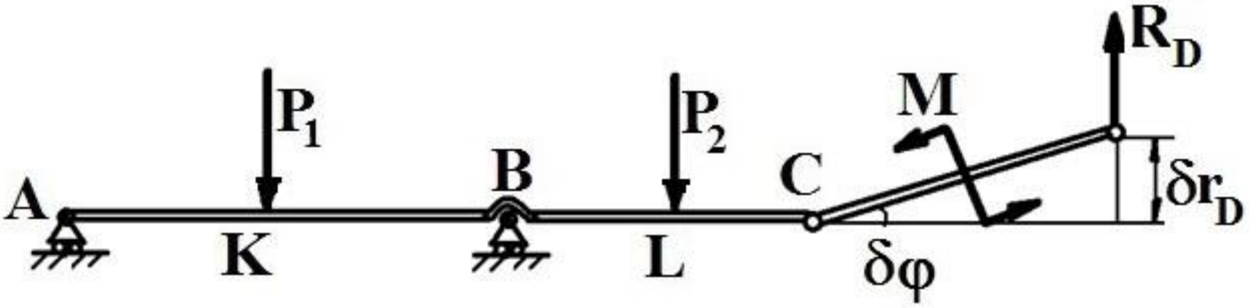


Рисунок 16.1, г.

Надаємо віртуальне переміщення δr_D точці D за вертикаллю вгору. При цьому балка CD повернеться проти годинникової стрілки на кут:

$$\delta\varphi = \frac{\delta r_D}{2a}. \qquad (16.17)$$

Положення балки AC залишається незмінним.

Записавши принцип віртуальних переміщень, отримуємо:

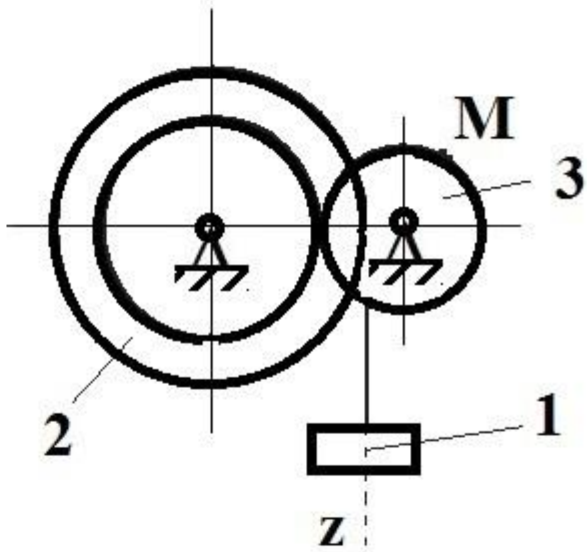
$$R_D\delta r_D + M\delta\varphi = 0. \qquad (16.18)$$

Після підстановки числових значень, використання формули (16.17) і почленного скорочення рівняння (16.18) на δr_D знаходимо: $R_D = -20$ кН.

Знак «–» вказує, що опорна реакція R_D спрямована за вертикаллю вниз.

7.9. Методика застосування Рівняння Лагранжа II-го роду

У Лекції № 13 було показано вирішення задачі щодо визначення закону руху тіла із застосуванням теореми про зміну кінетичної енергії системи. Продемонструємо вирішення цієї задачі за допомого рівняння Лагранжа II-го роду.



Дано: m_1 =12 кг, m_2 =8 кг, m_3 =4 кг. R_2 =12 см, R_3 =4 см, r_2 =8 см, i_{x2} =10 см, M =80 Н·см

Визначити: закон руху тіла 1, використовуючи рівняння Лагранжа 2-го роду (натяжіння ниті не враховувати)

Розв'язання. Рівняння Лагранжа 2-го роду має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x,$$

T – кінетична енергія матеріальної системи;

Π – потенціальна енергія матеріальної системи;

Q_x – узагальнені неконсервативні сили;

x – узагальнена координата;

$\dot{x}$ – узагальнена швидкість.

Проаналізуємо рух окремих ланок матеріальної системи. Тіло 1 рухається поступально, тіла 2 і 3 – здійснюють обертальний рух.

Матеріальна система має одну ступінь вільності, тобто всі переміщення матеріальних точок системи можна визначити через переміщення однієї узагальненої координати. За узагальнену координату приймаємо переміщення тіла 1 x. Припускаємо, що тіло 1 рухається вниз і має переміщення x та швидкість $\dot{x}$

Визначимо кінетичну енергію матеріальної системи.
Матеріальна система складається з трьох тіл певної маси, тому кінетична енергія матеріальної системи дорівнює сумі кінетичних енергій трьох тіл:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

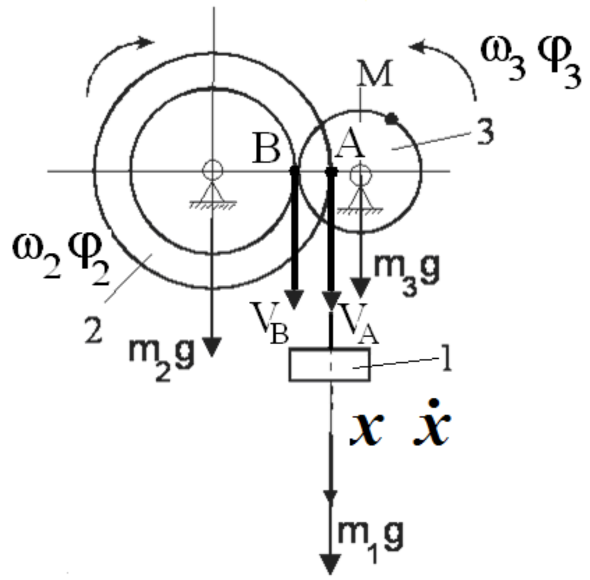
$T_1 = {m_1 \dot{x}^2}/{2}$ – кінетична енергія 1-го тіла, яке рухається поступально;

$T_2 = {I_2 \omega_2^2}/{2}$ – кінетична енергія 2-го тіла, яке обертається;

$T_3 = {I_3 \omega_3^2}/{2}$ – кінетична енергія 3-го тіла, яке обертається;

I_2, I_3 – моменти інерції 2-го та 3-го тіла;

ω_2, ω_3 – кутові швидкості 2-го та 3-го тіла.



Для визначення співвідношень між швидкостями тіл системи проаналізуємо точки A і B з урахуванням узагальненої швидкості $\dot{x}$.

Швидкість точки A дорівнює швидкості тіла 1, тобто $\dot{x} = v_A$. Крім того, точка A належить тілу 2, що здійснює обертальний рух, тому швидкість цієї точки визначаємо за формулою:

$$\dot{x} = \omega_2 R_2.$$

Виходячи з цього, маємо залежність між кутовою швидкістю ω_2 та швидкістю v_1:

$$\omega_2 = {\dot{x}}/{R_2}.$$

Визначимо залежність між кутовою швидкістю ω_3 та швидкістю $\dot{x}$. Для цього скористаємось тим, що точка B належить тілу 2 та тілу 3,тобто маємо:

$$v_B = \omega_3 R_3 = \omega_2 r_2.$$

Таким чином:

$$\omega_3 = \omega_2 \, {r_2}/{R_3} = \dot{x}\,\frac{r_2}{R_2 R_3}.$$

Моменти інерції 2-го та 3-го тіла визначаємо за формулами:

$$I_2 = m_2 i_{x2}^2,\ I_3 = m_3 \frac{R_3^2}{2}.$$

Запишемо кінетичні енергії тіл матеріальної системи через швидкість 1-го тіла:

$T_1 = {m_1 \dot{x}^2}/{2} = \frac{12\dot{x}^2}{2} = 6\dot{x}^2$ – кінетична енергія 1-го тіла

$T_2 = {I_2 \omega_2^2}/{2} = \frac{m_2 i_{x2}^2}{2}\left({\dot{x}}/{R_2}\right)^2 = \frac{8\cdot 10^2}{2}\left(\frac{\dot{x}}{12}\right)^2 = 2{,}78\dot{x}^2$ – кінетична енергія 2-го тіла

$T_3 = {I_3 \omega_3^2}/{2} = \frac{1}{2} m_3 \frac{R_3^2}{2}\left(\dot{x}\,\frac{r_2}{R_2 R_3}\right)^2 = \frac{1}{2} 4 \frac{4^2}{2}\left(\dot{x}\,\frac{8}{12\cdot 4}\right)^2 = 0{,}44\dot{x}^2$ – кінетична енергія 3-го тіла. Кінетична енергія матеріальної системи:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 6\dot{x}^2 + 2{,}78\dot{x}^2 + 0{,}44\dot{x}^2 = 9{,}22\dot{x}^2.$$

Визначимо потенційну енергію Π матеріальної системи, яка складається з потенційних енергій сил тяжіння $m_1 g, m_2 g, m_3 g$, які прикладені до центру ваги тіл 1-3:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3.$$

Потенційна енергія за визначенням – це робота цієї сили, узята з протилежним знаком:

$A(m_1 g) = m_1 g \cdot s_1 = 120 s_1 \Longrightarrow \Pi_1 = -m_1 g \cdot x = -120x$

$A(m_2 g) = m_2 g \cdot s_{O2} = 0 \Longrightarrow \Pi_2 = -m_2 g \cdot 0 = 0$

$A(m_3 g) = m_3 g \cdot s_{O3} = 0 \Longrightarrow \Pi_3 = -m_3 g \cdot 0 = 0$

Таким чином, повна потенційна енергія системи $\Pi = -120x$.

Узагальнені неконсервативні сили Q_x – це коефіцієнт у формулі для визначення роботи сил при відповідній узагальненій координаті.

Визначимо роботу неконсервативних сил на узагальненому переміщенні x. У ролі зазначеної сили в задачі виступає зовнішній момент M, робота якого:

$$A(M) = M \cdot \varphi_3.$$

Визначимо роботу моменту через переміщення x. Для цього скористаємось співвідношенням:

$$\omega_3 = \dot{x}\frac{r_2}{R_2R_3} \to \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{r_2}{R_2R_3} \to d\varphi_3 = dx\frac{r_2}{R_2R_3} \to \varphi_3 = x\frac{r_2}{R_2R_3}$$

$$A(M) = M \cdot \varphi_3 = M \cdot x\frac{r_2}{R_2R_3} = 80 \cdot x\frac{8}{12\cdot 4} = 13{,}33x = Q_x \cdot x.$$

Таким чином, $Q_x = 13{,}33.$

Отримані результати підставимо у рівняння Лагранжа 2-го роду.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\left(9{,}22\dot{x}^2\right)}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial\left(9{,}22\dot{x}^2\right)}{\partial x} = -\frac{\partial(-120x)}{\partial x} + 13{,}33,$$

$$\frac{d}{dt}(18{,}44\dot{x}) - 0 = 120 + 13{,}33,$$

$$18{,}44\ddot{x} = 133{,}33,$$

$$\ddot{x} = 7{,}22.$$

У початковий момент руху система перебувала у стані спокою, тому для $t = 0$ швидкість $\dot{x} = 0$ і переміщення $x = 0.$ З урахуванням початкових умов двічі інтегруємо диференціальне рівняння і отримуємо:

$$\dot{x} = 7{,}22t,\ x = 3{,}61t^2.$$

Рішення збігаються з отриманими під час розв’язання задачі за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії.

Контрольні питання

1. Що представляють за змістом рівняння Лагранжа II-го роду ?
2. Що таке узагальнені швидкості ?
3. Яка структура рівнянь Лагранжа II-го роду ?
4. Як обчислюються узагальнені сили ?

ЛІТЕРАТУРА

1. Булгаков, В.А. Теоретична механіка. Підручник [Текст] / В. А. Булгаков, В. В. Яременко, О. М. Черниш, М. Г. Березовський. – К.: Центр навчальної літератури, 2017. – 640 с.

2. Павловський, М.А. Теоретична механіка. Підручник [Текст] / М. А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 511 с.

3. Романенко, Л.Г. Теоретична механіка: Навч. посіб. для студ. вузів [Текст] / Л. Г. Романенко, В. Г. Солодов. – 2-е вид. – Х.: ХДАДТУ, 2002. – 270 с.

4. Теоретична механіка : навчальний посібник [Текст] / П. К. Штанько, В. Г. Шевченко, О. С. Омельченко, Л. Ф. Дзюба, В. Р. Пасіка, О. М. Поляков; за ред. П. К. Штанька. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2021. – 464 с.

5. Теоретична механіка та опір матеріалів: курс лекцій [Текст] / Укладачі: Ю. Ф. Деркач, В. Ю. Колосков, О. М. Кондратенко, І .В. Міщенко, Г. О. Чернобай. – Х.: НУЦЗУ, 2020. – 510 с.

6. Технічна механіка. Розділ «Динаміка». Методичні вказівки до виконання контрольної (модульної) роботи [Текст] / Уклад. С. О. Вамболь, І. В. Міщенко, Н. В. Хохлова. – Х.: НУЦЗУ, 2015. – 44 с.

7. Технічна механіка: методичні вказівки з організації самостійної роботи здобувачів вищої освіти під час вивчення дисципліни [Текст] / Укладачі: Ю. Ф. Деркач, В. Ю. Колосков, О. М. Кондратенко, І. В. Міщенко, Г. О. Чернобай. – Х.: НУЦЗУ, 2020. – 71 с.