МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ ДЛЯ ЗАДАЧ МЕХАТРОНИКИ

О.Ю. Сергиенко, доцент, к.т.н., Институт Инженерии Автономного университета Нижней Калифорнии, Мексика

Аннотация. Представлена методика быстрого измерения частоты, основанная на совпадении импульсов двух регулярных независимых импульсных последовательностей и рациональных приближений. Выведено числовое условие для остановки процесса измерения. Представлены результаты численного моделирования процесса измерения частоты.

Ключевые слова: импульс, импульсная последовательность, теория чисел, частота, моделирование.

МЕТОД ВИМІРЮВАННЯ ЧАСТОТИ ДЛЯ ЗАДАЧ МЕХАТРОНІКИ

О.Ю. Сергієнко, доцент, к.т.н., Інститут Інженерії Автономного університету Нижньої Каліфорнії, Мексика

Анотація. Представлено методику швидкого виміру частоти, яка базується на збіжності імпульсів двох регулярних незалежних імпульсних послідовностей та раціональних наближень. Виведено числову умову для зупинки процесу вимірювання. Надано результати чисельного моделювання процесу виміру частоти.

Ключові слова: імпульс, імпульсна послідовність, теорія чисел, частота, моделювання.

FREQUENCY MEASUREMENT METHOD FOR MECHATRONIC AND TELECOMMUNICATION APPLICATIONS

O. Sergiyenko, Associate Professor, Candidate of Technical Science, Engineering Institute of Autonomous University of Baja California, Mexico

Abstract. A fast frequency measurement method based on the pulse coincidence of two regular independent pulse trains and rational approximations in the number theory is presented. A numeric condition to stop the measurement process is deduced. Results of numeric simulation of the frequency measurement process are presented.

Key words: pulse, pulse train, number theory, frequency, measurement.

Введение

Много практических задач в мехатронике, робототехнике, системах управления, приборостроении и телекоммуникациях должны точно решать проблему временной выборки. Можно привести следующие примеры: основанное на GPS хронометрирование [1], упреждающий приемник в радаре [2], измерение физического параметра с использованием поверхностных акустических волн [3], разработка измерителей расстояния на основе измерения разности фаз зондирующего и отражённого сигнала [4], и т.д. В каждом случае главная проблема – синхронизация шкалы времени с произвольной периодической последовательностью событий (электрических импульсов). Эта произвольная периодическая последовательность событий и временных рамок может преобразовываться в периодические импульсные последовательности различного периода. В этом случае наиболее удобно использовать принцип совпадения импульсов.

Анализ публикаций

Совпадение импульсов, принадлежащих регулярным независимым импульсным последовательностям, происходит во многих импульсных системах, и было достаточно исследовано за последние десятилетия [5–9]. В этих работах показаны связи совпадения импульсов регулярных независимых импульсных последовательностей с теорией чисел, особенно с линейной теорией [5–6] соответствия и диофантовыми приближениями [8–9].

В метрологии совпадение импульсов двух регулярных независимых импульсных последовательностей использовалось в качестве событий начала и остановки измерения частоты электрического сигнала [10–12]. В [13] представлено точное измерение частоты, основанное на концепции наибольшего общего делителя частоты и ее особенностей. Наибольший общий делитель частоты между двумя сигналами разной частоты подобен математическому наибольшему общему делителю двух чисел.

В [10–12] время измерения определяется электронным обнаружением двух совпадающих импульсов двух регулярных независимых импульсных последовательностей. С помощью электроники обнаружены два вида тех же самых ситуаций со схожей разностью фаз между двумя сигналами частоты; требуется цепь обнаружения совпадения с высокой разрешающей способностью [13]. В этих методах может быть удовлетворительно преодолена ошибка квантования (±1 импульс от общего подсчитанного количества), т.к. время выборки не установлено, оно определяется двумя последовательными событиями, регистрируемыми с помощью электроники.

Цель и постановка задачи

Быстрый и точный метод измерения частоты может быть полезным для многих практических приложений. Много физических параметров возможно преобразовать в частоту. Таким образом могут быть измерены: ускорение в любой системе автоматического управления; сила тяготения (гравитации) в задаче навигации самолета; быстрые массовые изменения и т.д.

Целью работы является разработка нового быстрого метода измерения частоты, основанного на определении совпадений импульсов двух регулярных независимых импульсных послеловательностей и использовании вновь разработанного математического аппарата рациональных приближений из теории чисел. В предлагаемом новом методе момент остановки для самого точного измерения частоты электрического сигнала - не электронно обнаруженный качественный признак, как в других методах, – а численное условие, полученное из теории чисел. Это условие остановки легко осуществить с помощью самых базовых и недорогих цифровых микросхем.

Принцип совпадения импульсов

Принцип совпадения импульсов был применен к измерению частоты электрических сигналов [10–12]. В этом методе искомая частота измерена сравнением ее со стандартной частотой. Нулевые пересечения обеих частот обнаружены, и короткий импульс воспроизведен при каждом пересечении. Сформированы две регулярные независимые импульсные последовательности.

Измеряемая и эталонная последовательности коротких импульсов сравниваются на предмет поиска их совпадений по временной шкале. Это производится с помощью логического элемента «И». Производится определение совпадений импульсов. Импульсы, сформированные в результате совпадений, могут использоваться в качестве спуска и остановки пары цифровых счетчиков (события начала и остановки измерения). Стандартные (эталонные) и желаемые (искомые, определяемые) импульсные последовательности подаются на счетчики, и измерение желаемой частоты получается умножением известной эталонной частоты на соотношение между подсчетом импульсов неизвестной и подсчетом импульсов эталонной частоты, осуществлённым в двух отдельных цифровых счетчиках за время, прошедшее между событиями начала и остановки измерения [10, 12].

Функционирование и пределы неопределенности

Рассмотрим две последовательности узких импульсов с периодами T_X и T_0 и с шириной импульса τ соответственно, сформированные в моменты пересечений с нулевой осью двух синусоидальных сигналов с частотами f_0 и f_x . Предполагается, что T_0 известный параметр и T_X неизвестен, а обе импульсных последовательности начинаются синфазно, т.е. перемещение по оси времени составляет 0.

Если обе импульсных последовательности прикладываются ко входам логического элемента «И», то на выходе получается нерегулярная импульсная последовательность импульсов переменной ширины, что показано на рис. 1.

Если верно осуществлён выбор ширины импульса двух регулярных независимых импульсных последовательностей, то по оси времени периодически наблюдаются идеальные совпадения этих импульсов [14]. Период повторения этих идеальных совпадений составляет T_{X0} (рис. 1).

Для измерения частоты сравниваются интервалы времени n_0T_0 и n_XT_X , где n_0 является количеством периодов T_0 в течение времени измерения и n_X является количеством периодов T_X в том же интервале времени.

Время измерения определяет интервал времени между первым импульсом совпадения (начало измерения) после внешнего сигнала к началу процесса измерения, и любым другим следующим импульсом совпадения (остановка измерения). Как уже было упомянуто, n_0 и n_X – подсчёты импульсов, полученные в двух цифровых счетчиках.

Согласно Кларксону [4], совпадение импульсов происходит когда

$$\left| n_X T_X - n_0 T_0 \right| \le \varepsilon, \tag{1}$$

где є – приемлемая погрешность (разностное значение между интервалами времени n_0T_0 и n_XT_X). Из-за существования частичных совпадений в [7], ошибка сравнения интервалов времени n_0T_0 и n_XT_X уменьшена до максимальной продолжительности пульса совпадения, 2т.

Чтобы найти оценки n_0 и n_X , которые определяют измеряемое значение на данном совпадении, полезно представить (расширить) T_X/T_0 как подходящую (или, как ещё её называют в литературе, цепную) дробь. Очевидно, что можно переписать (1)

$$\left|\frac{T_X}{T_0} - \frac{n_0}{n_X}\right| \le \frac{\varepsilon}{n_X T_0} \,. \tag{2}$$

Левая сторона уравнения (2) показывает, что приближение T_X/T_0 использует рациональные числа, а правая сторона – условие приближения.

Для частотного измерения, в виде $f_0 = 1/T_0$, $f_X = 1/T_X$ мы можем написать

$$\left| f_X - \frac{n_0}{n_X} f_0 \right| \le \frac{\varepsilon f_X f_0}{n_0} \,. \tag{3}$$

В (3), f_X является гипотетической подлинной оценкой неизвестной частоты и $f_0 n_0/n_X$ явля-



Рис. 1. Принцип совпадения импульсов

ется значением частоты, полученным измерением. Затем, деля обе части (3) на f_X , и, принимая во внимание, что $f_0 = 1/T_0$, относительная погрешность измерения может быть выражена как

$$\beta = \left| f_X - \frac{n_0}{n_X} \right| \left| f_X \le \frac{\varepsilon}{n_0 T_0}.$$
(4)

Мы можем увидеть в неравенстве (4), что относительную погрешность измерения ограничивает соотношение между приемлемой погрешностью сравнения интервалов времени n_0T_0 и n_XT_X и интервалом времени n_0T_0 . Значение n_0T_0 – это приблизительное время измерения.

Численное условие остановки измерения

В измерении частоты n_0 и n_X – независимые подсчеты, полученные в двух цифровых счетчиках, то есть они – целые числа. Отношение целых чисел, как и наше измеренное значение частоты, можно исследовать по законам теории чисел.

Основополагающие постулаты теории чисел

Предположим без потери общности, что $T_X > T_0$, тогда алгоритм деления (Евклидов) можно записать в виде

$$T_X = a_0 T_0 + \Delta t_0, \quad T_0 > \Delta t_0 \ge 0; \tag{5}$$

$$T_0 = a_1 \Delta t_0 + \Delta t_1, \quad \Delta t_0 > \Delta t_1 \ge 0; \tag{6}$$

$$\Delta t_0 = a_2 \Delta t_1 + \Delta t_2 , \quad \Delta t_1 > \Delta t_2 \ge 0 ; \qquad (7)$$

: :

$$\Delta t_{i-2} = a_i \Delta t_{i-1} + \Delta t_i, \quad \Delta t_{i-1} > \Delta t_i \ge 0; \quad (8)$$

$$\Delta t_{n-2} = a_n \Delta t_{n-1} + \Delta t_n, \ \Delta t_{n-1} > \Delta t_n \ge 0, \quad (9)$$

где $a_i - i$ -е частичные коэффициенты для каждого шага и $\Delta t_i - i$ -й остаток, с I = 1, 2, 3, ..., n. С $a_i \ge 1, \Delta t_i$ – уменьшающаяся последовательность для неотрицательных итераций ($i \ge 0$).

Каждый остаток, полученный на *i*-м шаге деления Евклидового алгоритма, может быть интерпретирован как расстояние [2], определяемое

$$\left|Q_{i}T_{X}-P_{i}T\right|_{0}=\Delta t_{i},$$
(10)

где P_i и Q_i – числитель и знаменатель *i*-й конвергенты из ряда подходящих дробей для T_X/T_0 , определяемому рекурсивно как [2]

$$P_i = a_i P_{i-1} + P_{i-2}; \qquad (11)$$

$$Q_i = a_i Q_{i-1} + Q_{i-2} \tag{12}$$

для произвольного $i \ge 2$, и

$$P_0 = a_0, \qquad Q_0 = 1,$$

 $P_1 = a_0 a_1 + 1, \quad Q_1 = a_1.$

Тогда из (10) каждый остаток Δt_i – абсолютная разность между временными интервалами $Q_i T_X$ и $P_i T_0$

С другой стороны [2], T_0 может быть выражен с точки зрения двух последовательных остатков, используя следующее выражение:

$$T_0 = Q_i \Delta t_{i-1} + Q_{i-1} \Delta t_i \,. \tag{13}$$

Подобное выражение может быть получено для T_X

$$T_X = P_i \Delta t_{i-1} + P_{i-1} \Delta t_i . \tag{14}$$

Если n – число шагов в Евклидовом алгоритме, необходимых чтобы получить наибольший общий делитель T_X и T_0 , тогда последний остаток $\Delta t_n = 0$, и временной интервал Δt_{n-1} – наибольший общий делитель обоих периодов T_X и T_0 в последовательном делении, выраженном в уравнениях (5)–(9). Поскольку наибольший общий делитель – это последний остаток отличный от нуля в этой последовательности делений.

Принятие того факта, что Δt_{n-1} является наибольшим общим делителем обоих периодов T_X и T_0 , мы можем записать

$$T_0 = Q_n \Delta t_{n-1}; \tag{15}$$

$$T_X = P_n \Delta t_{n-1}. \tag{16}$$

Из выражения (10) с точки зрения (15) и (16) очевидно в (17), что шаг n – точка полного равенства для обоих временных интервалов (например периодов $7T_X$ и $12T_0$ на рис. 1)

$$\left| Q_n P_n \Delta t_{n-1} - P_n Q_n \Delta t_{n-1} \right| = 0.$$
 (17)

В измерении частоты этот термин имеет математический смысл наименьшего общего множителя и практически определяет значение временного интервала T_{X0} (рис. 1):

$$T_{XO} = \frac{T_X T_0}{\Delta t_{n-1}} = P_n Q_n \Delta t_{n-1} \,. \tag{18}$$

Это и есть условие для полных совпадений импульсов (рис. 1). Принимая T_{X0} как время измерения в процессе измерении частоты, из (1) и рис. 1 следует:

$$\left| n_X T_X - n_0 T_0 \right| = 0 , \qquad (19)$$

и каждый временной интервал n_0T_0 и n_XT_X равен T_{X0} . Тогда

$$n_0 T_0 = P_n Q_n \Delta t_{n-1} , \qquad (20)$$

$$n_X T_X = P_n Q_n \Delta t_{n-1} \,. \tag{21}$$

Из аксиомы Архимеда [16, ст.7, правило V] следует, что произведение двух чисел ab = c можно рассмотреть как сумму $a+a+a+\dots+a$, в которой число слагаемых равно b, или как сумму $b+b+b+\dots+b$, в которой число слагаемых равно a.

Тогда уравнения (15) и (16) могут быть записаны, используя (20) и (21):

$$n_0 Q_n \Delta t_{n-1} = P_n Q_n \Delta t_{n-1} , \qquad (22)$$

$$n_X P_n \Delta t_{n-1} = P_n Q_n \Delta t_{n-1}$$
. (23)

У выражений (22) и (23) есть смысл только при

$$n_0 = P_n \tag{24}$$

И

$$n_X = Q_n. \tag{25}$$

Условие остановки измерения

В течение маленького времени измерения (меньше или равному 1с) очевидно из уравнения (4), что Δt_{n-1} должен иметь тот же самый порядок величины, что и ожидаемая относительная погрешность измерения β . Тогда, согласно вышесказанному, мы предлагаем, чтобы приемлемая погрешность в (1) была $\varepsilon = \Delta t_{n-1}$.

Принимая десятичное счисления для обоих периодов T_X и T_0 , при условиях $T_X < 1$ и $T_0 < 1$, и считая что эталонный период может быть выражен как $T_0 = 1 \times 10^{-5}$, тогда наибольший общий делитель Δt_{n-1} .

$$\Delta t_{n-1} = (T_X, T_0) = \frac{1}{10^r} (A, 10^{r-s}), \quad (26)$$

где A, r, s – целые числа с r > s; r является показателем степени для ожидаемого порядка величины β , r–s различие между ожидаемым порядком величины β и порядком величины периода времени эталона.

С другой стороны, в соответствии с (25), число временных интервалов T_X , необходимых, чтобы остановить процесс измерения, должно быть Q_n , а из (15)

$$Q_n = \frac{T_0}{\Delta t_{n-1}} \,. \tag{27}$$

Если A и 10^{r-s} в уравнении (26) являются взаимно простыми, тогда $\Delta t_{n-1} = 10^{r-s}$ и

$$Q_n = 10^{r-s},$$
 (28)

и, если они не являются взаимно простыми, тогда $\Delta t_{n-1} = a/10^r$, где a – целое число

$$Q_n = 10^{r-s} / a$$
. (29)

В обоих случаях $1/10^r$ – общий делитель обоих периодов T_X и T_0 .

Тогда из уравнений (16), (24) и (25) следует условие, которое удовлетворяет (19)

$$n_X = 10^{r-s}$$
. (30)

Выражение (30) – числовое условие, которое мы предлагаем для остановки процесса измерения, и его легко осуществить с помощью цифровых микросхем.

Моделирование

В ходе моделирования в МАТLAВ сгенерированы две импульсных последовательности унитарной амплитуды. Значение опорной частоты было принято как $f_0 = 1 \times 10^7$ Гц. Значение неизвестной частоты – $f_X = 5878815.277629991$ Гц, период

 $T_X = 1,701023 \times 10^{-7}$ с. Значение ширины импульса в обоих импульсных последовательностях $\tau = 1,5 \times 10^{-9}$ с.

В этом случае очевидно, что T_X и T_0 – взаимно простые числа и имеют общий знаменатель $\Delta t_{n-1} = 1 \times 10^{-13}$.

Алгоритм моделирования обеспечил непрерывное формирование сегментов n_0T_0 и n_XT_X и сравнение величины их различия с параметром 2τ .

Когда значение указанного различия было меньше, чем 2τ , на соответствующих шагах моделирования, это было идентифицировано как совпадение импульсов, и целые числа n_0 и n_X сохранялись в памяти.

Неизвестная частота вычисляется, используя $f_{Xm} = n_x f_0/n_0$, а относительная ошибка частоты получена, используя $(f_X - f_{Xm})/f_x$; оба результата также сохранены в памяти.

Результаты моделирования частично представлены в табл. 1, и вычисленная относительная ошибка частоты (не абсолютная величина) представлена на рис. 2 в течение времени моделирования 0,2 с. Процесс моделирования начинается при $n_0 = 0$ и $n_X = 0$, и наилучшее приближение отобрано используя условие $n_X = 1 \times 10^6$.

Табл. 1 отражает интересный факт. Для тысяч данных сохраняется тот же самый диапазон погрешности 10^{-13} , как в первой и третьей строке табл. 1. И только когда n_X принимает форму 1 с шестью нолями (второй ряд табл. 1), мы снижаем погрешность до 10^{-17} .

На рис. 2 мы видим глобальную конвергенцию к нолю относительной ошибки измерения частоты β . Чередуемая конвергенция и немонотонность уменьшения значений очевидны. Однако мы можем идентифицировать на графике пункт, где β – минимально, приблизительно в течение 0,17 с. В этой точке теоретическая ошибка строго равна нулю. Практически это означает, что ошибка определена только естественным шумом эталонного источника частоты.

Таблица 1 Результаты моделирования процесса измерения частоты

| n _X | <i>n</i> ₀ | $\left n_{X}T_{X}-n_{0}T_{0}\right $,s | f_{Xm} , Hz |
|----------------|-----------------------|---|-------------------|
| 957087 | 1628027 | $1,00.10^{-13}$ | 5878815,277633602 |
| 1000000 | 1701023 | $2,78 \cdot 10^{-17}$ | 5878815,277629991 |
| 1042913 | 1774019 | $1,00.10^{-13}$ | 5878815,277626677 |



Рис. 2. Относительная погрешность частоты в соответствии с моделированием

Погрешность частоты при выборе наилучших совпадений, полученных при условии (1) с $\varepsilon = 1 \times 10^{-12}$, представлена на рис. 3. На этом графике мы можем наблюдать с левой стороны схождение (конвергенцию) и с правой – расхождение – около 0,17 с (точка 1 на рис. 3). Это повторяется со временем периодически,

и мы можем видеть пять точек, где абсолютная величина β – минимальна, в течение времени моделирования 1 с. На каждом из 5 интервалов удовлетворено условие (30). Временной интервал наблюдения 1 с очень важен, например, для систем GPS, где 1 с, как правило, – период опроса.



Рис. 3. Относительная погрешность при моделировании для 1 с

Это доказывает нечто важное для практики: при наблюдении за процессом совпадения двух независимых импульсных сигналов, неизвестных и эталонных, есть различные точки, где теоретическая погрешность равна нолю (рис. 3). Следовательно, в этих точках мы можем узнать результат измерения частоты теоретически со степенью точности как для долгосрочного наблюдения за стандартом высокой стабильности. Очевидно, что при увеличении обеих частот эти точки будут появляться в более коротком временном интервале с большим их количеством. Для практики это означает, что возможно получить точное значение измеряемой частоты чрезвычайно быстро. Во многих задачах мехатроники и автоматики это требование недостижимо для нынешнего электронного оборудования. Это значит, что наш теоретический метод открывает новые технологические возможности.

Выводы

В предлагаемой модели для быстрого измерения частоты результат основан на равенстве интервалов n_0T_0 и n_XT_X n_XT_X . Поэтому модель независима от параметров схем совпадения, продолжительности и формы импуль-

сов совпадения в обеих последовательностях. Инструментальные ошибки вызваны только воспроизводимостью эталонной частоты.

Для измерений высоких значений частоты целесообразно использовать более высокие эталонные частоты, что даст эквивалентное сокращение времени измерения.

Важно отметить, что этот теоретический метод разрешает измерять неизвестное значение частоты в случае, когда неизвестная частота превышает собственное значение стандарта. Для классических методов это полностью невозможно.

Те же самые результаты могут быть получены по точному стандарту частоты [15], используя распределение Аллана, но для этого необходимо лабораторное наблюдение за обеими импульсными последовательностями по крайней мере в течение 24 часов. Очевидно, что тот же самый порядок ошибки может быть гарантирован нашим критерием в течение малого количества циклов совпадения, малых долей секунды. Этот вывод делает наш метод чрезвычайно привлекательным для задач мехатроники, где решение должно приниматься как можно быстрее.

Литература

- Shmaliy Y.S. An unbiased FIR filter for TIE model a local clock in applications to GPS-Based timekeeping / Y.S. Shmaliy // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. – May 2006. – Vol. 53, No. 5. – P. 862–870.
- Clarkson V. On the novel application of number theoretic methods to radar detection / V. Clarkson, J. Perkins, I. Mareels // Proc. Internat. Conf. Signal Process. Appl. Tech. – October 1993. – Vol. 1. – P. 1202–1211.
- Bulst W.E. State of the art in wireless sensing with surface acoustic waves/ W.E. Bulst, G. Fischerauer, L. Reindl // IEEE Trans., Ind., Electron. – April 2001. – Vol. 48. – P. 265–271.
- Hernandez-Balbuena D. Method for phase shift measurement using farey fractions / D. Hernandez-Balbuena, M. Rivas, L. Burseva, O. Sergiyenko, V. Tyrsa // IEEE Proc. MEP2006. – November 2006 – P. 181–184.
- S. Richards P.I. Probability of coincidence for two periodically recurring events / P.I. Richards // Ann. Math. Stat. – March 1948. – Vol. 1, No. 1. – P. 16–29.
- Miller K.S. On the interference of pulse trains/ K.S. Miller, R.J. Schwarz // J. App. Phys. – August 1953. – Vol. 24, No. 8. – P. 1032–1036.
- Friedman H.D. Coincidence of pulse trains/ H.D. Friedman // J. App. Phys. – August 1954. – Vol. 25, No. 8. – P. 1001–1005.
- Vaughan I. Number theoretic solutions to intercept time problems/ I. Vaughan, L. Clarkson, J.E. Perkins, I.M.Y. Mareels //

IEEE Trans. Inform. Theory. – May 1996. – P. 42(3):959–971.

- Tyrsa V.E. Error reduction in conversion of analog quantities to digitized time intervals / V.E. Tyrsa // Measurement Techniques. – 1975. – Vol. 18, No. 3. – P. 357–360.
- Tyrsa V.E. Accuracy of frequency measurement base on the pulses coincidence principle / V.E. Tyrsa, V.V. Dunashev // Measurement Techniques. – 1981. – Vol. 24, No. 43. – P. 308–312.
- 11. J.C. Fletcher, Frequency measurement by coincidence detection with standard frequency. U. S. Patent 3, 924,183. 1975.
- Wei Z. The greatest common factor frequency and its application in the accurate measurement of periodic signals / Z. Wei // Proceedings of the 1992 IEEE Frequency Control Symposium. – 1992. – P. 270–273.
- Tyrsa V.E. Analysis of errors in frequency comparison by the pulse coincidence method / V.E. Tyrsa, A.D. Zenya // Measurement Techniques. – 1983. – No. 7. – P. 49–51.
- 14. Pavlis N.K. The relativistic redshift with 3×10^{-17} uncertainty at NIST, Boulder, Colorado, USA / Nikolas K. Pavlis and Marc A. Weiss // Metrologia, Bureau International des Poids et Mesures. 2003. No. 40. P. 66-73.

Рецензент: М.А. Сергиенко, профессор, д.т.н., XHAДУ.

Статья поступила в редакцию 15 июня 2011 г.