

ВРАХУВАННЯ ПОЗДОВЖНИХ ДЕФОРМАЦІЙ В МЕТОДІ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ РОЗРАХУНКАХ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ РАМ

*О.А. Воровик, Є.С. Терех, ДМ-31-21, М.М. Іщенко, ДМ-26т1-22
Науковий керівник: проф. каф. МКіБМ О.Г. Кіслов
Харківський національний автомобільно-дорожній університет*

Відомий метод переміщень являє собою метод розрахунку статично невизначених систем і може бути застосований для розрахунку різних будівель і споруд. Однак найбільшого розповсюдження він отримав для розрахунку статично невизначених рам, що складаються з прямолінійних стержнів [1].

В методі переміщень в якості невідомих приймаються кутові та лінійні переміщення. Так при жорсткому з'єднанні стержнів у вузлах їх кути повороту не відрізняються між собою, тому потрібно визначати кут повороту всього вузла. Кут повороту викликає внутрішні зусилля у стержнях, що сходяться у вузлі, однак жорсткі вузи можуть здійснювати як кутові, так і лінійні (горизонтальні та вертикальні) переміщення. При шарнірному з'єднанні стержнів їх кути повороту відмінні, що не впливає на величину внутрішніх зусиль. Тому шарнірні вузли здійснюють тільки лінійні переміщення.

В цьому методі прийняті наступні припущення:

- відстань між вузлами стержнєвої системи після деформації стержнів дорівнює первісній довжини стержня;
- урахується тільки деформація згину, а поздовжньою та поперечною деформаціями нехтують.

При вивченні курсу «Будівельна механіка. Спеціальний курс» ми застосували метод переміщень з використанням припущень про відсутність поздовжніх деформацій стержнів рами. Це означає, що поперечні та поздовжні

сили при визначенні коефіцієнтів та вільних членів канонічних рівнянь не враховувалися [2].

Оскільки для розрахунку статично невизначеної рами методом переміщень необхідно визначати кутові і лінійні переміщення її вузлів, число невідомих називають ступенем кінематичної невизначеності, а рама є кінематично невизначеною.

В цієї роботі ми досліджували роботу кінематично невизначеної рами методом переміщень з урахуванням поздовжніх деформацій стержнів рами [3].

Розглянемо металеву раму з прямолінійних стержнів (рис.1).

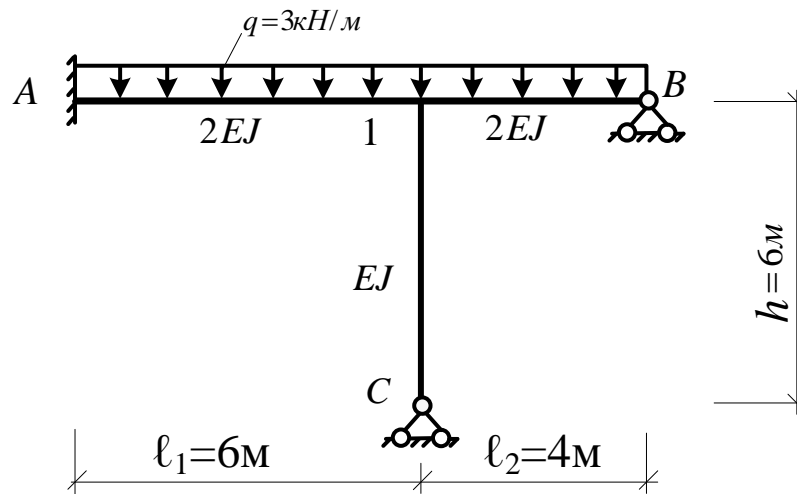


Рис. 1 – Задана рама

Попередньо орієнтовно визначені геометричні характеристики перерізів стержнів рами (осьові моменти інерції та площі перерізів). На рис.1 показані жорсткості елементів рами: ригелі мають $2EJ$, стояк – EJ .

Для аналізу впливу поздовжніх деформацій в методі переміщень, спочатку виконали розрахунок рами без врахування поздовжніх деформацій стержнів, тобто при розрахунку зробили припущення.

Тоді кількість кутових переміщень $n_k=1$, лінійних переміщень $n_d=0$.

В основній системі вводиться тільки одне жорстке закріплення у жорсткий

вузол рами 1 (рис.2). Еквівалентна система показана на рис. 3.

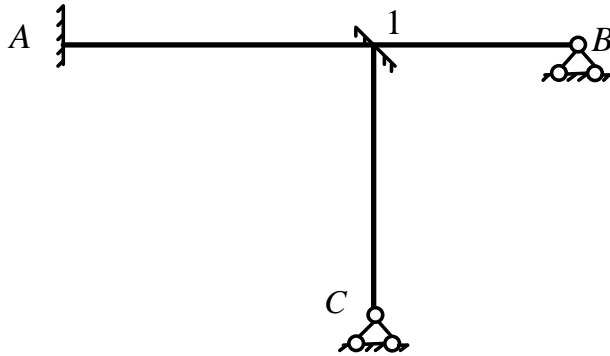


Рис. 2 – Основна система без
урахування поздовжніх деформацій
стержнів

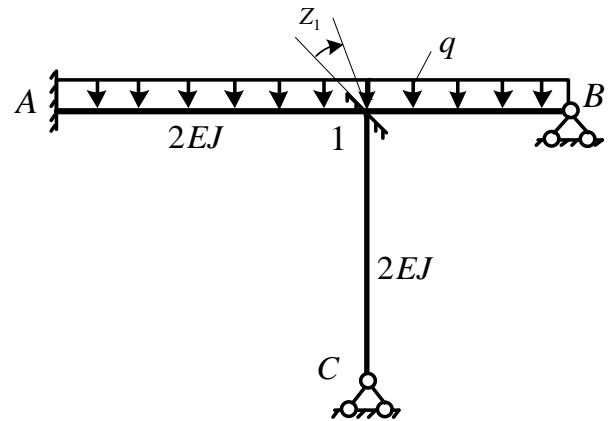


Рис. 3 – Еквівалентна система

За відомим алгоритмом було складено одне рівняння для знаходження невідомого кута повороту Z_1 , визначені коефіцієнт та вільний член рівняння, розв'язане рівняння та побудована епюра розрахункових згинальних моментів.

Результат розрахунку у такому варіанті – розрахункова епюра згинальних моментів наведена на рис. 4.

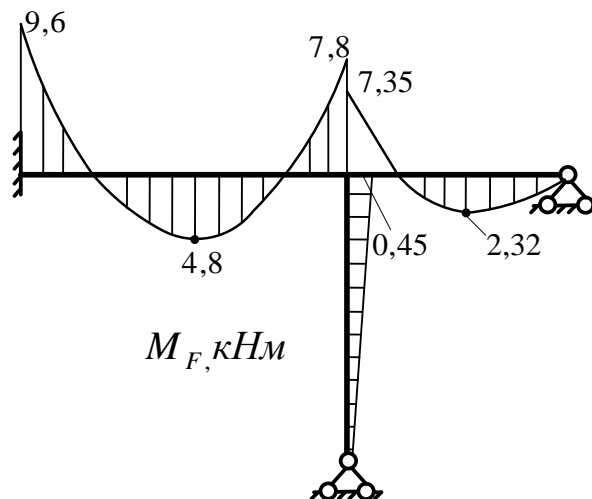


Рис. 4 – Розрахункова епюра згинальних моментів без урахування поздовжніх
деформацій стержнів

В дійсності за рахунок подовжень стержнів рами від дії зовнішнього навантаження вузол 1 не тільки може повертатися а й переміщуватися лінійно у двох напрямках: вертикальному і горизонтальному. Тому крім введення жорсткого закріплення 1, необхідно ще закріпити його і для запобігання лінійних зміщень, тобто ввести два опорних стержня 2 і 3 та отримати основну систему (рис.5). Еквівалентна система наведена на рис. 6, де показано зовнішнє навантаження та три невідомих: Z_1 – кутове зміщення, Z_2, Z_3 – лінійні (вертикальне, горизонтальне) зміщення вузла 1.

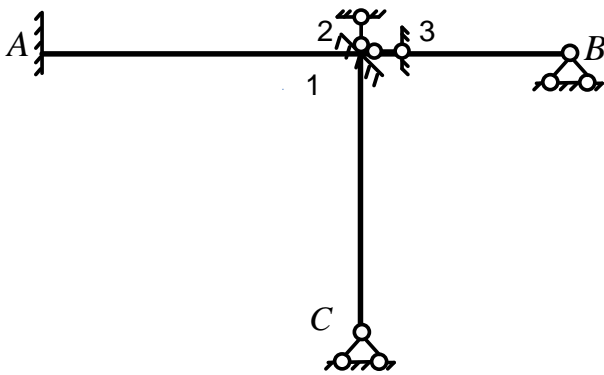


Рис. 5 – Основна система з
урахуванням поздовжніх деформацій
стержнів

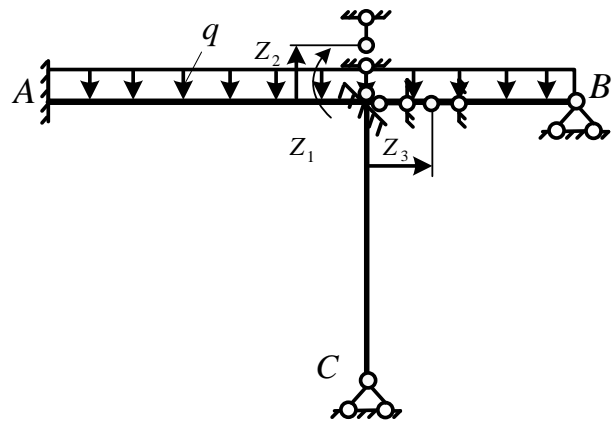


Рис. 6 – Еквівалентна система

Для визначення трьох невідомих переміщень складемо систему трьох канонічних рівнянь, яка має такий вигляд:

$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1F} = 0$ – сума реактивних моментів у жорсткому закріпленні 1 від кутового, лінійних зміщень та зовнішнього навантаження;

$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2F} = 0$ – сума реакцій у вертикальному стержні 2 від кутового, лінійних зміщень та зовнішнього навантаження;

$r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3F} = 0$ – сума реакцій у горизонтальному стержні 3 від кутового, лінійних зміщень та зовнішнього навантаження.

Обчислення коефіцієнтів та вільних членів канонічних рівнянь виконуються за допомогою епюр одиничних згинальних моментів: від $Z_1 = 1$, від $Z_2 = 1$, від $Z_3 = 1$, вантажної епюри моментів від зовнішнього навантаження.

Одиничні та вантажні епюри будуються за допомогою таблиці стандартних розв'язків статично невизначених елементів основної системи методу переміщень. При побудові одиничних епюр згинальних моментів необхідно показувати схему деформацій елементів основної системи.

Однак дія Z_2 і Z_3 викликають не тільки згинальні моменти та зв'язані з ними поперечні сили, а й поздовжні сили.

Поперечні сили визначаються за диференціальними залежностями

$$\frac{dM}{dx} = Q \Rightarrow Q = \pm \frac{q\ell}{2} + \frac{M_{\text{пр}} - M_{\text{лів}}}{\ell}.$$

Поздовжні сили визначаються за розгорнутим законом Гука

$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA} \Rightarrow N = \frac{EA}{\ell}, \text{ якщо } \Delta\ell=1.$$

На рис. 7, 8, 9 показано схеми деформування стержнів та побудовані одиничні епюри, на рис. 10 – вантажна епюра.

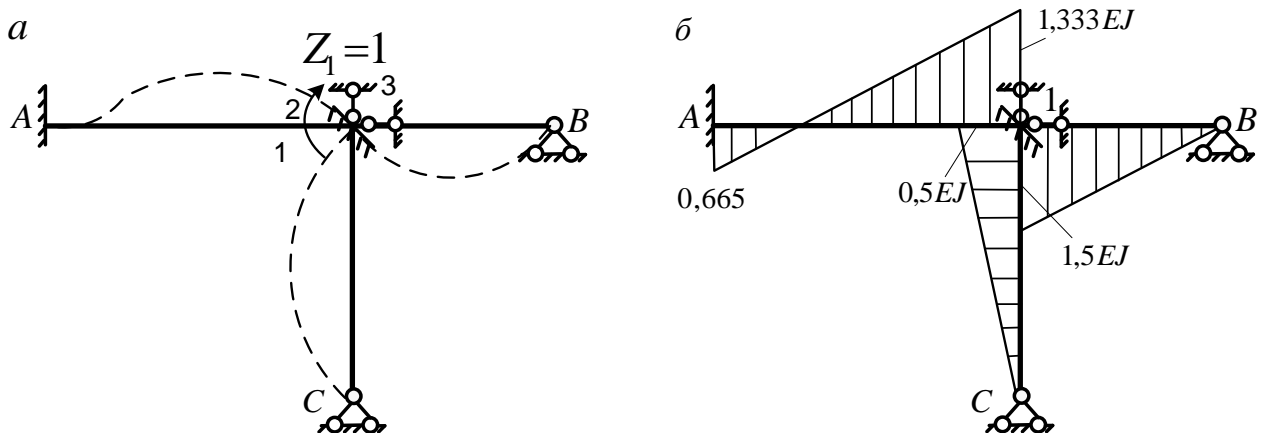


Рисунок 7 – До побудови епюри \bar{M}_1 :

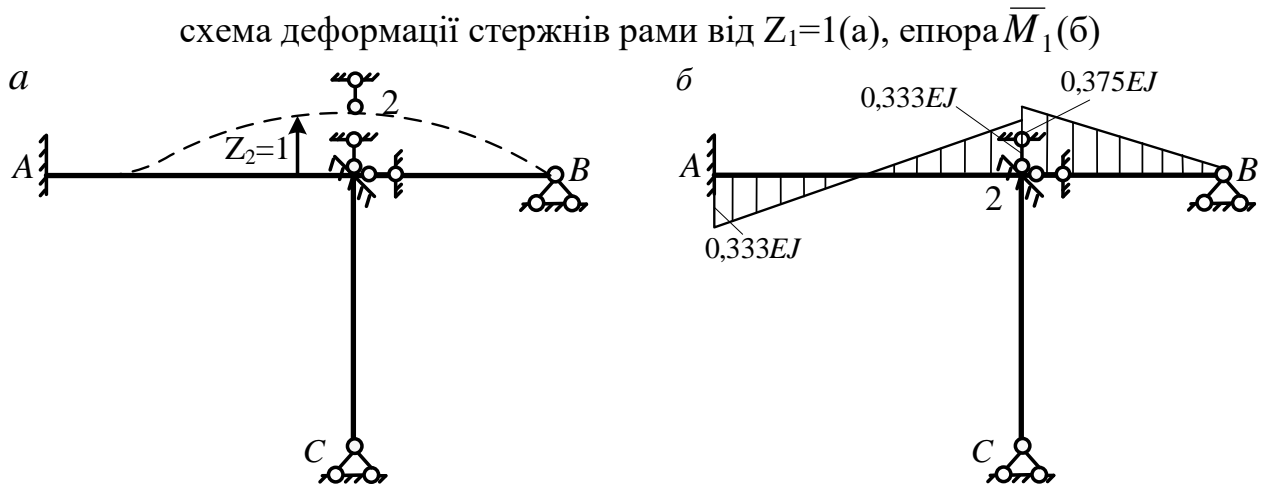


Рисунок 8 – До побудови епюри \bar{M}_2 :

схема деформації стержнів рами від $Z_2=1$ (а), епюра \bar{M}_2 (б)

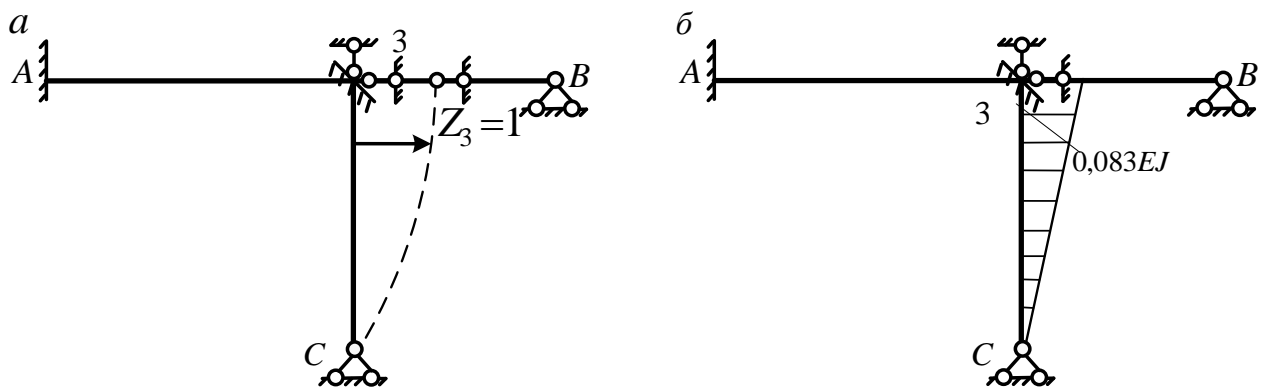


Рисунок 9 – До побудови епюри \bar{M}_3 :

схема деформації стержнів рами від $Z_3=1$ (а), епюра \bar{M}_3 (б)

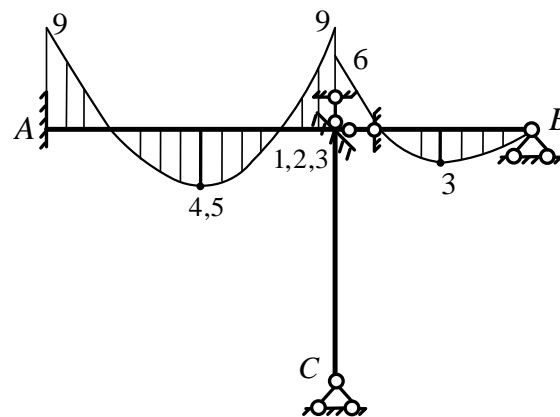


Рисунок 10 – Епюра M_F^o

Значення поперечних і поздовжніх сил наведені у табл. 1.

Таблиця 1 – Значення поперечних і поздовжніх сил від $Z_1 = 1, Z_2 = 1, Z_3 = 1$

і зовнішнього навантаження

Стержень	Поперечні сили				Поздовжні сили		
	з епюр згинальних моментів				від $Z_1 = 1$	від $Z_2 = 1$	від $Z_3 = 1$
	\bar{M}_1	\bar{M}_2	\bar{M}_3	M_F^o			
А – 1	-0,333EJ	-0,333EJ	0	-9	0	0	EA_1/ℓ_1
1 – В	-0,375EJ	-0,094EJ	0	7,5	0	0	EA_2/ℓ_2
С – 1	-0,083EJ	0	-0,014EJ	0	0	EA_3/h	0

Коефіцієнти та вільні члени канонічних рівнянь уявляють собою реактивні зусилля в накладених зв'язках у жорсткому вузлі рами, то їх можна знайти з умов рівноваги вузла і частини рами.

Будь-які реактивні зусилля визначаються методом вирізування складного вузла рами, а також відокремленої частини рами. В цьому вузлі виникають три реактивні складові: реактивний момент і дві опорні реакції від окремо прикладених одиничних переміщень, зовнішнього навантаження та поперечних і поздовжніх сил.

Так:

- реактивні складові r_{11}, r_{21}, r_{31} виникають у складному вузлі рами від дії згинальних моментів і поперечних сил (рис. 11, а);

- реактивні складові r_{12}, r_{22}, r_{23} виникають у тому ж складному вузлі рами від дії згинальних моментів, поперечних і поздовжніх сил (рис.11, б);

- реактивні складові r_{13}, r_{23}, r_{33} у складному вузлі рами від дії згинальних моментів, поперечних і поздовжніх сил (рис. 11, в);

- реактивні складові R_{1F}, R_{2F}, R_{3F} - у складному вузлі рами від дії згинальних моментів і поперечних сил (рис. 11, г).

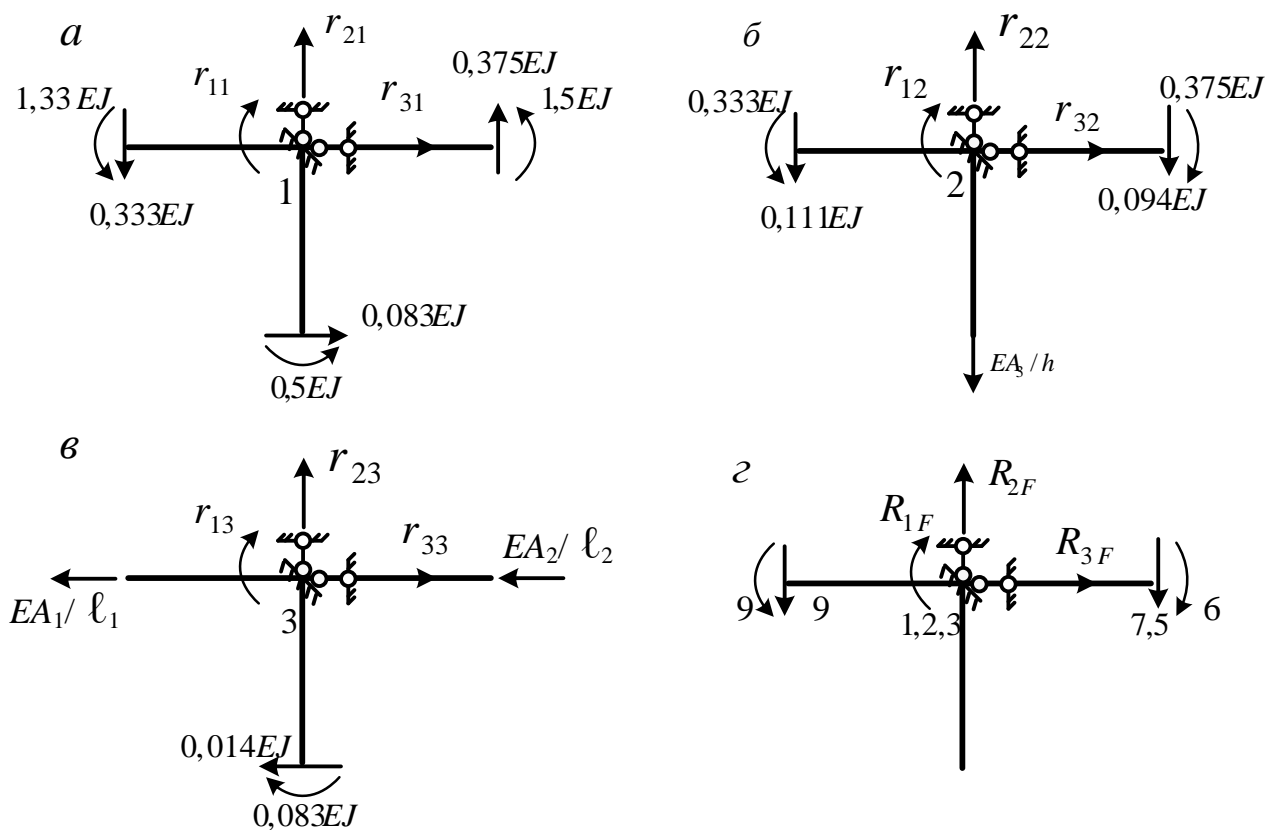


Рисунок 11 – До визначення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь: реакції r_{11} , r_{21} , r_{31} (а), реакції r_{12} , r_{22} , r_{3-2} (б), реакції r_{13} , r_{23} , r_{33} (в), реакції R_{1F} , R_{2F} , R_{3F} (г)

Обчислені значення реактивних зусиль наведені у табл. 2

Оскільки значення реактивних зусиль r_{22} і r_{33} мають складний вигляд, необхідно у всі реактивні зусилля від одиничних переміщень підставити геометричні характеристики перерізів елементів рами, які були обчислені на початку розрахунку. Було прийнято, що ригелі мають осьові моменти інерції $2J$, стояки J , де $J=572\text{см}^4$, площі перерізів ригелів приймаються $A_p=23,4\text{см}^2$, стояку $A_c=17,4\text{см}^2$.

Таблиця 2 – Значення реактивних зусиль

Причина спричинювання реакцій	Реакції у відповідних зв'язках		
	у жорсткому закріпленні	у вертикальному зв'язку	у горизонтальному зв'язку
$Z_1 = 1$	$r_{11} = -0,333EJ$	$r_{21} = -0,042EJ$	$r_{31} = -0,083EJ$
$Z_2 = 1$	$r_{12} = -0,042EJ$	$r_{22} = 0,205EJ + EA_3/h$	$r_{32} = 0$
$Z_3 = 1$	$r_{13} = -0,083EJ$	$r_{23} = 0$	$r_{33} = 0,014EJ + EA_1/\ell_1 + EA_2/\ell_2$
Зовнішнє навантаження	$R_{1F} = 3$	$R_{2F} = 16,5$	$R_{3F} = 0$

Після підстановки коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь система набуває вигляду:

$$\begin{aligned} 19,06 \cdot 10^{-6} EZ_1 - 0,24 \cdot 10^{-6} EZ_2 - 0,475 \cdot 10^{-6} EZ_3 + 3 &= 0; \\ -0,24 \cdot 10^{-6} EZ_1 + 291 \cdot 10^{-6} EZ_2 + 0 &+ 16,5 = 0; \\ -0,475 \cdot 10^{-6} EZ_1 + 0 &+ 975 \cdot 10^{-6} EZ_3 + 0 = 0. \end{aligned}$$

У наслідок розв'язку системи маємо

$$Z_1 = -\frac{33272}{E} \text{ рад}; Z_2 = \frac{27,28}{E} \text{ м}; Z_3 = -\frac{16906,8}{E} \text{ м}.$$

Розрахункову епюру згинальних моментів M_F отримуємо також, як і за варіантом без урахування поздовжніх деформацій. Однак, слід значення ординат одиничних епюр помножити на значення J .

Розрахункова епюра згинальних моментів з урахуванням поздовжніх деформацій показана на рис. 12.

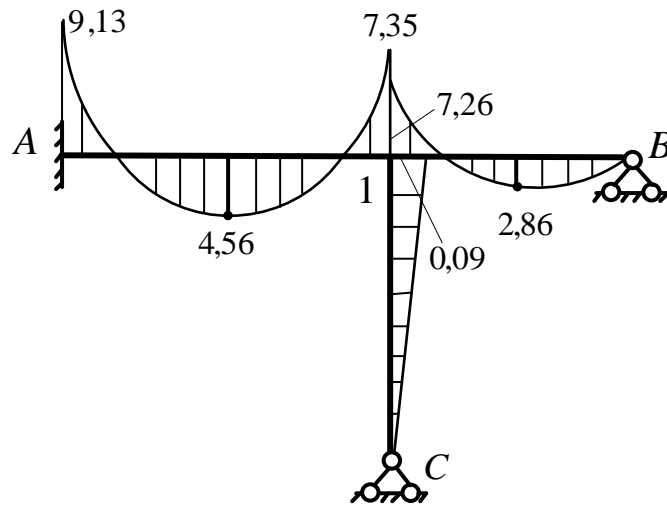


Рисунок 12 – Розрахункова епюра згинальних моментів з урахуванням поздовжніх деформацій

Результати розрахунків за двома варіантами, що наведені на рис. 4 та рис. 12 відрізняються незначно. Однак врахування поздовжніх деформацій стержнів дозволяє забезпечити точність результатів розрахунку більш складної розрахункової схеми рами за допомогою формування масиву вихідних даних об'єкта, що розраховується.

Висновки

1. Проведене дослідження показує, що розглянутий варіант методу переміщень робить його універсальним та, не дивлячись на складність обчислень, дає найбільшу степінь їх формалізації, тобто покращує процес подання інформації про об'єкт, що розраховується на ЕОМ. Тому його слід використовувати для складання алгоритму розрахунку складних стержньових систем.

2. При застосуванні ЕОМ число невідомих не настільки суттєве, тому розглянутий варіант методу переміщень дозволяє забезпечити точність розв'язку, що є вирішальним для прийняття інженерного рішення.

Таким чином по своєму сенсу метод переміщень в такому вигляді являє собою частковий випадок більш загального методу скінченних елементів, який використовується при чисельному розв'язуванні складних проблем у механіці будівельних споруд.

Метод переміщень без урахування поздовжніх деформацій рекомендується застосовувати для аналізу роботи існуючих будівельних конструкцій та оцінки їх міцності для прийняття рішення його подальшої експлуатації.

Перелік посилань

1. Чихладзе Е.Д. Будівельна механіка: Підручник.- Харків: УкрДАЗТ, 2011.- 320с.
2. Статично невизначені системи інженерних споруд на автомобільних дорогах: Навчальний посібник В.О.Голеско, О.Г.Кіслов, О.М.Кобзева.- Х.: ХНАДУ, 2015.- 268с.
3. Будівельна механіка: Підручник для студентів будівельних спеціальностей вищих навчальних закладів / Ю.І.Бутенко, М.О.Засядько, С.Н.Кан і інш.; Під ред. Ю.І. Бутенко.-К.: Вища школа, 1989.-476с.