ТРАНСПОРТНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 656.051 DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2021.92.1.214

ІМОВІРНІСТЬ ВИНИКНЕННЯ НЕПОВНОЇ ПАЧКИ АВТОМОБІЛІВ ПІД ЧАС КООРДИНОВАНОМУ КЕРУВАННІ НА МІСЬКІЙ МАГІСТРАЛІ

Горбачов П. Ф.[1], Макарічев О. В.[1], Шевченко В. В.[1]
[1]Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. *На стандартних для дорожніх світлофорів з постійним циклом регулювання припущеннях побудована залежність імовірності нульової черги наприкінці дозвільного сигналу, яка є стаціонарною оцінкою імовірності виникнення неповної пачки автомобілів залежно від рівня завантаження напрямку руху. Вона збігається з аналогічною оцінкою для однолінійної системи масового обслуговування з необмеженою чергою, отриманою за допомогою марківської моделі. Лінійний тип отриманої моделі та уповільнене зростання навантаження в процесі збільшення пачки автомобілів у зеленій хвилі дозволяє вільно вибирати її розмір під час складання планів магістральної координації у містах з огляду на мінімізацію часу затримок учасників руху під час подолання координованої ділянки міської магістралі.*

Ключові слова: *план координації, пачка автомобілів, рівень завантаження перехрестя, імовірність, система масового обслуговування.*

Вступ

Перехрестя вулиць в одному рівні нині є та завжди залишаться основним засобом організації взаємодії потоків учасників дорожнього руху в містах. Така важлива функція перехресть зумовлена обмеженістю міського простору, високою вартістю створення багаторівневих розв’язок та їхньою незручністю для немеханізованих учасників руху – пішоходів і велосипедистів. Остання властивість, під час вирішення питань раціональної організації дорожнього руху (ОДР) визначає важливість врахування інтересів не лише автомобілістів, а й інших учасників руху. Але автомобілі створюють основне навантаження на міські вулиці завдяки своїм розмірам, а тому саме вони є головною причиною виникнення проблем зі створенням максимально безперешкодного руху у містах, а водії та пасажири автомобілів найбільше потерпають від негативних наслідків реалізації неефективних варіантів ОДР на міських вулицях. Підвищення ефективності ОДР для автомобілів автоматично надає можливості для покращення умов руху й для інших його учасників.

Постійно висока актуальність проблем раціоналізації ОДР у містах зумовлена значною кількістю учасників руху та постійним виникненням людських потреб у пересуваннях містом. Крім жорсткої координації роботи світлофорів, найбільш доступними способами покращення умов дорожнього руху (ДР) у містах є оптимізація жорстких циклів світлофорного регулювання. У сучасних умовах в Україні ці два способи зазвичай вимагають для своєї реалізації лише людських, а іноді й програмних ресурсів.

Організація координованої роботи світлофорів на міській магістралі вимагає об’єктивного аналізу результатів реалізації альтернативних варіантів побудови зеленої хвилі [1], яка забезпечує вибір найбільш ефективного з них.

Запропонована в роботі [2] методика побудови зеленої хвилі на міській магістралі в обох напрямках руху у своїй аналітичній частині вимагає вибору довжини пачки автомобілів, яка повинна базуватися на розрахунках витрат часу всіх автомобілів, що прямують вздовж магістралі або перетинають її. З огляду на випадковий тип транспортного потоку (ТП) на вході до координованої ділянки збільшення кількості автомобілів, які повинні складати пачку для безперешкодного руху вздовж магістралі необхідно знижувати й навантаження рухом на цьому вході. Але це може призвести до зростання імовірності того, що проміжок часу в циклі для проїзду пачки буде використаний неповністю. Оскільки тривалість циклу регулювання є однаковою для всіх світлофорів координованої ділянки магістралі, використання часу циклу та зростання загальних витрат часу учасників руху на подолання всіх перехресть у плані координації (ПК) є неефективним.

Тому питання визначення імовірності такої події є актуальним, вирішення якого дозволить вибрати правильну стратегію побудови зеленої хвилі.

Аналіз публікацій

Випадковий тип транспортних та пішохідних потоків був предметом дослідження великої кількості робіт, у яких оцінюється імовірність тих, чи інших подій у транспортному процесі. Але детермінований тип планів координації призвів до того, що основна частина досліджень саме в цій сфері не враховує випадковий тип ТП у процесі розрахунків параметрів плану.

Так, відома у світі програма автоматизованого розрахування магістрального ПК MAXBAND [3] взагалі використовує фактичні транспортні потоки лише для розрахування тривалості циклу світлофорного регулювання. Для цього використовується загальновідома залежність Вебстера [4]. Крім автоматичного вибору часу циклу з заданого діапазону, можливості програми також дозволяють проектній швидкості змінюватися в межах заданих допусків, вибирати найкращу схему розташування фази для лівоповоротних потоків із заданого набору, надавати час на розвантаження перед світлофором черги автомобілів, що приїжджають на магістраль з другорядних напрямків до прибуття пачки, враховувати визначені користувачем ваги для зелених смуг у кожному напрямку руху вздовж магістралі та обробляти просту трикутну мережу. Але всі ці можливості програми [3] базуються на використанні лише геометрії ділянок міської магістралі, тому взагалі не вимагають врахування імовірнісного типу ТП.

Цей метод використовувався на декількох напрямках руху [5] набув практичного застосування та відображений у багатьох наукових статтях. Найбільш повний аналіз його можливостей та переваг наведений у роботі [6], але в ній не враховано імовірнісний тип ТП на координованій ділянці.

Запропонований авторами MAXBAND та MULTIBAND метод та програмне забезпечення є інструментальною основою для багатьох досліджень ПК, які здійснюють і нині. Одним із прикладів таких досліджень є робота [7], в якій ефективність модифікованого алгоритму MULTIBAND оцінювалась вже за допомогою імітаційного моделювання. Це свідчить про сприймання авторами реальної випадковості процесів, які трапляються на вулично-дорожній мережі міст, але автори робіт [7] не враховували це безпосередньо в методиці формування ПК.

Концептуальна загальність розроблених підходів до складання планів магістральної координації визначена роботах [8] та [9], де знов пропонується застосовувати формулу Вебстера [4] для розрахування тривалості світлофорного циклу в ПК, а також використовується геометричний (або географічний) принцип розрахування зсувів початку циклу для різних світлофорів та порядку фаз у них. Такий підхід не залишає місця для імовірнісного аналізу параметрів функціонування зеленої хвилі.

Не привнесло кардинальних змін у методики побудови ПК також і створення адаптованих систем координованого керування [10]. Вони відрізняються від «жорстких» методик можливістю змінювати розподіл часу циклу між різними фазами та навіть їхній порядок відповідно до реальної транспортної ситуації. Це дозволяє суттєво скоротити кількість закладених у систему планів, але сам підхід до їхнього розрахування практично не змінюється.

Значно більшою мірою випадковість процесу прибуття автомобілів до перехрестя враховується в процесі жорсткого світлофорного керування на локальному перехресті, якому приділено набагато більше уваги в науковій літературі, ніж координованому керуванню. Визначення завдання в цьому випадку практично нічим не відрізняється від умов функціонування першого світлофора на вході до координованої ділянки міської магістралі.

Початком досліджень процесів формування черг на регульованих перехрестях можна вважати роботу [11], де була побудована досить проста аналітична модель, яка була розвинена у подальших дослідженнях [12, 13]. Ці роботи вперше надали імовірнісну оцінку довжини черги перед регульованим перехрестям та заклали підгрунтя для багатьох робіт.

Але, на жаль, здійснювався аналіз лише незначного навантаження перехрестя рухом, тобто висувалося припущення, що всі автомобілі, які накопичувалися перед світлофором за час заборонного сигналу, обов’язково встигнуть залишити перехрестя разом з тими автомобілями, що приїдуть за час дозвільного сигналу. Тобто імовірність виникнення неповної пачки автомобілів, які заповнюють зелену фазу циклу світлофорного регулювання, у роботах [11–13] завжди дорівнює 1.

Спроби дослідників локального керування розширити діапазон можливого навантаження перехрестя рухом та оцінити довжину черги переповнення у всіх випадках призводили до отримання складних формул з багатьма незалежними факторами, які не дозволяють сформувати оптимальну стратегію визначення раціональної довжини пачки автомобілів на вході до зеленої хвилі. Прикладом такого дослідження є робота [14], у якій підсумкова залежність середньої черги на кінець заборонного сигналу містить не лише три звичайних доданки, а ще й суму змінної кількості елементів (четвертий доданок). За допомогою такої моделі визначитися з раціональною довжиною пачки, від якої залежить час затримки учасників руху на декількох перехрестях, навряд чи буде можливим.

З іншого боку, довжина черги має свою стаціонарну оцінку для стандартних систем масового обслуговування, які також використовуються в транспортних процесах. Прикладом такого використання є робота [15], у якій проаналізовано марківську модель однолінійної системи масового обслуговування з необмеженою чергою. На вході застосовується найпростіший пуассонівський потік з відомою інтенсивністю. В однолінійній системі обслуговування з необмеженою чергою також задається інтенсивність обслуговування заявки. Отримана за таких умов модель достатньо точно описує кількість автомобілів у ланцюзі, що рухаються безпосередньо один за одним з певною швидкістю.

Аналіз матеріалу, викладений у цій книзі, використано в інших джерелах (наприклад, в [16]), зокрема в стандартних для теорії масового обслуговування позначеннях. Але робота [15] цікава насамперед як приклад успішного застосування теорії масового обслуговування для дослідження транспортних процесів. У ній стаціонарна імовірність відсутності заявок у системі, тобто імовірність вільного періоду, отримана в найпростіших припущеннях про показниковий тип розподілу часу щодо зміни випадкової кількості заявок у системі. Вона дорівнює

$$P_0 = 1 - \rho, \tag{1}$$

де ρ – рівень навантаження на канал обслуговування (смугу руху) для транспортного процесу.

У роботі [15] ця та інші залежності використовувались для дослідження довжини черги перед шлагбаумом на в'їзді до паркування. Для використання на регульованому перехресті вона є неприйнятною через спосіб її використання, заснований на ланцюгах Маркова.

Застосування цього підходу засновано, по-перше, на припущенні про показниковий закон розподілу часу обслуговування, а по-друге, на аналізі звичайної однолінійної системи масового обслуговування зі стандартною дисципліною обслуговування FIFO – обслуговування згідно з порядком надходження заявок (індивідуальне обслуговування заявок.

Робота світлофорів значно відрізняється від наведених умов через груповий спосіб обслуговування заявок, який не лише сам викликає відмінності від попереднього визначення завдання, а ще й призводить до практично постійного часу обслуговування однієї заявки, що цілком спростовує припущення про його показниковий розподіл.

Тому пошук імовірності виникнення неповної пачки автомобілів у процесі координованого керування на міській магістралі залишається необхідним для умов, які виникають на першому перехресті координованої ділянки міської магістралі. А вже відома імовірність (1) може бути дійсною і за інших, тобто більш слабких припущеннях. Вона є наслідком закону великих чисел Колмогорова, але не може використовуватися для аналізу імовірності, що вивчають у цій роботі, без доведення її придатності для цього випадку.

Мета і постановка завдання

Джерела прибуття автомобілів до координованої ділянки міської магістралі можуть бути найрізноманітнішими, але малоймовірно, що серед них знайдеться регульоване перехрестя з такою самою тривалістю циклу, як і та, що буде визначена в процесі побудови ПК, або з кратною до неї. Внаслідок цього найбільш точним припущенням про вхідний до перехрестя ТП буде його пуассонівський тип, який, як відомо, виникає як результат взаємодії великої кількості подій.

Дійсно, прибуття до перехрестя у проміжок часу, що дорівнює тривалості циклу, є нечастою подією для будь-якого автомобіля з потоку, а кількість автомобілів, які створюють ТП на міській магістралі у завантажені години доби, є великою. Інші регульовані перехрестя на шляху до координованої ділянки будуть корегувати умови надходження автомобілів, але за різної тривалості імовірнісні оцінки черги значно не зміняться.

Це дозволяє використовувати найпростіший потік для аналізу ТП, що прибуває до першого перехрестя координованої ділянки міської магістралі, та отримувати стаціонарні оцінки характеристик. Розвантаження напрямку руху здійснюється відповідно до умов регулярного потоку, в якому час між сусідніми подіями дорівнює тривалості заборонного сигналу.

Час обслуговування одного автомобіля необхідно прийняти як постійну величину, оскільки його більш високі значення відносно часу проїзду перехрестя більшістю автомобілів помітні лише для перших трьох–чотирьох одиниць, після яких він стабілізується. Така мала кількість автомобілів у пачці зеленої хвилі може бути винятком, а тому припущення щодо постійного часу обслуговування одного автомобіля в цьому випадку є достатньо коректним. Воно є загальноприйнятим та єдиним для всіх моделей, які описують процеси функціонування світлофорних об'єктів на регульованих перехрестях.

Оцінкою досліджуваної імовірності виникнення неповної пачки автомобілів у процесі координованого керування на ділянці міської магістралі є стаціонарна імовірність відсутності черги наприкінці дозвільного сигналу світлофора.

Аналітичний аналіз стаціонарної імовірності виникнення неповної пачки автомобілів

Зазначені вище припущення є підґрунтям для виведення досліджуваної залежності з самого початку без прийняття додаткових умов, які не відповідають роботі світлофорного об'єкта з постійною тривалістю циклу.

Для цього ми висловлюємо припущення що інтенсивність автомобілів в обраному напрямку руху дорівнює λ. Виріжемо з осі часу його інтервали, на яких діє заборонний сигнал. Проїзд автомобілів через перехрестя в обраному напрямку ми подамо як систему масового обслуговування з вхідним потоком, що є суперпозицією двох потоків. Один з них є пуассонівський з параметром λ, а інший стає регулярним потоком, в якому час між цими подіями зараз дорівнює тривалості дозвільного сигналу $T_д$. У моменти цих подій, тобто за період, що дорівнює тривалості заборонного сигналу $T_з$, виникають додаткові заявки на обслуговування, кількість яких є випадковою і має розподіл Пуассона з параметром $\lambda T_з$. Таким чином, кількість автомобілів, які прибули до перехрестя за період регулярності, як сума двох незалежних розподілених за законом Пуассона випадкових величин має розподіл Пуассона з параметром

$$\lambda T_ц = \lambda T_д + \lambda T_з , \qquad (2)$$

де $T_ц = T_д + T_з$ – тривалість світлофорного циклу.

Завантаженням вибраного напрямку руху або навантаженням на систему масового обслуговування є величина

$$\rho = \frac{\lambda\left(T_p + T_3\right)}{n} = \frac{\lambda T_c}{\left(\frac{T_p}{\Delta}\right)} = \lambda\Delta\left(\frac{T_c}{T_p}\right) < 1, \qquad (3)$$

де Δ – середній час проїзду одного автомобіля вздовж перехрестя; n – максимальна кількість автомобілів, які встигають подолати перехрестя за час дозвільної фазі циклу $n = T_p / \Delta$.

Доведемо допоміжне твердження.

Лема 1. Нехай позитивна випадкова величина $X > 0$ має кінцеве математичне очікування $MX < \infty$. Тоді для будь-якого позитивного числа $t > 0$ справедливою є нерівність

$$P\left(X > t\right) \le \frac{MX}{t} . \qquad (4)$$

Доведення. Будь-яка випадкова величина подана як сума двох випадкових величин:

$$X = X \cdot I\left(X > t\right) + X \cdot I\left(X \le t\right),$$

де $I(A)$ – індикатор події A.

В умовах цього твердження математичним сподіванням суми двох випадкових величин є сума їхніх математичних сподівань:

$$MX = M\left(X \cdot I\left(X > t\right)\right) + M\left(X \cdot I\left(X \le t\right)\right).$$

Оскільки $X > 0$, то результат множення двох невід'ємних величин $X > 0$ і $I(X \le t) \ge 0$ також є невід'ємним $X \cdot I(X \le t) \ge 0$.

Отже, математичне очікування цього множення також є невід'ємною величиною:

$$M(X \cdot I(X \le t) \ge 0).$$

Завдяки аксіомі дійсних чисел у процесі множення або поділу обох частин нерівності на одне й те саме додатне число ця нерівність зберігається [17]:

$$MX = M\left(X \cdot I\left(X > t\right)\right) + \\ + M\left(X \cdot I\left(X \le t\right)\right) \ge M\left(X \cdot I\left(X > t\right)\right).$$

Якщо $X > t$, індикатор цієї події $(X > t)$ дорівнює одиниці: $I(X > t) = 1$.

Отже: $$X \cdot I\left(X > t\right) \ge t \cdot I\left(X > t\right).$$

Математичне сподівання більшої випадкової величини ніколи не буде меншим, ніж математичне очікування меншої випадкової величини [18]:

$$M\left[X \cdot I\left(X > t\right)\right] \ge M\left[t \cdot I\left(X > t\right)\right] = \\ = tMI\left(X > t\right) = tP\left(X > t\right).$$

Оскільки константа t як множник може бути винесена за знак математичного очікування

$$M\left[t \cdot I\left(X > t\right)\right] = tM\left[I\left(X > t\right)\right],$$

а математичне очікування індикатора випадкової події імовірності цієї події

$$M\left[I\left(X > t\right)\right] = P\left(X > t\right)$$

завдяки транзитивності відносини нерівності

$$MX \ge M\left(X \cdot I\left(X > t\right)\right) \ge tP\left(X > t\right)$$

отримуємо

$$MX \ge tP\left(X > t\right).$$

Отже, відповідно до умови твердження $t > 0$

$$P\left(X > t\right) \le \frac{MX}{t}.$$

Твердження леми 1 повністю доведено.

Висновок 1. Якщо, $MX < \infty$, то

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{X}{T} = 0 \text{ за ймовірністю,}$$

тобто для будь-якого позитивного числа $t > 0$

$$P\left(\frac{X}{T} > t\right) \to 0 \text{ , якщо } T \to +\infty.$$

Дійсно, візьмемо будь-яке число $t > 0$ і зафіксуємо його. Якщо для будь-якого $t > 0$, то

$$P\left(\frac{X}{T} > t\right) \le \frac{M\left(\frac{X}{T}\right)}{t} = \frac{1}{T}\left(\frac{MX}{t}\right) \to 0$$

за умови, що $T \to +\infty$,

оскільки $M\left(\frac{X}{t}\right) < \infty$ є кінцевою величиною,

якщо $T \to +\infty$ – позитивна величина, яка більше ніж

$$\frac{M\left(\frac{X}{T}\right)}{t} = \frac{1}{T}\left(\frac{MX}{t}\right)$$

і прагне до нуля.

З властивості меж і нерівностей, що складається з того, що нечітка нерівність для звичайних величин зберігається і для їхніх меж, якщо вони існують [17], випливає, що і менша позитивна величина ймовірності

$P\left(\frac{X}{T} > t\right)$ прагне до нуля, якщо $T \to +\infty$

для будь-якого, але фіксованого числа $t > 0$:

$$P\left(\frac{X}{T} > t\right) \to 0 \text{ , якщо } T \to +\infty,$$

тобто

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{X}{T} = 0 \text{ за імовірністю.}$$

Висновок 1 доведено.

Доведені твердження дозволяють знайти стаціонарну ймовірність відсутності черги в момент завершення дозвільного сигналу, тобто ймовірність відсутності в цій системі масового обслуговування вимог безпосередньо перед подією регулярного потоку (групового надходження заявок до системи).

Допустимо, що в момент часу $t \ge 0$ в системі знаходяться $r(t)$ заявок з сумарним залишковим часом до обслуговування $X(t)$.

Лема 2. Нехай час обслуговування заявки постійний і дорівнює Δ. Тоді в будь-який момент часу $t \ge 0$ правильною є нерівність для оцінки сумарного залишкового часу дообслуговування в момент часу $t \ge 0$

$$X(t) \le r(t) \cdot \Delta . \quad (5)$$

Доведення. Час дообслуговування заявки не перевищує постійної величини часу обслуговування заявки, що дорівнює Δ. Оскільки обслуговування здійснюється в порядку надходження заявок без переривання, то заявки в черзі ще не обслуговувалися і час дообслуговування кожної з них дорівнює їхньому повному часу обслуговування Δ. З двох останніх речень і випливає твердження леми 2.

Величину часу від початкового моменту $t=0$ до моменту часу $t=T$ подамо як суму часу T_0, коли система обслуговування вільна від заявок, і часу T_s, коли в системі є хоча б одна заявка, тобто здійснюється обслуговування:

$$T = T_0 + T_s . \quad (6)$$

Визначення. Якщо існує кінцева межа

$$P(0) = \lim_{T \to +\infty} \frac{T_0}{T} ,$$

то це число P_0 називається стаціонарною ймовірністю того, що система вільна від заявок, тобто стаціонарною ймовірністю простої системи. У цьому випадку під час дозвільного сигналу, зокрема в момент його завершення, існують періоди часу, коли в черзі і на перехресті немає руху автомобілів, що означає неповну пачку автомобілів у зеленій хвилі.

Теорема. Якщо існує така позитивна константа $C > 0$, що для будь-якого $t \ge 0$ математичне сподівання $r(t)$ кількості заявок у системі обмежене константою $C > 0$, тобто

$$M\left[r(t)\right] \le C , \quad (7)$$

то існує кінцева межа

$$P(0) = \lim_{T \to +\infty} \frac{T_0}{T} = 1 - \rho .$$

Доведення. Позначимо через $П(T)$ кількість заявок вхідного потоку на відрізку часів $[0;T]$, що надійшли до системи заявок. Тоді

$$X(T) = X(0) + П(T) * \Delta - T_s . \quad (8)$$

Час дообслуговування заявок в момент часу T складається з часу дообслуговування $X(0)$ в початковий момент часу $t=0$, часу обслуговування $П(t) \cdot \Delta$ заявок, які надійшли за відрізок часу $[0;T]$, крім часу T_s, коли заявки обслуговувалися в системі на відрізку часу $[0;T]$.

З рівності (8) випливає рівність

$$T_s = X(0) + П(T) \cdot \Delta - X(T) . \quad (9)$$

З рівності (6) випливає рівність

$$T_0 = T - T_s . \quad (10)$$

З двох останніх рівностей (9) і (10) знаходимо

$$T_0 = T - X(0) - П(T) \cdot \Delta + X(T) .$$

Після поділу на величину T маємо рівність

$$\frac{T_0}{T} = \frac{T - X(0) - П(T) \cdot \Delta + X(T)}{T} ,$$

з якої випливає, що

$$\frac{T_0}{T} = 1 - \frac{X(0)}{T} - \frac{П(T) \cdot \Delta}{T} + \frac{X(T)}{T} . \quad (11)$$

Завдяки нерівності (1) з леми 2, якщо $t=0$, маємо нерівність

$$X(0) \le r(0) \cdot \Delta ,$$

з якої з огляду на властивість математичного очікування (від множення або поділу частин нерівності на одне й те саме додатне число ця нерівність зберігається) [18] і з нерівності (7), якщо $t=0$,

$$M\left[X(0)\right] \le M\left[r(0) \cdot \Delta\right] = \Delta \cdot M\left[r(0)\right] \le C\Delta .$$

Звідси і згідно з висновком 1 до леми 1 випливає існування межі

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{X(0)}{T}=0. \qquad (12)$$

Отже, відповідно до (4) з леми 2, якщо $t=T$, маємо нерівність

$$X(T)\le r(T)\cdot\Delta,$$

з якої, а також з властивості математичного очікування (сума менших величин буде меншою, ніж сума більших величин) [18] і з нерівності (7), якщо $t=T$, маємо

$$M\left[X(T)\right]\le M\left[r(T)\cdot\Delta\right]=\Delta\cdot M\left[r(T)\right]\le C\Delta.$$

Звідси та згідно з висновком 1 до леми 1 і випливає існування межі

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{X(T)}{T}=0. \qquad (13)$$

Залишилося знайти межу співвідношення $\frac{\Pi(T)\cdot\Delta}{T}$, коли $T\to\infty$.

Позначимо як $k(T)$ кількість повних періодів довжини T_p кожен з регулярних потоків подій групових надходжень заявок з постійним часом T_p між подіями на відрізку часу $[0;T]$. Кількість заявок у їхньому груповому регулярному потоці дорівнює сумі

$$Z(T)=Z_1+Z_2+...+Z_{k(T)+1}$$

незалежних у сукупності, однаково розподілених за Пуассоном з параметром

$$\lambda T_3=\lambda\left(T_c-T_p\right)$$

невід'ємних цілочислових випадкових величин

$$Z_1,Z_2,...,Z_{k(T)+1}.$$

Позначимо як $N(T)$ кількість заявок пуассонівського потоку з параметром λ, які надійшли на відрізку часу $[0;T]$. Тоді кількість заявок вхідного потоку, які надійшли до системи обслуговування (а вона є суперпозицією двох потоків – регулярного групового і пуассонівського) на відрізку часу $[0;T]$ дорівнює

$$\Pi(T)=Z(T)+N(T).$$

Тоді

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{\Pi(T)}{T}=\lim_{T\to+\infty}\frac{Z(T)+N(T)}{T}= =\lim_{T\to+\infty}\left[\frac{Z(T)}{T}+\frac{N(T)}{T}\right]. \qquad (14)$$

Межа суми дорівнює сумі меж, якщо існують кінцеві межі доданків. Знайдемо їх. Відповідно до закону великих чисел

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{N(T)}{T}=\lim_{T\to+\infty}\frac{M\left[N(T)\right]}{T}=\frac{\lambda T}{T}=\lambda.$$

Згідно з тим же законом великих чисел

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{Z(T)}{T}=\lim_{T\to+\infty}\frac{M\left[Z(T)\right]}{T}= =\lim_{T\to+\infty}\frac{\lambda\left(T_c-T_p\right)\left[k(T)+1\right]}{T}= =\lambda\left(T_c-T_p\right)\lim_{T\to+\infty}\frac{k(T)+1}{T}= =\lambda\left(T_c-T_p\right)\lim_{T\to+\infty}\left[\frac{k(T)}{T}+\frac{1}{T}\right]. \qquad (15)$$

Кількість $k(T)$ повних періодів, довжини T_p кожного з регулярних потоків подій групових надходжень заявок з постійним часом T_p між подіями на відрізку часу $[0;T]$ задовольняє двосторонньої нерівності

$$\frac{T}{T_p}-1\le k(T)\le\frac{T}{T_p},$$

розділивши всі частини якого на позитивне число $T\ge 0$, маємо двосторонню нерівність

$$\frac{1}{T_p}-\frac{1}{T}\le\frac{k(T)}{T}\le\frac{1}{T_p}.$$

Завдяки властивостям меж і нерівностей [17]

$$\lim_{T\to+\infty}\left[\frac{1}{T_p}-\frac{1}{T}\right]\le\lim_{T\to+\infty}\frac{k(T)}{T}\le\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T_p}.$$

Оскільки межа константи дорівнює самій константі

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T_p}=\frac{1}{T_p},$$

а

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}=0,$$

то існує кінцева межа різниці:

$$\lim_{T\to+\infty}\left[\frac{1}{T_p}-\frac{1}{T}\right]=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T_p}-\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}=\frac{1}{T_p}-0=\frac{1}{T_p}.$$

Отже:

$$\frac{1}{T_p}=\lim_{T\to+\infty}\left[\frac{1}{T_p}-\frac{1}{T}\right]\le\lim_{T\to+\infty}\frac{k(T)}{T}\le$$
$$\le\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T_p}=\frac{1}{T_p}.$$

Звідси

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{k(T)}{T}=\frac{1}{T_p}.$$

Використовуючи цю межу і межу

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}=0,$$

знаходимо межу суми, що дорівнює сумі меж:

$$\lim_{T\to+\infty}\left[\frac{k(T)}{T}+\frac{1}{T}\right]=\lim_{T\to+\infty}\frac{k(T)}{T}+\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}$$
$$=\frac{1}{T_p}+0=\frac{1}{T_p}.$$

Завдяки знайденій межі з (15) знаходимо межу:

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{Z(T)}{T}=\lim_{T\to+\infty}\frac{M\left[Z(T)\right]}{T}=$$
$$=\lambda\left(T_c-T_p\right)\lim_{T\to+\infty}\left[\frac{k(T)}{T}+\frac{1}{T}\right]=\lambda\left(T_c-T_p\right)\left(\frac{1}{T_p}\right).$$

Кінцеві межі доданків у виразі (14) знайдені:

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{N(T)}{T}=\lambda$$

та

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{Z(T)}{T}=\lambda\left(T_c-T_p\right)\left(\frac{1}{T_p}\right).$$

Таким чином, межа суми дорівнює сумі кінцевих меж доданків, де після розкриття дужок і спрощень маємо

$$\lim_{T\to+\infty}\left[\frac{Z(T)}{T}+\frac{N(T)}{T}\right]=\lim_{T\to+\infty}\frac{Z(T)}{T}+$$
$$+\lim_{T\to+\infty}N(T)=\lambda\left(T_c-T_p\right)\left(\frac{1}{T_p}\right)+\lambda=\frac{\lambda T_c}{T_p}.$$

Отже, знайдена межа (14):

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{\Pi(T)}{T}=\lim_{T\to+\infty}\left[\frac{Z(T)}{T}+\frac{N(T)}{T}\right]=\frac{\lambda T_c}{T_p}.$$

Також завдяки лінійним властивостями меж знайдена межа:

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{\Pi(T)\cdot\Delta}{T}=\Delta\lim_{T\to+\infty}\frac{\Pi(T)}{T}=\Delta\frac{\lambda T_c}{T_p}=\rho, \quad (16)$$

згідно з визначенням завантаження напрямку

$$\rho=\lambda\Delta\left(\frac{T_c}{T_p}\right)<1.$$

Отже, завдяки рівності (11) знаходимо межу лінійної комбінації, що дорівнює лінійній комбінації меж, якщо кінцеві межі (12), (13) та (16) знайдені:

$$P(0)=\lim_{T\to+\infty}\frac{T_0}{T}=$$
$$=\lim_{T\to+\infty}\left[1-\frac{X(0)}{T}-\frac{\Pi(T)\cdot\Delta}{T}+\frac{X(T)}{T}\right],$$

$$P(0)=\lim_{T\to+\infty}1-\lim_{T\to+\infty}\frac{X(0)}{T}-\lim_{T\to+\infty}\frac{\Pi(T)\cdot\Delta}{T}+$$
$$+\lim_{T\to+\infty}\frac{X(T)}{T}=1-0-\rho+0=1-\rho.$$

Теорема доведена.

Таким чином, для регульованого перехрестя з жорстким циклом регулювання знайдена стаціонарна ймовірність того, що система вільна від заявок, тобто стаціонарна ймовірність простою системи за умови, що $\rho < 1$

$$P(0) = 1 - \rho,$$

яка збігається з аналогічною імовірністю (1) у стандартній однолінійній системі масового обслуговування зі стандартною дисципліною обслуговування FIFO та з законом розподілу часу обслуговування. Таким чином, залежність (1) отримала набагато ширший діапазон застосування.

З урахуванням побудови системи масового обслуговування через вирізання з осі часу заборонених для проїзду проміжків була знайдена стаціонарна ймовірність відсутності черги в момент завершення руху в обраному напрямку після завершення дозвільного сигналу. З точки зору складання плану магістральної координації залежність (1) відображає імовірність виникнення неповної пачки автомобілів залежно від навантаження рухом вибраного напрямку. Оскільки рівень навантаження залежить від розмірів пачки [4], встановлений взаємозв’язок дозволяє вибрати стратегію вибору раціонального розміру пачки автомобілів у зеленій хвилі.

Висновки

Координоване магістральне керування транспортними потоками є ефективним інструментом підвищення якості обслуговування, в якому насамперед необхідно вирішувати питання раціональної організації руху автомобілів, які займають найбільший вуличний простір.

Складання плану координації на основі безпосереднього завдання довжини пачки автомобілів у зеленій хвилі вимагає оцінювання імовірності виникнення неповної пачки автомобілів в різних умовах, оскільки ця подія означає зниження ефективності використання часу світлофорного циклу на всіх перехрестях координованої ділянки, а наявні методи організації координованої роботи світлофорних об’єктів, як і методи оцінювання довжини черги на ізольованих перехрестях, не забезпечують цього процесу.

Написана на стандартних щодо роботи світлофорів з постійним циклом припущеннях формула імовірності нульової черги наприкінці дозвільного сигналу є стаціонарним оцінюванням імовірності виникнення неповної пачки автомобілів залежно від рівня завантаження напрямку руху.

Вона співпадає з аналогічним оцінюванням однолінійної системи масового обслуговування з необмеженою чергою, отриманим за допомогою марківської моделі. Його лінійний тип та уповільнене зростання навантаження за умови збільшення пачки автомобілів у зеленій хвилі дозволяє вільно вибирати розмір пачки відповідно до міркувань мінімізації часу затримок учасників руху в процесі подолання координованої ділянки міської магістралі.

Література

1. Horbachov P., Shevchenko V., Svichynskyi S. Vyznachennya granychnogo rivnya zavantazhennya drugoryadnyx pidxodiv do miskoyi magistrali z koordynovanym keruvannyam. [Determining the maximum threshold of saturation level for minor approaches to the arterial street with coordinated control]. Bulletin of Kharkov National Automobile and Highway University. 2020. 90. [in Ukraine].
2. Horbachov P., Makarichev A., Shevchenko V. Otsinka zatrymok rukhu na rehulovanykh perekhrestiakh miskykh vulyts iz tryfaznym tsyklom rehuliuvannia [Estimation of delay at signalized intersections of urban streets with a three-phase signal]. Automobile transport. 2019. 44. [in Ukraine].
3. MULTIBAND – A Variable-Bandwidth Arterial Progression Scheme / Gartner, N. H., Assmann S. F., Lasaga F., Hou D. L. *In Transportation Research Record 1287*. TRB. National Research Council, Washington DC. 1990. Pp. 212–222.
4. Webster F. V. Traffic Signal Settings. *Road Research Technical Paper No. 39*. London: Department of Scientific and Industrial Research. 1958. 45 p.
5. Stamatiadis C., Nathan H. Gartner MULTIBAND-96: A Program for Variable-Bandwidth Progression Optimization of Multiarterial Traffic Networks. *In Transportation Research Record 1554*. TRB. National Research Council, Washington DC. 1996. Pp. 9–17.
6. MULTIBAND – A Variable-Bandwidth Arterial Progression Scheme / Gartner, N. H., Assmann S. F., Lasaga F., Hou D. L. *In Transportation Research Record 1287*. TRB, National Research Council, Washington DC. 1990. Pp. 212–222.
7. A two-way progression model for arterial signal coordination considering side-street turning traffic / Chen C., Che X., Huang W., Li K. *Transportmetrica B*. 2019. 7(1). Pp. 1627–1650.
8. Canadian Capacity Guide for Signalized Intersections. Ottawa: Institute of Transportation Engineers, 2008. 232 p.

9. Signal Timing Manual. Second Edition. NCHRP Report 812. National Cooperative Highway Research Program. In Cooperation with U.S. Department of Transportation Federal Highway Administration. 2015. 317 p.
10. Gartner N. H., Pooran F. J., Andrews C. M. Implementation and Field Testing of the OPAC Adaptive Control Strategy in RT-TRACS. Proc. of 81st Annual Meeting of the TRB. 2002. P. 148–156.
11. Studies in the Economics of Transportation / Beckmann M., McGuire C. B., Winsten, C. B., Koopmans T. C. Yale University Press: New Haven, 1956. 232 p.
12. Newell G. F. Queues for a fixed-cycle traffic light. *Ann. Math. Statist.* 1960. *Volume 31. № 3*. P. 589–597.
13. Darrosh J. N. On the traffic-light queue. *Ann. Math. Statist.* 1964. p. *Volume 35, № 1*. 380–388.
14. Leeuwaarden van J.S.H. Delay analysis for the fixed-cycle traffic-light queue. *Report Eurandom. 2006. Vol. 2006014*. 2006. 16 p.
15. Guide to Traffic Management Part 2: Traffic Theory. Austroads Publication No. AGTM02/08. 2008. 95 P.
16. Kleinrock L. Queueing systems. 1975. Volume I. Theory. John Wiley & Sons. 417 p.
17. Shilov G. Ye., Wallace D.A.R. Mathematical Analysis. A Special Course. Elsevier Science. 2014. 488 p.
18. Gnedenko B. V. Theory of Probability. CRC Press. Mathematics. 1998. 520 p.

References

1. Горбачов П. Ф., Шевченко В. В., Свічинський С. В. Визначення граничного рівня завантаження другорядних підходів до міської магістралі з координованим керуванням. *Вісник Харківського національного автомобільно-дорожнього університету*. 2020, № 90. С. 144–154.
2. Горбачов П. Ф., Макарічев О. В., Шевченко В. В. Оцінка затримок руху на регульованих перехрестях міських вулиць із трифазним циклом регулювання. *Автомобільний транспорт*. 2019. № 44. С. 30–39.
3. MULTIBAND – A Variable-Bandwidth Arterial Progression Scheme / Gartner, N. H., Assmann S. F., Lasaga F., Hou D. L. *In Transportation Research Record 1287*. TRB. National Research Council, Washington DC. 1990. Pp. 212–222.
4. Webster F. V. Traffic Signal Settings. *Road Research Technical Paper No. 39*. London: Department of Scientific and Industrial Research. 1958. 45 p.
5. Stamatiadis C., Nathan H. Gartner MULTIBAND-96: A Program for Variable-Bandwidth Progression Optimization of Multiarterial Traffic Networks. *In Transportation Research Record 1554*. TRB. National Research Council, Washington DC. 1996. Pp. 9–17.
6. MULTIBAND – A Variable-Bandwidth Arterial Progression Scheme / Gartner, N. H., Assmann S. F., Lasaga F., Hou D. L. *In Transportation Research Record 1287*. TRB, National Research Council, Washington DC. 1990. Pp. 212–222.
7. A two-way progression model for arterial signal coordination considering side-street turning traffic / Chen C., Che X., Huang W., Li K. *Transportmetrica B*. 2019. 7(1). Pp. 1627–1650.
8. Canadian Capacity Guide for Signalized Intersections. Ottawa: Institute of Transportation Engineers, 2008. 232 p.
9. Signal Timing Manual. Second Edition. NCHRP Report 812. National Cooperative Highway Research Program. In Cooperation with U.S. Department of Transportation Federal Highway Administration. 2015. 317 p.
10. Gartner N. H., Pooran F. J., Andrews C. M. Implementation and Field Testing of the OPAC Adaptive Control Strategy in RT-TRACS. Proc. of 81st Annual Meeting of the TRB. 2002. P. 148–156.
11. Studies in the Economics of Transportation / Beckmann M., McGuire C. B., Winsten, C. B., Koopmans T. C. Yale University Press: New Haven, 1956. 232 p.
12. Newell G. F. Queues for a fixed-cycle traffic light. *Ann. Math. Statist.* 1960. *Volume 31. № 3*. P. 589–597.
13. Darrosh J. N. On the traffic-light queue. *Ann. Math. Statist.* 1964. p. *Volume 35, № 1*. 380–388.
14. Leeuwaarden van J.S.H. Delay analysis for the fixed-cycle traffic-light queue. *Report Eurandom. 2006. Vol. 2006014*. 2006. 16 p.
15. Guide to Traffic Management Part 2: Traffic Theory. Austroads Publication No. AGTM02/08. 2008. 95 p.
16. Kleinrock L. Queueing systems. 1975. Volume I. Theory. John Wiley & Sons. 417 p.
17. Shilov G. Ye., Wallace D.A.R. Mathematical Analysis. A Special Course. Elsevier Science. 2014. 488 p.
18. Gnedenko B. V. Theory of Probability. CRC Press. Mathematics. 1998. 520 p.

Горбачов Петро Федорович, д. т. н., професор, зав. каф. транспортних систем і логістики, gorbachov.pf@gmail.com, тел. +38 050-303-26-22,

Макарічев Олександр Вікторович, д. ф.-м. н., доцент, каф. транспортних систем і логістики, amsol2904@gmail.com, тел. +38 098-468-31-97,

Шевченко Володимир Вадимович, аспірант, каф. транспортних систем і логістики, vvshevchenko.25@gmail.com,
тел. +38 093-886-96-59
[1]Харківський національний автомобільно-дорожній університет, вул. Ярослава Мудрого, 25, м. Харків, 61002, Україна.

Вероятность возникновения неполной пачки автомобилей при координированном управлении на городской магистрали

Аннотация. Проблема*. Разработанная авторами работы методика построения зелёной волны в обоих направлениях движения на городской магистрали требует выбора длины пачки автомобилей, который базируется на расчёте затрат времени всех автомобилей, движущихся вдоль магистрали или пересекающих её. С учётом случайного характера потока на входе в координированный участок увеличение количества автомобилей в пачке, для которой строится план координации, будет приводить к росту вероятности того, что промежуток времени, выделенный в цикле для проезда пачки, будет использован не полностью. Продолжительность цикла регулирования одинакова для всех светофоров координированного участка магистрали, что означает неэффективное использование времени цикла и рост общих затрат времени участников движения на преодоление всех координированных перекрёстков. Поэтому определение вероятности такого события является актуальной задачей, решение которой позволит выбрать верную стратегию построения зелёной волны.* ***Цель****. Получение зависимости для стационарной вероятности отсутствия очереди автомобилей перед светофором в момент окончания разрешительного сигнала от уровня нагрузки движением заданного направления.* ***Методология****. Движение на регулируемом перекрёстке представляется в виде случайного процесса, показывающего число автомобилей в очереди для проезда через перекрёсток с определённого направления. Путём укрупнения состояний этот процесс сводится к альтернирующему случайному процессу, что создаёт возможность его изучения и достижения цели при достаточно общих условиях с помощью закона больших чисел.* ***Результаты****. На стандартных для работы светофорах с постоянным циклом допущений получена стационарная оценка вероятности возникновения неполной пачки автомобилей в зависимости от уровня загрузки направления движения.* ***Оригинальность****. Методом А. Н. Колмогорова впервые была получена формула вероятности возникновения нулевой очереди в конце разрешительного сигнала перед светофором с постоянным циклом. Практическая значимость. Линейный характер полученной зависимости вместе с замедленным ростом нагрузки при увеличении пачки автомобилей в зелёной волне позволяют свободно выбирать размер пачки автомобилей при построении планов координации, исходя исключительно из соображений минимизации времени задержек участников движения на проезд через координированный участок городской магистрали.*

Ключевые слова: *план координации, пачка автомобилей, уровень загрузки перекрёстка, вероятность, система массового обслуживания.*

Горбачёв Пётр Фёдорович, д. т. н., профессор, зав. каф. транспортных систем и логистики, gorbachov.pf@gmail.com, тел. +38 050-303-26-22,

Макаричев Александр Владимирович, д. ф.-м. н., доцент каф. транспортных систем и логистики, amsol2904@gmail.com, тел. +38 098-468-31-97,

Шевченко Владимир Вадимович, аспирант каф. транспортных систем и логистики, vvshevchenko.25@gmail.com, тел. +38 093-886-96-59.

Potential for incomplete bunching under the city's highway coordinated traffic management

Abstract. Problem. *The method of coordinating a bidirectional green wave on the city's highway developed by the authors of the paper, requires the choice of the length of bunching based on the calculation of the time expenditures for all vehicles moving along the highway or crossing it. Taking into account the random nature of the traffic flows at the entrance to the coordinated section, an increase in the number of vehicles in the bunch, which requires a coordination project developing will result in the potential increase in the period of the time given for the cycle for the bunch moving, that will not be fully used. Since the duration of the coordinated cycle is the same for all traffic lights of a coordinated highway section, this means the cycle time to be inefficiently used and the total time, spent by road users at all coordinated intersections, to be increased. Therefore, to define the potential for such an event is considered the relevant task. Its solution will allow the appropriate strategy for coordinated traffic signalization development to be chosen.* ***Purpose.*** *Consists in the derivation of the continuous potential for the traffic queue absence before a stop line at the end of permissive (green) cycle signal, from the level of the traffic load for the given direction.* ***Methodology.*** *The traffic at a signalized intersection is presented as a random process showing the traffic queue rate which needs passing through the intersection from a certain direction. By aggregation of states, the process is reduced to an alternating random process, which makes it possible to study it and achieve the goal under fairly general conditions due to the application of the law of large numbers.* ***Results.*** *Having standard assumptions for fixed-cycle traffic light, a continuous probability estimation of the potential for incomplete bunching depending on the level of traffic load of the given direction has been obtained.* ***Novelty.*** *Using Kolmogorov's method, the probability formula of the potential for a zero queue at the end of permissive (green) cycle signal at a fixed-cycle light signal has been achieved for the first time.* ***Practical value.*** *The linear character of the obtained relation, along with the slowed traffic load increase down under a green wave bunch increase, allow providing a free choice for a bunch volume during coordination project development, based on minimizing the time of the road users' delay*

to go through a coordinated section of the city highway.

Keywords: *coordination project, bunch, level of traffic load at a signalized intersection, potential, queuing system.*

Horbachov Peter, DSc, Professor, Head of the Department of Transportation Systems and Logistics of Kharkiv National Automobile and Highway University, Yaroslava Mudrogo str., 25, Kharkiv, Ukraine, 61002
E-mail: gorbachov.pf@gmail.com
Contact tel.: (050) 303-26-22

Makarichev Alexander, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor The Department of Transportation Systems and Logistics Kharkov National Automobile and Highway University
Yaroslava Mudrogo str., 25, Kharkiv, Ukraine, 61002
E-mail: amsol2904@gmail.com
tel.: (098) 468-31-97

Shevchenko Volodymyr, PhD Student
Transportation Systems and Logistics of Kharkiv National Automobile and Highway University
Yaroslava Mudrogo str., 25, Kharkiv, Ukraine, 61002
E-mail: vvshevchenko.25@gmail.com
tel.: (093) 886-96-59.