ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Дикань М.Н., ст. гр. МК – 20-11.
Вербицкий В.И. –руководительдоцент ХНУ ім.Каразіна

Задача перечисления булевых функций состоит в определении количества булевых функций заданного числа переменных, обладающих определенными свойствами.

Как известно, всего существует ровно 2^{2^m} различных булевых функций n переменных. Нас интересует перечисление функций, принадлежащих так называемым классом Поста. Это следующие классы:

а) функции, сохраняющие нуль, т.е. $f(0;0;\ldots;0)=0$;

б) функции, сохраняющие единицу, т.е. $f(1;1;\ldots;1)=1$;

в) самодвойственные функции, т.е. $f(\overline{x}_1;\overline{x}_2;\ldots;\overline{x}_n)=\overline{f}(x_1;x_2;\ldots;x_n)$;

г) линейные функции, т.е. полиномы Жегалкина первой степени: $x_{i_1}\oplus x_{i_2}\oplus\ldots\oplus x_{i_k}\oplus a$, где a - константа (0 или 1);

д) монотонные функции, т.е., если $y_1\geq x_1; y_2\geq x_2;\ldots; y_n\geq x_n$, то $f(x_1;x_2;\ldots;x_n)$.

Очевидно, функции, сохраняющие нуль (как и сохраняющие единицу), составляют ровно половину всех булевых функций заданного числа переменных, т.е. их количество равно $2^{2^{n-1}}$.

Каждая самодвойственная функция однозначно определяется верхней половиной таблицы истинности (соответствующей $x_1=0$), т.е. двоичными кодами длины 2^{n-1}. Значит, их количество равно $2^{2^{n-1}}$, т.е. квадратному корню их общего количества булевых функций.

Каждая линейная функция однозначно определяется слагаемыми ее полинома Жегалкина, выбираемыми из $(n+1)$элемента $(x_1;x_2\ldots;x_n;1)$. Поэтому их количество равно 2^{n+1}. Оно имеет порядок логарифма общего количества булевых функций.

Наиболее сложной является задача перечисления монотонных функций. Это связано с отсутствием общей формулы для такого количества в конечном виде. Для перечисления монотонных функций используется следующий факт: функция монотонна в том и только в том случае, когда ее минимальная нормальная форма не содержит инверсий (можно использовать как дизъюнктивную, так и конъюнктивную нормальную форму). Нормальная форма без инверсий является минимальной, если в ней нельзя выполнить поглощение, т.е. никакие ее компоненты не поглощают другие компоненты. Поэтому количество различных монотонных булевых функций и переменных равно количеству способов, которыми множество из n элементов можно представить в виде объединения подмножеств, ни одно из которых не содержит другое (подмножества могут пересекаться, порядок в объединении не важен).

Легко показать, что существует ровно 6 монотонных переменных и ровно 20 монотонных функций трех переменных. Для n=4 задача перечисления сравнительно трудоемка. Можно показать, что в этом случае количество монотонных функций равно 167. Асимптотически монотонных функций больше, чем линейных, но меньше, чем самодвойственных.

Отметим, что важность классов Поста определяется их значением для анализа полноты систем булевых функций.

Система называется функционально полной, если любая булева функция может быть представлена композицией функций этой системы. В соответствии с теоремой Поста, система функционально полна тогда и только тогда, когда она не входит ни в один из классов Поста. Таким образом, рассмотрена задача перечисления булевых функций, принадлежащих классом Поста. В частности перечислены монотонные функции до четырех переменных.