

РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ГЕМГОЛЬЦЯ

Колодяжний В.М. докт. фіз-мат. наук, професор
Харківський національний автомобільно-дорожний університет

Лісіна О.О. канд. канд.мат. наук, доцент
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Наявність в постановці крайової задачі двох різноманітних видів інформації – аналітичної та геометричної – є серйозною проблемою при створенні методів та алгоритмів при розв'язуванні відповідних задач.

Будь який метод повинен враховувати обидва ці підходи визначення інформації, а це потребує перетворення геометричної інформації в аналітичну (при цьому не всяка кодировка геометричної інформації може застосовуватись). В таких класичних методах, як наприклад, розділення змінних, інтегральних перетвореннях, форма областей та ділянок їх границь враховуються завдяки відповідному вибору систем координат, у методі комфортних відображень – при побудові відображаючих функцій, у варіаційних методах – при побудові координатних функцій, у сіткових методах – при складанні рівнянь для вузлів, близьких до кривої, інших. Метод скінченних елементів виник в зв'язку з бажанням як можна більш точно враховувати геометричні форми. Особливо актуальна розробка таких методів розв'язку крайових задач, які би мали універсальний характер і не вимагали застосувань (як правило, від математика) знань тонких питань теорії.

Нехай необхідно обчислити критичні частоти та власні хвилі, які розповсюджуються в хвильоводах. У випадку розгляданні електромагнітних хвиль вимагається визначити Н-моди, для акустичних хвиль - розповсюдження крутильних коливань в нескінченних стрижнях постійного січення. Крайова задача, яка описує розповсюдження хвиль у хвильоводах, може бути задана наступним чином. Вимагається знайти власні числа та власні функції для двовимірного рівняння Гемгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0, \quad (1)$$

з граничною умовою Діріхле

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2)$$

де Ω - область, що відображається на рисунку 1.

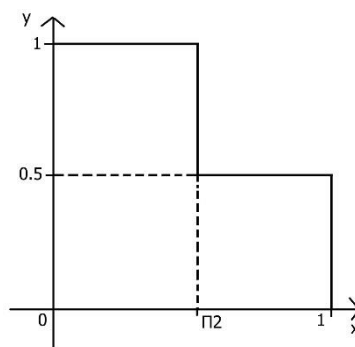


Рисунок 1. Ω - область

Розв'язок даної задачі виконувалась за схемою запропонованою В.В. Веретельником з застосуванням структурно-варіаційного методу. В комбінації зі структурним методом розглядається варіаційний метод Ритца. Можна показати, що оператор крайової задачі (1)-(2) є додатньо визначеним. Це гарантує збіжність наближеного за Ритцом [4,5] розв'язку до точного узагальненого. Пошук розв'язку задачі (1)-(2) еквівалентний знаходженню мінімуму функціоналу

$$\Phi(u) = - \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right\} / \left\{ \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega \right\} \quad (3)$$

локальні мінімальні значення якого дорівнюють шуканим власним значенням [2]. Функцію будемо відшукувати у вигляді

$$u = \sum_{i=0}^{\chi} c_i \Psi_r. \quad (4),$$

де $\{\Psi_r\}$ точно задовільнює граничним умовам і будується згідно структури, яка описується у формі $\Psi_i = \omega \varphi_i$. Функція $\omega(x, y)$ задає рівняння границі області Ω : $\omega(x, y) = 0$: функція $\omega(x, y)$ будується за допомогою R-операцій та має вигляд

$$\omega(x, y) = (f_1 \wedge_{\alpha} f_2) \wedge_{\alpha} (f_3 \vee_{\alpha} f_4), \quad (5)$$

де $f_1 = x(1-x) \geq 0$ – вертикальна; полоса; $f_2 = y(1-y) \geq 0$ – горизонтальна; полоса; $f_3 = \Pi 2 - x \geq 0$ – півплощина, $\Pi 2$ – параметр для оперативного вимірування конфігурації області; $f_4 = 0,5 - y \geq 0$ – півплощина.

Так як оператор крайової задачі (1)-(2) самоспряжений, то його власні числа та функції будуть дійсними. Тому достатньо будувати функції $\Psi_r(x, y)$, що належатимуть класу дійсних функцій.

Підставляя (4) та диференціюючи по c_i приходимо до узагальненій задачі на власні значення:

$$Ax - \lambda Bx = 0, \quad (6)$$

де A та B - матриці: $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \Psi_i \nabla \Psi_j d\Omega$, $b_{ij} = \int_{\Omega} \Psi_i \Psi_j d\Omega$ та $x = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. Так як матриці A і B – симетричні та додатньо визначені, то до матриці B – можна застосувати розкладення Холецкого: $B = LL^T$, де L – трикутна матриця. Тоді задачу (6) можна привести до вигляду $(L^{-1}AL^{-T})(L^T x) = \lambda(L^T x)$, тобто до звичайної проблеми на власні значення:

$$Py = \lambda y. \quad (7)$$

Власні числа при цьому перетворенні зберігаються, а власний вектор x перетворюється в $y = L^T x$ (L^T визначає матрицю, яка є оберненою до транспонованої матриці L). Задачу (7) можна вирішити одним з стандартних методів. Розв'язок зручно проводити у два етапи: спочатку перетворенням Хаусхолдера привести матрицю P до тридіагонального вигляду, а потім знайти власні числа QL – методом. Якщо треба отримати власні функції задачі (7), то треба виконати обернені перетворення отриманого власного вектора тридіагональної матриці.

Використання для розв'язання даної крайової задачі програмуючої системи типу «ПОЛЕ» передбачає завдання давання інформації вихідної інформації про задачу у вигляді спеціальних директив [1]. Директиви відокремлюються одна від одною спеціальним розділителем «;» і складаються з ключових слів, допоміжних розподілителів, індекаторів, числової інформації.

Деякі директиви, наприклад директиви, наприклад ті, що задають вигляд рівняння, логістичні формули області, функціональні компоненти та інші мають аналітичні вирази, що визначають вихідну інформацію про крайову задачу. Відповідні директиви, необхідні для завдання крайової задачі (1)-(2) програмуючої системи «ПОЛЕ-3», можна познайомитись у відповідній літературі.

Література

1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 551 с.
2. Колодяжний В.М. Геометрично структуровані атомарні функції // Доповіді НАН України, № 6, 2003. – С. 12-15.
3. Рвачов В.Л. Экспериментальная математика: методология, проблемы, практика / Рвачов В.Л., Рвачов В.О. – Киев: Товариство “Знання”. (Серія VIII, № 8), 1983. – 31 с.
4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1979. – 512 с.
5. Колодяжний В.М. Структурно-вариационный метод решения краевых задач математической физики. Харьков.: ХАИ, 1981. – 92.