Беловол Александр Васильевич, к.т.н., доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

НЕВАРИАТИВНАЯ ТЕХНИКА ПОЛУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Интервал между двумя последовательными положениями материальной точки в пространстве Минковского (мировыми точками) имеет вид

$$dl^2 = d\mathbf{x}\mathbf{I}d\mathbf{x} = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2,$$

где $d\mathbf{x}$ - столбец, составленный из дифференциалов координат точки, если стоит справа в произведении, или строка, если стоит слева, $\mathbf{I}$ - матрица вида

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знак «+» перед dx_0^2 отвечает тому обстоятельству, что материальна точка может в разные моменты времени занимать одно и то же положение в трехмерном пространстве, то есть квадрат интервала между ее положениями в четырехмерном пространстве должен быть положительным. С другой стороны, материальная точка не может находиться одновременно в двух точках трехмерного пространства, поэтому соответствующий квадрат интервала отрицательный, то есть нефизичный.

Интервал между ближайшими положениями системы n различных материальных точек в пространстве конфигураций можно ввести, используя квадратичную форму $dl^2 = d\mathbf{x}\mathbf{M}d\mathbf{x}$, где $d\mathbf{x}$ - столбец или строка из $4n$ координат точек системы, а $\mathbf{M}$ - диагональная матрица размером $4n \times 4n$, состоящая из блоков $m_k\mathbf{I}$, где m_k - масса k-той материальной точки в собственной системе координат (масса покоя).

В данном случае можно образовать мировой скаляр τ по формуле

$$(d\tau)^2 = \frac{dl^2}{mc^2},$$

где m - масса покоя механической системы (сумма масс покоя всех точек системы), а $d\tau$ можно рассматривать, как бесконечно малый интервал собственного времени системы материальных точек в $4n$- мерном пространстве конфигураций.

Учитывая, что в фазовом пространстве $d\mathbf{x}$ представляет собой столбец (строку), составленный из расположенных последовательно координат и импульсов точек, получаем для интервала

$$ds^2 = d\mathbf{x}\mathbf{G}d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{G}$ играет роль метрического тензора, которому отвечает матрица

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{O}$ и $\mathbf{E}$ - соответственно нулевая и единичная матрицы размером $4n$ на $4n$.

Рассмотрим движение системы материальных точек в пространстве-времени как движение сплошной среды. Разобьем среду на бесконечно малые объемы, которым будут отвечать точки с координатами, образующими вектор $\mathbf{q}$. Между положением точки среды и положением материальных точек, из которых она состоит, существует неаналитическая, то есть зависящая от закона движения точек, связь $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{q})$, где $\mathbf{x}$ - строка (столбец), составленная из координат точек частицы среды.

Воспользовавшись собственным временем частицы τ можно образовать четырёхмерный вектор скорости точки относительно наблюдателя в системе координат, связанной с частицей

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}\left(x^i\mathbf{e}_i\right)=\frac{dx^i}{d\tau}\mathbf{e}_i+x^i\frac{d\mathbf{e}_i}{d\tau},$$

где $\mathbf{e}_i$ - орты системы координат, связанной с наблюдателем; $\frac{dx^i}{d\tau}\mathbf{e}_i$ - скорость движения точки относительно наблюдателя, если ее рассматривать в собственной системе координат частицы вещества; $x^i\frac{d\mathbf{e}_i}{d\tau}$ - переносная скорость, которая связана с поворотом системы координат наблюдателя относительно сопутствующей системы координат частицы. Тогда скорости точек, составляющих частицу среды, и самой частицы среды будут связаны следующим образом [1]:

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{x}}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{a}(\mathbf{q}),$$

где $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{q}}$ - матрица преобразования координат размером 4 на $4n$; $\mathbf{a}(\mathbf{q})$- переносная скорость.

Интервал между последовательными положениями частицы в пространстве конфигураций будет иметь вид $dl^2=d\mathbf{q}\mathbf{I}d\mathbf{q}$, где роль метрического тензора играет матрица $\mathbf{I}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{M}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{q}}$.

Переходя в фазовое пространство, получаем

$$ds^2=d\mathbf{x}\mathbf{G}d\mathbf{x},$$

где $d\mathbf{x}$ представляет собой столбец (строку), составленный из расположенных последовательно координат и импульсов частицы. Импульс частицы $\mathbf{p}=\mathbf{I}\dot{\mathbf{q}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}$, где потенциал электромагнитного поля $\mathbf{A}$ вводится в соответствии с формулой

$$\frac{e}{c}\mathbf{A}=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{M}\mathbf{a}.$$

Деление электрического заряда частицы e на скорость света связано с использованием гаусовой системы единиц измерения поля.

Тензор $\mathbf{G}$ играет роль метрического тензора, которому отвечает матрица размером 8 на 8 вида

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{E}\\ \mathbf{E} & \mathbf{O}\end{pmatrix}.$$

Следуя работе [1] используя консервативность системы, метрику и однородность фазового пространства, можно получить канонические уравнения

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Функция Гамильтона при этом должна иметь вид:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\mathbf{g}^{-1}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right),$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{q}), \mathbf{A}(\mathbf{q})$ представляют собой тензорный и векторный потенциалы.

Последнее уравнение можно рассматривать как уравнение движения среды в эйлеровом представлении. Подставляя в него функцию Гамильтона и выражение для импульса частицы, а также разделив его на собственный объем частицы, получаем

$$\mu\dot{\mathbf{u}} = \frac{\rho}{c}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{u},$$

где $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}}$ - антисимметричный тензор электромагнитного поля (здесь $\mathbf{E}$ – единичная матрица, которая играет роль оператора циклической перестановки индексов); ρ - собственная плотность электрического заряда; $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}$ - скорость частицы.

Для того, чтобы решить обратную задачу динамики, т.е. определить тензор электромагнитного поля по закону движения среды, воспользуемся законом сохранения электрического заряда, который можно записать в виде уравнения неразрывности в псевдоэвклидовом пространстве-времени:

$$\frac{d}{d\mathbf{q}}(\rho\mathbf{u}) = 0.$$

Выбирая в качестве субстанции в пространстве конфигураций произведение радиус-вектора бесконечно малой частицы среды на ее собственный объем и плотность заряда, запишем уравнение баланса:

$$\frac{d(\rho\mathbf{q}dV)}{d\tau} = \frac{d(\rho\mathbf{q})}{d\tau}dV + \rho\mathbf{q}dV\frac{d}{d\mathbf{q}}\mathbf{u} = \rho\mathbf{u}dV + dV\mathbf{q}\left(\frac{d}{d\mathbf{q}}\rho\mathbf{u}\right) = -\frac{c}{4\pi}\int \mathbf{F}d\mathbf{S} + \mathbf{b}.$$

Разделив обе части уравнения на собственный объем частицы среды в пространстве конфигураций, используя уравнение неразрывности и однородность пространства-времени, получаем

$$\rho\mathbf{u} = -\frac{c}{4\pi}\frac{d}{d\mathbf{q}}\mathbf{F}.$$

где $\mathbf{F}$ - антисимметричный тензор, который следует отождествить с тензором электромагнитного поля.

Представлен еще один аргумент в подтверждение того, что закон сохранения материи в виде уравнения баланса может служить генератором физических законов.

Литература

1. Беловол А.В. Электродинамика и закон сохранения материи // Автомобильный транспорт: сб. науч. тр. - 2014. – Вып. 34. – с. 114-119.