Беловол Александр Васильевич, к.т.н., доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

НЕВАРИАТИВНАЯ ТЕХНИКА ПОЛУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим движение системы материальных точек в пространстве как движение сплошной среды. Разобьем среду на бесконечно малые объемы, которым будут отвечать частицы с координатами, образующими вектор $\mathbf{q}$. Между положением частицы среды и положением n материальных точек, из которых она состоит, существуют корреляции вида

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}),$$

где $\mathbf{x}$ - строка (столбец), составленная из координат точек частицы среды.

Материальность точек предполагает наличие у них соответствующего материального признака (массы), который входит в качестве весового коэффициента в выражение для интервала между ближайшими положениями системы n различных материальных точек

$$dl^2 = d\mathbf{x}\mathbf{M}d\mathbf{x},$$

где $d\mathbf{x}$ - столбец или строка из координат точек системы, а $\mathbf{M}$ - диагональная матрица размером, состоящая из блоков $m_k\mathbf{I}$, где m_k - масса k-той материальной точки, $\mathbf{I}$ - единичная матрица.

Векторы скорости точек, составляющих частицу среды, и самой частицы связаны соотношением:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}},$$

где $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}$ - матрица преобразования координат.

Интервал между последовательными положениями частицы в пространстве конфигураций будет иметь вид $dl^2 = d\mathbf{q}\mathbf{I}d\mathbf{q}$,

где роль метрического тензора играет матрица

$$\mathbf{I} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}.$$

Известно, что движению частицы в пространстве конфигураций можно поставить в соответствие движение жидкости из представляющих точек в фазовом пространстве. Интервал в фазовом пространстве можно получить дифференцированием интервала в пространстве конфигураций по собственному времени [1]

$$ds^2 = d\mathbf{x}\mathbf{G}d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{x}$ - столбец (строка), составленный из последовательно расположенных проекций вектора $\mathbf{q}$ и проекций импульса $\mathbf{p} = \mathbf{I}\dot{\mathbf{q}}$ частицы; матрица

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

Уравнение движения фазовой жидкости было получено в работе [1] исходя из консервативности механической системы, однородности фазового пространства и инвариантности уравнений по отношению к выбору порядка координат:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}},$$

где $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ - градиент функции H в фазовом пространстве, а матрица $\mathbf{B}$ - антисимметричная матрица вида

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

Если спроектировать уравнение движения на пространство конфигураций и на пространство импульсов частицы, то получим уравнения движения частицы в каноническом виде

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Функция Гамильтона при этом должна иметь вид:

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{p}\mathbf{I}^{-1}\mathbf{p} + \Pi(\mathbf{q}),$$

где первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию поступательного движения частицы, а второе – потенциальную энергию.

Потенциальную энергию частицы следует разделить на внутреннюю, связанную с возможностью преобразования хаотического движения материальных точек составляющих частицу среды в упорядоченное, и на внешнюю, пропорциональную массе частицы.

В качестве примера получим уравнение движения идеальной жидкости, которая представляет собой консервативную систему. Рассматривая в качестве координат частицы координаты ее центра масс, после деления второго из канонических уравнений на объем частицы имеем

$$\rho\dot{\mathbf{u}} = -\frac{\partial p}{\partial \mathbf{q}} + \rho\mathbf{g},$$

где ρ - плотность жидкости; $\mathbf{u}$ - ее скорость; $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{q}}$ - градиент давления; $\rho\mathbf{g}$ - плотность массовой силы.

Литература

1. Беловол А.В. Законы механики и универсальные законы природы // Вестник ХНАДУ / Сб. науч. тр. - 2013. – Вып. 60. – с. 148-153.