

## ТРАНСПОРТНАЯ ИНФРАСТРУКТУРА, РАЗВИТИЕ СЕТИ ЗАРЯДНЫХ СТАНЦИЙ ДЛЯ ЭКОМОБИЛЕЙ. ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ НА ТРАНСПОРТЕ

УДК 519. 161

### СХЕМА ПОИСКА ГАМИЛЬТОНОВА МАРШРУТА МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ НА ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

**О.Б. Маций, аспирант, ХНАДУ**

***Аннотация.** Рассматривается гамильтонова задача коммивояжера и ее новое обобщение, моделирующее реальные ситуации в управлении и планировании на транспортных сетях.*

***Ключевые слова:** алгоритм, граф, вершина графа, пространство решений, точность.*

### СХЕМА ПОШУКУ ГАМІЛЬТОНОВОГО МАРШРУТУ МІНІМАЛЬНОЇ ВАРТОСТІ НА ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ

**О.Б. Маций, аспірант, ХНАДУ**

***Анотація.** Розглядається гамільтонтова задача комівояжера і її нове узагальнення, що моделює реальні ситуації в управлінні та плануванні на транспортних мережах*

***Ключові слова:** алгоритм, граф, вершина графа, простір рішень, точність.*

### SEARCHING THE HAMILTONIAN WALK OF MINIMAL COST IN TRANSPORT NETWORK

**O.B. Matzyi, post graduate student, KHNADU**

***Abstract.** The problem of the Hamiltonian walk of a commercial traveler and its modern generalization simulating real situations in management and planning of transport networks has been considered.*

***Keywords:** algorithm, graph vertex, space of solutions, precision.*

#### Введение

Проблема коммивояжера охватывает широкий спектр задач оптимизации замкнутых траекторий на плоскости, поверхности и в пространстве. Решения данных задач оказываются востребованными в различных областях приложений: в транспортной логистике, теории расписаний, проектировании высокопродуктивных программных систем,

генетике, археологии и антропологии. Разнообразные модели замкнутых процессов, описываемые в терминах задачи коммивояжера, благодаря графическому представлению наглядны и обладают строгой привлекательностью, а методы их исследования тесно связаны с динамично развивающимися направлениями дискретной математики, такими, как теория графов, комбинаторный анализ, теория сложности экстремальных задач, теория паросочетаний

[1].

### Анализ публикаций

Существующие методы решения гамильтонова задача коммивояжера (ГЗК) в основном представлены методами организованного перечисления всех гамильтоновых цепей и циклов [2] реализация этих методов практически не возможна даже с помощью мощных компьютерных систем.

### Цель и постановка задачи

Обратимся к постановке ГЗК. Задан связный взвешенный граф  $H = (V, U)$  без петель и кратных ребер, представляющий транспортную сеть,  $V$  -  $H = (V, U)$  множество вершин,  $|V| = n$ ,  $U$  - множество ребер,  $U \subseteq V \times V$ . Ребру  $\{i, j\} \in U$  приписана стоимость (вес)  $d_{ij} \in R_0^+$ ,  $i, j = \overline{1, n}$   $R_0^+$  - множество действительных неотрицательных чисел. Транспортную сеть полностью определяет симметричная матрица стоимостей  $[d_{ij}]_n$ , где  $d_{ij} \in R_0^+$ , если  $\{i, j\} \in U$ , и  $d_{ij} = \infty$  иначе,  $i \neq j$ ,  $d_{ii} = \infty$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

В ГЗК требуется найти во взвешенном графе  $H = (V, U)$  гамильтонов цикл минимальной стоимости.

Для неполного графа  $H = (V, U)$  с  $n$  вершинами  $n-1 \leq |U| < \binom{n}{2}$ , и,

следовательно, пространство решений  $\tau$  ГЗК может быть пустым.  $NP$  - полнота задачи и случаи негамильтоновости графа  $H$  исключают применение эффективных приближенных алгоритмов ее решения. Поэтому любой алгоритм поиска ГЗК характеризуется как переборный, который либо находит обход  $\tau$  минимальной стоимости, если граф  $H$  гамильтонов, либо корректно устанавливает, что в графе  $H$  гамильтоновых циклов нет.

Время работы применяемого алгоритма решения ГЗК находится в зависимости от параметров, с помощью которых можно

оценить мощность множества гамильтоновых циклов графа  $H$ . Такими параметрами являются упорядоченные по неубыванию степени его вершин  $\delta_i, i = \overline{1, n}$ . Идея использования в разработке алгоритма решения ГЗК последовательности  $\delta_i \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_n$  исходит из того, что чем больше степени вершин и чем меньше разность  $\delta_n - \delta_1$ , тем вероятнее существование гамильтонова цикла.

Известно несколько необходимых и несколько достаточных условий гамильтоновости графа, установленных с помощью параметров  $\delta_i, i = \overline{1, n}$ . Достаточное условие существования гамильтонова цикла в графе  $H = (V, U)$  получены, исходя из количества в нем вершин каждой степени  $\delta_i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Наиболее общими из них являются условия Поша. Они неулучшаемы, т. е. при их ослаблении новые условия уже не позволяют установить, содержит ли граф  $H$  гамильтонов цикл [3]. На проверку условий Поша требуется время  $O(n^2)$ . Любое из известных условий нельзя отнести к эффективным описаниям гамильтонова графа, с помощью которых можно ограничить объем вычислений алгоритма решения ГЗК.

При разработки методов решения ГЗК более востребованным оказываются достаточные условия негамильтоновости графа  $H$ . Если выполняется хотя бы одно из них, то процесс вычислений прерывается: задача не имеет решения. Характеризация негамильтоновых часто связана с содержащимися в них вершинами степени 2. Известен единственный пример негамильтонового плоского графа с 46 вершинами, степени которых равны 3 (граф Татта) [3].

### Схема поиска гамильтонова маршрута минимальной стоимости

Рассмотрим вычислительную схему, позволяющую в ряде случаев уменьшить время поиска решения ГЗК. Процесс поиска гамильтонового цикла минимальной стоимости будем выполнять в два этапа.

На первом этапе проверяются все известные достаточные условия негамильтоновости графа  $H$ . Они устанавливаются в результате

изучения его структуры, характеризуемой степенями вершин, а также связностью, обобщающей такие понятия как точка сочленения, мост и блок [3]. Все условия должны быть проверены за полиномиальное время. ГЗК неразрешима, если выполнено хотя бы одно из установленных достаточных условий негамильтоновости данного графа.

На втором этапе осуществляется непосредственно поиск решения ГЗК по методу ветвей и границ. Поиск завершается либо построением гамильтонового цикла минимальной стоимости, либо сообщением, что ГЗК не имеет решения.

Очевидно, если граф содержит хотя бы одну вершину степени 1, то ГЗК не разрешима. Ясно также, что граф негамильтонов, если он содержит точки сочленения и мосты.

Предположим, что в графе  $H = (V, U)$  не висят вершин и точек сочленения, но имеются вершины степени 2. В этом случае возникает возможность, во-первых, свести ГЗК к ГЗК меньшей размерности и, во-вторых, получить в результате сведения новые достаточные условия негамильтоновости графа  $H$ .

Назовем вершино-реберным преобразованием (ВРП) графа  $H = (V, U)$  в граф  $(V^0, U^0)$  процедуру, включающую такие шаги.

S0.  $H = (V, U)$  - граф, не содержащий висятых вершин и точек сочленения, но имеющий вершины степени 2.

S1. Каждую цепь  $(p, q, \dots, t, w)$  в которой  $\delta_p, \delta_w > 2$ ,  $\delta_q = \dots = \delta_t = 2$ , заменить на ребро  $\{p, w\}$  с весом, равным сумме весов ее ребер; удалить ребро  $\{p, w\}$ , если оно принадлежит подмножеству оставшихся ребер из  $U$ .

S2. Если добавленные ребра образуют непересекающиеся по вершинам цепи  $(p, s, \dots, r, v)$ , то для каждой из них исключить из подмножества удаленных ребер все ребра, инцидентные вершинам  $s, \dots, r$ , заменить цепь на ребро  $\{p, v\}$  с весом, равным сумме весов ребер

$\{p, s\}, \dots, \{r, v\}$ , перейти к шагу S1. Иначе конец.

Степень любой вершины построенного графа  $H^0 = (V^0, U^0)$  больше 2, а множество  $U^0$  содержит добавленные ребра и подмножество удаленных ребер из  $U$ . Множество добавленных ребер, среди которых могут быть кратные, обозначим  $R$ . Процедура ВРП графа  $H = (V, U)$  в граф  $H^0 = (V^0, U^0)$  выполняется за время, полиномиально зависящее от мощности множества  $U$ . При продуманной организации хранения вершин и ребер графа  $H$  ее трудоемкость можно ограничить величиной  $O(|U|^2)$ .

*Утверждение.* Если в графе  $H^0 = (V^0, U^0)$  множество ребер  $R$  не является паросочетанием, то граф  $H = (V, U)$  негамильтонов.

*Доказательство.* Если ребра  $R$  не образуют паросочетания, то образуют подграф графа  $H^0$ , содержащий хотя бы одну компоненту из двух структурно различных объектов: кратных ребер и деревьев с  $k+1$  вершинами, у которых одна вершина имеет степень  $k > 2$ , а степень остальных вершин равна 1. В таком случае невозможно построить простой цикл, охватывающий множество вершин  $V^0$  и множество ребер  $R$ .

## Выводы

Таким образом, благодаря рассмотренному подходу появляется возможность в ряде случаев уменьшить время поиска решения ГЗК.

## Литература

1. Панишев А. В. Модели и методы оптимизации замкнутых маршрутов на транспортной сети / А. В. Панишев, А. В. Морозов. – Житомир: ЖГТУ, 2014. – 316 с.
2. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес, -М.: Мир, 1978. -432 с.
3. Харари Ф. Теория графов / Ф. харари. М.: Мир, 1973. – 300 с.

Рецензент **Н.В. Хворост**, професор, д.т.н.,  
ХНАДУ.

Стаття поступила в редколлегию 25.05.2015.