

Гальченко В. Я., д.т.н., професор
Трембовецька Р. В., д.т.н., доцент
Тичков В. В., к.т.н., доцент
Тичкова Н. Б., аспірантка
кафедра приладобудування, мехатроніки
та комп'ютеризованих технологій
Черкаський державний технологічний університет

ОЦІНЮВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ОДНОРІДНИХ БАГАТОФАКТОРНИХ ПЛАНІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ НА ОСНОВІ КВАЗІПОСЛІДОВНОСТЕЙ СОБОЛЯ

В метрології для адекватного експериментального визначення функції перетворення засобів вимірювальної техніки важливим є план експерименту (ПЕ), який дозволяє якісно та з прийнятною точністю провести такі дослідження. Однорідність є однією із основних властивостей комп'ютерних планів експериментів (КПЕ), що відіграє вирішальну роль щодо забезпечення виконання цього завдання.

При оцінюванні однорідності ПЕ необхідно визначити емпіричні показники відхилення його згенерованих точок від ідеального розподілу, а саме центровану та циклічну розбіжності. Чисельний та візуальний аналіз із арсеналу статистичних методів планування експерименту показують високий потенціал в цьому сенсі вибірок на основі квазіпослідовностей Соболя (КПС) для планів великої розмірності.

В роботах [1, 2] представлено оцінювання однорідності дво- та три-факторних ПЕ за критеріями центрованої та циклічної розбіжностей. Хоча відомими є декілька підходів до створення ПЕ із зазначеними властивостями, задача пошуку варіантів планів з мінімальною розбіжністю в гіперпросторі

дуже проблемна через обчислювальну складність пошуку близького до оптимального рішення.

В роботі [3] представлені результати лише для побудови однорідних дво-, три- та чотири-факторних ПЕ. Автори отримали нижні межі розбіжностей для збалансованих планів, проте проблему пошуку однорідних ПЕ при мінімізації розбіжностей вважають складною через обмежене використання нижніх меж.

В роботі [4] авторами розглянуто лише три-факторні плани, для яких застосовано в якості критеріїв рівномірності та однорідності ПЕ повна, центрована та циклічна розбіжності. В результаті дослідження встановлено, що у випадку багатфакторності планів необхідні додаткові спостереження щодо виконання умов їх однорідності.

В огляді [5] автори, розглядаючи дво-факторні ПЕ, встановили найкращу придатність до застосування у багатфакторних ПЕ послідовностей Соболя, показуючи, що послідовності Хаммерслі та Холтона підходять для планів меншої розмірності.

Авторами цього дослідження побудовано комбінації квазіпослідовностей для дво-, три-, чотири-, п'яти- [6], шести- та семи-факторних планів [7] на основі рекурсивних R-послідовностей Робертса, де зі збільшенням розмірності гіперпростору та кількості точок підтверджуються доволі прийнятні однорідність та проєкційні властивості планів експерименту в багатфакторних просторах. Як кількісну міру неоднорідності множини векторів, які розподілені в одиничному гіперпросторі, використано центрований та циклічний різновиди розбіжності відносно L_2 -норми, які є інваріантними щодо перемаркування й упорядкування факторів та відносно обертання координат.

Тим не менш, аналіз досліджень попередників та самих авторів доводить перспективність створення планів на основі КПС як тих, що забезпечують найкращі показники однорідності. Проте пошук необхідних комбінацій

послідовностей для багатofакторних планів потребує громіздких трудомістких досліджень внаслідок необхідності реалізації його засобами перебору значної кількості варіантів-претендентів серед потенційно можливих, але не гарантує врешті-решт отримання позитивного результату. Тому знаходження вдалих планів з низькими показниками розбіжності та відповідно досконаліми проєкційними властивостями є вельми важливим.

З цих причин авторами створені плани багатofакторних комп'ютерних однорідних планів експериментів на базі КПС. Для підтвердження отриманих результатів представлені згенеровані в одиничному гіперкубі для п'яти- та шести- факторних планів експерименту (ПЕ) послідовності Соболя для кількості точок, яка дорівнює 1024. Один з них наведений у табл. 1.

Отримані показники центрованої та циклічної розбіжностей для п'яти- та шести-факторних планів для двох кращих знайдених комбінацій КПС відповідно до кожного плану при різній кількості точок представлені в табл. 2 та 3.

Таблиця 1 – Багатofакторний однорідний план експерименту

№	ζ_2	ζ_3	ζ_6	ζ_8	ζ_9	ζ_{17}
1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
2	0,75	0,25	0,75	0,25	0,75	0,25
3	0,25	0,75	0,25	0,75	0,25	0,75
4	0,625	0,875	0,125	0,875	0,375	0,875
5	0,125	0,375	0,625	0,375	0,875	0,375
6	0,375	0,625	0,875	0,625	0,625	0,625
7	0,875	0,125	0,375	0,125	0,125	0,125
8	0,9375	0,6875	0,0625	0,8125	0,5625	0,8125
9	0,4375	0,1875	0,5625	0,3125	0,0625	0,3125
10	0,1875	0,9375	0,8125	0,5625	0,3125	0,5625
...
1020	0,004882813	0,350586	0,55957	0,510742	0,303711	0,829102
1021	0,504883	0,850586	0,05957	0,010742	0,803711	0,329102
1022	0,754883	0,100586	0,30957	0,760742	0,553711	0,579102
1023	0,254883	0,600586	0,80957	0,260742	0,053711	0,079102
1024	0,627441	0,401855	0,406738	0,654785	0,781738	0,202637

Таблиця 2 – Показники розбіжностей для п'яти-факторних планів експерименту для запропонованих кращих варіантів КПС

Комбінація ЛП _τ - послідовностей	Кількість точок ПЕ	$CD(Dn)^2$	$WD(P)^2$
$(\xi_2, \xi_6, \xi_8, \xi_9, \xi_{17})$	N = 32	0,014225	8,465434
	N = 128	$3,339749 \cdot 10^{-3}$	8,43616
	N = 512	$2,827122 \cdot 10^{-4}$	8,42884
	N = 1024	$3,489621 \cdot 10^{-5}$	8,428096
$(\xi_1, \xi_2, \xi_5, \xi_{14}, \xi_{16})$	N = 32	0,010291	8,456246
	N = 128	$1,952568 \cdot 10^{-3}$	8,436889
	N = 512	$1,406595 \cdot 10^{-4}$	8,428457
	N = 1024	$4,298124 \cdot 10^{-5}$	8,428175

Степінь високої гомогенності розподілу точок цих планів експерименту можна спостерігати при збільшенні кількості точок, що проілюстровано на рисунку 1 для найкращої комбінації послідовностей $(\xi_2, \xi_3, \xi_6, \xi_8, \xi_9, \xi_{17})$ демонстрацією попарних проєкцій плану.

Таблиця 3 – Показники розбіжностей для шести-факторних планів експерименту для запропонованих кращих варіантів КПС

Комбінація ЛП _τ - послідовностей	Кількість точок ПЕ	$CD(Dn)^2$	$WD(P)^2$
$(\xi_2, \xi_3, \xi_6, \xi_8, \xi_9, \xi_{17})$	N = 32	0,030102	11,308851
	N = 128	0,013684	11,255926
	N = 512	$4,354999 \cdot 10^{-4}$	11,238914
	N = 1024	$8,03723 \cdot 10^{-5}$	11,237652
$(\xi_1, \xi_2, \xi_5, \xi_{10}, \xi_{14}, \xi_{16})$	N = 32	0,027111	11,297479
	N = 128	0,011974	11,256825
	N = 512	$3,189266 \cdot 10^{-4}$	11,238377
	N = 1024	$8,818414 \cdot 10^{-5}$	11,237773

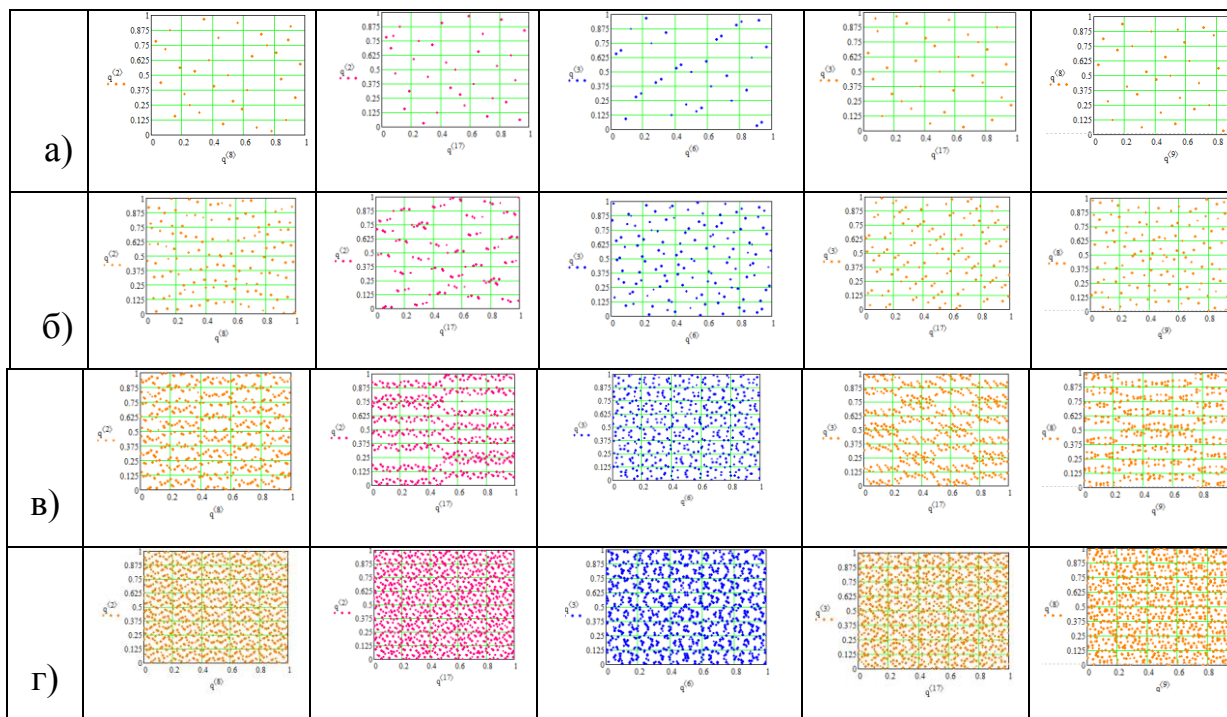


Рисунок 1 – Дослідження гомогенних властивостей окремих попарних проєкцій КПС шести-факторного плану експерименту із різною кількістю точок: а – $N = 32$; б – $N = 128$; в – $N = 512$; г – $N = 1024$.

Висновки. Для каталогізації створено багатовимірні (п'яти та шести-факторні) ефективні плани однорідних експериментів, що доведено оцінюванням гомогенності комбінацій квазіпослідовностей Соболя, яким властиві низькі показники узагальнених розбіжностей внаслідок вдалого вибору направляючих чисел.

Література:

1. Fang K. T., Lu X., Winker P. Lower bounds for centered and wrap-around L_2 -discrepancies and construction of uniform designs by threshold accepting. // J. Complexity. – 2003. – no. 19, pp. 692-711.
2. Chatterjee K., Li Z., Qin H. Some new lower bounds to centered and wrap-around L_2 -discrepancies // Stat. Probab. Lett. – 2012. - vol. 82. - no. 7. – pp. 1367–1373.

3. Elsayah A. M., Fang K. T., He P., Qin H. Sharp lower bounds of various uniformity criteria for constructing uniform designs // *Statistics Papers*. - 2021. - vol. 62. – pp. 1461–1482.
4. Lanlan He, Hong Qin, Jianhui Ning. Weighted symmetrized centered discrepancy for uniform design // *Communications in Statistics - Simulation and Computation*. – 2022. - vol. 51. - no. 8. – p. 4509-4519.
5. Garud S. S., Karimi I. A., Kraft M. Design of computer experiments: A review // *Computers & Chemical Engineering*. - 2017. - vol. 106. - no. 11. - pp. 71-95.
6. Halchenko V.Ya., Trembovetska R.V., Tychkov V.V., Storchak A.V. The Construction of Effective Multidimensional Computer Designs of Experiments Based on a Quasi-random Additive Recursive R_d -sequence // *Applied Computer Systems*. – 2020. – vol. 25. - no. 1. - pp. 70-76. <https://doi.org/10.2478/acss-2020-0009>.
7. Гальченко В. Я., Кошовий М. Д., Трембовецька Р. В. Однорідні плани багатofакторних експериментів на квазівипадкових R -послідовностях Робертса для сурогатного моделювання у вихрострумовій структуроскопії // *Радіoeлектроніка, інформатика, управління*. – 2022. – т. 62. - № 3. - С. 22–30. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2022-3-2>.