

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять, РГР та СРС

з дисципліни **«Теоретична механіка»**,
розділ **«Кінематика»**

для студентів денної та заочної форм навчання
напряму підготовки

G19 (192) – «Будівництво та цивільна інженерія»



Харків 2026

Укладачі: Воропай О.В., Карпенко В. О., Нескреба Е.Є., Шарапата А. С.

Кафедра деталей машин та теорії механізмів і машин

Воропай О. В., Карпенко В. О., Нескреба Е. Є., Шарапата А. С. Методичні вказівки до практичних занять, РГР та СРС з дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Кінематика» для напряму підготовки G19 (192) – «Будівництво та цивільна інженерія». Х.: ХНАДУ, 2026. 84 С.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ	4
СТИСЛИЙ ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ	6
Важливі визначення та терміни	6
Кінематика точки, твердого тіла та плоских важільних механізмів.....	9
Миттєвий центр швидкостей (МЦШ)	13
План швидкостей та план прискорень	15
Передачі.....	22
Зубчасті механізми	25
Планетарні зубчасті передачі.....	27
1. ЗАДАЧА K1	30
1.1 Завдання та вихідні дані до задачі K1	30
1.2 Вказівки до розв'язання задачі K1	35
1.3 Алгоритм розв'язання задачі K1	43
1.4 Приклад розв'язання задачі K1	44
2. ЗАДАЧА K2	49
2.1 Завдання та вихідні дані до задачі K2	49
2.2 Вказівки до розв'язання задачі K2	57
2.3 Алгоритм розв'язання задачі K2	60
2.4 Приклад розв'язання задачі K2.....	61
3. ЗАДАЧА K3	64
3.1 Завдання та вихідні дані до задачі K3	64
3.2 Вказівки до розв'язання задачі K3	70
3.3. Алгоритм розв'язання задачі K3	75
3.4 Приклад розв'язання задачі K3.....	76
ЛІТЕРАТУРА.....	79
ДОДАТОК.....	81

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Теоретична механіка – наука, в якій вивчаються загальні закони механічного руху та механічної взаємодії матеріальних тіл.

Курс теоретичної механіки складається з трьох основних розділів: статика (С), кінематика (К) і динаміка (Д).

Розрахунково-графічна робота (РГР) з дисципліни теоретична механіка є самостійною роботою студента. Вона включає розв'язання задач, які дозволять закріпити знання, отримані на лекціях і практичних заняттях. Кількість задач, що підлягають розв'язанню в рамках РГР, визначається викладачем, який проводить практичні заняття в залежності від обсягів курсу окремо для кожної спеціальності.

Крім розв'язку задач РГР і підготовки до занять (лекційних та практичних), студент повинен самостійно вивчити ті теми дисципліни, які не розглядаються детально на лекціях. Також крім теоретичних відомостей до окремих етапів виконання РГР, ці методичні вказівки (МВ) містять також варіанти завдань і розгорнуті докладні приклади розв'язання та оформлення запропонованих задач.

Варіант завдання студенту призначає викладач, який веде практичні заняття в академічній групі. Для вибору завдання може використовуватися або порядковий номер студента у списку групи, або останні дві цифри номера студентського квитка.

Кожне розв'язане та оформлене завдання має бути захищене студентом під час його здачі. При виявленні несамостійності розв'язання задач або пред'явленні до захисту завдань не свого варіанту студенту призначається новий варіант, за яким він повинен виконати завдання повторно.

Студент, який не виконав РГР і не захистив хоча б одне з завдань, до заліку або іспиту з теоретичної механіки не допускається.

На іспит виноситься весь матеріал, опрацьований на лекціях, практичних заняттях та під час виконання РГР та СРС.

Гарне засвоєння курсу теоретичної механіки, а особливо розділу «Кінематика» для студентів дорожньо-будівельних спеціальностей, потребує не тільки глибокого вивчення теорії, а й набуття твердих навичок у розв'язанні задач.

Для цього необхідно самостійно розв'язати велику кількість задач. Тож дані методичні вказівки окрім самих завдань мають також досить детально розібрані приклади розв'язання подібних задач та рекомендовані алгоритми (послідовності) яких варто дотримуватися для ефективного розв'язку заданих задач та засвоєння викладених тем.

Кінематика – розділ теоретичної механіки, що вивчає рух тіл без урахування мас і сил, що викликали цей рух.

В теперішній час, враховуючи суттєве скорочення годин на вивчення теоретичної механіки, РГР до розділу «Кінематика» для студентів денної та заочної форм навчання напряму підготовки G19 (192) – «Будівництво та цивільна інженерія» дається в суттєво спрощеному вигляді, а саме, тільки 3 задачі К1, К2, К3.

В задачі **К1** (розділ «Кінематика плоских важільних механізмів») необхідно виконати кінематичний аналіз кривошипно-коромислового або кривошипно-повзунного механізму використовуючи графоаналітичний метод планів для знаходження відповідних швидкостей та прискорень точок та ланок.

В задачі **К2** (розділ «Дослідження складного руху точки») вимагається виконати дослідження складного руху точки та виконати визначення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки.

В задачі **К3** (розділ «Кінематика зубчастих механізмів») слід виконати кінематичне дослідження механізму багатоступінчастої зубчастої або зубчато-черв'ячної передачі обертання.

СТИСЛИЙ ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

Важливі визначення та терміни

Теорія механізмів та машин – наука про структуру (побудову), кінематику та динаміку механізмів (машин), у зв'язку з їх аналізом та синтезом.

Аналіз механізмів – вивчення (дослідження) структури, кінематики та динаміки існуючих механізмів.

Синтез механізмів – проектування нових механізмів за наперед заданими їх властивостями.

Механізм – це система ланок, призначена для *перетворення руху* однієї або декількох ланок у потрібні рухи інших ланок.

Машина – пристрій, що виконує механічну роботу з метою *перетворення енергії* (матеріалів та інформації).

Під терміном “машина” в ТММ розуміється сукупність функціонально пов'язаних механізмів.

У ТММ вивчаються переважно механізми, що складаються з твердих (жорстких) ланок.

Ланкою механізму є сукупність тіл (деталей), що працюють (рухаються) як одне ціле.

Кінематична схема – це максимально спрощене зображення механізму (машини), що враховує ті розміри його ланок, які впливають на закон руху та силову взаємодію ланок.

По виду руху розрізняють наступні найменування ланок важільних механізмів:

Стійка (Стояк) – нерухома ланка.

Крім терміна **стійка (стояк)** також використовують терміни:

опора (нерухома опора) при обертальному русі та

напрямна (нерухома напрямна) при поступальному русі.

Кривошип – ланка, що здійснює *повнооборотний* обертальний рух.

Коромисло – ланка, що здійснює коливальний (або зворотно-обертальний, тобто *неповнооборотний*) рух.

Шатун – ланка, що здійснює складний рух (найчастіше плоскопаралельний).

Повзун – ланка, що здійснює поступальний (зворотно-поступальний) рух.

Камінь – повзун, що здійснює складний рух.

Куліса – направляюча повзуна або каменю, яка рухається.

Ланки в механізмах з'єднуються в кінематичні пари та кінематичні ланцюги.

Кінематична пара – з'єднання двох ланок, що допускає їх відносний рух.

Кінематичний ланцюг – система ланок пов'язана між собою кінематичними парами.

Нижчі КП – це КП у яких контакт дотичних поверхонь здійснюється по поверхні або площині.

Вищі КП – це КП у яких контакт дотичних поверхонь здійснюється по лінії або в точці.

Приклади вищих КП: кулачки, зубчасті зачеплення.

Число ступенів свободи. Формула Чебишева.

$$w = 3 \cdot n - 2 \cdot p_n - p_v,$$

де w – число ступенів свободи (число рухливостей);

n – число рухомих ланок;

p_n – число нижчих КП;

p_v – число вищих КП.

$$w = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 - p_4.$$

Структурний аналіз механізмів.

Задачі:

- Побудова кінематичної схеми механізму.
- Нумерація та найменування ланок механізму.
- Визначення ступеня рухливості механізму.
- Виявлення надлишкових зв'язків у механізмі.

Кінематичний аналіз механізмів.

Задачі:

1. Побудова положень механізму (сумісних) на його кінематичній схемі.
2. Визначення траєкторій руху будь-яких точок ланок механізму.
3. Визначення лінійних швидкостей та прискорень будь-яких точок ланок механізму.
4. Визначення крайніх положень вихідної ланки, повертання (існування) кривошипу.
Критерій крайньої (мертвої) точки – зупинка, тобто швидкість дорівнює 0.
5. Визначення кутових швидкостей та прискорень ланок механізму.

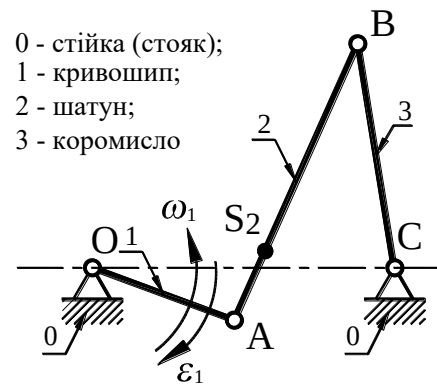
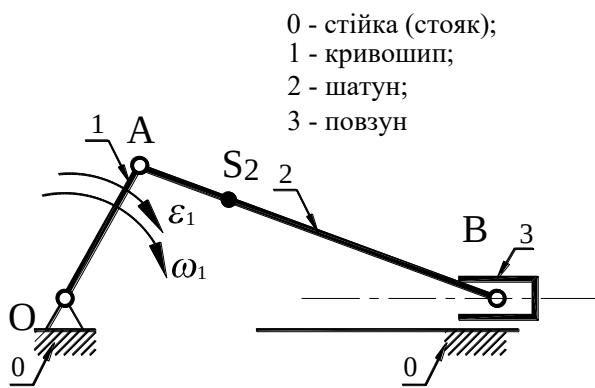
Методи кінематичного аналізу:

1. Аналітичний
2. Графічний (метод кінематичних діаграм)
3. Числовий або Чисельний
4. Комбінований (наприклад, графоаналітичний – метод планів)

Кінематика точки, твердого тіла та плоских важільних механізмів

У кінематиці вивчаються траєкторії, переміщення, швидкості та прискорення тіл під час їх руху.

Траєкторія – лінія по якій рухається точка (наприклад, центр мас твердого тіла).



Доповніть будь ласка самостійно опис траєкторій та видів рухів для точок та ланок кривошипно-повзунного та кривошипно-коромислового механізмів:

Траєкторія руху т. O –

Ланка 1 – здійснює ...

Траєкторія руху т. A –

Ланка 3 – здійснює ...

Траєкторія руху т. B –

Ланка 2 – здійснює ...

Види рухів

Найпростіші:

1. Поступальний
2. Обертальний

Найбільш загальний випадок:

3. Складний

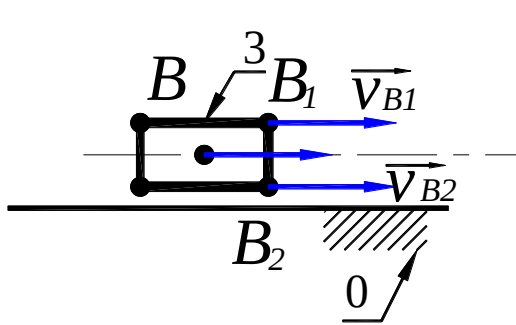
Окремий випадок:

3.1. Плоскопаралельний (плаский) – рух відбувається в одній площині або паралельних площинах (поступально-обертальний).

Поступальний	Обертальний
1) Переміщення s , (x, y) , м	1) Кутове переміщення φ , рад (радіани), $^{\circ}$ (градуси). $180^{\circ} = \pi$ радіан, 1 оберт $= 360^{\circ} = 2\pi$ радіан
2) Швидкість v , м/с (км/год) $v = \frac{ds}{dt}$	2) Кутова швидкість ω , рад/с ($1/\text{с}$, с^{-1}) $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ n – частота обертів, об/с (об/хв) $\omega = 2\pi \cdot n_s = \frac{\pi \cdot n_m}{30}$
3) Прискорення a , м/с ² $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	3) Кутове прискорення ε , рад/с ² $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (1/\text{с}^2, \text{с}^{-2})$

Властивості рухів

I Поступальний

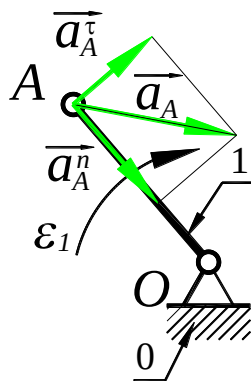
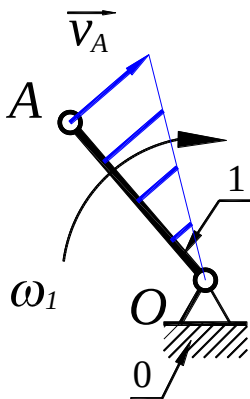


$$1) \vec{v}_B = \vec{v}_{B1} = \vec{v}_{B2}$$

$$2) \vec{v}_B \parallel \vec{a}_B$$

$$3) \vec{a}_B = \vec{a}_{B1} = \vec{a}_{B2}$$

II Обертальний



$$1) \vec{v}_O = 0, v_O = 0$$

$$a_O = 0$$

$$2) \vec{v}_A \perp OA$$

$$v_A = \omega_{OA} \cdot l_{OA} \quad (v_A = \omega_1 \cdot l_1)$$

$$3) \vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau, \quad a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2}$$

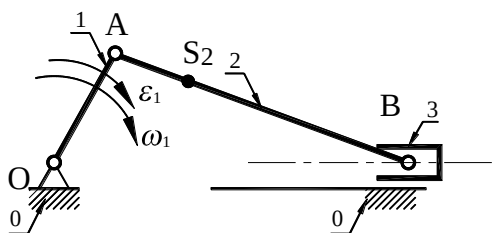
$$a_A^n = (\omega_{OA})^2 \cdot l_{OA}; \quad a_A^\tau = \epsilon_{OA} \cdot l_{OA}$$

Нормальне прискорення називають доцентровим,

вектор нормального прискорення завжди спрямований від точки до центру $\vec{a}_A^n \parallel OA$.

Дотичне прискорення (тангенціальне) спрямоване у бік кутового прискорення тіла (ланки) $\epsilon_1 = \epsilon_{OA}$, $\vec{a}_A^\tau \perp OA$.

III 3.1. Плоскопаралельний



$$1) \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad (\vec{v}_B = \vec{v}_{A/O} + \vec{v}_{B/A})$$

$\vec{v}_A$ – швидкість т. A (лінійна, абсолютна);

$\vec{v}_B$ – швидкість т. B (лін., абс.);

$\vec{v}_{B/A}$ – швидкість т. B навколо т. A (відн.);

швидкість відносного руху

$$\vec{v}_{B/A} = \omega_2 \cdot l_{AB}; \quad \vec{v}_{B/A} = -\vec{v}_{A/B}; \quad \vec{v}_{B/A} \perp AB$$

$$2) \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau,$$

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^\tau$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^\tau$$

$$a_{B/A}^n = (\omega_{AB})^2 \cdot l_{AB}; \quad a_{B/A}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot l_{AB}$$

$$a_{B/A}^n = (\omega_2)^2 \cdot l_{AB}; \quad a_{B/A}^\tau = \varepsilon_2 \cdot l_{AB}$$

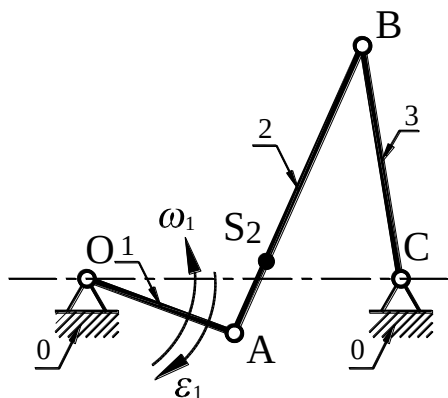
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau$$

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^\tau$$

$$a_B^n = (\omega_{BC})^2 \cdot l_{BC}; \quad a_B^\tau = \varepsilon_{BC} \cdot l_{BC}$$

$$a_B^n = (\omega_3)^2 \cdot l_{BC}; \quad a_B^\tau = \varepsilon_3 \cdot l_{BC}$$



У плоскопаралельному русі для швидкості та прискорення точки B можна записати векторне рівняння, яке розв'язується:

а) аналітично (розкладається на 2 рівняння проекцій на площині);

б) графоаналітично (методом планів та ін.);

в) числовим методом.

Миттєвий центр швидкостей (МЦШ)

Іноді називають – миттєвий центр обертання (не зовсім точно).

МЦШ використовують для ланок, які здійснюють плоскопаралельний рух.

МЦШ, як правило, позначають буквою латинського алфавіту – P , індекс цієї літери – номер ланки (P_2).

Швидкість МЦШ дорівнює 0. $\vec{v}_{P_2} = 0$.

Кутову швидкість ланки можна знайти за допомогою МЦШ

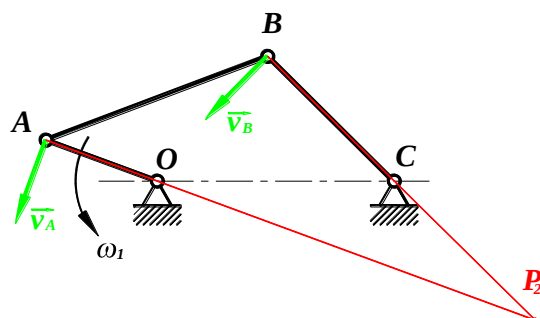
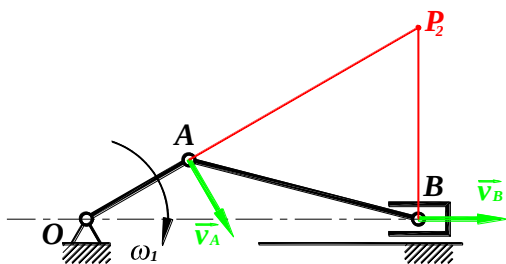
$$\omega_2 = \frac{v_A}{l_{AP_2}} = \frac{v_B}{l_{BP_2}}$$

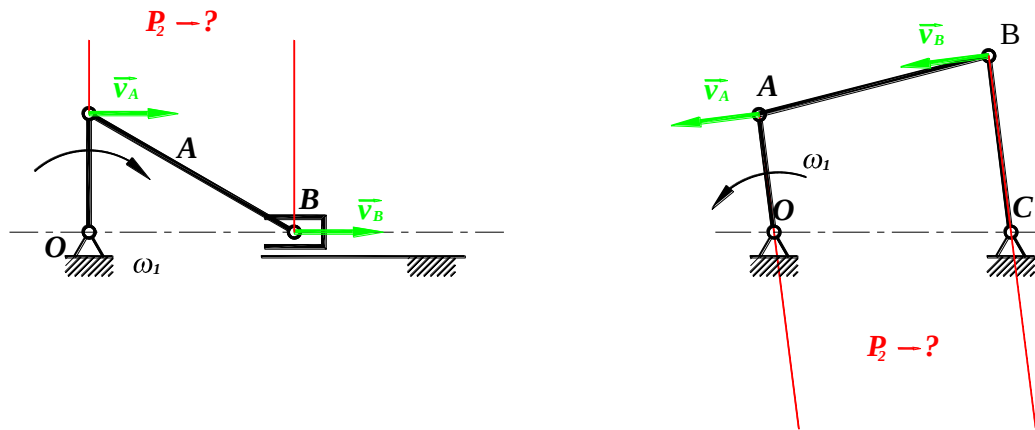
Правило знаходження МЦШ

МЦШ знаходиться на перетині перпендикулярів до швидкостей у будь-яких двох точках ланки, яка рухається плоскопаралельно.

Правило знаходження МЦШ:

- 1) на ланці, яка рухається плоскопаралельно, вибираємо дві точки;
- 2) визначаємо напрямок швидкостей цих точок (досить лише лінії);
- 3) до кожної лінії, вздовж якої спрямована швидкість, проводимо перпендикуляр через вибрану точку;
- 4) МЦШ знаходиться на перетині цих двох перпендикулярів.





Якщо два перпендикуляри не перетинаються (вони паралельні) – кажуть, що МЦШ знаходиться "на нескінченності", а ланка здійснює миттєво-поступальний рух. Тобто на даний момент часу швидкості всіх точок ланки рівні за напрямом та величиною.

Поряд з МЦШ іноді використовують поняття миттєвий центр прискорень МЦП, на відміну від МЦШ – користуватися МЦП не так зручно, оскільки для його визначення потрібно, крім кутової швидкості, знати і кутове прискорення ланки, яке теж не відоме.

План швидкостей та план прискорень

План швидкостей – це векторна діаграма, на якій у масштабі зображені вектори **швидкостей** всіх точок механізму.

План прискорень – це векторна діаграма, на якій у масштабі зображені вектори **прискорень** всіх точок механізму.

Масштаб – це відношення натуральної величини до відрізка, який їй відповідає.

Побудову плану швидкостей починають із швидкості точки A , величина якої

$$v_A = \omega_1 \cdot l_{OA} \text{ (м/с)}.$$

Вектор швидкості т. A – $\vec{v}_A$ (відрізок $p_v a$ на плані швидкостей) перпендикулярний кривошипу OA і спрямований у бік кутової швидкості кривошипу ω_1 . Довжину відрізка $p_v a$ рекомендується приймати 100 мм.

Швидкість точки B визначається шляхом графічного розв'язання векторного рівняння

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A},$$

де $\vec{v}_A$ – швидкість точки A (вже є на плані швидкостей – це відрізок $p_v a$);

$\vec{v}_{B/A}$ – швидкість відносного обертального руху т. B навколо т. A , напрямом $\vec{v}_{B/A}$ (лінія ab на плані швидкостей) перпендикулярний радіусу обертання, тобто відрізку AB);

$\vec{v}_B$ – швидкість точки B в обертальному чи поступальному її русі відносно стійки, напрямом $\vec{v}_B$ (лінії $p_v b$ на плані швидкостей) перпендикулярний коромислу BC чи паралельний переміщенню повзуна).

Порядок побудови плану швидкостей

- 1) Вибираємо полюс плану швидкостей p_v ;
- 2) Вибираємо масштаб плану швидкостей μ_v ;
- 3) Будуємо відрізок $p_v a$;
- 4) Проводимо лінію ab через точку a ;
- 5) Проводимо лінію $p_v b$ через точку p_v ;
- 6) На перетині ліній ab і $p_v b$ лежить точка b .

Використовуючи побудований план швидкостей, можна знайти швидкість будь-якої точки кожної ланки механізму, помноживши відповідний відрізок із плану швидкостей на розрахунковий масштаб μ_v :

$$\mu_v = \frac{v_A}{p_v a} \left(\frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right).$$

Крім того, легко визначити величину та напрямок кутових швидкостей ланок, які мають обертальний рух (у тому числі для відносного обертання). Наприклад, кутова швидкість шатуна 2.

$$\omega_2 = \frac{v_{B/A}}{l_{AB}} = \frac{(ab)\mu_v}{l_{AB}}, \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right),$$

а напрямок ω_2 визначається переносом вектора $\overrightarrow{v_{B/A}}$ з плану швидкостей у точку B кінематичної схеми механізму.

Побудова плану прискорень

Попередньо необхідно записати систему векторних рівнянь.

Побудову плану прискорення слід розпочинати з визначення прискорення точки A :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau,$$

де $\vec{a}_A$ – вектор повного прискорення точки A ,

$\vec{a}_A^n$ – вектор нормального прискорення точки A :

$$a_A^n = (\omega_1)^2 \cdot l_{OA},$$

Оскільки нормальне прискорення спрямоване по радіусу до центру обертання, то

$\vec{a}_A^n$ паралельно OA і має напрямок від A до O .

$\vec{a}_A^\tau$ – вектор дотичного прискорення точки A :

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_{OA}.$$

Дотичне прискорення (тангенціальне) направлене у бік кутового прискорення тіла (ланки) $\varepsilon_1 = \varepsilon_{OA}$, $\vec{a}_A^\tau \perp OA$.

На кресленні вибираємо точку (полюс) p_a і паралельно OA (в напрямку від A до O) проводимо $p_a n_1$ (довжину відрізка рекомендується прийняти 100 мм).

Масштаб плану прискорень

$$\mu_a = \frac{a_A^n}{p_a n_1} \left(\frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right).$$

Далі проводимо відрізок $n_1 a$ перпендикулярно відрізку $p_a n_1$. Довжина відрізка $n_1 a$ визначаємо за формулою через масштаб:

$$n_1 a = \frac{a_A^\tau}{\mu_a}.$$

Відрізок $p_a a$ відповідає повному прискоренню точки A , його величину ми можемо виміряти на плані прискорень.

$$a_A = p_a a \cdot \mu_a.$$

Будуємо план прискорень для ланок 2 і 3.

Векторне рівняння для цієї групи має вигляд

$$\begin{aligned}\underline{\vec{a}}_B &= \underline{\vec{a}}_A + \underline{\vec{a}}_{B/A}^n + \underline{\vec{a}}_{B/A}^\tau; \\ &\quad \parallel AB \quad \perp AB \\ (\overrightarrow{p_a b}) &= (\overrightarrow{p_a a}) + (\overrightarrow{an_2}) + (\overrightarrow{n_2 b}),\end{aligned}$$

де $\vec{a}_B$ – прискорення точки B ;

$\vec{a}_{B/A}^n$ – вектор нормального прискорення відносного обертального руху т. B навколо т. A , величина якого визначається за формулою $a_{B/A}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}$ (спрямований паралельно ланці AB від т. B до центру відносного обертання т. A);

$\vec{a}_{B/A}^\tau$ – вектор дотичного (тангенціального) прискорення відносного обертального руху т. B навколо т. A , (за величиною це прискорення до побудови плану прискорень невідоме, а за напрямком перпендикулярно AB);

Відповідно до векторного рівняння з точки a плану прискорень, відкладаємо відрізок an_2

$$an_2 = a_{B/A}^n / \mu_a,$$

який зображує нормальне прискорення $\vec{a}_{B/A}^n$ у вибраному масштабі μ_a . Відрізок an_2 паралельний AB і направлений від точки B до точки A . Далі, через точку n_2 (кінець відрізка an_2), перпендикулярно AB проводимо пряму $n_2 b$, тобто показуємо напрямок прискорення $\vec{a}_{B/A}^\tau$.

Із полюса p_a у напрямку вектора $\vec{a}_B$ проводимо пряму $p_a b$ до перетину з прямою, яка раніше проведена з точки n_2 . Точка перетину – т. b визначає величини відрізків $p_a b$ і $n_2 b$.

За допомогою плану прискорень можна знайти кутові прискорення ланок, що обертаються. Наприклад, кутове прискорення шатуна 2 (рад/с²)

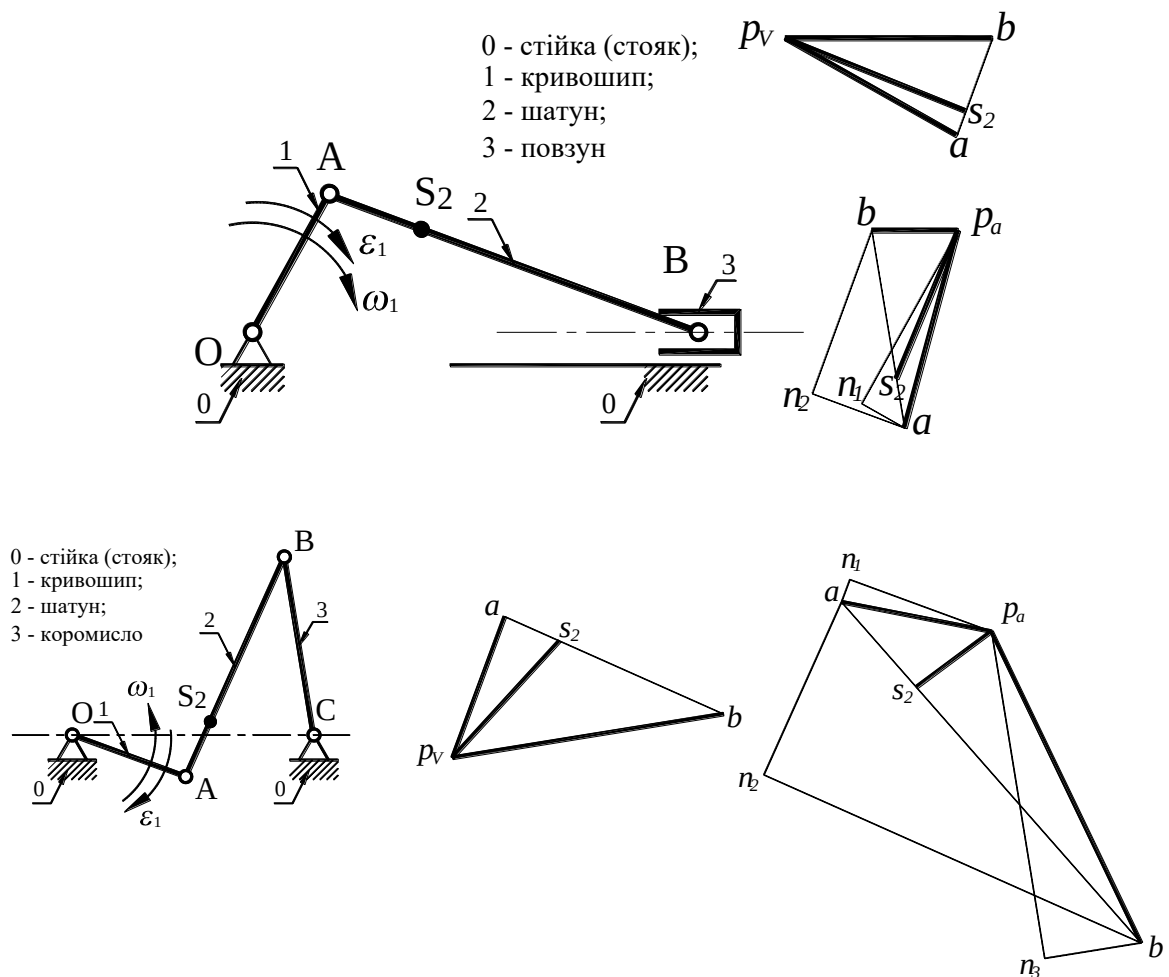
$$\varepsilon_2 = a_{B/A}^\tau / l_{AB} = (n_2 b \cdot \mu_a) / l_{AB},$$

де l_{AB} – відома довжина шатуна 2, м;

n_2b – відрізок плану прискорень, що відображає вектор $\vec{a}_{B/A}^\tau$, виміряний в мм.

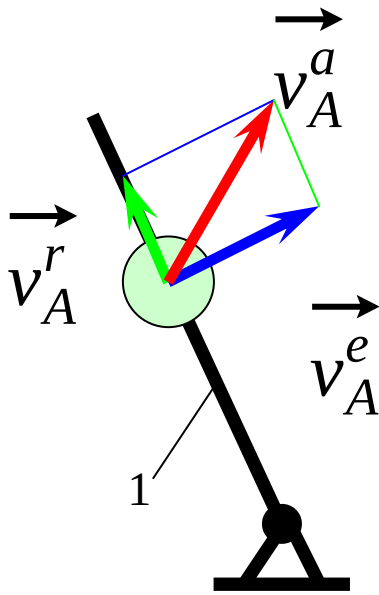
Для визначення напрямку ε_2 переносимо вектор $\vec{a}_{B/A}^\tau$ в точку B кінематичної схеми механізму (аналогічно вектору швидкості $v_{B/A}$). Напрямок ε_2 збігається з напрямком вектора $\vec{a}_{B/A}^\tau$.

Прискорення центрів тяжіння ланок 2 і 3 (для кривошипно-коромислового механізму, тобто у випадку, коли ланка 3 обертається) визначити відповідно до теореми подібності для плану прискорень. Наприклад, для ланки 2: $as_2 = ab \cdot AS_2 / AB$, тоді $a_{s_2} = p_a s_2 \cdot \mu_a$.



Складний рух (загальний випадок)

Швидкості



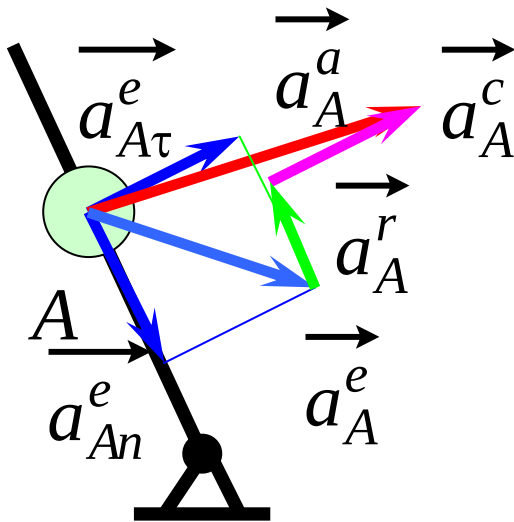
$$\vec{v}_A^a = \vec{v}_A^e + \vec{v}_A^r$$

$\vec{v}_A^a$ – абсолютна швидкість т. А;

$\vec{v}_A^e$ – переносна швидкість т. А;

$\vec{v}_A^r$ – відносна швидкість т. А.

Прискорення



$$\vec{a}_A^a = \vec{a}_A^e + \vec{a}_A^r + \vec{a}_A^c;$$

$$\vec{a}_A^e = \vec{a}_{An}^e + \vec{a}_{At}^e,$$

$\vec{a}_A^e$ – переносне (повне) прискорення т. А

$\vec{a}_{An}^e$ – переносне нормальне прискорення т. А

$\vec{a}_{At}^e$ – переносне дотичне прискорення т. А

$\vec{a}_A^r$ – відносне прискорення т. А

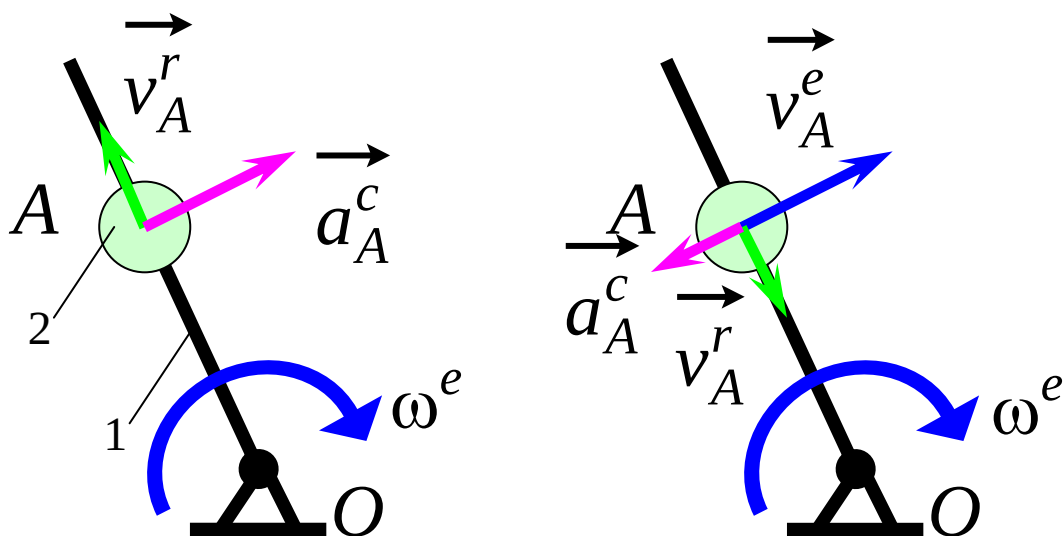
$\vec{a}_A^a$ – абсолютне прискорення т. А

$\vec{a}_A^c$ – коріолісове прискорення т. А

Коріолісове прискорення

$$\vec{a}_A^c = \vec{a}_A^{cor} = \vec{a}_A^K; \quad \vec{a}_A^c = 2\vec{\omega}^e \times \vec{v}_A^r;$$

$$a_A^c = 2 \cdot \omega^e \cdot v_A^r \cdot \sin \alpha; \quad \alpha = 90^\circ \Rightarrow a_A^c = 2 \cdot \omega^e \cdot v_A^r.$$



Правило Жуковського для визначення коріолісового прискорення $\vec{a}_A^c$

потрібно вектор відносної швидкості $\vec{v}_A^r$ повернути на 90 градусів у бік кутової швидкості переносного руху ω^e .

Або

проекцію вектора відносної швидкості $\vec{v}_A^r$ на площину перпендикулярну вектору кутової швидкості переносного руху повернути на 90 градусів у бік кутової швидкості переносного руху ω^e .

Передачі

Передача – передача енергії на відстань.

Передачі бувають:

- 1) механічні;
- 2) електричні;
- 3) гідравлічні;
- 4) пневматичні;
- 5) комбіновані

Механічні передачі

Залежно від способу передачі можна розділити на:

- 1) передачі тертям (фрикційні, пасові);
- 2) передачі зачепленням (зубчасті).

Також поділяють передачі:

- з безпосереднім контактом від ведучої до веденої ланки;
- передачі з проміжною ланкою, найчастіше, з гнучким зв'язком (пасові, ланцюгові).

Передачі зачепленням / Зубчасті передачі

Класифікація розташування осей (валів):

- із співвісними валами (пряма передача);
- з паралельними осями валів

циліндричні зубчасті колеса з прямими, косими та шевронними зубами;

Циліндрична передача може бути із внутрішнім зачепленням, із зовнішнім зачепленням, рейкова.

- з осями валів, перетинаються

конічні колеса з прямими, косими та круговими зубами;

- з осями валів, що перехрещуються (схрещуються) – мимобіжні

гіперболоїдні передачі: гіпоїдні, зубчасто-гвинтові (гвинтові), черв'ячні.

Параметри передачі:

1) Кутова швидкість ω , рад/с ($1/\text{с}$, с^{-1})

2) Частота обертів n , об/с (об/хв)

$$\omega = 2\pi \cdot n_s = \frac{\pi \cdot n_m}{30}.$$

3) Окружна швидкість v , м/с

$$v = \omega \cdot r = \omega \cdot \frac{d}{2}.$$

4) Окружна сила F_t , Н

5) Крутний момент T , Нм

$$T = F_t \cdot r = F_t \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow F_t = \frac{2T}{d}.$$

6) Потужність P , Вт

$$P = F_t \cdot v = T \cdot \omega.$$

7) Передатне відношення – відношення кутових швидкостей входу до виходу

$$i_{\text{вх-вих}} = \frac{\omega_{\text{вх}}}{\omega_{\text{вих}}}, i_{\text{заг}} = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot \dots \cdot i_N = \prod_{n=1}^N i_n.$$

Якщо ланка 1 – ведуча, а ланка 2 – ведена:

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, i_{2-1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{i_{1-2}}, i_{2-1} = \frac{1}{i_{1-2}}.$$

8) ККД – коефіцієнт корисної дії

$$\eta_{\text{вх-вих}} = \frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}}, \eta_{1-2} = \frac{P_2}{P_1}, \eta_{2-1} = \frac{P_1}{P_2},$$

$$\eta_{\text{заг}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_N = \prod_{n=1}^N \eta_n,$$

$$-\infty < \eta < 1.$$

Передатне відношення

Ведуче колесо називають шестернею.

Ділильний діаметр зубчастого колеса:

$$d = m \cdot z,$$

де m – модуль зубчастого колеса, стандартна величина, вимірюється в мм;

z – кількість зубів.

У зачеплення входять зубчасті колеса з однаковим модулем!!!

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2,$$

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Знак передатного відношення ($\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$, $i \neq 0$):

$i > 0$ – напрямок обертання не змінюється (**внутрішнє зачеплення**);

$i < 0$ – напрямок обертання змінюється на протилежний
(зовнішнє зачеплення).

За величиною передатного відношення виділяють:

$|i| \in (0,1)$ – мультиплікатор (прискорювач) $\omega_1 < \omega_2$;

$|i| > 1$ – редуктор (уповільнювач, демultiплікатор) $\omega_1 > \omega_2$.

При $i \neq const$ також виділяють:

(змінне передатне відношення) – варіатор,

$i = i_I, i_{II}, i_{III} \dots$ – якщо передатне відношення змінюється ступінчаста, такий пристрій називають *коробка передач*.

В окремих випадках також застосовується зовнішнє зачеплення некруглих циліндричних коліс.

При розрахунках передач застосовується поняття – **передатне число u** .

Це відоме число (або відношення двох цілих чисел).

Числу u не присвоюється знак і воно завжди більше чи дорівнює 1 ($u \geq 1$).

Наприклад, можна сказати: "Прискорювач з передатним числом 2".

Зубчасті механізми

Зубчастою передачею називається триланковий механізм, в якому дві рухомі зубчасті ланки утворюють з нерухомою ланкою обертальні кінематичні пари або обертальну та поступальну кінематичну пару.

Зубчаста передача призначена для передачі та перетворення обертового руху зі зміною кутових швидкостей та моментів, а також для перетворення обертового руху у поступальний та навпаки. ККД визначається так

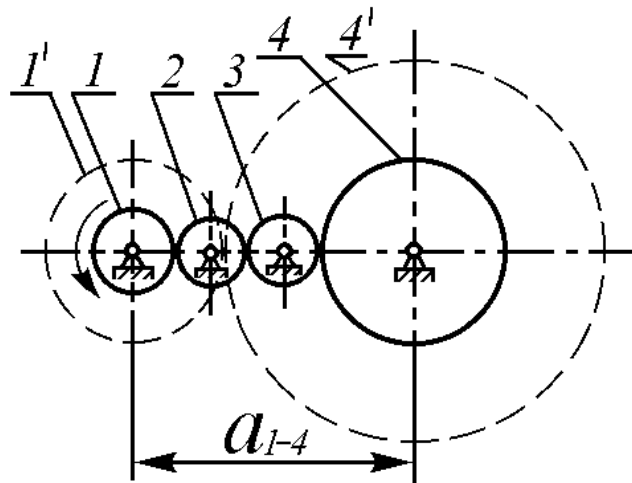
$$\eta_{1-2} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow P_2 = P_1 \eta_{1-2}.$$

Потужність і крутний момент

$$\begin{aligned} P_1 &= T_1 \cdot \omega_1 \\ P_2 &= T_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 \cdot \omega_1 \cdot \eta_{1-2}}{\omega_2} = T_1 \cdot i_{1-2} \cdot \eta_{1-2}. \end{aligned}$$

Багатоланкові зубчасті передачі з нерухомими осями валів

Зубчастий ряд із паразитними колесами



$$i_{1-n} = (-1)^k \cdot \frac{z_n}{z_1},$$

де z_n – число зубів останнього колеса;

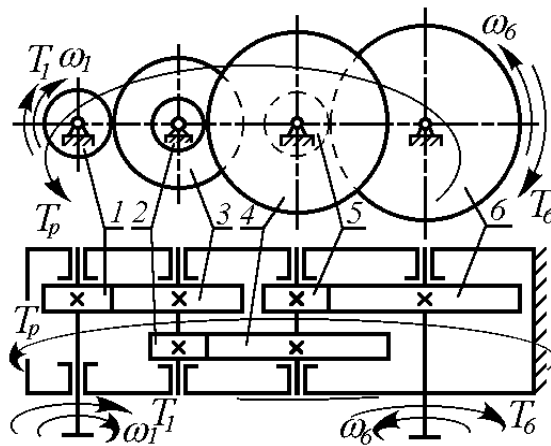
z_1 – число зубів колеса 1;

k – кількість зовнішніх пар зачеплень.

Властивості паразитного колеса:

1. Числа зубів паразитних коліс не впливають на величину передатного відношення (звідси і походить їхня назва – паразитні.).
2. Кожне паразитне колесо зовнішнього зачеплення змінює напрямок обертання вихідного валу на протилежний.
3. Застосування паразитних коліс дозволяє в широкому діапазоні змінювати міжосьову відстань між вхідним та вихідним валами.
4. При заданій (фіксованій) значній міжосьовій відстані між вхідним і вихідним валами застосування паразитних коліс забезпечує велике зменшення габаритів передачі.

Триступінчаста циліндрична зубчаста передача



$$i_{1-6} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = (-1)^3 \cdot \left(\frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5} \right),$$

$$i_{заг} = i_{1-6} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = i_I \cdot i_{II} \cdot i_{III},$$

де i_I, i_{II}, i_{III} – передатні відношення окремих ступенів передачі, взяті зі своїм знаком.

$$i_{1-n} = \frac{\omega_1}{\omega_k} = (-1)^k \cdot \frac{\prod z_{ведєн}}{\prod z_{ведуч}},$$

де $\prod z_{ведєн}$ – добуток чисел зубів ведених коліс;

$\prod z_{ведуч}$ – добуток чисел зубів ведучих коліс.

Планетарні зубчасті передачі

Планетарними передачами називаються такі, у яких є колеса, що здійснюють складний рух у просторі, тобто колеса – з рухомими в просторі осями валів (сателіти).

Планетарна передача має дві корпусні ланки.

Перший корпус нерухомий – стійка.

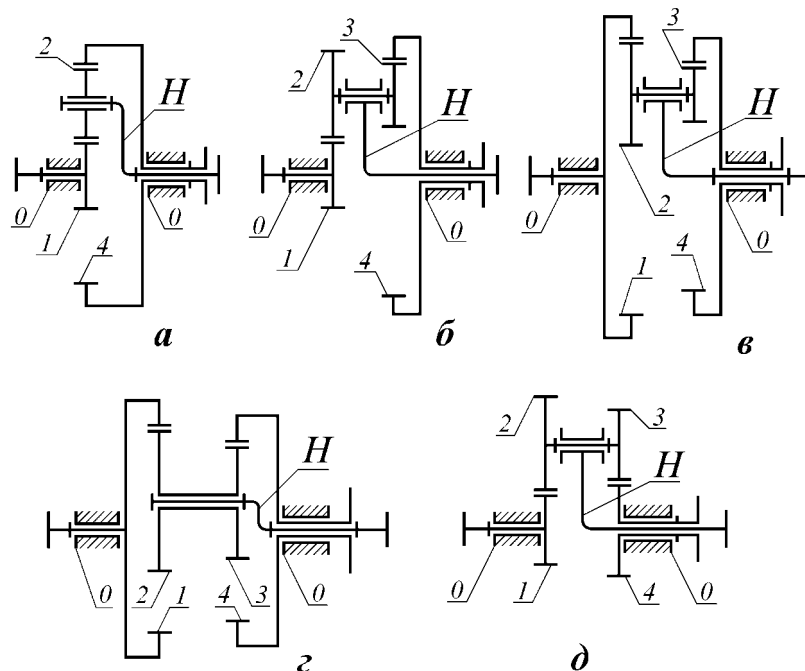
Другий корпус рухається. Його називають *водилом*, оскільки цей рухомий корпус водить зубчасті колеса, які називають сателітами (супутниками чи планетами), за їх просторовими орбітами.

Наявність складного руху сателітів зумовлює підвищену складність кінематичного аналізу планетарних передач порівняно з кінематичним аналізом простих (рядових чи не планетарних) передач.

Планетарна передача в двоступінчастому виконанні може забезпечувати практично будь-яке передатне відношення (теоретично необмежене). При цьому зі зростанням величини передатного відношення виявляється суттєве зниження ККД передачі.

Друга особливість планетарних зубчастих механізмів – можливість інтегрування (підсумовування) рухів або диференціювання (поділу) сил (крутних моментів).

Найпростіші циліндричні планетарні передачі



Тут позначено: 1, 2, 3, 4 – зубчасті колеса. 1 і 4 – центральні; 2 і 3 – сателіти;
 H – водило; 0 – стояк.

Зауважимо, що схема a походить зі схеми b , якщо прийняти $z_2 = z_3$.

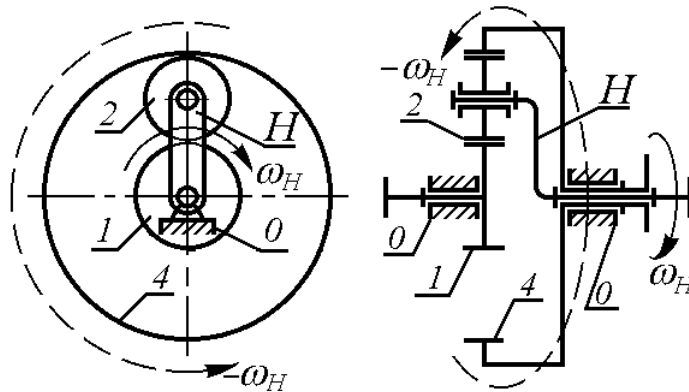
Схеми a і b представляють так званий **планетарний механізм Джемса** (з одним вінцем – a і сателітами з двома вінцями – b).

Схеми b , c і d представляють **планетарні механізми Давида**.

Схеми (b і c) по суті однакові, відмінність лише у відносній величині сателітів, їх називають **схемою Давида з двома внутрішніми зачепленнями**.

Схема d – схема Давида із двома зовнішніми зачепленнями.

Кінематична схема планетарного механізму
 Джемса з одновінцевим сателітом



1 – центральне “сонячне” зубчасте колесо;

2 – сателіт;

4 – центральне “коронне” зубчасте колесо (чи “вінець”);

H – “водило”.

Механізм Джемса відноситься до плоских механізмів.

Його число ступенів свободи можна підрахувати за формулою Чебишева:

$$w = 3n - 2p_n - p_v = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2,$$

де $n = 4$ (1, 2, 4, H) – число рухливих ланок;

$p_n = 4$ (0-1, 2- H , 0-4, 4- H) – кількість нижчих кінематичних пар;

$p_v = 2$ (1-2, 2-4) – кількість вищих кінематичних пар.

Оскільки механізм має дві ступені свободи, у ньому може спостерігатися велика різноманітність сполучень кутових швидкостей всіх рухомих ланок. Необхідно знайти рівняння, якому всі ці швидкості підпорядковуються.

Принцип оберненого руху.

Формула Вілліса

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = (-1)^k \frac{z_4 z_2}{z_2 z_1}.$$

Передатне відношення при зупиненому водилі

$$i_{1-4}^{(H)} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_1}.$$

Передатне відношення при зупиненому колесі із внутрішнім зачепленням

(коронне колесо, ланка 4) $\omega_4 = 0$

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = -\frac{z_4}{z_1},$$

$$i_{1-H}^{(4)} = \frac{\omega_1}{\omega_H},$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = -\frac{z_4}{z_1},$$

$$\frac{\omega_1}{-\omega_H} + 1 = -\frac{z_4}{z_1},$$

$$i_{1-H}^{(4)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 + \frac{z_4}{z_1} = 1 + i_{1-4}^{(H)}.$$

Загальний вигляд формули Вілліса

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = (-1)^k \frac{z_4 z_2}{z_2 z_1}.$$

1. ЗАДАЧА К1

Кінематика плоских важільних механізмів

1.1 Завдання та вихідні дані до задачі К1

1. Побудувати в масштабі за заданими викладачем вихідними даними (схемою та варіантом) крайнє положення механізму та прийняти його за початкове.

Схема №1 – рис. 1.1, таблиця 1.1 – крайнє праве положення.

Схема №2 – рис. 1.2, таблиця 1.2 – крайнє ліве положення.

Схема №3 – рис. 1.3, таблиця 1.2 – крайнє нижнє положення.

Якщо викладачем варіант задачі не заданий, його слід обрати за порядковим номером прізвища студента у журналі старости групи.

2. Побудувати положення механізму, що визначається кутовою координатою φ_1 кривошипа.

3. Побудувати для поточного положення механізму план швидкостей та визначити величини та напрямки лінійних швидкостей точок (наприклад, для схеми №1 це точки A , B , S_2 і S_3) і кутових швидкостей ланок (наприклад, для схеми №1 це ланки 2 та 3).

4. Побудувати для поточного положення механізму план прискорень та визначити величини та напрямки лінійних прискорень точок (наприклад, для схеми №1 це точки A , B , S_2 і S_3) і кутових прискорень ланок (наприклад, для схеми №1 це ланки 2 і 3).

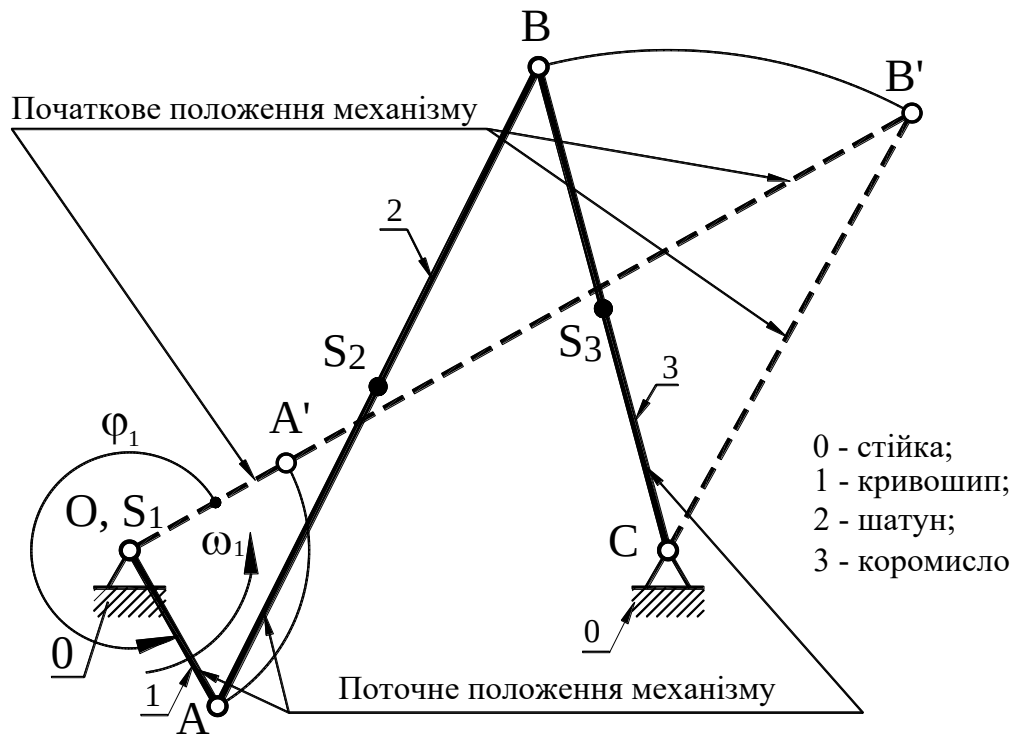


Схема №1

Рисунок 1.1 – Кінематична схема кривошипно-коромислового механізму

ПРИМІТКА. Центри мас S_2 і S_3 ланок 2 і 3, відповідно, розташовані на їх серединах, тобто $l_{AS_2} = 0.5 \cdot l_{AB}$ і $l_{BS_3} = 0.5 \cdot l_{BC}$.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані для схеми №1

№ варіанта	Довжини ланок, м				φ_1 , град.
	l_{OA}	l_{AB}	l_{BC}	l_{OC}	
1	0,1	0,2	0,15	0,2	150°
2	0,1	0,2	0,18	0,18	180°
3	0,1	0,2	0,18	0,17	30°
4	0,1	0,2	0,15	0,22	120°
5	0,1	0,22	0,21	0,15	120°
6	0,1	0,22	0,2	0,16	200°
7	0,1	0,22	0,22	0,18	270°
8	0,1	0,22	0,17	0,2	150°
9	0,1	0,22	0,16	0,22	240°
10	0,1	0,25	0,175	0,22	320°
11	0,1	0,25	0,15	0,24	20°
12	0,1	0,25	0,2	0,2	150°
13	0,1	0,25	0,14	0,26	210°
14	0,1	0,3	0,2	0,27	315°
15	0,1	0,3	0,21	0,3	285°
16	0,1	0,3	0,2	0,25	240°
17	0,1	0,3	0,23	0,25	120°
18	0,1	0,35	0,27	0,27	150°
19	0,1	0,35	0,26	0,25	120°
20	0,1	0,35	0,22	0,3	240°
21	0,1	0,35	0,2	0,32	105°
22	0,1	0,4	0,25	0,35	30°
23	0,1	0,4	0,28	0,3	120°
24	0,1	0,4	0,24	0,32	270°
25	0,1	0,4	0,23	0,33	135°
26	0,1	0,45	0,34	0,29	75°
27	0,1	0,45	0,33	0,32	225°
28	0,1	0,45	0,27	0,4	105°
29	0,1	0,45	0,3	0,36	150°
30	0,1	0,38	0,25	0,3	240°
31	0,15	0,45	0,31	0,45	275°
32	0,15	0,45	0,3	0,4	320°
33	0,15	0,33	0,3	0,24	210°
34	0,15	0,33	0,32	0,22	120°
35	0,15	0,3	0,27	0,26	40°

Величина кутової швидкості кривошипу $\omega_1 = 10 \text{ c}^{-1}$.

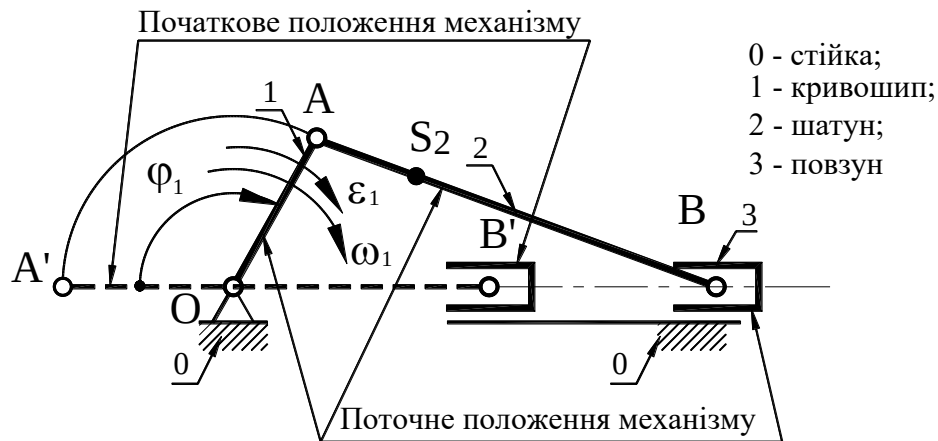


Схема №2

Рисунок 1.2 – Кінематична схема кривошипно-повзунного механізму

ПРИМІТКА. Положення центру мас S_2 ланки 2 визначається співвідношенням $l_{AS_2} = l_{AB}/3$.

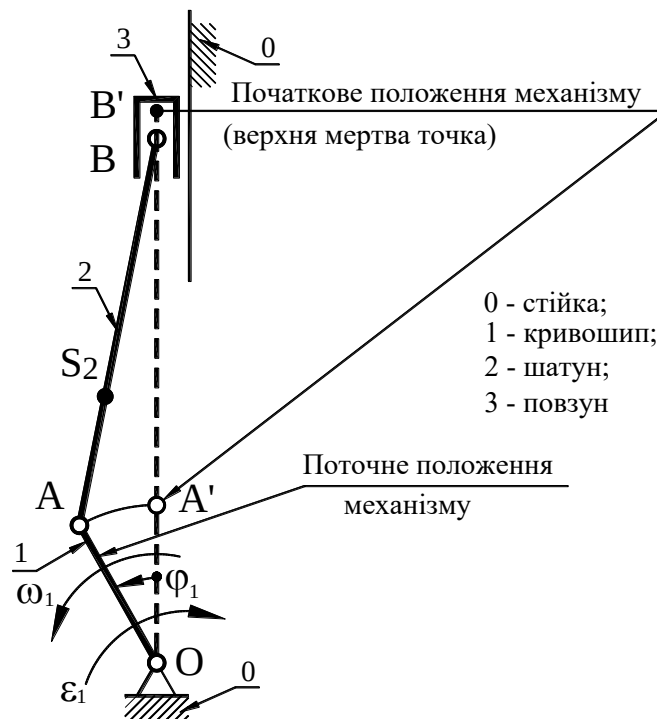


Схема №3

Рисунок 1.3 – Кінематична схема кривошипно-повзунного механізму

ПРИМІТКА. Положення центру мас S_2 ланки 2 визначається співвідношенням $l_{AS_2} = 0.25 \cdot l_{AB}$.

Таблиця 1.2 – Вихідні дані для схем №2 і №3

№ варіанта	l_{OA} , м	l_{AB} , м	φ_1 , град.	ω_1 , с ⁻¹	ε_1 , с ⁻²
1	0,1	0,3	30	5	20
2	0,11	0,32	60	6	24
3	0,12	0,34	120	7	28
4	0,13	0,36	150	8	32
5	0,14	0,38	210	9	36
6	0,15	0,4	240	10	40
7	0,1	0,39	300	11	44
8	0,11	0,38	330	12	48
9	0,12	0,37	45	13	52
10	0,13	0,36	135	14	56
11	0,14	0,35	225	15	60
12	0,15	0,34	315	5	8
13	0,1	0,33	15	6	16
14	0,11	0,32	30	7	24
15	0,12	0,31	45	8	32
16	0,13	0,3	60	9	40
17	0,14	0,3	75	10	48
18	0,15	0,32	105	11	56
19	0,1	0,34	120	12	64
20	0,11	0,36	135	13	72
21	0,12	0,38	150	14	80
22	0,13	0,4	165	15	88
23	0,14	0,39	195	5	10
24	0,15	0,38	210	6	14
25	0,1	0,37	225	7	18
26	0,11	0,36	240	8	22
27	0,12	0,35	255	9	26
28	0,13	0,34	285	10	30
29	0,14	0,33	300	11	34
30	0,15	0,32	315	12	38
31	0,1	0,31	330	13	42
32	0,11	0,3	345	14	46
33	0,12	0,32	30	15	50
34	0,13	0,34	60	5	54
35	0,14	0,36	120	8	58

1.2 Вказівки до розв'язання задачі К1

При кінематичному аналізі механізмів необхідно виконати наведені нижче етапи (див. приклад розв'язання задачі К1).

Початкове положення механізму можна побудувати у такому порядку (див. рис. 1.1 та рис. 1.5).

Розрахувати масштаб кінематичної схеми механізму:

$$\mu_l = \frac{l_{OA}}{OA} \left(\frac{\text{м}}{\text{мм}} \right),$$

де l_{OA} – задана в таблиці вихідних даних справжня довжина кривошипу, що вимірюється в м;

OA – прийнята на кресленні у зменшеному вигляді (зазвичай у 2 або у 4 рази) відстань між точками O і A , яке вимірюється в мм.

Наприклад, якщо $l_{OA} = 0,1$ м, то можна вибрати на кресленні відрізок $OA = 50$ мм, тоді масштаб довжин дорівнюватиме:

$$\mu_l = \frac{0,1}{50} = 0,002 \left(\frac{\text{м}}{\text{мм}} \right).$$

Розрахувати довжини відрізків у міліметрах, що зображують на кінематичній схемі механізму його ланки у вибраному масштабі: $OC = l_{OC} / \mu_l$ (мм); $AB = l_{AB} / \mu_l$ (мм); $BC = l_{BC} / \mu_l$ (мм). Тут у чисельник виразів підставляються справжні довжини зазначених ланок у метрах.

Відкласти на кресленні відрізок OC . Потім з точки C , як із центру, провести дугу кола циркулем радіусом, рівним довжині відрізка BC .

Зауважимо, що проведена дуга кола буде можливою траєкторією руху точки B .

Тепер можна розчином циркуля, що дорівнює сумі довжин відрізків OA і AB , з точки O , як з центру, зробити дугову помітку в місці перетину з траєкторією точки B . Отриманий перетин буде правим крайнім положенням точки B , яке позначимо як B' .

Далі необхідно накреслити коло радіусом, рівним довжині відрізка OA , з центром у точці O . Це коло, що є траєкторією руху точки A , перетне лінію OB' у точці A' .

Фігура, що вийшла $OA'B'C$ відповідає так званому правому мертвому положенню механізму, яке слід прийняти за початкове.

Задане положення механізму можна побудувати, відклавши кут φ_1 від відрізка OA' у вказаному напрямку (проти годинникової стрілки). При цьому кут φ_1 стягуватиметься дугою $A'A$, де A – положення кінця кривошипу 1, відповідне заданому положенню механізму.

Тепер можна знайти поточне положення точки B , виконавши дугову засічку розчином циркуля, рівним відрізку AB , з точки A , як із центру.

Отримана фігура $OABC$ і буде шуканим поточним положенням механізму, для якого слід побудувати плани швидкостей та прискорень.

Плани швидкостей та прискорень є нашаруванням векторних багатокутників, які графічно відображають розв'язання векторних рівнянь руху точок ланок механізму.

Побудова плану швидкостей слід розпочати з визначення вектора швидкості точки A рухомого кінця кривошипу OA (ланка 1). Цей вектор $\vec{V}_A$ направлений по дотичній до траєкторії точки A у бік обертання кривошипу ω_1 (тобто перпендикулярно радіусу обертання, $\vec{V}_A \perp OA$). Величина швидкості v_A може бути розрахована через вихідні дані за формулою:

$$v_A = \omega_1 \cdot l_{OA} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

Вибравши полюс плану швидкостей (точку p_v), необхідно задатися довжиною відрізка $p_v a$ (рекомендується прийняти $p_v a = 50$ мм), який і буде зображати вектор $\vec{V}_A$ на плані швидкостей. При цьому можна розрахувати масштаб плану швидкостей за формулою:

$$\mu_v = \frac{v_A}{p_v a} \left(\frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right).$$

Слід наголосити, що масштаб μ_v (як і інші масштаби) найкраще мати у вигляді числа, що включає три значущі цифри після коми.

Швидкість точки B визначається шляхом графічного розв'язання векторного рівняння

$$\begin{array}{c} \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}; \\ \perp OA \quad \perp AB \\ (\overrightarrow{p_v b}) \quad (\overrightarrow{p_v a}) \quad (\overrightarrow{ab}), \end{array}$$

де $\vec{v}_A$ – швидкість точки A , яка вже є на плані швидкостей (це відрізок $p_v a$);

$\vec{v}_{B/A}$ – швидкість відносного обертального руху точки B навколо точки A , напрямом $\vec{v}_{B/A}$, представленої на плані швидкостей відрізком ab , перпендикулярно радіусу обертання, тобто відрізьку AB);

$\vec{v}_B$ – швидкість точки B у обертальному чи поступальному її русі щодо стійки (залежно від схеми), напрямом $\vec{v}_B$ (лінії $p_v b$ на плані швидкостей перпендикулярно коромислу BC або паралельно переміщенню повзуна).

Порядок побудови плану швидкостей:

- 1) Вибираємо полюс плану швидкостей p_v ;
- 2) Будуємо відрізок $p_v a$;
- 3) Проводимо пряму перпендикулярно AB через точку a (на цій прямій буде знаходитись відрізок ab , який позначимо $\vec{v}_{B/A}$);
- 4) Проводимо пряму (перпендикулярно) BC для схеми №1, горизонтально для схеми №1, вертикально для схеми №3) через точку p_v . На цій прямій буде знаходитись відрізок $p_v b$;
- 5) На перетині проведених раніше прямих лежить точка b .

Використовуючи побудований план швидкостей, можна знайти швидкість будь-якої точки кожної ланки механізму, помноживши відповідний відрізок плану швидкостей на масштаб побудови μ_v .

Крім того, легко визначити величину та напрям кутових швидкостей ланок, що мають обертальний рух. Наприклад, кутова швидкість шатуна 2:

$$\omega_2 = \frac{v_{B/A}}{l_{AB}} = \frac{ab \cdot \mu_v}{l_{AB}} \text{ (рад/с)}.$$

Напрямок ω_2 визначається перенесенням вектора $\vec{v}_{B/A}$ із плану швидкостей (рис. 1.6) в точку B плану положення механізму (рис. 1.5).

Слід наголосити, що при побудові та оформленні плану швидкостей необхідно дотримуватись певних правил:

1) План швидкостей має бути розташований поруч зі схемою механізму.

2) Розміри плану швидкостей повинні бути такими, щоб забезпечити необхідну точність розрахунків та побудов. Вектор $\vec{v}_A$ повинен для цього відображатись відрізком $p_v a \geq 50$ мм.

3) Розрахунки треба виконувати з точністю аж до 4-ї значущої цифри. Тоді 1-а Значна цифра буде відповідати, наприклад, сотням міліметрів, 2-а десяткам, 3-я – одиницям, а 4-а – десятим часткам міліметрів, відрізків, що вимірюються і відкладаються на плані швидкостей і кінематичній схемі механізму. При розрахунках на калькуляторі слід округлювати отримані числа також до 4-х значущих цифр, не захаращуючи результати розрахунків непотрібними цифровими знаками.

4) Вектори абсолютних швидкостей точок ланок механізму треба навести основними лініями, а вектори відносних швидкостей – тонкими лініями. Стрілки на кінцях векторів швидкостей можна не показувати.

5) На рисунку плану швидкостей поблизу полюса p_v треба записати значення масштабу μ_v .

На основі побудованого плану швидкостей далі необхідно визначити лінійні швидкості всіх точок ланок та кутові швидкості шатуна AB та коромисла BC (для схеми 1 див. рис. 1.6 і табл. 1.1).

План прискорень будується так. Правила оформлення плану прискорень аналогічні до правил, сформульованих вище для плану швидкостей.

Побудови плану прискорення слід розпочинати з визначення прискорення точки A :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^r,$$

де $\vec{a}_A$ – вектор повного прискорення точки A ;

$\vec{a}_A^n$ – вектор нормального прискорення точки A , модуль якого визначається формулою

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA},$$

а відповідний відрізок щодо прискорень – $p_a n_1$. Нормальне прискорення спрямоване по радіусу до центру обертання, тобто $\vec{a}_A^n \parallel OA$ (паралельно OA) і спрямовано від точки A до точки O (рис. 1.5).

$\vec{a}_A^\tau$ – вектор дотичного прискорення точки, модуль якого визначається формулою

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_{OA},$$

а відповідний відрізок щодо прискорень – $n_1 a$ ($n_1 a = a_A^\tau / \mu_a$). Дотичне прискорення спрямоване перпендикулярно радіусу обертання у бік кутового прискорення ε_1 , тобто $\vec{a}_A^\tau \perp OA$ (див. рис. 2.5).

На кресленні вибираємо крапку (поліус) p_a і паралельно OA (у напрямку від точки A до точки O) проводимо відрізок $p_a n_1$ (довжину відрізка рекомендується прийняти 50 мм).

Масштаб плану прискорень

$$\mu_a = \frac{a_A^n}{p_a n_1} \left(\frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right).$$

Прискорення точки B визначається шляхом графічного розв'язання векторного рівняння:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{a}_B} &= \underline{\vec{a}_A^n} + \underline{\vec{a}_A^\tau} + \underline{\vec{a}_{B/A}^n} + \underline{\vec{a}_{B/A}^\tau}; \\ &\quad \parallel OA \perp OA \quad \parallel AB \perp AB \\ &\quad \overrightarrow{(p_a b)} \overrightarrow{(p_a n_1)} \overrightarrow{(n_1 a)} \overrightarrow{(a n_2)} \overrightarrow{(n_2 b)}; \end{aligned}$$

де $\vec{a}_B$ – прискорення точки B , напрямок якого залежить від схеми;

$\vec{a}_{B/A}^n$ – вектор нормального прискорення відносного обертального руху т. B навколо т. A , величина якого визначається за формулою $a_{B/A}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}$, спрямований паралельно ланці AB від т. B до центру відносного обертання т. A ;

$\vec{a}_{B/A}^\tau$ – вектор дотичного (тангенціального) прискорення відносного обертального руху т. B навколо т. A , (за величиною воно до побудови плану прискорень невідоме, а за напрямом перпендикулярно AB).

Відповідно до векторного рівняння з точки a плану прискорень, відкладаємо відрізок an_2 ($an_2 = a_{B/A}^n / \mu_a$), який зображує нормальне прискорення $\vec{a}_{B/A}^n$ у вибраному масштабі μ_a . Відрізок an_2 паралельний AB і спрямований від точки B до точки A (рис. 1.5). Далі через точку n_2 (кінець відрізка an_2) перпендикулярно AB проводимо пряму лінію, якій належатиме відрізок n_2b , відповідний прискоренню $\vec{a}_{B/A}^\tau$.

В задачі №2 можливі 2 випадки:

а) для схеми 1 – кривошипно-коромислового механізму (див. рис. 1.7):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau,$$

де $\vec{a}_B$ – вектор повного прискорення точки B ;

$\vec{a}_B^n$ – вектор нормального прискорення точки B ($a_B^n = \omega_3^2 \cdot l_{BC}$), а відповідний відрізок на плані прискорень – $p_a n_3$ ($p_a n_3 = a_B^n / \mu_a$). Нормальне прискорення спрямоване по радіусу до центру обертання, тобто $\vec{a}_B^n$ паралельно BC і направлено від точки B до точки C ;

$\vec{a}_B^\tau$ – вектор дотичного прискорення точки B ($a_B^\tau = \varepsilon_3 \cdot l_{BC}$), а відповідний відрізок на плані прискорень – $n_3 b$. Дотичне прискорення спрямоване перпендикулярно радіусу у бік кутового прискорення ε_3 , тобто $\vec{a}_B^\tau \perp BC$.

З точки n_3 у напрямку вектора $\vec{a}_B^\tau$ проводимо пряму до перетину з прямою, раніше проведеної з точки n_2 . Точка перетину (т. b) визначає величини відрізків $n_2 b$ і $n_3 b$.

б) для схеми 2 і 3 – кривошипно-повзунного механізму (див. рис. 1.4): $\vec{a}_B$ – вектор повного прискорення точки B , направлений паралельно напрямній $\vec{a}_B \parallel OB$.

З полюса p_a у напрямку вектора $\vec{a}_B$ проводимо пряму (якій належатиме відрізок $p_a b$) до перетину з прямою, раніше проведеною з точки n_2 . Точка перетину – т. b визначає величини відрізків $p_a b$ і $n_2 b$.

За допомогою плану прискорень можна знайти напрямки та величини кутових прискорень ланок, що здійснюють обертальний рух (відносний або абсолютний). Наприклад, кутове прискорення шатуна 2 (рад/с²) можна визначити за такою формулою:

$$\varepsilon_2 = a_{B/A}^\tau / l_{AB} = (n_2 b \cdot \mu_a) / l_{AB},$$

де l_{AB} – відома довжина шатуна 2, м;

$n_2 b$ – відрізок плану прискорень, що в масштабі відображає вектор $\vec{a}_{B/A}^\tau$, виміряний в мм.

Для визначення напрямку ε_2 переносимо вектор $\vec{a}_{B/A}^\tau$ в точку B плану положення механізму (аналогічно вектору швидкості $\vec{V}_{B/A}$). Напрямок ε_2 співпадає з напрямком вектора $\vec{a}_{B/A}^\tau$.

Прискорення центрів тяжіння ланок 2 і 3 визначити відповідно до теореми подібності плану прискорень. Наприклад, для ланки 2: $bs_2 = ab \cdot BS_2 / AB$, тоді $a_{S_2} = p_a s_2 \cdot \mu_a$.

Останній етап розв'язання задачі K1 полягає у визначенні лінійних прискорень усіх точок ланок механізму та кутових прискорень шатуна та коромисла (див. приклад розв'язання задачі K1).

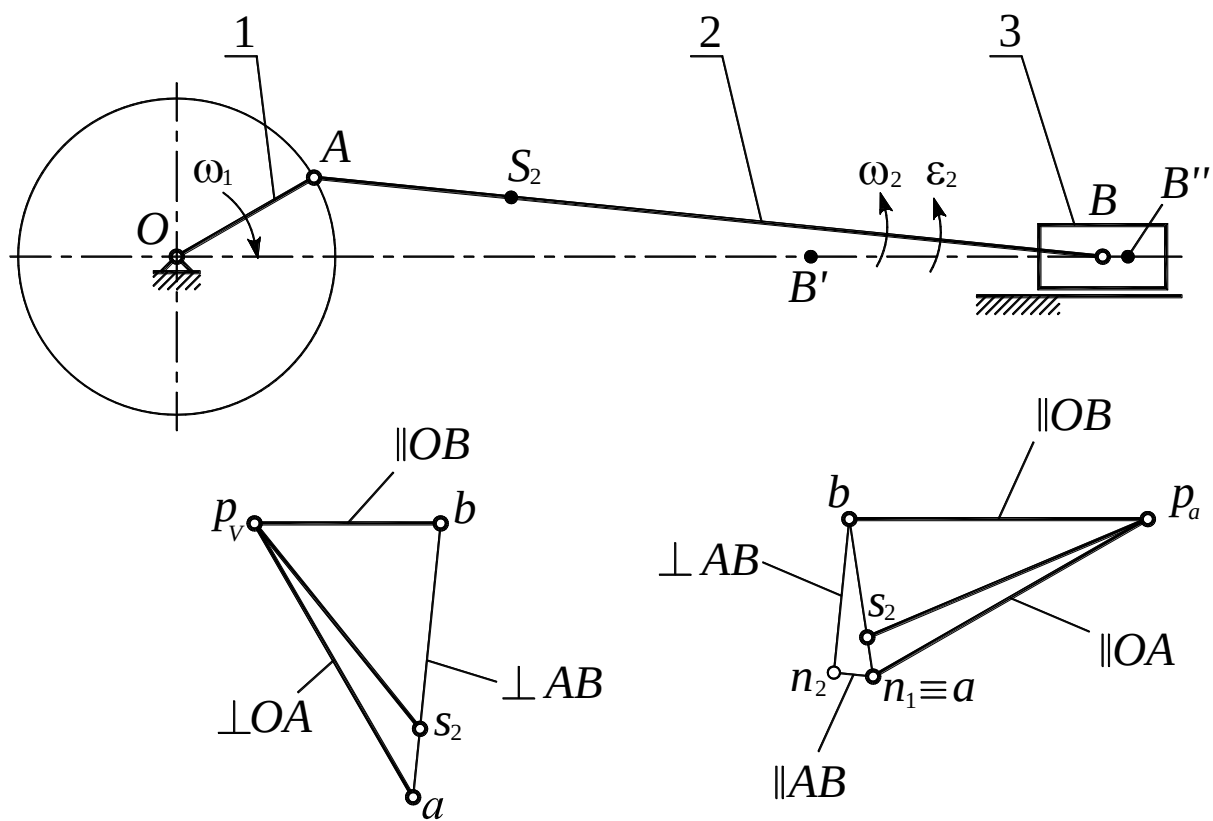


Рисунок 1.4 – Кінематичний аналіз методом планів

1.3 Алгоритм розв'язання задачі К1

1. Отримати від викладача завдання (завдання складається з номера схеми механізму і з номера варіанта).
2. Ознайомитися зі схемою та вихідними даними до неї.
3. Ідентифікувати структуру механізму (визначити тип механізму за кінематичною схемою завдання; порахувати кількість ланок; визначити тип кінематичних пар; порахувати кількість кінематичних пар; визначити види руху ланок; визначити число ступенів свободи механізму).
4. Розрахувати або вибрати масштабний коефіцієнт розрахункової схеми.
5. За реальними розмірами ланок механізму і масштабним коефіцієнтом розрахувати розміри ланок механізму для креслення.
6. Побудувати крайнє положення механізму (на кінематичній схемі воно позначається пункирними типами ліній).
7. Використати крайнє положення механізму (пункирні лінії) та побудувати механізм в заданому у варіанті положенні для виконання подальшого розрахунку (використовується суцільний потовщений тип ліній).
8. Нанести на задане положення усі позначення: ланок (відрізки), кінематичних пар (точок), траєкторії руху точок (дуги, окружності і лінії) та залишити проміжні відрізки, дуги і окружності, які були необхідні для побудови кінематичної схеми.
9. Побудувати план швидкостей. За планом швидкостей обчислити лінійні швидкості всіх точок механізму та усі кутові швидкості ланок механізму.
10. За допомогою плану швидкостей визначити і позначити на схемі напрямки кутових швидкостей ланок механізму.
11. Побудувати план прискорень. За планом прискорень обчислити лінійні прискорення всіх точок механізму та усі кутові прискорення ланок механізму.
12. За допомогою плану прискорень визначити і позначити на схемі напрямки кутових прискорень ланок механізму.
13. Оформити результати.

1.4 Приклад розв'язання задачі К1

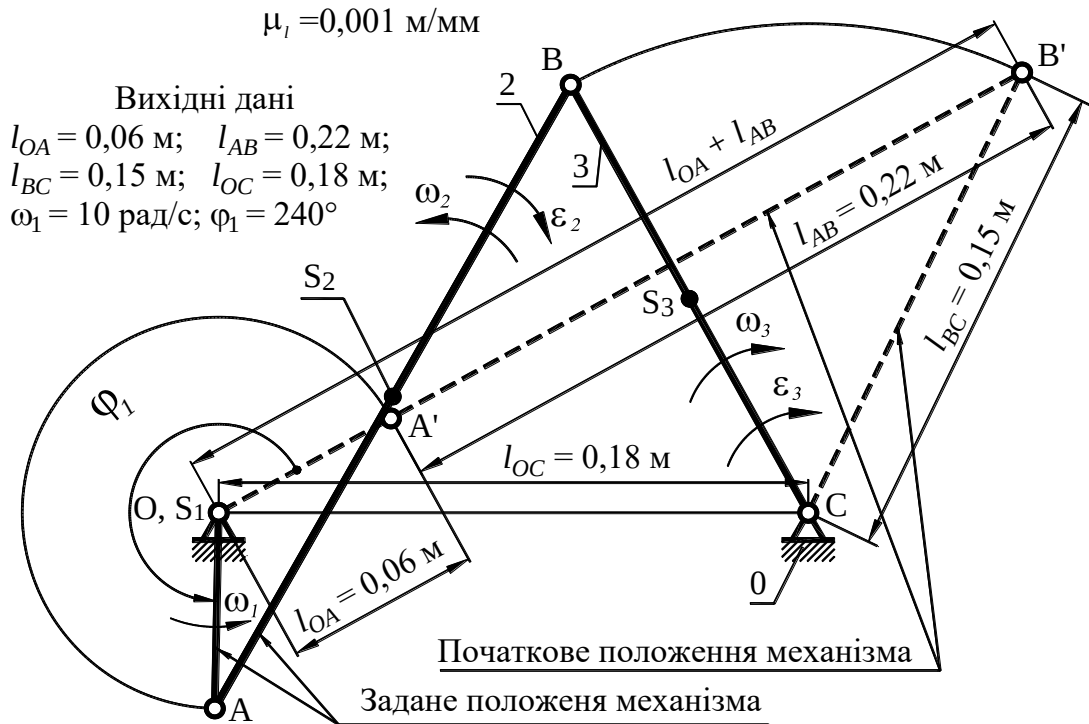


Рисунок 1.5 – Кінематична схема заданого механізму

1) Побудова заданого положення механізму

Положення механізму, для якого необхідно провести кінематичний аналіз методом планів, визначається координатою вхідної ланки 1 (кривошип) $\varphi_1 = 240^\circ$. Для побудови заданого положення спочатку необхідно побудувати початкове положення механізму, яке рекомендується прийняти крайнім правим (на рисунку початкове положення зображено пунктирною лінією). Практично це зводиться до побудови трикутника $OB'C$, дві сторони якого задані (l_{OC} і l_{BC}), а третя дорівнює сумі довжин 1-ої і 2-ої ланок, тобто $l_{OB'} = l_{OA} + l_{AB}$.

Далі будується задане поточне положення кривошипу. Для цього необхідно від початкового положення кривошипа відкласти проти годинникової стрілки кут φ_1 . Потім на перетині дуги радіусу l_{AB} з центром в точці A і дуги радіуса l_{BC} з центром в точці C знаходять положення точки B , а значить і положення інших ланок механізму (2-ої і 3-ої).

2) Побудова плану швидкостей

Необхідно побудувати у масштабі план швидкостей, обчислити величини швидкостей точок B , S_2 і S_3 , визначити величини та напрямки кутових швидкостей ланок 2 та 3.

Визначаємо швидкість точки A :

$$v_A = \omega_1 \cdot l_{OA} = 10 \cdot 0,06 = 0,6 \text{ (м/с)}.$$

Задамося масштабом плану швидкостей:

$$\mu_v = \frac{v_A}{p_v a} = \frac{0,6}{50} = 0,012 \left(\frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right),$$

де $p_v a = 50$ мм – відрізок, що зображує в масштабі μ_v на плані швидкостей швидкість точки A .

Розглядаючи точку B як точку ланки 2, здійснює плоскопаралельний рух, і прийнявши як полюс точку A , складаємо векторне рівняння для визначення швидкості точки B :

$$\frac{\vec{v}_B}{\perp BC} = \frac{\vec{v}_A}{\perp OA} + \frac{\vec{v}_{B/A}}{\perp AB}.$$

У цьому векторному рівнянні невідомими є лише величини векторів $\vec{v}_B$ і $\vec{v}_{B/A}$, тобто дві невідомі, відповідно рівняння розв'язується. Вибираємо полюс плану швидкостей (точка p_v) та, виконавши графічне розв'язання векторного рівняння для точки B , отримуємо план швидкостей (рис. 1.6). Кінці векторів швидкостей точок S_2 і S_3 знаходимо за допомогою теореми подоби. Оскільки точки S_2 і S_3 знаходяться на серединах відрізків AB і BC відповідно, то й на плані швидкостей кінці векторів швидкостей цих точок (точки s_2 і s_3) знаходяться, на серединах відрізків ab і cb плану швидкостей відповідно.

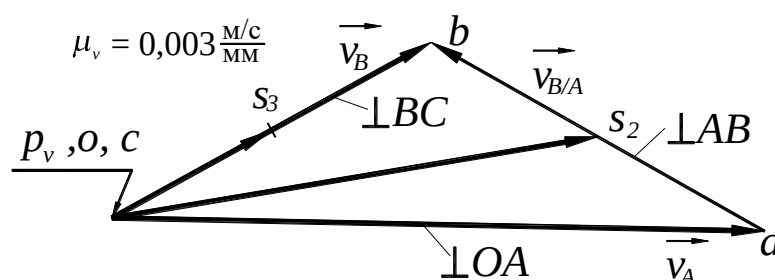


Рисунок 1.6 – План швидкостей

З плану швидкостей знаходимо швидкості точок як добуток довжини відповідного відрізка та масштабу плану швидкостей μ_v .

Далі визначаємо кутові швидкості ланок 2 і 3:

$$\omega_2 = \frac{v_{B/A}}{l_{AB}} = \frac{ab \cdot \mu_v}{l_{AB}} = \frac{29,385 \cdot 0,012}{0,22} = 1,603 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right);$$

$$\omega_3 = \frac{v_B}{l_{BC}} = \frac{p_v b \cdot \mu_v}{l_{BC}} = \frac{27,92 \cdot 0,012}{0,15} = 2,234 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

Напрямки кутових швидкостей ланок знаходимо залежно від напрямків відповідних швидкостей двох точок кожної ланки. Так, наприклад, із плану швидкостей видно, що швидкість точки B ланки 2 відносно точки A спрямована праворуч наліво вгору, отже, кутова швидкість ланки 2 спрямована проти годинникової стрілки.

Результати розрахунків лінійних та кутових швидкостей зведені до таблиці 1.3.

Таблиця 1.3 – Величини кутових та лінійних швидкостей

$\omega_2, 1/\text{с}$	$\omega_3, 1/\text{с}$	$v_A, \text{м/с}$	$v_{B/A}, \text{м/с}$	$v_{S_2}, \text{м/с}$	$v_{S_3}, \text{м/с}$	$v_B, \text{м/с}$
1,603	2,234	0,6	0,353	0,453	0,1675	0,335

3) Побудова плану прискорень

Ця частина задачі аналогічна до розглянутої раніше. Необхідно побудувати в масштабі план прискорень, обчислити величини прискорень точок B , S_2 і S_3 , а також визначити величини та напрямки кутових прискорень ланок 2 та 3.

Визначаємо нормальне прискорення точки A

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA} = 10^2 \cdot 0,06 = 6 \left(\text{м/с}^2 \right).$$

Масштаб плану прискорень

$$\mu_a = \frac{a_A^n}{p_a n_1} = \frac{6}{50} = 0,12 \left(\frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right).$$

Розглядаючи точку B як точку ланки 2, яка здійснює плоскопаралельний рух, і прийнявши як полюс точку A , складаємо векторне рівняння для визначення прискорення т. B

$$\overrightarrow{a_B^n} + \overrightarrow{a_B^\tau} = \overrightarrow{a_A^n} + \overrightarrow{a_A^\tau} + \overrightarrow{a_{B/A}^n} + \overrightarrow{a_{B/A}^\tau}.$$

У цьому векторному рівнянні невідомими є величини векторів $\vec{a}_B^\tau$ і $\vec{a}_{B/A}^\tau$, тобто всього 2 невідомих, відповідно це рівняння розв'язується.

Вибираємо полюс плану прискорень (точка p_a) і, виконавши графічне розв'язання векторного рівняння для прискорень, визначаємо прискорення точки B . Кінці векторів прискорення точок S_2 і S_3 знаходимо за допомогою теореми подоби, як це викладено для плану швидкостей.

План прискорень показано на рис. 1.7. При побудові плану прискорень відрізки, що зображають прискорення $a_{B/A}^n$ і a_B^n , визначалися із співвідношень:

$$a_{B/A}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}, \quad an_2 = \frac{a_{B/A}^n}{\mu_a} \quad (\text{MM});$$

$$a_B^n = \omega_3^2 \cdot l_{BC}, \quad p_a n_3 = \frac{a_B^n}{\mu_a} \quad (\text{MM}).$$

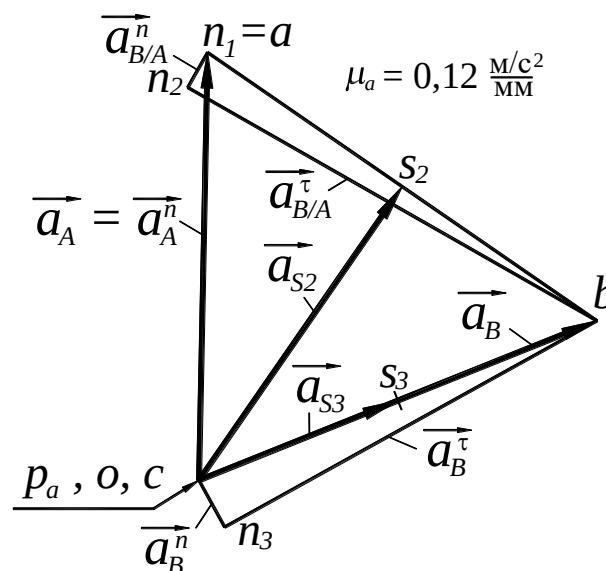


Рисунок 1.7 – План прискорень

Кутові прискорення ланок 2 та 3 можуть бути знайдені за формулами

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{B/A}^\tau}{l_{AB}} = \frac{n_2 b \cdot \mu_a}{l_{AB}} = \frac{51,42 \cdot 0,12}{0,22} = 28,047 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right),$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_B^\tau}{l_{BC}} = \frac{n_3 b \cdot \mu_a}{l_{BC}} = \frac{49,833 \cdot 0,12}{0,15} = 39,866 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right).$$

Напрями кутових прискорень ланок 2 і 3 визначаються залежно від напрямів прискорень $a_{B/A}^\tau$ і a_B^τ . Для цього їх подумки необхідно перенести до точки B і, відповідно, відносно точок A і C визначити напрямки ε_2 і ε_3 .

Результати розрахунків лінійних та кутових прискорень зведені до таблиці 1.4.

Таблиця 1.4 – Величини кутових та лінійних прискорень

$a_{B/A}^n$, м/с ²	$a_{B/A}^\tau$, м/с ²	$a_{B/A}$, м/с ²	a_B^n , м/с ²	a_B^τ , м/с ²	a_B , м/с ²	a_{S2} , м/с ²	a_{S3} , м/с ²	ε_2 , 1/с ²	ε_3 , 1/с ²
0,565	6,17	6,196	0,7494	5,98	6,027	5,014	3,014	28,047	39,866

2. ЗАДАЧА К2

Дослідження складного руху точки.

Визначення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки

2.1 Завдання та вихідні дані до задачі К2

Точка M рухається відносно точки O . За заданими рівняннями відносного руху точки M та руху тіла O визначити для моменту час $t = t_1$ абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки M .

Схеми механізмів показані на рис. 2.1 – 2.3, а необхідні для розрахунків дані наведені в табл. 2.1 – 2.4.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані до задачі К2 (набір 1)

Номер варіанту	Рівняння відносного руху точки M $OM = s_r = s_r(t)$, см	Рівняння руху тіла		t_1 , с	R , см	a , см	α , град	Додаткові дані
		$\varphi_e = \varphi_e(t)$, рад	$x_e = x_e(t)$, см					
1	$22 \sin(\pi t/6)$	$2t^3 - t^2$	—	1	—	24	—	—
2	$20 \sin \pi t$	$0,6t^2 + t$	—	3/2	20	—	—	—
3	$5t^3$	$2t + 0,5t^2$	—	5/2	—	28	—	—
4	$12 \sin(\pi t/6)$	$0,6t^2$	—	1/2	—	—	60	—
5	$20\pi \cos(\pi t/3)$	$4t - 0,5t^3$	—	5/3	30	—	—	—
6	—	—	$3t + 0,27t^3$	10/3	17	—	—	$\varphi_r = 0,1\pi t^3$
7	$20 \cos 2\pi t$	$0,5t^2$	—	3/8	—	40	60	—
8	$6(t + 0,5t^2)$	$t^3 - 5t$	—	2	—	—	30	—
9	$9(1 + \sin 3\pi t)$	$3t + 1,6t^2$	—	1/4	—	—	—	—
10	$20\pi \cos(\pi t/4)$	$1,2t - t^2$	—	2	18	18	—	—
11	$26 \sin(\pi t/4)$	$2t^2 - 0,8t$	—	3	—	25	—	—
12	$15t^3/8$	$5t - 4t^2$	—	5/2	28	28	—	—
13	$100\pi t^2$	$8t^2 - 3t$	—	1/3	42	—	—	—
14	$2 + 15 \sin \pi t$	$4t - 2t^2$	—	3/2	—	—	30	—
15	$5\sqrt{2}(1,2t^2 + t)$	$0,4t^3 + t$	—	4	—	62	45	—
16	$20 \sin \pi t$	$t - 0,75t^2$	—	1/3	—	20	—	—
17	$8t^3 + 2t$	$0,5t^2$	—	5/2	—	$4\sqrt{5}$	—	—
18	$12t + t^3$	$4t - 0,3t^2$	—	5/3	—	—	60	—
19	$6t + 2t^3$	$t + 1,5t^2$	—	2	40	—	—	—
20	$30\pi \cos(\pi t/6)$	$5t + t^2$	—	4	60	—	—	—
21	$20\pi(t^2 + 1,4t)$	$2t - 4t^2$	—	2/3	26	—	—	—
22	$11 \sin(\pi t/4)$	$4t - 0,3t^2$	—	2/3	34	—	—	—
23	$6\pi t^2$	—	—	2	24	—	—	$\varphi = \pi t^3/6$; $O_1O = O_2A =$ $= 26$ см
24	$60\pi(0,1t + 0,3t^3)$	$2t - 0,3t^2$	—	3/2	32	—	—	—
25	$15 \sin(\pi t/4)$	$10t - 0,15t^2$	—	3	—	—	—	—
26	$5 \cos(\pi t/4)$	$-4\pi t^2$	—	3	—	—	45	—
27	—	—	$50t^2$	2	75	—	—	$\varphi_r = 3\pi t^3/50$
28	$3,6\pi t^2$	$2t^3 - 3,5t$	—	5/3	42	—	—	—
29	$9\pi t^3/5$	—	—	5/2	34	—	—	$\varphi = \pi t^3/5$; $O_1O = O_2A =$ $= 44$ см
30	$5\pi t^2$	—	$t^3 + 5t$	3/2	48	—	—	—

Таблиця 2.2 – Вихідні дані до задачі К2 (набір 2)

Номер варіанту	Рівняння відносного руху точки M $OM = s_r = s_r(t)$, см	Рівняння руху тіла		t_1 , с	R , см	a , см	α , град	Додаткові дані
		$\varphi_e = \varphi_e(t)$, рад	$x_e = x_e(t)$, см					
1	$16 \sin(\pi t/3)$	$3t^3 - t^2$	—	1/3	—	20	—	—
2	$10 \sin \pi t$	$0,5t^2 + t$	—	2/3	18	—	—	—
3	$7t^3$	$3t + 0,6t^2$	—	3	—	26	—	—
4	$11 \sin(\pi t/4)$	$0,4t^2$	—	2	—	—	60	—
5	$30\pi \cos(\pi t/4)$	$5t - 0,3t^3$	—	2	32	—	—	—
6	—	—	$3,5t + 0,21t^3$	7/3	16	—	—	$\varphi_r = 0,14\pi t^3$
7	$22 \cos 2\pi t$	$0,7t^2$	—	3/4	—	45	60	—
8	$5(t + 0,8t^2)$	$1,5t^3 - 7t$	—	2	—	—	30	—
9	$10(1 + \sin 2\pi t)$	$3t + 1,7t^2$	—	1/7	—	—	—	—
10	$20\pi \cos(\pi t/4)$	$1,2t - t^2$	—	6/5	24	20	—	—
11	$20 \sin(\pi t/3)$	$3t^2 - 0,5t$	—	5	—	25	—	—
12	$15t^3/8$	$5t - 4t^2$	—	5/2	30	26	—	—
13	$110\pi t^2$	$8t^2 - 3t$	—	2/3	44	—	—	—
14	$4 + 13 \sin \pi t$	$4t - 2t^2$	—	1/2	—	—	30	—
15	$3\sqrt{2}(t^2 + 2t)$	$0,3t^3 + t$	—	2	—	50	45	—
16	$16 \sin \pi t$	$t - 0,5t^2$	—	1/3	—	18	—	—
17	$8t^3 + 2t$	$0,8t^2$	—	3/2	—	$4\sqrt{5}$	—	—
18	$11t + t^3$	$8t - 3t^2$	—	5/2	—	—	60	—
19	$6t + 4t^3$	$t + 3t^2$	—	3/2	42	—	—	—
20	$26\pi \cos(\pi t/4)$	$6t + t^2$	—	4	55	—	—	—
21	$30\pi(0,5t^2 + t)$	$2t - 4t^2$	—	2/3	25	—	—	—
22	$10 \sin(\pi t/4)$	$5t - 0,7t^2$	—	4/5	30	—	—	—
23	$9\pi t^2$	—	—	1	20	—	—	$\varphi = \pi t^3/4$; $O_1O = O_2A =$ $= 24$ см
24	$70\pi(0,15t + 0,2t^3)$	$2t - 0,4t^2$	—	2/3	26	—	—	—
25	$14 \sin(\pi t/4)$	$10t - 0,1t^2$	—	5	—	—	—	—
26	$8 \cos(\pi t/2)$	$-3\pi t^2$	—	2	—	—	45	—
27	—	—	$60t^2$	2	75	—	—	$\varphi_r = 4\pi t^3/44$
28	$2,5\pi t^2$	$2,5t^3 - 5t$	—	5/4	40	—	—	—
29	$7\pi t^3/5$	—	—	2/3	30	—	—	$\varphi = \pi t^3/7$; $O_1O = O_2A =$ $= 40$ см
30	$4\pi t^2$	—	$t^3 + 2t$	3/2	50	—	—	—

Таблиця 2.3 – Вихідні дані до задачі К2 (набір 3)

Номер варіанту	Рівняння відносного руху точки M $OM = s_r = s_r(t)$, см	Рівняння руху тіла		t_1 , с	R , см	a , см	α , град	Додаткові дані
		$\varphi_e = \varphi_e(t)$, рад	$x_e = x_e(t)$, см					
1	$20 \sin(\pi t/4)$	$2t^3 - t^2$	—	2	—	25	—	—
2	$20 \sin \pi t$	$0,4t^2 + t$	—	3	22	—	—	—
3	$4t^3$	$2t + 0,5t^2$	—	4/3	—	30	—	—
4	$13 \sin(\pi t/4)$	$0,6t^2$	—	1	—	—	60	—
5	$30\pi \cos(\pi t/6)$	$2t - 0,5t^3$	—	2/3	30	—	—	—
6	—	—	$4t + 0,24t^3$	8/3	15	—	—	$\varphi_r = 0,12\pi t^3$
7	$18 \cos 2\pi t$	$0,35t^2$	—	3/7	—	42	60	—
8	$7(t + 0,6t^2)$	$t^3 - 5t$	—	3/2	—	—	30	—
9	$8(1 + \sin 2\pi t)$	$5t + 1,5t^2$	—	3/8	—	—	—	—
10	$15\pi \cos(\pi t/2)$	$1,2t - t^2$	—	3	22	22	—	—
11	$23 \sin(\pi t/3)$	$2,5t^2 - 0,5t$	—	3	—	26	—	—
12	$15t^3/8$	$5t - 4t^2$	—	2	35	35	—	—
13	$120\pi t^2$	$6t^2 - 2t$	—	4/3	40	—	—	—
14	$3 + 14 \sin \pi t$	$4t - 2t^2$	—	2/3	—	—	30	—
15	$7\sqrt{3}(t^2 + t)$	$0,2t^3 + t$	—	3	—	55	45	—
16	$18 \sin \pi t$	$t - 0,5t^2$	—	1/3	—	22	—	—
17	$6t^3 + 2,2t$	$0,5t^2$	—	1	—	$3\sqrt{5}$	—	—
18	$10t + t^3$	$5t - 1,2t^2$	—	3/2	—	—	60	—
19	$6t + 3t^3$	$t + 2t^2$	—	2/3	40	—	—	—
20	$28\pi \cos(\pi t/4)$	$5t + 3t^2$	—	3	62	—	—	—
21	$25\pi(t^2 + t)$	$2t - 4t^2$	—	4/3	24	—	—	—
22	$10 \sin(\pi t/4)$	$4t - 0,2t^2$	—	2	32	—	—	—
23	$7\pi t^2$	—	—	3/2	22	—	—	$\varphi = \pi t^3/4$; $O_1O = O_2A =$ $= 22$ см
24	$65\pi(0,1t + 0,2t^3)$	$2t - 0,3t^2$	—	3/4	28	—	—	—
25	$16 \sin(\pi t/3)$	$10t - 0,1t^2$	—	4	—	—	—	—
26	$8 \cos(\pi t/2)$	$-2\pi t^2$	—	2	—	—	45	—
27	—	—	$40t^2$	3/2	80	—	—	$\varphi_r = 5\pi t^3/48$
28	$1,6\pi t^2$	$3t^3 - 4t$	—	3/2	40	—	—	—
29	$5\pi t^3/4$	—	—	3/2	32	—	—	$\varphi = \pi t^3/6$; $O_1O = O_2A =$ $= 36$ см
30	$6\pi t^2$	—	$t^3 + 3t$	3/2	48	—	—	—

Таблиця 2.4 – Вихідні дані до задачі К2 (набір 4*)

Номер варіанту	Рівняння відносного руху точки M $OM = s_r = s_r(t)$, см	Рівняння руху тіла		t_1 , с	R , см	a , см	α , град	Додаткові дані
		$\varphi_e = \varphi_e(t)$, рад	$x_e = x_e(t)$, см					
1	$18 \sin(\pi t/4)$	$2t^3 - t^2$	—	2/3	—	25	—	—
2	$20 \sin \pi t$	$0,4t^2 + t$	—	5/3	20	—	—	—
3	$6t^3$	$2t + 0,5t^2$	—	2	—	30	—	—
4	$10 \sin(\pi t/6)$	$0,6t^2$	—	1	—	—	60	—
5	$40\pi \cos(\pi t/6)$	$2t - 0,5t^3$	—	2	30	—	—	—
6	—	—	$3t + 0,27t^3$	10/3	15	—	—	$\varphi_r = 0,15\pi t^3$
7	$20 \cos 2\pi t$	$0,5t^2$	—	3/8	—	40	60	—
8	$6(t + 0,5t^2)$	$t^3 - 5t$	—	2	—	—	30	—
9	$10(1 + \sin 2\pi t)$	$4t + 1,6t^2$	—	1/8	—	—	—	—
10	$20\pi \cos(\pi t/4)$	$1,2t - t^2$	—	4/3	20	20	—	—
11	$25 \sin(\pi t/3)$	$2t^2 - 0,5t$	—	4	—	25	—	—
12	$15t^3/8$	$5t - 4t^2$	—	2	30	30	—	—
13	$120\pi t^2$	$8t^2 - 3t$	—	1/3	40	—	—	—
14	$3 + 14 \sin \pi t$	$4t - 2t^2$	—	2/3	—	—	30	—
15	$5\sqrt{2}(t^2 + t)$	$0,2t^3 + t$	—	2	—	60	45	—
16	$20 \sin \pi t$	$t - 0,5t^2$	—	1/3	—	20	—	—
17	$8t^3 + 2t$	$0,5t^2$	—	1	—	$4\sqrt{5}$	—	—
18	$10t + t^3$	$8t - t^2$	—	2	—	—	60	—
19	$6t + 4t^3$	$t + 3t^2$	—	2	40	—	—	—
20	$30\pi \cos(\pi t/6)$	$6t + t^2$	—	3	60	—	—	—
21	$25\pi(t^2 + t)$	$2t - 4t^2$	—	1/2	25	—	—	—
22	$10 \sin(\pi t/4)$	$4t - 0,2t^2$	—	2/3	30	—	—	—
23	$6\pi t^2$	—	—	1	18	—	—	$\varphi = \pi t^3/6$; $O_1O = O_2A =$ $= 20$ см
24	$75\pi(0,1t + 0,3t^3)$	$2t - 0,3t^2$	—	1	30	—	—	—
25	$15 \sin(\pi t/3)$	$10t - 0,1t^2$	—	5	—	—	—	—
26	$8 \cos(\pi t/2)$	$-2\pi t^2$	—	3/2	—	—	45	—
27	—	—	$50t^2$	2	75	—	—	$\varphi_r = 5\pi t^3/48$
28	$2,5\pi t^2$	$2t^3 - 5t$	—	2	40	—	—	—
29	$5t^3/4$	—	—	2	30	—	—	$\varphi = \pi t^3/8$; $O_1O = O_2A =$ $= 40$ см
30	$4\pi t^2$	—	$t^3 + 4t$	2	48	—	—	—

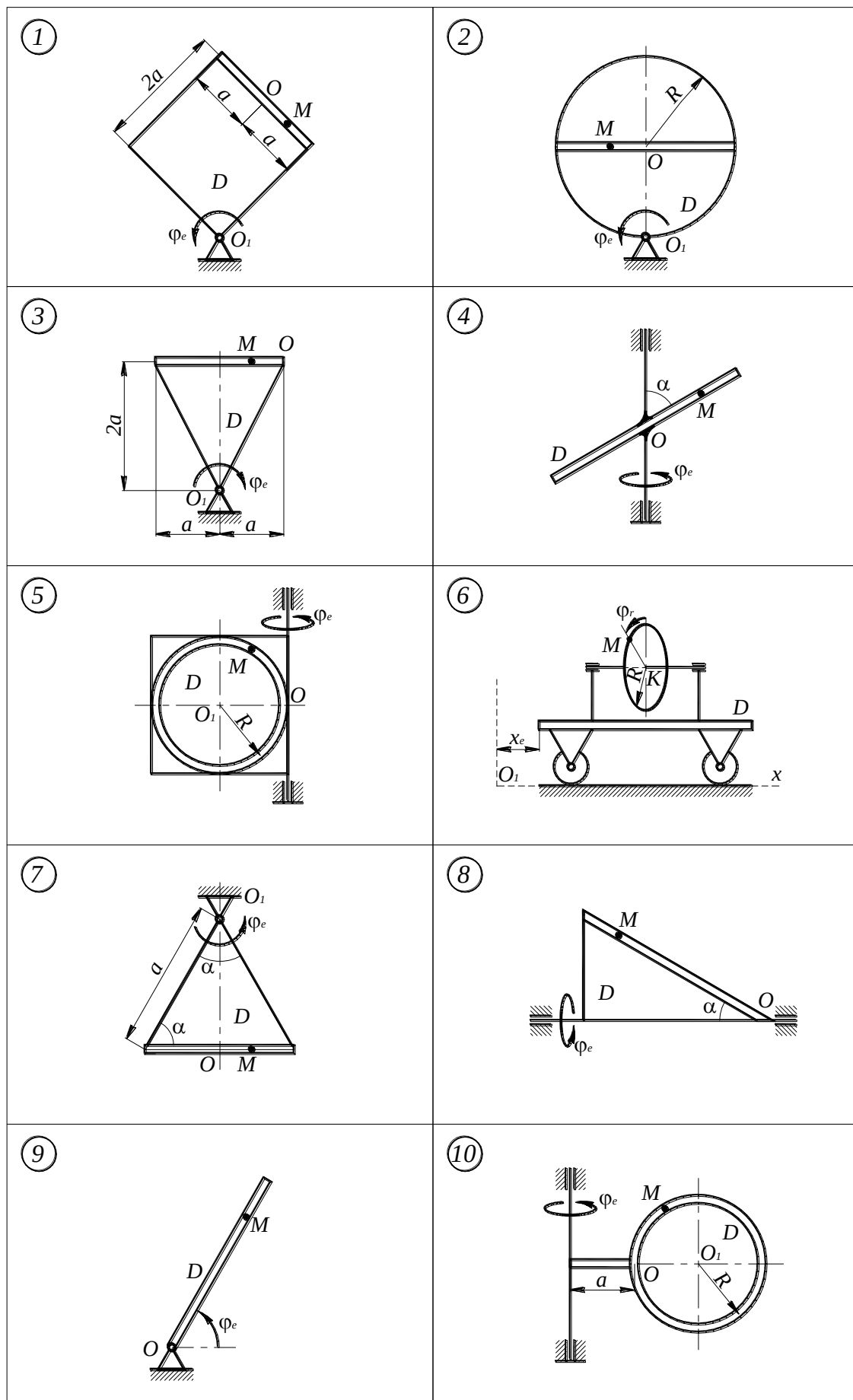


Рисунок 2.1 – Вихідні схеми до задачі K2 (1-10)

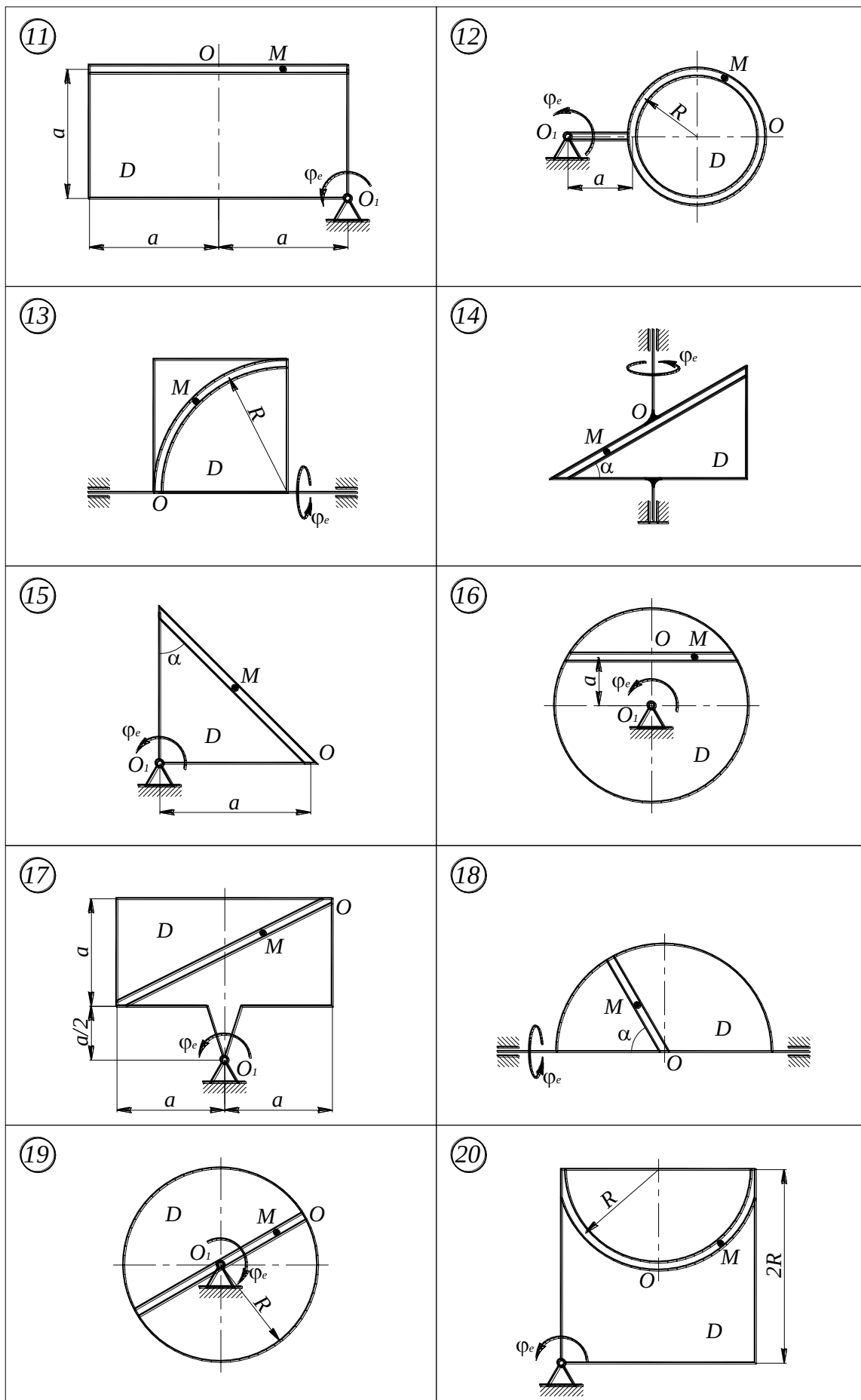


Рисунок 2.2 – Вихідні схеми до задачі К2 (11-20)

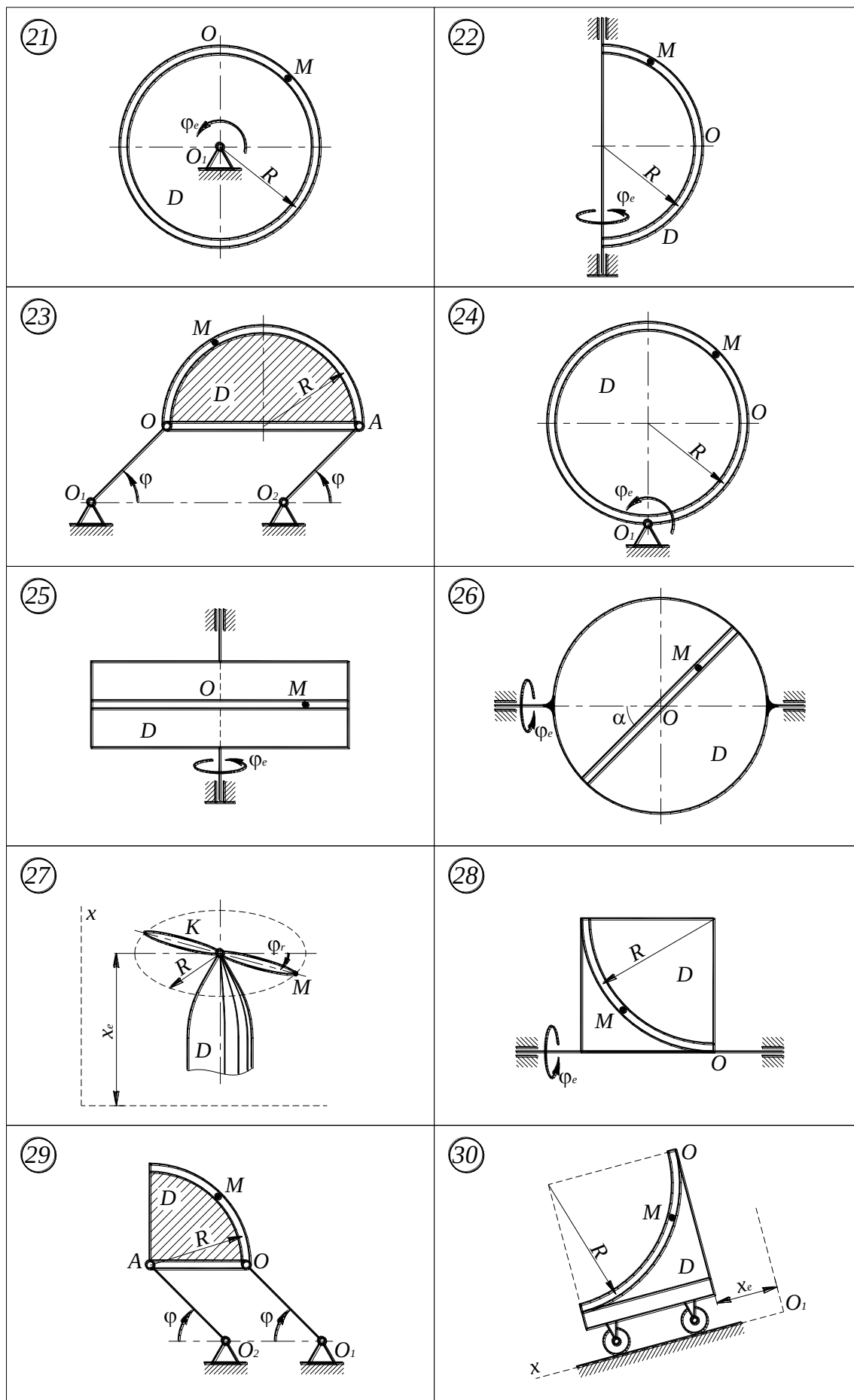


Рисунок 2.3 – Вихідні схеми до задачі К2 (21-30)

2.2 Вказівки до розв'язання задачі К2

Задача К2 присвячена дослідженню складного руху точки. У задачі К2 точка M рухається відносно точки O . За заданими рівняннями відносного руху точки M та руху всього тіла, якому належать точка O та точка M (переносного руху) треба визначити для моменту часу $t = t_1$ абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки M . Для визначення швидкості та прискорення відносного та переносного руху треба взяти першу та другу похідну відповідно згідно **правил диференціювання та таблиці похідних основних елементарних функцій**.

Правила диференціювання:

1. $[c]' = 0$, де c – довільна константа.

2. $[c \cdot u]' = c \cdot u'$, де $u = u(x)$.

3. $[u \pm v]' = u' \pm v'$.

4. $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

5. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

6. $\left(f[u(x)]\right)'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Похідні основних елементарних функцій:

1. $[x^\alpha]' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, зокрема, $[x]' = 1$.

2. $[a^x]' = a^x \cdot \ln a$, зокрема, $[e^x]' = e^x$.

3. $[\log_a x]' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, зокрема, $[\ln x]' = \frac{1}{x}$.

4. $[\sin x]' = \cos x$.

5. $[\cos x]' = -\sin x$.

6. $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

7. $[\operatorname{ctg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

8. $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $[\arccos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$.

11. $[\operatorname{arcctg} x]' = \frac{-1}{1+x^2}$.

Зазначимо, що в **додатку** цієї методички окрім правил диференціювання та розширеної таблиці похідних основних елементарних функцій додатково наведено таблицю похідних для складних функцій.

Далі наведено векторні рівняння для визначення швидкості та прискорення абсолютного руху.

Векторне рівняння для визначення швидкості абсолютного руху:

$$\vec{v}_A^a = \vec{v}_A^e + \vec{v}_A^r,$$

де $\vec{v}_A^a$ – абсолютна швидкість т. А;

$\vec{v}_A^e$ – переносна швидкість т. А;

$\vec{v}_A^r$ – відносна швидкість т. А.

Векторне рівняння для визначення прискорення абсолютного руху:

$$\vec{a}_A^a = \vec{a}_A^e + \vec{a}_A^r + \vec{a}_A^c;$$

$$\vec{a}_A^e = \vec{a}_{An}^e + \vec{a}_{A\tau}^e,$$

де $\vec{a}_A^e$ – переносне (повне) прискорення т. А

$\vec{a}_{An}^e$ – переносне нормальне прискорення т. А

$\vec{a}_{A\tau}^e$ – переносне дотичне прискорення т. А

$\vec{a}_A^r$ – відносне прискорення т. А

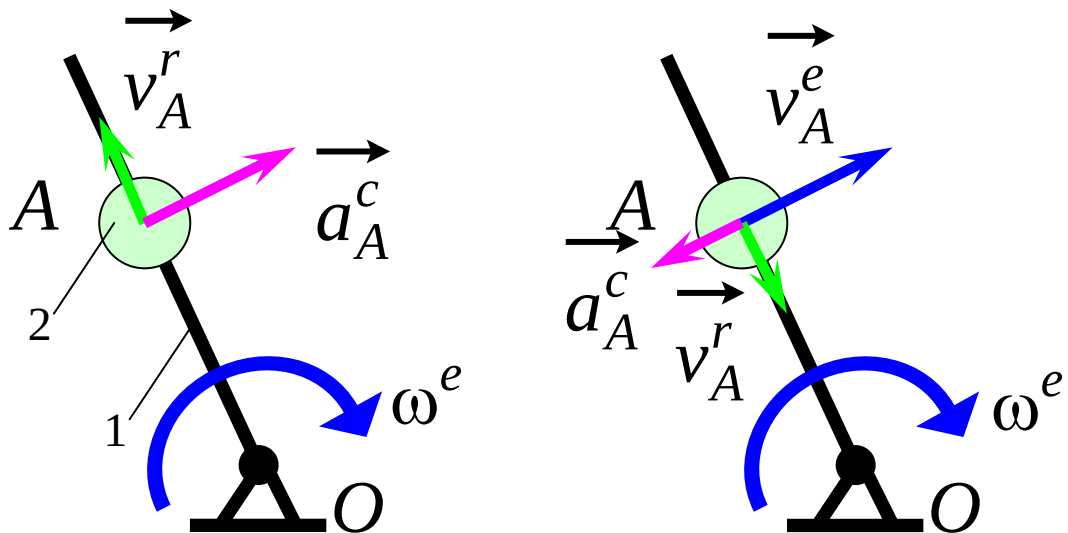
$\vec{a}_A^a$ – абсолютне прискорення т. А

$\vec{a}_A^c$ – коріолісове прискорення т. А

Коріолісове прискорення

$$\vec{a}_A^c = \vec{a}_A^{cor} = \vec{a}_A^K; \quad \vec{a}_A^c = 2\vec{\omega}^e \times \vec{v}_A^r;$$

$$a_A^c = 2 \cdot \omega^e \cdot v_A^r \cdot \sin \alpha; \quad \alpha = 90^\circ \Rightarrow a_A^c = 2 \cdot \omega^e \cdot v_A^r.$$



Правило Жуковського для визначення коріолісового прискорення $\vec{a}_A^c$ потрібно проєкцію вектора відносної швидкості $\vec{v}_A^r$ на площину перпендикулярну вектору кутової швидкості переносного руху повернути на 90 градусів у бік кутової швидкості переносного руху ω^e .

В залежності від завдання студенти можуть знаходити вектори швидкості та прискорення абсолютного руху, як аналітично, записавши рівняння проєкцій так і з використанням графоаналітичних методів (планів швидкостей та прискорень) по аналогії з задачею К1.

2.3 Алгоритм розв'язання задачі К2

1. Отримати від викладача завдання (завдання визначається єдиним номером за яким обирається і схема і номера варіанта).
2. Ознайомитися зі схемою та вихідними даними до неї.
3. Переписати вихідні дані та накреслити схему.
4. За схемою ідентифікувати відносний, переносний і абсолютний рух точки.
5. За рівнянням відносного руху точки знайти положення цієї точки на тілі в розрахунковий момент часу.
6. Записати векторне рівняння для визначення абсолютної швидкості точки за відсною та переносною швидкостями.
7. Знайти модуль відносної швидкості в залежності від моменту часу.
8. Знайти модуль відносної швидкості в розрахунковий момент часу.
9. Визначити функціональну залежність переносної кутової швидкості від часу.
10. Визначити модуль переносної швидкості точки в заданий момент часу.
11. Визначити напрямки векторів переносної і відносної швидкості.
12. Знайти абсолютну швидкість точки.
13. Записати векторне рівняння для визначення абсолютного прискорення точки у випадку складного руху у розгорнутому вигляді.
14. Знайти модулі усіх складових прискорень з векторного рівняння, яке записане було в попередньому пункті.
15. Знайти напрямки усіх складових прискорень з векторного рівняння, яке записане було в пункті 14.
16. Знайти модуль абсолютного прискорення точки.
17. Результати розрахунків записати у таблицю.

2.4 Приклад розв'язання задачі К2

Кінематика. Задача 2. Варіант 15. Таблиця 2.2

Дано:

Час $t_1 = 2$ (с);

Кут $\alpha = 45^\circ$;

Відстань $a = 0.5$ (м).

Рівняння руху точки М (відносного):

$$s_r(t) = 0.03 \cdot \sqrt{2} \cdot (t^2 + 2 \cdot t) = 0.03 \cdot \sqrt{2} \cdot (4 + 2 \cdot 2) = 0.3394 \text{ (м)}.$$

Рівняння обертання (переносний рух):

$$\varphi_e(t) = 0.3 \cdot t^3 + t^2 = 0.3 \cdot 2^3 + 2^2 = 6.4 \text{ (рад)};$$

$$\varphi_e(t_1) \cdot \frac{180}{\pi} = 366.693^\circ;$$

$${}^1_{O1M} = 0.3538 \text{ (м)}.$$

Відносна швидкість

$$v_r(t) = 0.03 \cdot \sqrt{2} \cdot (2 \cdot t + 2) = 0.03 \cdot \sqrt{2} \cdot (2 \cdot 2 + 2) = 0.2546 \text{ (м/с)}.$$

Кутова швидкість(переносний рух)

$$\omega_e(t) = 0.9 \cdot t^2 + 2 \cdot t = 0.9 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 7.6 \text{ (рад/с)}.$$

Переносна швидкість

$$v_e(t) = \omega_e(t) \cdot {}^1_{O1M} = 7.6 \cdot 0.3538 = 2.6889 \text{ (м/с)}.$$

Абсолютна швидкість:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r,$$

де $p_v m_e = 50$ мм – відрізок на плані швидкостей, який відповідає переносній швидкості;

Масштаб плану швидкостей

$$\mu_v = \frac{v_e(t_1)}{p_v m_e} = \frac{2.6889}{50} = 0.0538 \left(\frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right).$$

Відрізок на плані швидкостей, який відповідає відносній швидкості

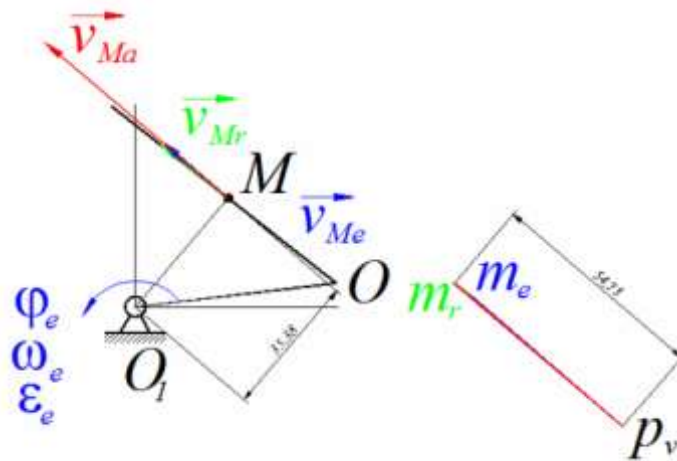
$$m_e m_r = \frac{v_r(t_1)}{\mu_v} = \frac{0.2546}{0.0538} = 4.7335 \text{ (мм)}.$$

Відрізок на плані швидкостей, який відповідає абсолютній швидкості

$$p_v m_r = 54.73 \text{ (мм)}.$$

Абсолютна швидкість

$$v_a = p_v m_r \cdot \mu_v = 211.9913 \text{ (м/с)}.$$



Абсолютне прискорення

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c.$$

Відносне прискорення

$$a_r(t) = 0.06 \cdot \sqrt{2} = 0.0849 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Переносне прискорення має дві складових.

Переносне прискорення нормальна складова

$$a_{en} = \omega_e(t_1)^2 \cdot l_{O1M} = 7.6^2 \cdot 0.3538 = 20.4355 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Кутове прискорення (переносний рух)

$$\epsilon_e(t) = 1.8 \cdot t + 2 = 1.8 \cdot 2 + 2 = 5.6 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Переносне прискорення дотична складова

$$a_{et} = \epsilon_e(t_1) \cdot l_{O1M} = 5.6 \cdot 0.3538 = 1.9813 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Коріолісове прискорення

$$\vec{a}_c = 2 \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r;$$

$$a_c = 2 \cdot \omega_e(t_1) \cdot V_r(t_1) = 2 \cdot 7.6 \cdot 0.2546 = 3.8693 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

$p_a n = 50 \text{ мм}$ – відрізок на плані швидкостей, який відповідає переносному нормальному прискоренню.

Масштаб плану прискорень

$$\mu_a = \frac{a_{en}}{p_a n} = \frac{20.4355}{50} = 0.4087 \left(\frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right).$$

Відрізок на плані прискорень, який відповідає переносному дотичному прискоренню

$$nt = \frac{a_{et}}{\mu_a} = \frac{1.9813}{0.4087} = 4.8476 \text{ (мм)}.$$

Відрізок на плані швидкостей, який відповідає відносному прискоренню

$$tr = \frac{a_r(t_1)}{\mu_a} = \frac{0.0849}{0.4087} = 0.2076 \text{ (мм)}.$$

Відрізок на плані швидкостей, який відповідає коріолісовому прискоренню

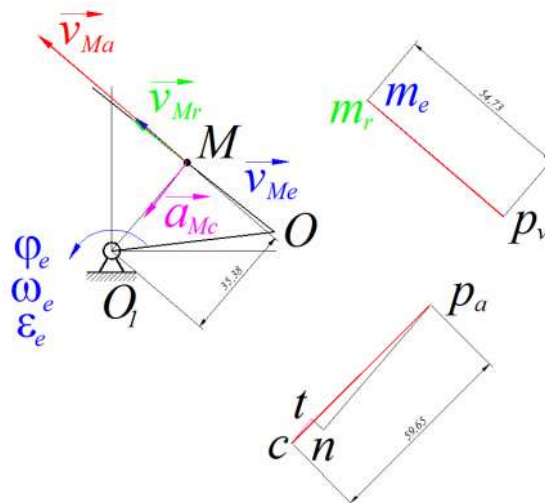
$$rc = \frac{a_c}{\mu_a} = \frac{3.8693}{0.4087} = 9.4671 \text{ (мм)}.$$

Відрізок на плані швидкостей, який відповідає абсолютному прискоренню

$$p_a c = 59.65 \text{ мм}.$$

Абсолютне прискорення:

$$a_a = p_a c \cdot \mu_a = 59.65 \cdot 0.4087 = 24.38 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$



3. ЗАДАЧА КЗ

Кінематика зубчастих механізмів

3.1 Завдання та вихідні дані до задачі КЗ

На рис. 3.1–3.10 показані схеми зубчастих передач. Вхідне колесо 1 на даний момент має кутову швидкість ω_1 та постійне кутове прискорення ε_1 , спрямоване за рухом або проти руху. Визначити:

- 1) передатне відношення між вхідною та вихідною ланками та його знак (якщо осі обертання вхідного та вихідного валів паралельні);
- 2) кутову швидкість та кутове прискорення вихідної ланки, та їх напрямки (показати ці напрямки на схемі передач);
- 3) час, протягом якого кутова швидкість збільшиться вдвічі (якщо рух прискорений) або зменшиться до нуля (якщо рух уповільнений)).

В таблицях 3.1 – 3.10 заданих величин z_i – числа зубів коліс, де i – номер зубчастого колеса на схемі механізму, для черв'яка z_i – число заходів, а напрямки витків черв'яка вказано буквами: $л$ – ліве, $п$ – праве.

ПРИМІТКА. Кінематичну схему механізму необхідно накреслити, приблизно дотримуючись співвідношення діаметрів зубчастих коліс (діаметр колеса пропорційний його числу зубів). Діаметр черв'яка прийняти рівним чверті діаметра черв'ячного колеса.

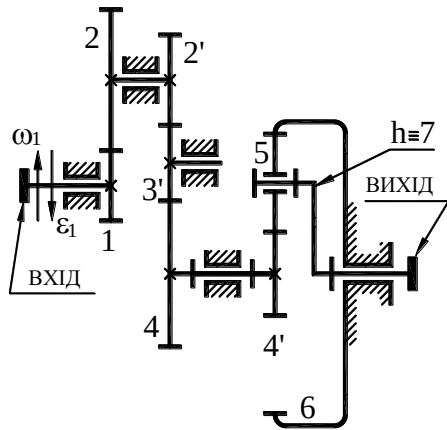


Рисунок 3.1 – Схема 1

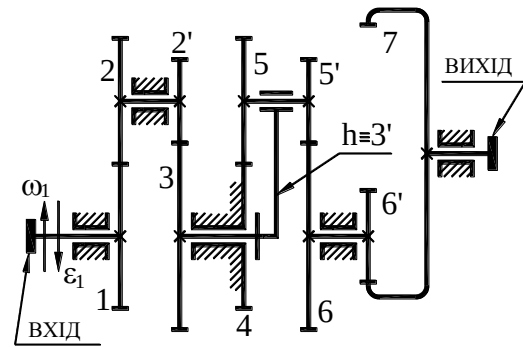


Рисунок 3.2 – Схема 2

Таблиця 3.1 – Вихідні дані до схеми 1

Величина	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1, z_3	16	18	14	14	17	18	14	15	16	14
z_2	20	30	24	20	34	24	20	30	28	26
$z_{2'}$	14	15	14	15	17	15	15	14	14	15
z_4	20	20	28	21	24	26	36	38	40	43
$z_{4'}$	15	14	14	16	15	18	14	18	19	20
z_5	21	22	21	22	21	25	22	26	25	40
z_6	57	58	56	60	57	68	58	70	69	100
ω_1 , рад/с	280	180	240	250	300	250	150	200	350	100
ε_1 , рад/с ²	50	60	180	126	75	50	100	50	40	20

Таблиця 3.2 – Вихідні дані до схеми 2

Величина	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	22	14	25	18	21	20	16	18	16	20
z_2	23	22	26	30	28	30	28	28	24	21
$z_{2'}$	22	16	25	16	17	18	16	15	18	20
z_3	23	26	26	26	30	28	24	32	30	21
$z_4, z_{5'}$	22	28	26	24	31	32	29	31	21	20
z_5, z_6	23	27	25	25	32	31	30	30	22	21
$z_{6'}$	32	29	26	28	30	25	22	23	24	20
z_7	42	39	38	37	40	37	45	42	40	65
ω_1 , рад/с	150	380	320	290	320	300	280	350	250	400
ε_1 , рад/с ²	75	285	160	100	80	100	210	70	50	200

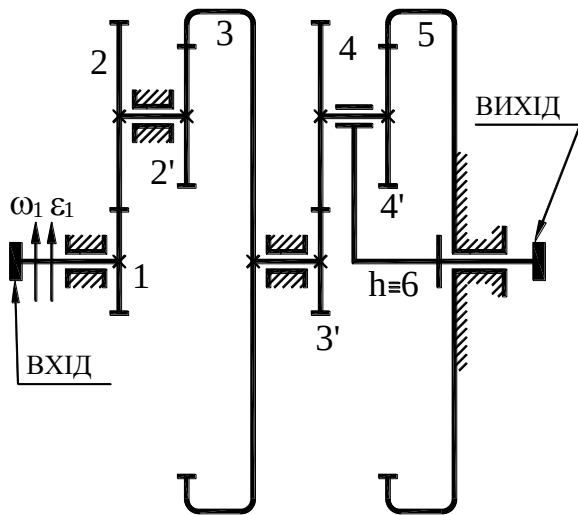


Рисунок 3.3 – Схема 3

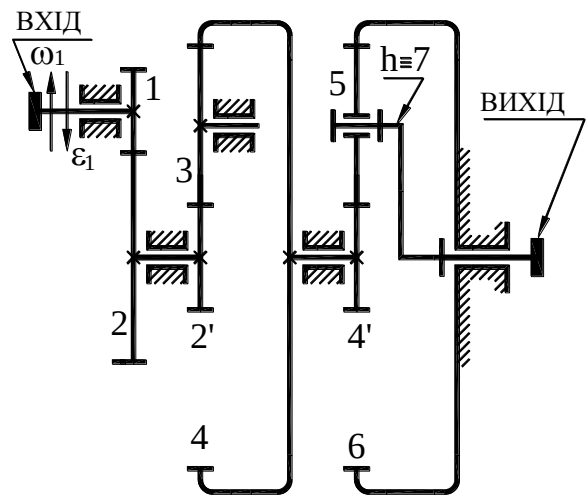


Рисунок 3.4 – Схема 4

Таблиця 3.3 – Вихідні дані до схеми 3

Величина	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_1, z_{3'}$	20	23	24	18	22	18	14	16	18	20
z_2, z_4	40	30	38	26	36	36	26	40	30	28
$z_{2'}, z_{4'}$	22	21	22	20	26	25	21	20	22	20
z_3, z_5	82	74	84	64	84	79	61	76	70	68
$\omega_1, \text{рад/с}$	320	190	220	180	200	240	300	260	340	280
$\varepsilon_1, \text{рад/с}^2$	80	95	165	200	50	180	200	190	285	210

Таблиця 3.4 – Вихідні дані до схеми 4

Величина	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	15	17	14	19	16	18	14	18	14	18
z_2	24	32	24	28	30	27	21	31	19	25
$z_{2'}, z_{4'}$	30	25	20	20	25	21	30	29	34	42
z_3, z_5	20	30	40	30	21	20	21	21	20	20
z_4, z_6	70	85	100	80	67	61	72	71	74	82
$\omega_1, \text{рад/с}$	260	240	240	350	400	220	150	150	300	200
$\varepsilon_1, \text{рад/с}^2$	195	100	100	200	50	65	60	200	200	50

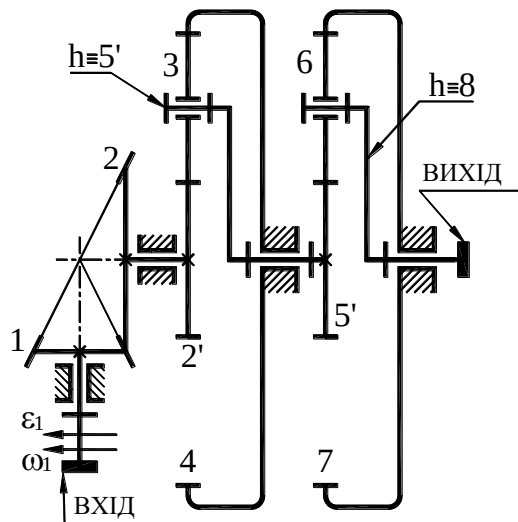


Рисунок 3.5 – Схема 5

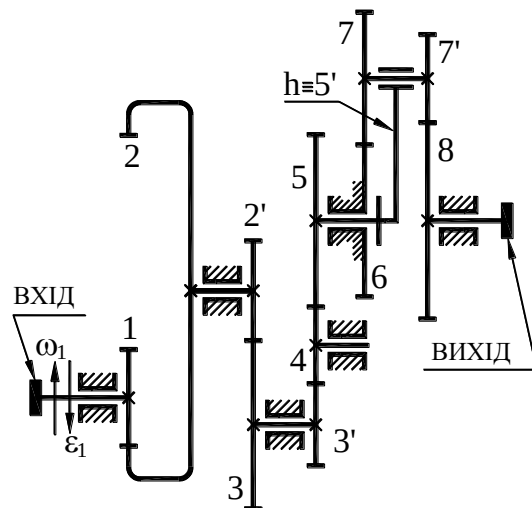


Рисунок 3.6 – Схема 6

Таблиця 3.5 – Вихідні дані до схеми 5

Величина	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	18	19	16	17	18	13	14	14	16	15
z_2	25	28	31	27	39	24	27	20	30	25
$z_{2'}, z_{5'}$	40	35	28	30	18	22	25	20	20	21
z_3, z_6	20	20	20	20	24	36	20	40	30	20
z_4, z_7	80	75	68	70	66	94	65	100	80	61
ω_1 , рад/с	320	360	400	180	350	320	280	120	300	250
ε_1 , рад/с ²	80	60	50	90	200	240	75	40	200	100

Таблиця 3.6 – Вихідні дані до схеми 6

Величина	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	29	30	27	26	25	24	23	22	21	20
z_2	39	40	40	36	37	40	42	46	56	65
$z_{2'}$	20	15	20	16	17	16	15	17	15	14
z_3	29	32	31	24	25	23	28	26	30	26
$z_{3'}, z_4$	19	21	22	16	16	15	16	13	14	15
z_5	29	31	30	22	23	21	22	20	24	25
$z_6, z_{7'}$	31	30	18	17	20	19	26	25	21	20
z_7, z_8	30	31	17	18	19	20	25	26	20	21
ω_1 , рад/с	300	260	120	280	225	100	350	150	300	200
ε_1 , рад/с ²	150	65	200	120	50	50	200	100	75	40

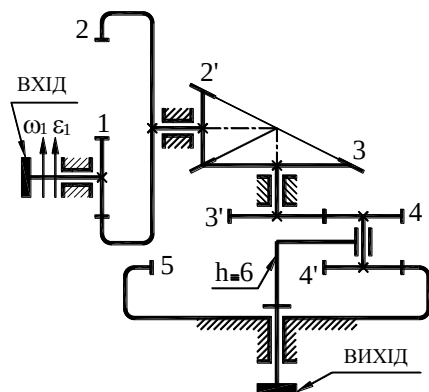


Рисунок 3.7 – Схема 7

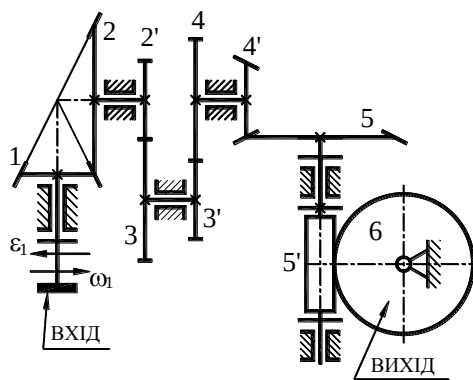


Рисунок 3.8 – Схема 8

Таблиця 3.7 – Вихідні дані до схеми 7

Величина	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	22	22	21	21	26	25	21	22	22	20
z_2, z_5	76	64	74	84	82	70	61	67	61	62
$z_{2'}$	18	14	18	17	16	14	15	16	17	15
z_3	29	26	32	30	24	26	24	24	30	28
$z_{3'}$	16	17	23	24	20	20	15	18	16	15
z_4	40	27	30	38	40	30	26	28	24	25
$z_{4'}$	20	20	21	22	22	20	20	21	21	22
ω_1 , рад/с	240	320	400	280	350	300	150	200	250	180
ε_1 , рад/с ²	180	240	100	210	200	75	25	100	50	90

Таблиця 3.8 – Вихідні дані до схеми 8

Величина	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	22	17	20	17	21	18	20	18	17	17
z_2	30	23	21	25	24	21	24	30	17	20
$z_{2'}, z_{3'}$	16	14	15	15	16	17	15	16	14	14
z_3	28	23	24	20	30	24	28	20	20	16
z_4	31	28	24	24	21	20	30	32	20	20
$z_{4'}$	19	18	17	18	19	18	17	18	17	18
z_5	28	27	32	31	32	28	30	32	26	28
$z_{5'}$	2, л	4, п	2, л	1, п	4, л	2, п	1, л	4, п	2, л	1, п
z_6	50	33	38	40	42	40	30	36	30	50
ω_1 , рад/с	380	320	350	320	280	250	300	400	150	350
ε_1 , рад/с ²	190	80	70	80	70	125	60	250	50	100

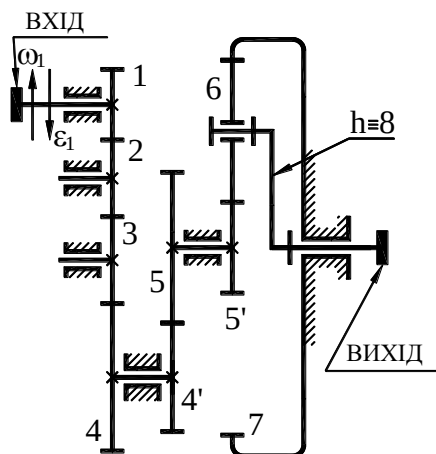


Рисунок 3.9 – Схема 9

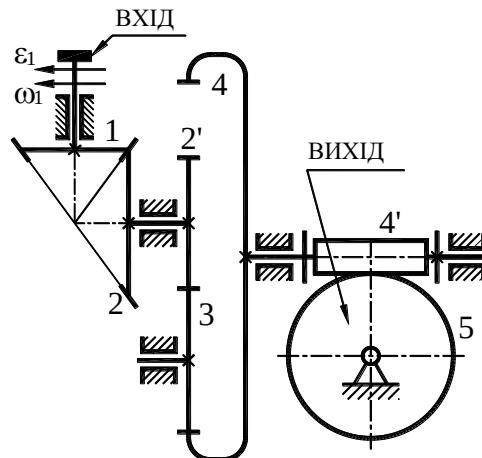


Рисунок 3.10 – Схема 10

Таблиця 3.9 – Вихідні дані до схеми 9

Величина	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1, z_2	20	14	15	19	17	14	15	18	15	14
$z_3, z_{4'}$	18	14	15	18	16	17	16	14	15	14
z_4	30	26	25	26	28	21	20	30	21	30
z_5	24	26	27	30	24	24	23	21	30	26
$z_{5'}$	15	15	14	18	15	14	15	14	18	20
z_6	35	30	26	30	24	23	21	22	21	25
z_7	85	75	66	78	63	60	57	58	60	70
ω_1 , рад/с	210	280	400	180	220	240	250	350	200	150
ε_1 , рад/с ²	630	140	250	45	550	60	400	70	500	60

Таблиця 3.10 – Вихідні дані до схеми 10

Величина	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	19	18	20	17	18	19	17	18	18	17
z_2, z_3	27	24	32	30	25	30	27	30	25	28
$z_{2'}$	21	20	16	14	14	15	17	15	16	15
z_4	52	50	42	46	50	49	48	45	60	45
$z_{4'}$	4, п	2, л	1, п	2, л	1, п	4, л	2, п	1, л	2, п	4, л
z_5	33	34	50	32	29	36	40	28	28	30
ω_1 , рад/с	150	200	350	240	300	350	250	100	200	180
ε_1 , рад/с ²	500	250	700	600	500	175	125	60	50	60

3.2 Вказівки до розв'язання задачі КЗ

У задачі №3 (розділ «Зубчасті механізми») слід виконати кінематичне дослідження механізму багатоступінчастої зубчастої (або зубчасто-черв'ячної) передачі.

Для визначення загального передатного відношення передачі спочатку треба виявити на загальній кінематичній схемі окремі її ступені. Потім для кожного окремого ступеня необхідно розрахувати величину та знак передатного відношення. Після цього можна знайти загальне передатне відношення, перемноживши передатне відношення окремих ступенів передачі, узятих зі своїми знаками. На просторових схемах (5, 7, 8 і 10) знак загального передатного відношення втрачає сенс, тому він опускається, а напрямок обертання вихідного валу визначається, наприклад, методом «стрілок». Для черв'ячної пари напрямок обертання черв'ячного колеса можна визначити, знаючи напрямок обертання та напрямок нарізки черв'яка (лівий або правий).

У цій задачі зустрічаються такі окремі ступені (таблиця 3.11):

- циліндричний ступінь зовнішнього зачеплення;
- циліндричний ступінь зовнішнього зачеплення з одним паразитним колесом;
- циліндричний ступінь внутрішнього зачеплення;
- циліндричний ступінь внутрішнього зачеплення з одним паразитним колесом;
- конічна ступінь;
- конічна ступінь з паразитним колесом;
- планетарний ступінь Джемса з одновінцевим сателітом;
- планетарний ступінь Джемса з двовінцевим сателітом;
- планетарний ступінь Давида із двома зовнішніми зачепленнями;
- черв'ячний ступінь з циліндричним черв'яком.

Для кожного виділеного ступеня передачі необхідно розрахувати через задані числа зубів величину та знак її передатного відношення. Попередньо для кожного ступеня необхідно ідентифікувати індекси коліс. У таблиці 3.11 колесам окремих ступенів умовно присвоєно індекси: a , b , c , d , h . У кожному завданні

ці індекси відповідають деяким номерним індексам коліс, які слід встановити, щоб правильно знайти в таблиці вихідних даних числа зубів відповідних коліс.

Формули для розрахунку величини та знака передатного відношення, виділених ступенів наведені поруч із відповідним рисунком.

Перемноживши передатні відношення всіх ступенів передачі, узяті зі своїми знаками, отримують загальне передатне відношення всієї передачі та її знак. Це справедливо для всіх схем завдання задачі №3, крім 5-ої, 7-ої, 8-ої і 10-ої, на яких представлені варіанти багатоступеневих передач з непаралельними осями вхідного і вихідного валів. Для перерахованих вище схем напрямок обертання вихідного валу можна визначити, простеживши подумки за напрямком обертання кожного з коліс за методом «вузлових точок» або за методом «стрілок».

Визначення напрямку обертання вихідного валу методом «стрілок» у тому, що, починаючи з вхідної ланки, рух якої заданий, позначається напрямком переміщення видимих (верхніх) частин вінців всіх зубчастих коліс. У черв'ячній ступені напрямок обертання вихідного валу залежить від напрямку нарізки черв'яка. При правій нарізці черв'яка мислене його загвинчування за годинниковою стрілкою супроводжується набіганням черв'ячного колеса в зону зачеплення з черв'яком, а викручування проти годинникової стрілки - збігання черв'ячного колеса із зони зачеплення. При лівій нарізці те саме спостерігається при обернених напрямках обертання черв'яка.

Величину кутової швидкості вихідного валу можна знайти, знаючи значення кутової швидкості вхідного валу та загального передатного відношення передачі.

Так як $i_{\text{заг}} = \omega_{\text{вх}} / \omega_{\text{вих}}$, знаходимо:

$$\omega_{\text{вих}} = \omega_{\text{вх}} / i_{\text{заг}} . \quad (3.1)$$

При цьому від'ємний знак $i_{\text{заг}}$ обумовить від'ємний знак $\omega_{\text{вих}}$, що означатиме протилежний напрямок обертання вихідного валу по відношенню до обертання вхідного.

При додатному знаку $i_{\text{заг}}$ вихідний і вхідний вали матимуть один і той же напрямок обертання.

Величина кутового прискорення вихідного валу може бути знайдена за допомогою диференціювання виразу (3.1) за часом

$$\frac{d\omega_{\text{вих}}}{dt} = \frac{d\omega_{\text{вх}}}{dt} / i_{\text{заг}},$$

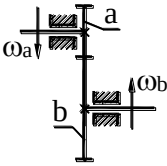
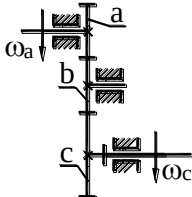
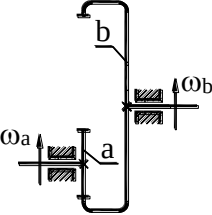
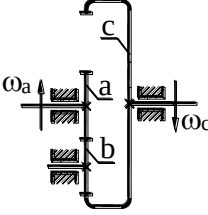
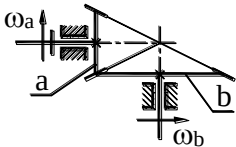
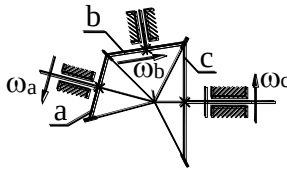
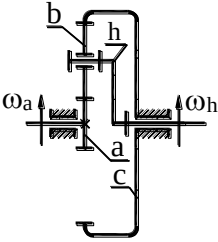
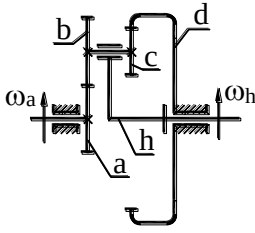
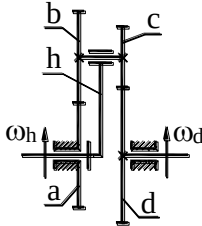
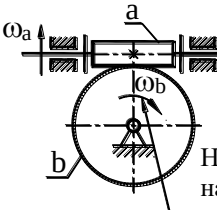
тобто

$$\varepsilon_{\text{вих}} = \varepsilon_{\text{вх}} / i_{\text{заг}}. \quad (3.2)$$

Аналіз формул (3.1) та (3.2) показує, що якщо $\varepsilon_{\text{вх}}$ спрямовано у бік $\omega_{\text{вх}}$, то і $\varepsilon_{\text{вих}}$ буде спрямовано у бік $\omega_{\text{вих}}$, і навпаки – різноспрямованість $\varepsilon_{\text{вх}}$ і $\omega_{\text{вх}}$ зумовить різноспрямованість $\varepsilon_{\text{вих}}$ і $\omega_{\text{вих}}$.

До того ж висновку можна дійти і на основі простої логіки: прискорене обертання на вході зумовить прискорене обертання і на виході, а відповідно, уповільнене обертання на вході супроводжуватиметься уповільненим обертанням і на виході.

Таблиця 3.11 – Визначення передатного відношення ступені

 $i_{ab} = - \frac{Z_b}{Z_a}$ 1. Циліндрична ступінь зовнішнього зачеплення	 $i_{ac} = \frac{Z_c}{Z_a}$ 2. Циліндрична ступінь зовнішнього зачеплення з одним паразитним колесом
 $i_{ab} = \frac{Z_b}{Z_a}$ 3. Циліндрична ступінь внутрішнього зачеплення	 $i_{ac} = - \frac{Z_c}{Z_a}$ 4. Циліндрична ступінь внутрішнього зачеплення з одним паразитним колесом
 $i_{ab} = \frac{Z_b}{Z_a}$ 5. Конічна ступінь	 $i_{ac} = \frac{Z_c}{Z_a}$ 6. Конічна ступінь з паразитним колесом
 $\frac{\omega_a - \omega_h}{\omega_c - \omega_h} = - \frac{Z_c}{Z_a};$ при $\omega_c = 0$: $i_{ah}^{(c)} = 1 + \frac{Z_c}{Z_a}$ 7. Планетарна ступінь Джемса з одновінцевим сателітом	 $\frac{\omega_a - \omega_h}{\omega_d - \omega_h} = - \frac{Z_b \cdot Z_d}{Z_a \cdot Z_c};$ при $\omega_d = 0$: $i_{ah}^{(d)} = 1 + \frac{Z_b \cdot Z_d}{Z_a \cdot Z_c}$ 8. Планетарна ступінь Джемса з двувінцевим сателітом
 $\frac{\omega_d - \omega_h}{\omega_a - \omega_h} = \frac{Z_c \cdot Z_a}{Z_d \cdot Z_b};$ при $\omega_a = 0$: $i_{hd}^{(a)} = \frac{Z_b \cdot Z_d}{Z_b \cdot Z_d - Z_a \cdot Z_c}$ 9. Планетарна ступінь Давида з двома зовнішніми зачепленнями	 $i_{ab} = \frac{Z_b}{Z_a}$ 10. Черв'ячна ступінь з циліндричним черв'яком Напряв ω_b при правій нарізці черв'яка

Час, протягом якого кутова швидкість збільшиться вдвічі, якщо рух рівноприскорений, можна підрахувати на основі виразу

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t. \quad (3.3)$$

Звідси знайдемо

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} = \frac{2\omega_0 - \omega_0}{\varepsilon} = \frac{\omega_0}{\varepsilon}, \quad (3.4)$$

де t – час, протягом якого кутова швидкість збільшиться вдвічі;

ω – поточне значення кутової швидкості на момент часу t

$$\omega = 2 \cdot \omega_0;$$

ω_0 – початкове значення кутової швидкості.

Зауважимо, що формулу (3.4) можна застосувати хоч до $\omega_{\text{вх}}$, хоч до $\omega_{\text{вих}}$.

Час, протягом якого кутова швидкість зменшиться до нуля, якщо рух рівноуповільнений, можна підрахувати на основі виразу

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon \cdot t, \quad (3.5)$$

тобто $0 = \omega_0 - \varepsilon \cdot t$, звідси:

$$t = \frac{\omega_0}{\varepsilon}. \quad (3.6)$$

Природно, що формулу (3.6) можна застосувати хоч до $\omega_{\text{вх}}$, хоч до $\omega_{\text{вих}}$.

Приклад розв'язання задачі №3 наведено далі.

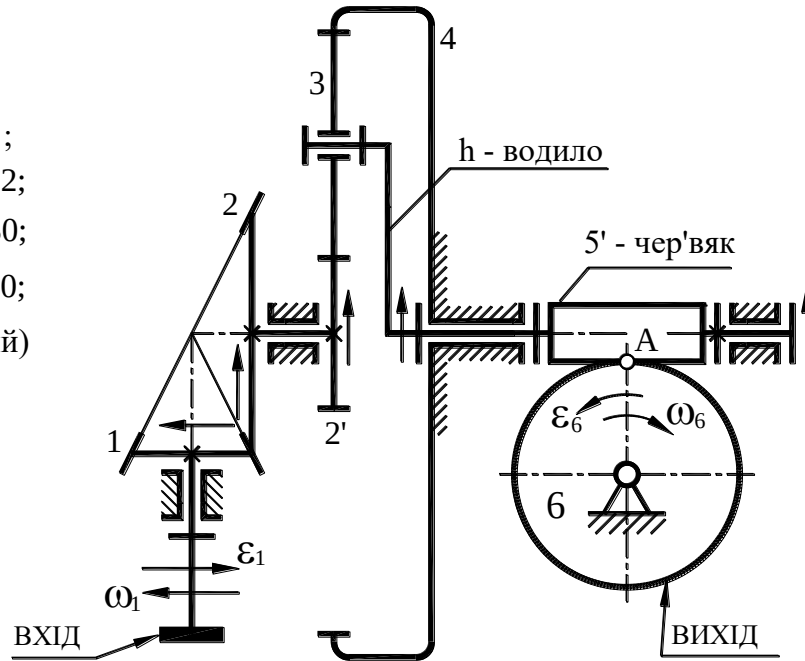
3.3. Алгоритм розв'язання задачі КЗ

1. Отримати від викладача завдання (завдання визначається двома цифрами, перша цифра це номер схеми, а друга - номера варіанта).
2. Ознайомитися зі схемою та вихідними даними до неї.
3. Переписати вихідні дані (*відповідно до номера схеми вибрати таблицю з параметрами завдання; у першій колонці таблиці вказані назви параметрів; кожна наступна колонка відповідає номеру варіанта; параметри вказані через кому мають однакові значення*).
4. Накреслити розрахункову схему багатоступеневої зубчастої передачі:
 - елементи зубчастих коліс повинні бути симетричними відносно осі обертання відповідного колеса;
 - діаметр або радіус зубчастого колеса повинен бути пропорційним кількості зубців ($d=kz$ а, де k – коефіцієнт пропорційності; напр. $k=1$);
 - поставити позначки на розрахунковій схемі (вхідний вал, вихідний вал, номера зубчастих коліс і інших елементів передач).
5. Визначити величину та знак (якщо це можливо) передатного відношення кожної окремої зубчастої ступен та загального передатного відношення багатоступеневої зубчастої передачі.
6. Визначити та поставити позначки напрямків кутових швидкостей і кутових прискорень для кожного проміжного валу багатоступеневої зубчастої передачі.
7. Знайти величину кутової швидкості обертання вихідного валу багатоступеневої зубчастої передачі.
8. Знайти величину кутового прискорення обертання вихідного валу багатоступеневої зубчастої передачі.
9. Визначити який рух вихідного валу багатоступеневої зубчастої передачі рівноуповільнений або рівноприскорений.
10. Знайти величину часу, за який вихідний вал багатоступеневої зубчастої передачі зупиниться або його швидкість збільшиться вдвічі.

3.4 Приклад розв'язання задачі КЗ

Вихідні дані:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 300 \text{ рад/с}; \\ \varepsilon_1 &= 180 \text{ рад/с}^2; \\ z_1 &= 16; \quad z_2 = 32; \\ z_2' &= 20; \quad z_3 = 30; \\ z_4 &= 80; \quad z_6 = 30; \\ z_5 &= 2\pi \text{ (правий)}\end{aligned}$$



ПРИМІТКА

Стрілками $\uparrow$ і $\leftarrow$ показані напрямки обертання ланок механізму (тобто напрямки руху верхніх частей коліс)

Рисунок 3.11 – Кінематична схема зубчастого механізму

1) Визначення передатного відношення механізму

Зубчастий механізм (передача) містить три ступені:

1-ий ступінь – це конічна передача з колесами 1 і 2;

2-ий ступінь включає колеса 2', 3, 4 і водило h – планетарний механізм Джемса з одновінцевим сателітом;

3-ій ступінь – черв'ячна передача з двозахідним правим черв'яком (ланки 5' і 6).

Загальне передатне відношення дорівнює добутку передатних відношень окремих її ступенів:

$$i_{16} = i_{12} \cdot i_{2'h}^{(4)} \cdot i_{5'6} = 2 \cdot 5 \cdot 15 = 150,$$

де $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{32}{16} = 2$ – передатне відношення конічної передачі;

$$i_{2'h}^{(4)} = 1 - i_{2'4}^{(h)} = 1 + \frac{z_4}{z_{2'}} = 1 + \frac{80}{20} = 5 \quad - \quad \text{передатне відношення планетарного}$$

механізму від колеса 2' до водила при загальмованому колесі 4 (формула для $i_{2'h}^{(4)}$ отримана на основі формули Вілліса з умови $\omega_4 = 0$);

$$i_{2'4}^{(h)} = \frac{\omega_{2'} - \omega_h}{\omega_4 - \omega_h} = -\frac{z_4}{z_{2'}} = -\frac{80}{20} = -4 \quad - \quad \text{передатне відношення оберненого}$$

механізму (формула Вілліса);

$$i_{5'6} = \frac{z_6}{z_{5'}} = \frac{30}{2} = 15 \quad - \quad \text{передатне відношення черв'ячної передачі.}$$

Таким чином, загальне передатне відношення зубчастого механізму буде $i_{16} = 150$.

2) Визначення напрямків кутових швидкостей та прискорень

У цій передачі осі вхідного та вихідного валів не паралельні (перехрещуються під кутом 90°), а значить, знак передатного відношення не визначається (в цьому випадку він втрачає сенс, оскільки напрямки обертання вхідного і вихідного валів, що спостерігаються, залежать від напрямку погляду спостерігача).

За умовою задачі вхідна ланка обертається повільно (ω_1 і ε_1 спрямовані в різні боки), отже, і всі інші ланки зубчастого механізму будуть обертатися уповільнено, тобто для кожної ланки ω_i і ε_i матимуть протилежні напрямки. Таким чином, достатньо визначити лише напрямки кутових швидкостей усіх ланок.

Для пари коліс напрямки обертань визначаються виходячи з того, що точки початкових кіл коліс, що знаходяться в зачепленні, або «входять в зону зачеплення» або «виходять із зони зачеплення». З цього випливає, що напрямки обертання колеса 2 зображуватиметься стрілкою, спрямованою вгору, тому що аналогічна стрілка для колеса 1 спрямована вліво.

Центральне колесо планетарного механізму 2' обертається у той самий бік, як і колесо 2 (ці колеса утворюють одну ланку), а оскільки передатне відношення планетарного механізму $i_{2'h}^{(4)} > 0$, то водило h і черв'як 5', що утворює з водилом одну ланку, теж будуть обертатися в той же бік (стрілка вгору).

Отже, якщо дивитися на черв'як уздовж осі ліворуч, то його кутова швидкість буде спрямована проти годинникової стрілки. Так як черв'як правий (правий гвинт), то при обертанні його проти годинникової стрілки він відносно черв'ячного колеса рухатиметься вліво (викручуватиметься). Отже, точка A черв'ячного колеса відносно черв'яка рухатиметься праворуч, тобто ω_6 буде спрямована за годинниковою стрілкою (у площині креслення).

3) Визначення ω_6 , ε_6 та часу t до повної зупинки приводу

Кутові швидкість та прискорення вихідної ланки (черв'ячного колеса) будуть відповідно рівні:

$$\omega_6 = \omega_1 / i_{16} = 300 / 150 = 2 \text{ (рад/с);}$$

$$\varepsilon_6 = \varepsilon_1 / i_{16} = 180 / 150 = 1,2 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Далі визначимо час, протягом якого кутова швидкість вхідної ланки зменшиться до нуля.

З рівняння руху вхідної ланки

$$\omega_{1к} = \omega_1 + \varepsilon_1 \cdot t$$

знаходимо

$$t = \frac{\omega_{1к} - \omega_1}{\varepsilon_1} = \frac{0 - 300}{-180} = 1,667 \text{ (с)},$$

де $\omega_{1к} = 0$ – кінцева кутова швидкість через відрізок часу t ,

$\omega_1 = 300$ рад/с – початкова кутова швидкість.

ЛІТЕРАТУРА

1. Романенко, Л.Г. Теоретична механіка: Навч. посіб. для студ. ВУЗів / Л. Г. Романенко, В. Г. Солодов. 2-е вид. Х.: ХДАДТУ, 2002. 270 с.
2. Булгаков, В.А. Теоретична механіка. Підручник / В. А. Булгаков, В. В. Яременко, О. М. Черниш, М. Г. Березовський. К.: Центр навчальної літератури, 2017. 640 с.
3. Солодов В. Г., Авершин А.Г., Стародубцев Ю.В., Хандримайлов А.А., Шипенко О.Н. Теоретична механіка: Теорія і задачі. Навч. посіб. для студ. вузів. Х.: ХНАДУ, 2010. 214 с.
4. Міщенко І.В., Воропай О.В., Красніков С.В. Теоретична механіка. Частина І. Статика. Кінематика: навчальний посібник. Х.: ФОП Бровін О.В. 2025. 158 с. ISBN 978-617-8238-95-7
5. Міщенко І.В., Воропай О.В., Красніков С.В. Теоретична механіка. Частина ІІ. Динаміка: навчальний посібник. Х.: ФОП Бровін О.В. 2025. 154 с. ISBN 978-617-8238-94-0
6. Павловський, М.А. Теоретична механіка. Підручник. К.: Техніка, 2002. 511 с.
7. Воропай О. В., Шарапата А. С. Технічна механіка: Конспект лекцій. Харків : ХНАДУ, 2022. 124 с.
8. Воропай О. В., Шарапата А. С., Єгоров П. А. Методичні вказівки до РГР, СРС і практичних занять для студентів денної та заочної форм навчання з дисципліни «Технічна механіка» з спеціальності 275.03 Транспортні технології (на автомобільному транспорті). Х.: ХНАДУ, 2022. 64 с.
9. Нескреба Е. Є., Воропай О. В., Карпенко В. О. Методичні вказівки до практичних занять, РГР та СРС з дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика» для студентів денної та заочної форм навчання напряму підготовки G19 (192) – «Будівництво та цивільна інженерія». Х.: ХНАДУ, 2025. 124 С.
10. Міщенко І.В. Теоретична механіка: конспект лекцій. Х.: ХНАДУ, 2023. 207 с.
11. Міщенко І.В. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика». Х.: ХНАДУ, 2024. 82 с.

12. Перегон В. А., Воропай О. В., Коряк О. О., Поваляев С. І. Синтез механізмів і динаміка машин: навчальний посібник. Х. : ФОП Бровін О.В., 2023. 164 с. ISBN 978-617-8238-36-0
13. Перегон В. А., Воропай О. В., Коряк О.О., Єгоров П. А. Важільні механізми, передачі та зачеплення: навчальний посібник. Х. : ФОП Бровін О.В., 2025. 188 с. ISBN 978-617-8238-90-2
14. Авершин А. Г., Красніков С. В. Методичні вказівки з розрахунково-графічної роботи дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика» для студентів всіх спеціальностей. Харків: ХНАДУ, 2020. 86 с.
15. Voropay A. V., Karpenko V. A., Koriak O. O., Povaliaiev S. I., Sharapata A. S. Theory of mechanisms and machines: Lecture notes Kharkiv National Automobile and Highway University. Kharkiv : KhNAHU, 2023. 95 p.
16. Voropay Alexey, Neskreba Eduard. Guidelines by course "Machine Elements" V-belt drive calculation. Publishing House of the Kharkiv National Automobile and Highway University, 2023. 44 p.
17. Красніков С.В. Theoretical mechanics: навчальний посібник. Kharkiv: ХНАДУ, 2024. 104 p.

ДОДАТОК

Правила диференціювання:

1) $[c]' = 0$, де c – довільна константа.

2) $[c \cdot u]' = c \cdot u'$, де $u = u(x)$.

3) $[u \pm v]' = u' \pm v'$.

4) $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

5) $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

6) $(f[u(x)])'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Похідні основних елементарних функцій:

1) $[x^\alpha]' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, зокрема, $[x]' = 1$.

2) $[a^x]' = a^x \cdot \ln a$, зокрема, $[e^x]' = e^x$.

3) $[\log_a x]' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, зокрема, $[\ln x]' = \frac{1}{x}$.

4) $[\sin x]' = \cos x$.

5) $[\cos x]' = -\sin x$.

6) $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

7) $[\operatorname{ctg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

8) $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9) $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10) $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$.

11) $[\operatorname{arcctg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$.

12) $[\operatorname{sh} x]' = \operatorname{ch} x$.

13) $[\operatorname{ch} x]' = \operatorname{sh} x$.

14) $[\operatorname{th} x]' = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

15) $[\operatorname{cth} x]' = 1 - \operatorname{cth}^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Правило диференціювання називається правилом диференціювання складеної функції f від функції $u(x)$. З урахуванням цього правила таблицю похідних можна записати у вигляді:

$$1) [u^\alpha]' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u', \text{ де } u = u(x).$$

$$2) [a^u]' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$$

$$2') [e^u]' = e^u \cdot u'.$$

$$3) [\log_a u]' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'.$$

$$3') [\ln u]' = \frac{u'}{u}.$$

$$4) [\sin u]' = \cos u \cdot u'.$$

$$5) [\cos u]' = -\sin u \cdot u'.$$

$$6) [\operatorname{tg} u]' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$$

$$7) [\operatorname{ctg} u]' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

$$8) [\arcsin u]' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$9) [\arccos u]' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$10) [\operatorname{arctg} u]' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$11) [\operatorname{arcctg} u]' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'.$$

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять, РГР та СРС
з дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика»
для студентів денної та заочної форм навчання
напряму підготовки G19 – «Будівництво та цивільна інженерія»
(українською мовою)

Укладачі: **ВОРОПАЙ Олексій Валерійович,**
КАРПЕНКО Володимир Олександрович
НЕСКРЕБА Едуард Євгенійович
ШАРАПАТА Андрій Сергійович

Відповідальний за випуск О. В. Воропай

Авторська редакція

Комп'ютерна верстка *О. В. Воропай*

План 20__, поз. ____.
Підписано до друку ____р. Формат 60(84 1/16. Папір газетний.
Гарнітура Times New Roman Суг. Віддруковано на ризографі
Розум. друк. арк. _____. Обл.-вид. арк. _____.
Зам. № _____. Тираж 100 прим. Ціна договірна

ВИДАВНИЦТВО

Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61002, Харків-мсп, вул. Ярослава Мудрого, 25.
Тел. /факс: (057)700-38-72; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення
та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції, серія ДК №897 від 17.04 2002 р.