Міністерство освіти і науки України

Харківський національний
автомобільно-дорожній університет

кафедра Метрології та БЖД

РОЗРАХУНОК НАДІЙНОСТІ МЕТРОЛОГІЧНИХ ЗАСОБІВ

ПРАКТИКУМ

з навчальної дисципліні
“Метрологічна надійність”

Харків 2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРЬКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНИВЕРСИТЕТ

кафедра Метрології та БЖД

РОЗРАХУНОК НАДІЙНОСТІ МЕТРОЛОГІЧНИХ ЗАСОБІВ

ПРАКТИКУМ

з навчальної дисципліні
“Метрологічна надійність”
для студентів механічного факультету

спеціальності 8.05100101
“Метрологія та вимірювальна техніка”

Затверджено

Методичною радою університету,

Протокол № від 2018 р.

Харків ХНАДУ 2018

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний
автомобільно-дорожній університет

кафедра Метрології та БЖД

До друку і в світ дозволяю
Проректор Клец Д. М.

РОЗРАХУНОК НАДІЙНОСТІ МЕТРОЛОГІЧНИХ ЗАСОБІВ

ПРАКТИКУМ

з навчальної дисципліні
“Метрологічна надійність”
для студентів механічного факультету

спеціальності 8.05100101
“Метрологія та вимірювальна техніка”

Усі цитати, цифровий, фактичний
Матеріал та бібліографічні
Відомості перевірені, написання
Одиниць відповідає стандартам

Затверджено методичною
радою університету,
Протокол №
від 2018 р.

Укладачі: О. І. Богатов
Р. Е. Пащенко
А.О. Коваль

Відповідальний за випуск: О. В. Крайнюк

Харків ХНАДУ 2018

УДК 621.3.019.3

Рецензенти: док. техн. наук, проф.
док. техн. наук, проф.

Розрахунок надійності метрологічних засобів. Практикум / О.І. Богатов, Р.Е. Пащенко, А.О. Коваль. – Харків: Харківський нац. автомобільно-дорожній ун-т, 2018. – 108 с.

У практикум включені вісім практичних робіт, в яких розглядаються методи розрахунку надійності метрологічних засобів. Виконання даних робіт дозволить відпрацювати практичні навички у розрахунку показників надійності метрологічних засобів, що застосовуються під час проведення технологічних вимірювань.

Практикум містить також основні теоретичні відомості щодо визначення показників надійності засобів вимірювання за статистичними даними про відмови та для різних законів розподілу часу безвідмовної роботи. Також у теоретичній частині наведені відомості про показники надійності систем при послідовному з’єднанні елементів, систем з загальним та роздільним резервуванням, систем під час резервування з дробовою кратністю та ковзаючим резервуванням і резервованих систем з урахуванням відновлення.

Практикум призначений для студентів, що навчаються за спеціальністю “Метрологія та вимірювальна техніка”.

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальним планом та програмою підготовки магістрів спеціальності: 8.05100101 “Метрологія та вимірювальна техніка” очної форми навчання у 10-му семестрі передбачено вивчення дисципліни “Метрологічна надійність”. Програмою дисципліни для закріплення та поглиблення базових знань з типових підходів та методів діагностики і розрахунку надійності під час проектування та експлуатації метрологічних засобів передбачено проведення серії практичних робіт.

Метою виконання практичних робіт є набуття студентами практичних навичок у розрахунку надійності метрологічних засобів, що застосовуються під час проведення технологічних вимірювань.

Для успішного виконання практичної роботи студенту спочатку необхідно детально ознайомитись з теоретичним матеріалом, який необхідний для проведення розрахунків, а потім провести необхідні розрахунки та зробити висновки.

Практикум складається з восьми практичних робіт, які дозволяють відпрацювати методики розрахунку надійності метрологічних засобів. Крим того, виконання даних робіт дозволить отримати практичні навички з аналізу результатів розрахунків надійності засобів вимірювання (ЗВ) і визначити шляхи щодо її підвищення.

Практичне заняття № 1 присвячене визначенню показників надійності засобів вимірювання за статистичними даними про відмови. Метою практичного заняття є закріплення знань щодо методів визначення показників надійності ЗВ, а також отримання практичних навичок щодо розрахунку показників надійності ЗВ за допомогою статистичних даних про відмови. В теоретичній частині роботи розглянуті показники надійності ЗВ, які визначаються за статистичними даними про відмови.

Практичне заняття № 2 дозволяє закріпити навички щодо розрахунку показників надійності засобів вимірювання для різних законів розподілу часу безвідмовної роботи. Метою заняття є закріплення знань щодо законів розподілу часу безвідмовної роботи ЗВ, а також отримання практичних навичок щодо розрахунку показників надійності ЗВ. В теоретичній частині роботи розглянуті загальні відомості про показники надійності для різних законів розподілу часу безвідмовної роботи.

Практичне заняття № 3 присвячене визначенню показників надійності засобів вимірювання при послідовному з’єднанні їх складових частин. Метою практичного заняття є закріплення знань щодо методів визначення показників надійності засобів вимірювання, якщо їх складові частини з’єднані послідовно, та отримання практичних навичок розрахунку цих показників надійності. В теоретичній частині роботи розглянуті загальні відомості про показники надійності при послідовному з’єднанні елементів.

Практичне заняття № 4 присвячене розрахунку показників надійності вимірювальних систем з загальним резервуванням. Метою практичного заняття є закріплення знань щодо методів визначення показників надійності вимірювальних систем з загальним резервуванням та отримання практичних навичок розрахунку цих показників надійності. В теоретичній частині роботи розглянуті загальні відомості про показники надійності систем з загальним резервуванням.

У практичному занятті № 5 розглядається порядок розрахунку показників надійності засобів вимірювання під час роздільного резервування. Метою практичного заняття є закріплення знань щодо методів визначення показників надійності засобів вимірювання під час роздільного резервування та отримання практичних навичок розрахунку цих показників надійності. В теоретичній частині роботи розглянуті загальні відомості про показники надійності систем з роздільним резервуванням.

Практичне заняття № 6 присвячене розрахунку показників надійності вимірювальних систем під час резервування з дробовою кратністю. Метою практичного заняття є закріплення знань щодо методів визначення показників надійності систем під час резервування з дробовою кратністю та постійно включеним резервом та отримання практичних навичок розрахунку цих показників надійності. В теоретичній частині роботи розглянуті загальні відомості про показники надійності систем під час резервування з дробовою кратністю та постійно включеним резервом.

Практичне заняття № 7 розглядається порядок розрахунку показників надійності вимірювальних систем з ковзаючим резервуванням. Метою практичного заняття є закріплення знань щодо методів визначення показників надійності систем з ковзаючим резервуванням та отримання практичних навичок розрахунку цих показників надійності. В теоретичній частині роботи розглянуті загальні відомості про показники надійності систем з ковзаючим резервуванням.

Практичне заняття № 8 присвячене розрахунку показників надійності резервованих вимірювальних систем з урахуванням відновлення. Метою практичного заняття є закріплення знань щодо методів визначення показників надійності резервованих вимірювальних систем з урахуванням відновлення та отримання практичних навичок розрахунку цих показників надійності. В теоретичній частині роботи розглянуті загальні відомості про показники надійності резервованих систем з урахуванням відновлення.

Кожне практичне заняття розраховано на дві годин аудиторної роботи.

У кінці практикуму наведений перелік використаних джерел, який використовувався під час його написання, і необхідний для ознайомлення під час підготовки студентів до практичних занять.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1

ВИЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАННЯ ЗА СТАТИСТИЧНИМИ ДАНИМИ ПРО ВІДМОВИ

Навчальна мета заняття

закріпити знання щодо методів визначення показників надійності засобів вимірювання;

отримати практичні навички щодо розрахунку показників надійності засобів вимірювання за допомогою статистичних даних про відмови.

1.1 Відомості з теорії. Показники надійності засобів вимірювання, які визначаються за статистичними даними про відмови

Якщо дослідник отримав статистичні дані про відмови засобів вимірювання (ЗВ), то ймовірність безвідмовної роботи може бути розрахована за допомогою виразу

$$p^*(t) = n(t)/N, \tag{1.1}$$

де $n(t)$ – кількість ЗВ, що не відмовили до моменту часу t;

N – кількість ЗВ, які брали участь у випробуваннях;

$p^*(t)$ – статистична оцінка ймовірності безвідмовної роботи ЗВ.

У подальшому всі показники надійності, що розраховуються за статистичними даними про відмови будемо позначати {*}.

Ймовірність відмови ЗВ за допомогою статистичних даних можна оцінити з використанням співвідношення

$$q^*(t) = [N - n(t)]/N; \tag{1.2}$$

де $N - n(t)$ – кількість ЗВ, що відмовили до моменту часу t;

$q^*(t)$ – статистична оцінка ймовірності відмови ЗВ.

За статистичними даними про відмови їх частота (частота відмов) визначається виразом

$$f^*(t) = \Delta n(t) / (N\,\Delta t), \tag{1.3}$$

де $\Delta n(t)$ – кількість ЗВ, що відмовили за проміжок часу з t до $t + \Delta t$;

Δt – інтервал часу;

$f^*(t)$ – статистична оцінка частоти відмов ЗВ.

За допомогою статистичних даних про відмови їх інтенсивність (інтенсивність відмов) визначається на підставі формули

$$\lambda^*(t) = \Delta n(t)/[\Delta t\, n(t)], \qquad (1.4)$$

де $n(t)$ – кількість ЗВ, що не відмовили до моменту часу t;

$\Delta n(t)$ – кількість ЗВ, що відмовили за проміжок часу з t до $t + \Delta t$;

$\lambda^*(t)$ – статистична оцінка інтенсивності відмов ЗВ.

Середній час безвідмовної роботи ЗВ за статистичними даними оцінюється виразом

$$m_t{}^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i\ , \qquad (1.5)$$

де t_i – час безвідмовної роботи i-го ЗВ;

N – кількість ЗВ, які брали участь у випробуваннях;

m_t* – статистична оцінка середнього часу безвідмовної роботи ЗВ.

Необхідно зазначити, що для визначення m_t* за наведеною вище формулою необхідно знати моменти виходу з ладу всіх N засобів вимірювання.

Також m_t* можна визначати з виразу

$$m_t{}^* \approx \sum_{i=1}^{k} n_i t_{cp.i}\ , \qquad (1.6)$$

де n_i – кількість ЗВ, що вийшли з ладу, на i-ому інтервалі часу;

$t_{cp.i} = (t_{i-1} + t_i)/2$;

$k = t_k/\Delta t$;

$\Delta t = t_{i+1} - t_i$;

t_{i-1} – час початку i-го інтервалу;

t_i – час закінчення i-го інтервалу;

t_k – час, протягом якого вийшли з ладу всі ЗВ;

Δt – інтервал часу.

Дисперсія часу безвідмовної роботи ЗВ за статистичними даними визначається формулою

$$D_t{}^* = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(t_i - m_t^*)^2\ , \qquad (1.7)$$

де D_t* – статистична оцінка дисперсії часу безвідмовної роботи засобу вимірювання.

1.2 Порядок виконання типових завдань

Завдання 1.1. У випробуваннях брали участь 2000 однотипних датчиків тиску, за $t = 2000$ годин відмовило 150 датчиків. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи $p^*(t)$ та ймовірність відмови $q^*(t)$ за час t.

Рішення. Загальна кількість датчиків тиску, що брали участь у випробуваннях дорівнює $N = 2000$; кількість датчиків, що не відмовили, дорівнює $n(t) = 2000 – 150 = 1850$; кількість датчиків, що відмовили, дорівнює $N – n(t) = 2000 – 1850 = 150$.

Ймовірність безвідмовної роботи дорівнює

$$p^*(2000) = n(t)/N = 1850/2000 = 0{,}925;$$

Ймовірність відмови дорівнює

$$q^*(2000) = [N - n(t)]/N = 150/\ 2000 = 0{,}075;$$

або

$$q^*(2000) = 1 - p^*(2000) = 1 – 0{,}925 = 0{,}075.$$

Завдання 1.2. У випробуваннях брали участь 2000 однотипних датчиків температури. За перші 2000 годин відмовило 150 датчиків. На інтервалі часу 2000 – 3000 годин відмовило ще 100 датчиків. Необхідно визначити статистичну оцінку ймовірності безвідмовної роботи $p^*(2000)$, а також ймовірність безвідмовної роботи $p^*(3000)$, частоту $f^*(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda^*(t)$ датчиків за проміжок часу 2000 – 3000 годин.

Рішення. Загальна кількість датчиків тиску, що брали участь у випробуваннях дорівнює $N = 2000$; час $t = 2000$; кількість датчиків, що не відмовили, дорівнює $n(t) = 2000 – 150 = 1850$; інтервал часу дорівнює $\Delta t = 1000$ годин; кількість датчиків, що відмовили за проміжок часу з t до $t + \Delta t$ дорівнює $\Delta n(t) = 100$.

Ймовірність безвідмовної роботи на момент часу 2000 годин дорівнює

$$p^*(2000) = n(t)/N = 1850/2000 = 0{,}925;$$

Ймовірність безвідмовної роботи на момент часу 3000 годин дорівнює

$$p^*(3000) = n(t)/N = 1750/2000 = 0{,}875.$$

Частота відмов датчиків дорівнює

$$f^*(2000) = \Delta n(t)/(N\ \Delta t) = 100/(2000\ 1000) = 5\ 10^{-5}\ 1/\text{год.};$$

Інтенсивність відмов датчиків дорівнює

$$\lambda^*(2000) = \Delta n(t)/[\Delta t\, n(t)] = 100/(1000\ 1850) = 5,41\ 10^{-5}\ 1/\text{год.}$$

Завдання 1.3. В результаті проведення випробувань 10 однотипних засобів вимірювання отримані наступні значення їх часу безвідмовної роботи t_i: t_1 = 520 годин; t_2 = 650 годин; t_3 = 600 годин; t_4 = 620 годин; t_5 = 550 годин; t_6 = 570 годин; t_7 = 630 годин; t_8 = 500 годин; t_9 = 530 годин; t_{10} = 640 годин. Необхідно визначити статистичну оцінку середнього часу безвідмовної роботи засобу вимірювання даного типу.

Рішення. Середній час безвідмовної роботи засобу вимірювання знаходимо з використанням виразу (1.5)

$$m_t^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i = (520 + 650 + 600 + 620 + 550 + 570 + 630 + 500 + 530 +$$

$$+ 640)/10 = 5810/10 = 581 \text{ година.}$$

Завдання 1.4. В результаті проведення випробувань 50 зразків засобів вимірювань отримані дані про кількість ЗВ, що перший раз відмови на заданих інтервалах часу Δt_i,. Результати випробувань всіх 50 зразків наведені у табл. 1.1. Необхідно визначити статистичну оцінку середнього часу безвідмовної роботи засобу вимірювання даного типу.

Таблиця 1.1 – Кількість засобів вимірювання до першої відмови

Δt_i, год.	n_i	Δt_i, год.	n_i	Δt_i, год.	n_i
0-10	1	40-50	0	80-90	7
10-20	7	50-60	4	90-100	4
20-30	8	60-70	0	100-110	7
30-40	2	70-80	6	110-120	4

Рішення. Знаходимо середній час кожного інтервалу $t_{cp.i} = (t_{i-1} + t_i)/2$:

$$t_{cp1} = 5 \text{ год.};\ t_{cp2} = 15 \text{ год.};\ t_{cp3} = 25 \text{ год.};\ t_{cp4} = 35 \text{ год.};\ t_{cp5} = 45 \text{ год.};$$

$$t_{cp6} = 55 \text{ год.};\ t_{cp7} = 65 \text{ год.};\ t_{cp8} = 75 \text{ год.};\ t_{cp9} = 85 \text{ год.};\ t_{cp10} = 95 \text{ год.};$$

$$t_{cp11} = 105 \text{ год.};\ t_{cp12} = 115 \text{ год.};\ N = 50;\ k = 12.$$

Середній час безвідмовної роботи засобу вимірювання знаходимо з використанням виразу (1.6)

$$m_t^* \approx \sum_{i=1}^{k} n_i t_{cp.i} = (1\ 5 + 7\ 15 + 8\ 25 + 2\ 35 + 0\ 45 + 4\ 55 + 0\ 65 + 6 \cdot 75 +$$

$$+ 7\ 85 + 4\ 95 + 7\ 105 + 4 \cdot 115)/50 = (5 + 105 + 200 + 70 + 0 + 220 + 0 +$$

$$+ 450 + 595 + 380 + 735 + 460)/50 = 3220/50 = 84{,}4 \text{ години.}$$

1.3 Завдання для самостійного виконання

Завдання 1.5. У випробуваннях брали участь 1000 однотипних датчиків тиску, за $t = 3000$ годин відмовило 100 датчиків. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи $p^*(t)$ та ймовірність відмови $q^*(t)$ за час $t = 3000$ годин.

Завдання 1.6. За 2000 годин випробувань 20 засобів вимірювання відмовило 5 ЗВ. За інтервал часу 2000 – 2500 годин відмовило ще 2 ЗВ. Необхідно визначити статистичну оцінку частоти та інтенсивності відмов ЗВ за час $t = 2000$ годин.

Завдання 1.7. У випробуваннях брали участь 100 однотипних датчиків температури, за $t = 4000$ годин відмовило 20 датчиків. За інтервал часу 4000 – 4500 годин відмовило ще 10 датчиків. Необхідно визначити частоту та інтенсивність відмов датчиків за проміжок часу 4000 – 4500 годин.

Завдання 1.8. У випробуваннях брали участь 1000 однотипних датчиків тиску, за $t = 2000$ годин відмовило 50 датчиків. За інтервал часу 2000 – 3 000 годин відмовило ще 50 датчиків. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи $p^*(t)$ та ймовірність відмови $q^*(t)$ за час $t = 3000$ годин.

Завдання 1.9. У випробуваннях брали участь 80 засобів вимірювання. За час $t = 100$ годин вийшло з ладу 25 ЗВ. На наступному інтервалі часу 100 – 150 годин вийшло з ладу ще 10 ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $p^*(t)$ за час $t = 100$ годин та $t = 150$ годин, а також частоту $f^*(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda^*(t)$ ЗВ за час $t = 100$ годин.

Завдання 1.10. У випробуваннях брали участь 1000 засобів вимірювання. За час $t = 1500$ годин вийшло з ладу 150 ЗВ. На наступному інтервалі часу 1500 – 2000 годин вийшло з ладу ще 100 ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $p^*(t)$ за час $t = 1500$ годин та $t = 2000$ годин, а також частоту $f^*(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda^*(t)$ ЗВ за час $t = 1500$ годин.

Завдання 1.11. В результаті проведення випробувань 30 зразків засобів вимірювань отримані дані про кількість ЗВ, що перший раз відмови на заданих інтервалах часу Δt_i,. Результати випробувань всіх 30 зразків наведені у табл. 1.2. Необхідно визначити статистичну оцінку середнього часу безвідмовної роботи засобу вимірювання даного типу.

Таблиця 1.2 – Кількість засобів вимірювання до першої відмови

Δt_i, год.	n_i	Δt_i, год.	n_i	Δt_i, год.	n_i
0-20	2	60-80	2	120-140	4
20-40	6	80-100	1	140-160	3
40-60	5	100-120	2	160-180	5

Завдання 1.12. В результаті проведення випробувань 6 однотипних засобів вимірювання отримані наступні значення їх часу безвідмовної роботи t_i: t_1 = 730 годин; t_2 = 810 годин; t_3 = 750 годин; t_4 = 770 годин; t_5 = 820 годин; t_6 = 700 годин. Необхідно визначити статистичну оцінку середнього часу безвідмовної роботи засобу вимірювання даного типу.

Питання для самоперевірки:

1. Які випробування необхідно провести для отримання статистичної оцінки ймовірності безвідмовної роботи засобів вимірювання ?
2. Якими способами можна отримати статистичну оцінку ймовірності відмови ЗВ ?
3. Які вихідні данні необхідні для визначення статистичної оцінки частоти відмов ЗВ ?
4. В чому різниця статистичної оцінки інтенсивності та частоти відмов ЗВ ?
5. Якими способами можна визначити статистичну оцінку середнього часу безвідмовної роботи ЗВ ?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2

РОЗРАХУНОК ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАННЯ ДЛЯ РІЗНИХ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ЧАСУ БЕЗВІДМОВНОЇ РОБОТИ

Навчальна мета заняття

закріпити знання щодо законів розподілу часу безвідмовної роботи засобів вимірювання;

отримати практичні навички щодо розрахунку показників надійності засобів вимірювання для різних законів розподілу часу безвідмовної роботи.

2.1 Відомості з теорії. Загальні відомості про показники надійності для різних законів розподілу часу безвідмовної роботи

В процесі експлуатації засобів вимірювання на них впливає велика кількість зовнішніх та внутрішніх чинників, що є причиною появи відмов. До таких чинників відносять, наприклад, дію зовнішніх навантажень, вологи, нестабільності живлячих і т. ін. На ранніх стадіях експлуатації ЗВ відмови також можуть виникати за рахунок недоліків проектування та виготовлення, а також порушень правил експлуатації. Для оцінки впливу цих чинників використовують різноманітні кількісні характеристики надійності.

Розглянемо загальні формули за допомогою яких розраховуються показники надійності засобів вимірювання:

ймовірність безвідмовної роботи ЗВ на інтервалі часу від 0 до t

$$p(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt \qquad \text{або} \qquad p(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t)dt\right); \tag{2.1}$$

ймовірність відмови ЗВ на інтервалі часу від 0 до t

$$q(t) = 1 - p(t); \tag{2.2}$$

частота відмов або щільність ймовірності часу безвідмовної роботи ЗВ

$$f(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{dp(t)}{dt}; \tag{2.3}$$

інтенсивність відмов ЗВ

$$\lambda(t) = f(t)/p(t); \tag{2.4}$$

середній час безвідмовної роботи ЗВ

$$m_t = \int_0^{\infty} p(t)dt\,, \qquad (2.5)$$

Різноманітні форми впливу зовнішніх та внутрішніх чинників на ЗВ викликають різні види розподілу часу їх безвідмовної роботи. Під час вибору виду закону розподілу часу безвідмовної роботи ЗВ аналізують залежність між механізмом відмов, що враховує фізику реальних процесів при експлуатації, і функцією інтенсивності відмов. Для опису розподілу часу безвідмовної роботи в теорії надійності використовуються наступні закони: Вейбулла, експоненціальний, Релея, нормальний та ін.

Розподіл Вейбулла. Функція щільності розподілу має вигляд

$$f(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}\right], \qquad (2.6)$$

де a і b – параметри закону розподілу.

Скориставшись виразом (2.1), знайдемо ймовірність безвідмовної роботи

$$p(t) = 1 - \int_0^t f(\tau)d\tau = 1 - \int_0^t \frac{b}{a}\left(\frac{\tau}{a}\right)^{b-1} \exp\left[-\left(\frac{\tau}{a}\right)^{b}\right] d\tau\,.$$

Взявши інтеграл від цього виразу, одержимо

$$p(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}\right]. \qquad (2.7)$$

Вираз для ймовірності відмов має наступний вигляд

$$q(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}\right]. \qquad (2.8)$$

З використанням виразів (2.4), (2.6) та (2.7) отримаємо вираз для інтенсивності відмов

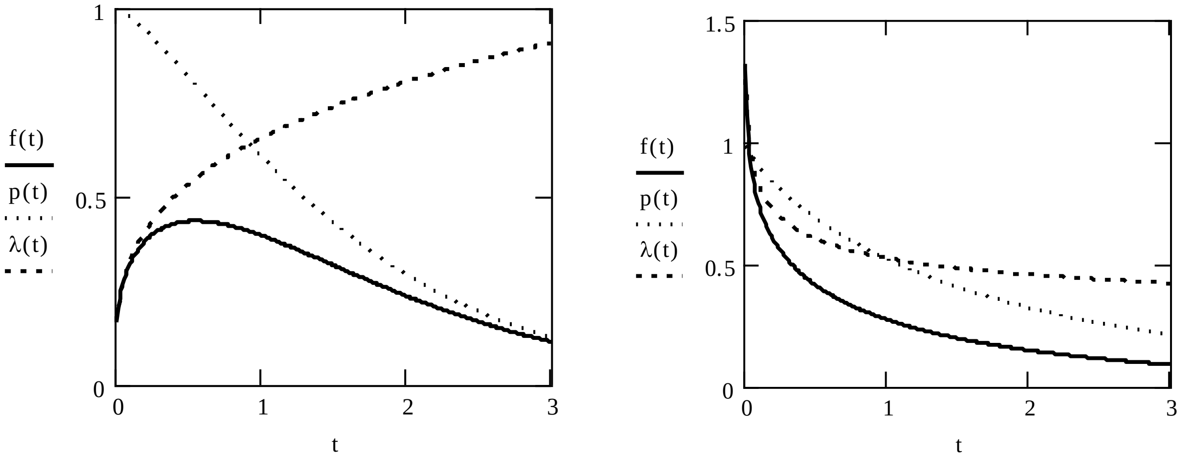
$$\lambda(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1}. \qquad (2.9)$$

Скориставшись виразами (2.5) та (2.7), знайдемо вираз для середнього часу безвідмовної роботи

$$m_t = a\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right), \tag{2.10}$$

де $\Gamma(1 + 1/b)$ – гама-функція, значення якої наведені у додатку А.

Залежності показників безвідмовності від часу показані на рис. 2.1.



а б

Рисунок 2.1 – Показники безвідмовності, якщо час безвідмовної роботи розподілений за законом Вейбулла, при $b > 1$ (а) та $b < 1$ (б)

Якщо засоби вимірювання містять велику кількість однотипних не відновлюваних елементів, а відмови пов'язані з погіршенням їх параметрів, то доцільно використовувати закон розподілу відмов Вейбулла. Також закон Вейбулла добре описує поведінку деяких типів напівпровідникових та НВЧ приладів.

Параметри закону розподілу можуть бути визначені для конкретного випадку на підставі обробки статистичних даних під час експлуатації даного типу ЗВ.

Експоненціальний розподіл. Його можна розглядати як окремий випадок розподілу Вейбулла, якщо $b = 1$. Підставивши $b = 1$ у вирази (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) та (2.10) отримаємо вирази для:

функції щільності розподілу

$$f(t) = \frac{1}{a}\exp\left(-\frac{t}{a}\right); \tag{2.11}$$

ймовірності безвідмовної роботи

$$p(t) = \exp\left(-\frac{t}{a}\right); \qquad (2.12)$$

ймовірності відмов

$$q(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{a}\right); \qquad (2.13)$$

інтенсивності відмов

$$\lambda(t) = \frac{1}{a} = \lambda = \text{const}; \qquad (2.14)$$

середнього часу безвідмовної роботи

$$m_t = a = \frac{1}{\lambda}. \qquad (2.15)$$

Якщо засоби вимірювання є складними об'єктами та містять велику кількість різних не відновлюваних елементів, а також мають переважно раптові відмови, а явища зносу і старіння виражені слабо, то доцільно використовувати експоненціальний закон розподілу. Також експоненціальний закон часто застосовується для наближеної оцінки безвідмовності.

Залежності показників безвідмовності від часу у разі експоненціального закону представлені на рис. 2.2.

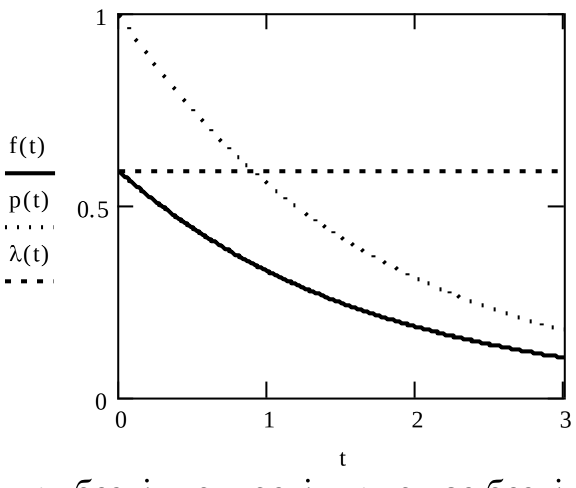


Рисунок 2.2 – Показники безвідмовності, якщо час безвідмовної роботи розподілений за експоненціальним законом

Розподіл Релея. Його також можна розглядати, як окремий випадок розподілу Вейбулла при $b = 2$. Підставивши $b = 2$ у вирази (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) та (2.10) отримаємо вирази для:

функції щільності розподілу

$$f(t) = \frac{2t}{a^2} \exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^2\right]; \tag{2.16}$$

ймовірності безвідмовної роботи

$$p(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^2\right]; \tag{2.17}$$

ймовірності відмов

$$q(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^2\right]; \tag{2.18}$$

інтенсивності відмов

$$\lambda(t) = \frac{2t}{a^2}; \tag{2.19}$$

середнього часу безвідмовної роботи

$$m_t = a\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{2.20}$$

Якщо засоби вимірювання мають явно виражений ефект старіння або зносу, то доцільно використовувати закон розподілу Релея.

Залежності показників безвідмовності від часу у разі розподілу за законом Релея показані на рис. 2.3.

Нормальний розподіл. Широко використовується, як в теорії ймовірності, так і в теорії надійності. Функція щільності розподілу має вигляд

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t - t_{cp})^2}{2\sigma^2}\right], \tag{2.21}$$

де t_{cp} – математичне очікування часу появи першої відмови;

σ – середньо квадратичне відхилення.

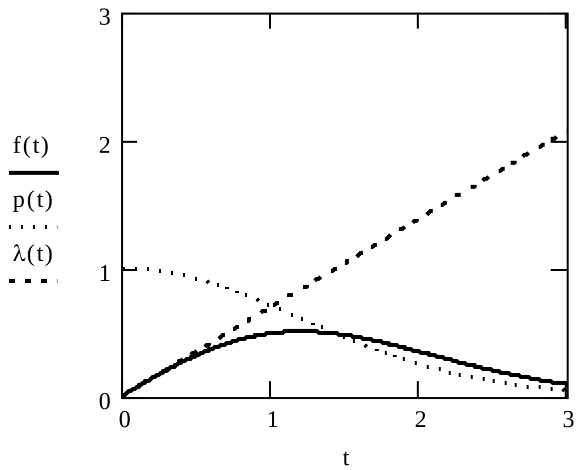
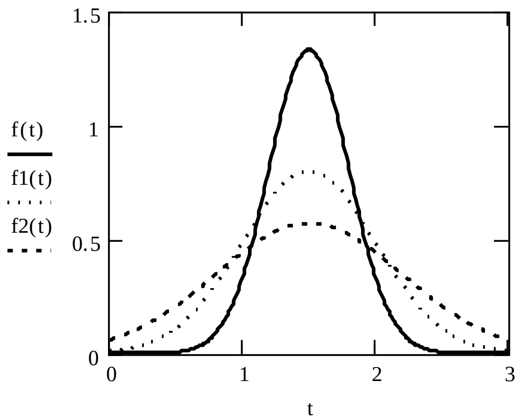
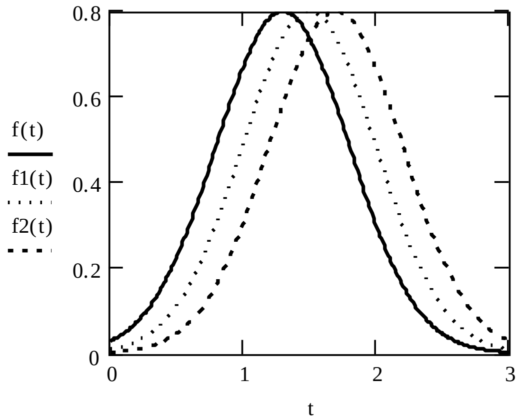


Рисунок 2.3. Показники безвідмовності, якщо час безвідмовної роботи розподілений за законом Релея

Залежності функції розподілу від величини математичного очікування часу появи першої відмови ($t_{cp1} < t_{cp2} < t_{cp3}$ при $\sigma = \mathrm{const}$) та від величини середньо квадратичного відхилення ($\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ при $t_{cp} = \mathrm{const}$) показані на рис. 2.4.



а



б

Рисунок 2.4 – Залежності функції розподілу від величин математичного очікування (а) та середньо квадратичного відхилення (б)

Ймовірність безвідмовної роботи визначається за формулою

$$p(t) = 0{,}5 - \Phi(U), \qquad (2.22)$$

де $U = (t - m_t)/\sigma$;

$\Phi(U)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^U \exp\left(-\frac{U^2}{2}\right)dU$ – нормована функція Лапласа, що має наступні властивості: $\Phi(0) = 0$; $\Phi(-U) = -\Phi(U)$; $\Phi(\infty) = 0,5$. Значення нормованої функції Лапласа наведені у додатку Б.

Ймовірність відмов визначається за формулою

$$q(t) = 0,5 + \Phi(U). \tag{2.23}$$

Частота відмов визначається виразом

$$f(t)=\frac{\varphi(U)}{\sigma}, \tag{2.24}$$

де $\varphi(U)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{U^2}{2}\right)$ – функція, значення якої наведені у додатку В.

Інтенсивність відмов визначається виразом

$$\lambda(t)=\frac{\varphi(U)}{\sigma}\cdot\frac{1}{0,5-\Phi(U)}, \tag{2.25}$$

У виразах, що наведені вище m_t – середнє значення випадкової величини t; σ – середньо квадратичне відхилення випадкової величини t; t – час безвідмовної роботи ЗВ.

Якщо у засобах вимірювання має місце знос, причому всі відмови однорідні за якістю і мають малий розкид зносу, то доцільно використовувати нормальний закон розподілу. Час відновлення засобів вимірювання, що ремонтуються, а також сумарне напрацювання ЗВ до середнього (капітального) ремонту у ряді випадків можуть бути також описані нормальним законом.

Застосування того або іншого закону розподілу також визначається часом експлуатації засобу вимірювання та його етапом. Так поведінка багатьох складних ЗВ на першій ділянці експлуатації досить добре описується законом розподілу Вейбулла з $b < 1$, на другій ділянці – експоненціальним законом, а на третій – розподілом Релея. Оскільки основною ділянкою нормальної експлуатації є друга, то основним законом для розрахунків безвідмовності слід вважати експоненціальний.

Основні вирази показників надійності для наведених вище законів розподілу часу безвідмовної роботи зведені у таблицю, яка представлена у додатку Г.

Розподіл Пуассона. Цей розподіл описує поведінку дискретних випадкових величин. Інтервали часу між відмовами у пуассонівському потоці відмов взаємонезалежні і розподілені за експоненціальним законом, тобто пуассонівський потік задовольняє властивостям ординарності і відсутності післядії.

Розподіл Пуассона описується виразом

$$p_i(t, t+\Delta t) = \frac{M(t, t+\Delta t)}{i!}\exp[-M(t, t+\Delta t)], \tag{2.26}$$

де $p_i(t, t + \Delta t)$ – ймовірність того, що відбудеться рівно i відмов на інтервалі часу $t, t + \Delta t$;

$M(t, t + \Delta t)$ – математичне очікування числа відмов на інтервалі часу t, $t + \Delta t$.

Якщо пуассонівський потік задовольняє умові стаціонарності, то вираз (2.26) прийме вигляд

$$p_i(\Delta t) = \frac{\omega \Delta t}{i!}\exp(-\omega \Delta t). \tag{2.27}$$

Ймовірність безвідмовної роботи ЗВ на інтервалі часу Δt може бути визначена за допомогою виразу (2.28), якщо покласти $i = 0$, тобто за умови визначення рівно «0» відмов

$$p(\Delta t) = \exp(-\omega \Delta t). \tag{2.28}$$

Для простійшого потоку відмов справедливо

$$\omega = \lambda; \qquad p(t) = \exp(-\lambda t); \qquad f(t) = \lambda \exp(-\lambda t); \qquad m_t = \frac{1}{\lambda}. \tag{2.29}$$

Розподіл Пуассона найчастіше застосовують для ЗВ, що відновлюються, з простійшим потоком відмов, а також для ділянки приroблення ЗВ.

2.2 Порядок виконання типових завдань

Завдання 2.1. Час безвідмовної роботи елементу засобу вимірювання розподілений за законом Вейбулла з параметрами $1/a = \lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. і $b = 1{,}3$, при цьому ЗВ працює протягом $t = 1000$ годин. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи $p(t)$, частоту $f(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda(t)$ ЗВ за час t, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_t.

Рішення З використанням виразів (2.7), (2.6), (2.9) та (2.10), розрахуємо:

ймовірність безвідмовної роботи $p(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right]$, з використанням додатку Д отримаємо

$$p(1000) = \exp[–(1000·2{,}5·10^{-4})^{1{,}3}] = \exp[–(0{,}25)^{1{,}3}] = \exp(–0{,}165) \approx 0{,}85;$$

частоту відмов $$f(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right]$$

$$f(1000) = 1{,}3·2{,}5·10^{-4}·0{,}25^{0{,}3}·0{,}85 = 3{,}25·10^{-4}·0{,}66·0{,}85 \approx 1{,}82·10^{-4}\ 1/\text{год.};$$

інтенсивність відмов $$\lambda(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1}$$

$$\lambda(1000) = 3{,}25·10^{-4}·0{,}66 \approx 2{,}145·10^{-4}\ 1/\text{год.}$$

або

$$\lambda(1000) = f(1000)/p(1000) = 1{,}82·10^{-4}/0{,}85 \approx 2{,}141·10^{-4}\ 1/\text{год.};$$

середній час безвідмовної роботи $m_t = a\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right)$, з використанням додатку А отримаємо

$$m_t = 4000·\Gamma(1 + 1/1{,}3) = 4000·\Gamma(1{,}77) = 4000·0{,}92376 \approx 3695\ \text{годин.}$$

Завдання 2.2. Час безвідмовної роботи елементу засобу вимірювання розподілений за експоненціальним законом з параметром $1/a = \lambda = 1{,}5·10^{-4}$ 1/год. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи $p(t)$, ймовірність відмов $q(t)$, частоту $f(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda(t)$ ЗВ за час $t = 2000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_t.

Рішення. З використанням виразів (2.12), (2.13), (2.11), (2.14) та (2.15) розрахуємо:

ймовірність безвідмовної роботи $p(t) = \exp\left(-\frac{t}{a}\right)$, з використанням додатку Д отримаємо

$$p(2000) = \exp(–2000·1{,}5·10^{-4}) = \exp(–0{,}3) \approx 0{,}74;$$

ймовірність відмов $q(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{a}\right)$

$$q(2000) = 1 - p(2000) = 0{,}26;$$

частоту відмов $f(t) = \frac{1}{a}\exp\left(-\frac{t}{a}\right)$

$$f(2000) = 1{,}5\cdot10^{-4}\cdot\exp(-2000\cdot1{,}5\cdot10^{-4}) = 1{,}5\cdot10^{-4}\cdot\exp(-0{,}3) \approx 1{,}11\cdot10^{-4}\ 1/\text{год.};$$

інтенсивність відмов $\lambda(t) = \frac{1}{a} = \lambda = \text{const}$

$$\lambda(2000) = 1{,}5\cdot10^{-4}\ 1/\text{год.};$$

середній час безвідмовної роботи $m_t = a = \frac{1}{\lambda}$

$$m_t = 1/1{,}5\cdot10^{-4} \approx 6667 \text{ годин.}$$

Завдання 2.3. Час безвідмовної роботи елементу засобу вимірювання розподілений за законом Релея з параметром $1/a = \lambda = 2{,}5\cdot10^{-4}$ 1/год. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи $p(t)$, частоту $f(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda(t)$ ЗВ за час $t = 3000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_t.

Рішення. З використанням виразів (2.17), (2.16), (2.19) та (2.20) розрахуємо:

ймовірність безвідмовної роботи $p(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^2\right]$, з використанням додатку Д отримаємо

$$p(3000) = \exp[-(3000\cdot2{,}5\cdot10^{-4})^2] = \exp(-0{,}5625) \approx 0{,}57;$$

частоту відмов $f(t) = \frac{2t}{a^2}\exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^2\right]$

$$f(3000) = (2\cdot3000/4000^2)\cdot\exp[-(3000\cdot2{,}5\cdot10^{-4})^2] =$$
$$= (6\cdot10^3/16\cdot10^6)\cdot0{,}57 \approx 2{,}14\cdot10^{-4}\ 1/\text{год.};$$

інтенсивність відмов $\lambda(t) = \frac{2t}{a^2}$

$$\lambda(3000) = 2\cdot3000/4000^2 \approx 3{,}75\cdot10^{-4}\ 1/\text{год.};$$

середній час безвідмовної роботи $m_t = a\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$m_t = 4000\cdot0{,}7323 \approx 2929\ \text{годин}.$$

Завдання 2.4. Час безвідмовної роботи елементу засобу вимірювання розподілений за нормальним законом з параметрами $m_t = 6000$ годин, σ = 2000 годин. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи $p(t)$, частоту $f(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda(t)$ ЗВ за час $t = 7000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_t.

Рішення. З використанням виразів (2.22), (2.24) та (2.25) розрахуємо:

ймовірність безвідмовної роботи

$$p(t) = 0{,}5 - \Phi(U),$$

при цьому спочатку визначимо величину U

$$U = (t - m_t)/\sigma = (7000 - 5000)/2000 = 1,$$

а далі, з використанням додатку Б, отримаємо $\Phi(1) = 0{,}3413$ та

$$p(7000) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587;$$

частоту відмов $f(t) = \frac{\varphi(U)}{\sigma}$, з використанням додатку В для $U = 1$ отримаємо

$$f(7000) = \varphi(1)/2000 = 0{,}242/2000 = 1{,}21\cdot10^{-4}\ 1/\text{год.};$$

інтенсивність відмов $\lambda(t) = \frac{\varphi(U)}{\sigma}\cdot\frac{1}{0{,}5 - \Phi(U)}$

$$\lambda(7000) = 1{,}21\cdot10^{-4}/(0{,}5 - 0{,}3413) \approx 7{,}63\cdot10^{-4}\ 1/\text{год.}$$

або

$$\lambda(7000) = f(7000)/p(7000) = 1{,}21\cdot10^{-4}/0{,}1587 \approx 7{,}63\cdot10^{-4}\ 1/\text{год.};$$

середній час безвідмовної роботи

$$m_t = 6000 \text{ годин.}$$

2.3 Завдання для самостійного виконання

Завдання 2.5. Час безвідмовної роботи датчика тиску розподілений за експоненціальним законом. Середній час безвідмовної роботи датчика дорівнює $m_t = 1000$ годин. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи $p(t)$, ймовірність відмов $q(t)$, частоту $f(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda(t)$ датчика за час $t = 600$ годин.

Завдання 2.6. Час безвідмовної роботи датчика температури розподілений за експоненціальним законом. Ймовірність безвідмовної роботи датчика за час $t = 2000$ годин дорівнює $p(t) = 0{,}85$. Необхідно визначити частоту $f(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda(t)$ датчика за час $t = 2000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи датчика m_t.

Завдання 2.7. Час безвідмовної роботи елементу засобу вимірювання розподілений за законом Вейбулла з параметрами $1/a = \lambda = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. і $b = 1{,}5$, при цьому ЗВ працює протягом $t = 700$ годин. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи $p(t)$, частоту $f(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda(t)$ ЗВ за час t, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_t.

Завдання 2.8. Час безвідмовної роботи датчика температури розподілений за законом Вейбулла з параметрами $1/a = \lambda = 4{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. і $b = 1{,}1$. Ймовірність безвідмовної роботи датчика за час $t = 1000$ годин дорівнює $p(t) = 0{,}9$. Необхідно визначити частоту $f(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda(t)$ датчика за час $t = 1000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи датчика m_t.

Завдання 2.9. Час безвідмовної роботи елементу засобу вимірювання розподілений за законом Релея з параметром $1/a = \lambda = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год., при цьому ЗВ працює протягом $t = 300$ годин. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи $p(t)$, частоту $f(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda(t)$ ЗВ за час t, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_t.

Завдання 2.10. Час безвідмовної роботи датчика температури розподілений за законом Релея з параметром $1/a = \lambda = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Ймовірність безвідмовної роботи датчика за час $t = 2000$ годин дорівнює $p(t) = 0{,}8$. Необхідно визначити частоту $f(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda(t)$ датчика за час $t = 2000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи датчика m_t.

Завдання 2.11. Час безвідмовної роботи елементу засобу вимірювання розподілений за нормальним законом з параметрами $m_t = 7000$ годин, $\sigma = 1000$ годин. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи $p(t)$, частоту $f(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda(t)$ ЗВ за час $t = 10000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_t.

Завдання 2.12. В результаті проведення випробувань датчиків тиску були визначені їх середній час безвідмовної роботи $m_t = 2000$ годин та середньо квадратичне відхилення $\sigma = 400$ годин. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи $p(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda(t)$ датчиків за час $t = 1500$ годин.

Питання для самоперевірки:

1. Як параметри закону розподілу Вейбулла a і b впливають на форму функції щільності розподілу?
2. Який параметр експоненціального закону визначає інтенсивність відмов ЗВ ?
3. В яких випадках для оцінки надійності ЗВ доцільно використовувати закон розподілу Релея ?
4. Яким чином можна отримати вирази для експоненціального закону розподілу та закону розподілу Релея ?
5. Яка функція визначає ймовірність безвідмовної роботи ЗВ під час нормального закону розподілу надійності ?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3

РОЗРАХУНОК ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАННЯ ПРИ ПОСЛІДОВНОМУ З'ЄДНАННІ ЇХ СКЛАДОВИХ ЧАСТИН

Навчальна мета заняття

закріпити знання щодо методів визначення показників надійності засобів вимірювання, якщо їх складові частини з'єднані послідовно;

отримати практичні навички щодо розрахунку показників надійності засобів вимірювання при послідовному з'єднанні їх складових частин.

3.1 Відомості з теорії. Загальні відомості про показники надійності при послідовному з'єднанні елементів

При послідовному з'єднанні відмова одного елементу приводить до відмови об'єкту в цілому, тобто об'єкт з послідовно з'єднаних елементів є працездатним тоді, коли працездатні всі його елементи. Послідовне з'єднання елементів показане на рис. 3.1, при цьому воно складається з декількох (не менше двох) елементів.

$$\rightarrow \boxed{p_1(t)} \rightarrow \boxed{p_2(t)} \rightarrow \boxed{p_3(t)} \rightarrow$$

Рисунок 3.1 – Послідовне з'єднання елементів

Під час розрахунку надійності при послідовному з'єднанні елементів вводиться низка припущень: відмови елементів є випадковими подіями, і не залежать одна від одної; відмова одного елементу приводить до відмови всього об'єкту; елементи, що відмовили, не відновлюються.

Ймовірність безвідмовної роботи всього об'єкту за час t згідно теореми множення ймовірностей записують у наступному вигляді

$$P_c(t) = p_1(t) \cdot p_2(t) \cdot \ldots \cdot p_N(t) = \prod_{i=1}^{N} p_i(t), \qquad (3.1)$$

де N – кількість елементів об'єкту;

$p_i(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи i-го елементу об'єкту, $i = 1, \ldots, N$.

Якщо $p_i(t) = p(t)$, то

$$P_c(t) = p^N(t). \qquad (3.2)$$

Розглянемо взаємозв'язок ймовірності безвідмовної роботи елементів об'єкту з інтенсивністю відмов λ. Після підстановки у вираз (3.1) формули

$$p_i(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(t)dt\right)$$

отримаємо

$$P_c(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\int_0^t \lambda_i(t)dt\right) \tag{3.3}$$

або

$$P_c(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_c(t)dt\right), \tag{3.4}$$

де $\lambda_i(t)$ – інтенсивність відмов i-го елементу;

$$\lambda_c(t) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i(t) \tag{3.5}$$

– інтенсивність відмов об'єкту в цілому.

Якщо об'єкт складається з великої кількості однотипних елементів з приблизно однаковою надійністю, однаковою кількістю типів елементів s і однаковою кількістю елементів кожного типе N_j ($j = 1, ..., s$), то вираз (3.3) приймає вигляд

$$P_c(t) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{s}N_j\int_0^t \lambda_j(t)dt\right). \tag{3.6}$$

Вирази (3.3) і (3.6) є загальними формулами оцінки надійності об'єкту для будь-яких $\lambda_i(t)$. У разі експоненціального закону оцінки надійності та умов нормальної експлуатації об'єкту, коли $\lambda_i(t) = \lambda_i = \text{const}$, ці вирази мають вигляд

$$P_c(t) = \exp(-\lambda_c t) = \exp\left(-t\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\right); \tag{3.7}$$

$$P_c(t) = \exp(-\lambda_c t) = \exp\left(-t\sum_{j=1}^{s}N_j\lambda_j\right). \tag{3.8}$$

Ймовірність відмови об’єкту на інтервалі часу (0, t) складає

$$Q_c(t) = 1 - P_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{N} p_i(t). \quad (3.10)$$

Частота відмов $f_c(t)$ визначається співвідношенням

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt}. \quad (3.11)$$

Інтенсивність відмов

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)}. \quad (3.12)$$

Середнє напрацювання об’єкту до першої відмови

$$m_{tc} = \int_0^{\infty} P_c(t)dt. \quad (3.13)$$

З урахуванням співвідношення $m_t = 1/\lambda$ вираз для середнього часу безвідмовної роботи має вигляд

$$m_{tc} = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i; \quad (3.14)$$

$$m_{tc} = 1 \Big/ \sum_{j=1}^{s} N_j \lambda_j. \quad (3.15)$$

Під час оцінки надійності об’єкту з елементами, що працюють неодночасно, зручно використовувати показник надійності $A = \lambda t$. Позначивши $A_c = \lambda_c t_c$ та $A_i = \lambda_i t_i$ запишемо

$$A_c = \sum_{i=1}^{N} A_i; \quad (3.16)$$

$$A_c = -\ln P_c(t). \quad (3.17)$$

У разі експоненціального закону надійності всіх елементів вирази для показників надійності мають наступний вигляд

$$\lambda_i(t) = \lambda_i = \text{const}; \tag{3.18}$$

$$\lambda_c(t) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = \lambda_c; \tag{3.19}$$

$$p_i(t) = \exp(-\lambda_i t); \tag{3.20}$$

$$P_c(t) = \exp(-\lambda_c t); \tag{3.21}$$

$$f_c(t) = \lambda_c \exp(-\lambda_c t); \tag{3.22}$$

$$Q_c(t) = 1 - \exp(-\lambda_c t); \tag{3.23}$$

$$m_{ti} = 1/\lambda_i; \tag{3.24}$$

$$m_{tc} = 1/\lambda_c = 1\Big/\sum_{i=1}^{N} \lambda_i. \tag{3.25}$$

Якщо оцінюється надійність об’єктів для яких значення ймовірності безвідмовної роботи елементів $p(t)$ близькі до одиниці, то з достатньою для практики точністю розрахунок показників надійності можна здійснювати за наближеними формулами

$$p_1(t) \cdot p_2(t) \cdot \ldots \cdot p_N(t) \approx 1 - \sum_{i=1}^{N} q_i(t); \tag{3.26}$$

$$p_i^N(t) \approx 1 - Nq_i(t), \tag{3.27}$$

$$\sqrt[N]{p_i(t)} \approx 1 - q_i(t)/N, \tag{3.28}$$

де $q_i(t)$ – ймовірність відмови i-го елементу.

3.2 Порядок виконання типових завдань

Завдання 3.1. Засіб вимірювання складається з 100 елементів, що з’єднані послідовно. Середня інтенсивність відмов елементів дорівнює $\lambda_{cp} = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$, ймовірність відмови $Q_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ЗВ за час $t = 1000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

Рішення. З використанням виразів (3.19), (3.21), (3.23), (3.22) та (3.25) розрахуємо:

інтенсивність відмов ЗВ $\lambda_c(t) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = \lambda_c$

$$\lambda_c(1000) = \lambda_{cp} \cdot N = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 1{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ 1/год.};$$

ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t) = \exp(-\lambda_c t)$, з використанням додатку Д отримаємо

$$P_c(1000) = \exp(-1{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3) = \exp(-0{,}15) \approx 0{,}86;$$

ймовірність відмов ЗВ $Q_c(t) = 1 - \exp(-\lambda_c t)$

$$Q_c(1000) = 1 - P_c(1000) = 0{,}14;$$

частоту відмов ЗВ $f_c(t) = \lambda_c \exp(-\lambda_c t) = \lambda_c P_c(t)$

$$f_c(1000) = 1{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}86 = 1{,}29 \cdot 10^{-4} \text{ 1/год.};$$

середній час безвідмовної роботи ЗВ $m_{tc} = 1/\lambda_c$

$$m_t = 1/1{,}5 \cdot 10^{-4} \approx 6667 \text{ годин.}$$

Завдання 3.2. Засіб вимірювання, що складається з трьох блоків, працює протягом часу $t = 200$ годин. Ймовірність безвідмовної роботи першого блоку дорівнює $p_1(200) = 0{,}96$; другого – $p_2(200) = 0{,}94$; третього – $p_3(200) = 0{,}98$. Справедливий експоненціальний закон надійності. Необхідно знайти середній час безвідмовної роботи засобу вимірювання.

Рішення. Розрахуємо ймовірність безвідмовної роботи ЗВ

$$P_c(200) = p_1(200) \cdot p_2(200) \cdot p_3(200) = 0{,}96 \cdot 0{,}94 \cdot 0{,}98 \approx 0{,}88.$$

Знайдемо інтенсивність відмов ЗВ, скориставшись формулою

$$P_c(t) = \exp(-\lambda_c t)$$

або

$$P_c(200) = 0{,}88 = \exp(-\lambda_c \cdot 200).$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$\lambda_c \cdot 200 \approx 0{,}13 \quad \text{та} \quad \lambda_c = 6{,}5\cdot 10^{-4} \text{ 1/год.}$$

Середній час безвідмовної роботи ЗВ дорівнює

$$m_{tc} = 1/\lambda_c = 1/(6{,}5\cdot 10^{-4}) \approx 1539 \text{ годин.}$$

Завдання 3.3. Засіб вимірювання складається з трьох блоків, що з'єднані послідовно. Середній час безвідмовної роботи першого блоку дорівнює m_{t1} = 1500 годин; другого – m_{t2} = 2500 годин; третього – m_{t3} = 2000 годин. Справедливий експоненціальний закон надійності. Необхідно знайти середній час безвідмовної роботи засобу вимірювання.

Рішення. З використанням виразу (3.24) розрахуємо

$$\lambda_1 = 1/m_{t1} = 1/1500 \approx 6{,}67\cdot 10^{-4} \text{ 1/год.;}$$

$$\lambda_2 = 1/m_{t2} = 1/2500 \approx 4{,}0\cdot 10^{-4} \text{ 1/год.;}$$

$$\lambda_3 = 1/m_{t3} = 1/2000 \approx 5{,}0\cdot 10^{-4} \text{ 1/год.}$$

З використанням виразу (3.19) розрахуємо

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6{,}67\cdot 10^{-4} + 4{,}0\cdot 10^{-4} + 5{,}0\cdot 10^{-4} \approx 1{,}57\cdot 10^{-3} \text{ 1/год.}$$

З використанням виразу (3.25) розрахуємо середній час безвідмовної роботи ЗВ

$$m_{tc} = 1/\lambda_c = 1/(1{,}57\cdot 10^{-3}) \approx 637 \text{ годин.}$$

Завдання 3.4. Засіб вимірювання складається з трьох блоків, що з'єднані послідовно. Інтенсивність відмов першого блоку дорівнює $\lambda_1 = 1{,}5\cdot 10^{-4}$ 1/год.; другого лінійно залежать від часу – $\lambda_2 = 2{,}5\cdot 10^{-5}\cdot t$ 1/год.; третього залежать від часу у квадраті – $\lambda_3 = 6{,}0\cdot 10^{-7}\cdot t^2$ 1/год. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи засобу вимірювання $P_c(t)$ за час t = 100 годин.

Рішення. З використанням виразу (3.3) розрахуємо

$$P_c(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\int_0^t \lambda_i(t)dt\right) = \exp\left(-\left[\int_0^t \lambda_1 dt + \int_0^t \lambda_2 dt + \int_0^t \lambda_3 dt\right]\right)$$

$$P_c(t) = \exp\left(-\left[1{,}5\cdot 10^{-4} t + 2{,}5\cdot 10^{-5}\frac{\mathrm{t}^2}{2} + 6{,}0\cdot 10^{-7}\frac{\mathrm{t}^3}{3}\right]\right).$$

Для t = 100 годин

$$P_c(100) = \exp\left(-\left[1{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 100 + 2{,}5\cdot 10^{-5}\frac{100^2}{2} + 6{,}0\cdot 10^{-7}\frac{100^3}{3}\right]\right) =$$
$$= \exp(-[0{,}015 + 0{,}125 + 0{,}2]) = \exp(-0{,}34) \approx 0{,}71.$$

Завдання 3.5. Засіб вимірювання, що складається з $N = 100$ рівнонадійних елементів, працює протягом часу t. Ймовірність безвідмовної роботи ЗВ дорівнює $P_c(t) = 0{,}98$. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи елементу.

Рішення. Ймовірність безвідмовної роботи елементу можна знайти, як

$$p_i(t) = \sqrt[N]{P_c(t)}.$$

З умови завдання видно, що $P_c(t)$ близька до одиниці. Розрахунки будемо проводити за допомогою виразу (3.28).

$$Q_c(t) = 1 - P_c(t) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02;$$

$$p_i(t) = \sqrt[N]{P_c(t)} \approx 1 - \frac{Q_c(t)}{N} \approx 1 - \frac{0{,}02}{100} \approx 0{,}998.$$

3.3 Завдання для самостійного виконання

Завдання 3.6. Засіб вимірювання складається з шести блоків, що з’єднані послідовно. Ймовірність безвідмовної роботи першого блоку дорівнює $p_1(t) = 0{,}97$; другого – $p_2(t) = 0{,}99$; третього – $p_3(t) = 0{,}96$; четвертого – $p_4(t) = 0{,}98$; п’ятого – $p_5(t) = 0{,}975$; шостого – $p_6(t) = 0{,}985$. Необхідно знайти ймовірність безвідмовної роботи засобу вимірювання.

Завдання 3.7. Засіб вимірювання, що складається з чотирьох блоків, працює протягом часу $t = 100$ годин. Ймовірність безвідмовної роботи першого блоку дорівнює $p_1(100) = 0{,}97$; другого – $p_2(100) = 0{,}95$; третього – $p_3(100) = 0{,}98$; четвертого – $p_4(100) = 0{,}96$. Справедливий експоненціальний закон надійності. Необхідно знайти середній час безвідмовної роботи засобу вимірювання.

Завдання 3.8. Засіб вимірювання складається з 70 елементів, що з’єднані послідовно. Середня інтенсивність відмов елементів дорівнює

$\lambda_{ср}$ = 3,5·10^{-6} 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$, за час t = 2000 годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

Завдання 3.9. Засіб вимірювання складається з 50 елементів, що з'єднані послідовно. Середня інтенсивність відмов елементів дорівнює $\lambda_{ср}$ = 2,5·10^{-6} 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$, ймовірність відмови $Q_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ЗВ за час t = 2000 годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

Завдання 3.10. Засіб вимірювання складається з 100 рівнонадійних елементів, що з'єднані послідовно. Середня інтенсивність відмов елементів дорівнює $\lambda_{ср}$ = 5,0·10^{-6} 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$, за час t = 500 годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

Завдання 3.11. Засіб вимірювання складається з двох блоків, що з'єднані послідовно. Інтенсивність відмов першого блоку дорівнює λ_1 = 2,5·10^{-4} 1/год.; другого лінійно залежать від часу – λ_2 = 5,0·10^{-5}·t 1/год. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи засобу вимірювання $P_c(t)$ за час t = 200 годин.

Завдання 3.12. Засіб вимірювання складається з п'яти блоків, що з'єднані послідовно. Середній час безвідмовної роботи першого блоку дорівнює m_{t1} = 250 годин; другого – m_{t2} = 300 годин; третього – m_{t3} = 350 годин; четвертого – m_{t4} = 400 годин; п'ятого – m_{t5} = 450 годин. Справедливий експоненціальний закон надійності. Необхідно знайти середній час безвідмовної роботи засобу вимірювання.

Питання для самоперевірки:

1. Що буде з об'єктом, який складається з послідовно з'єднаних елементів, при відмові одного елементу ?
2. Яким чином розраховуються показники надійності об'єкту з послідовно з'єднаними рівнонадійними елементами ?
3. Як розраховуються показники надійності об'єкту з послідовно з'єднаними елементами, що працюють неодночасно ?
4. Чому дорівнює інтенсивність відмов об'єкту, що складається з послідовно з'єднаних елементів ?
5. Яким чином оцінюється надійність об'єктів для яких значення ймовірності безвідмовної роботи елементів близькі до одиниці ?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4

РОЗРАХУНОК ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ З ЗАГАЛЬНИМ РЕЗЕРВУВАННЯМ

Навчальна мета заняття

закріпити знання щодо методів визначення показників надійності вимірювальних систем з загальним резервуванням;

отримати практичні навички щодо розрахунку показників надійності вимірювальних систем з загальним резервуванням.

4.1 Відомості з теорії. Загальні відомості про показники надійності систем з загальним резервуванням

Резервування – це застосування додаткових засобів з метою збереження працездатного стану об'єкту при відмові одного або декількох його елементів. Резервування застосовується для забезпечення заданого рівня надійності об’єкту, якщо надійність елементів з яких складається об’єкт недостатня.

Під час застосування резервування разом з основними системами або елементами, що виконують задані функції, передбачаються додаткові системи або елементи, які не є функціонально необхідними, а призначені лише для заміни відповідних основних систем або елементів у разі їх відмови.

Резервні системи можуть включатися різними способами. В залежності від цього розрізняють **резервування заміщенням і постійне резервування.**

При **резервуванні заміщенням** елемент системи, що відмовив, замінюється (заміщується) резервним елементом, за рахунок цього система відновлює свою працездатність. Даний спосіб вимагає наявності перемикальних пристроїв, системи контролю працездатності і виявлення несправного змінного вузла, а також виконавчих пристроїв для включення резерву. Використання додаткових пристроїв знижує загальну надійність системи і підвищує її вартість, тому цей спосіб використовується переважно при резервуванні складних систем. Заміщення може здійснюватися автоматично або вручну.

При **постійному резервуванні** всі резервні елементи приєднані до основних протягом всього часу роботи системи і знаходяться в однаковому з ними робочому режимі. Постійне резервування застосовується у системах, які повинні працювати безперервно, і навіть короткочасна перерва у роботі системи неприпустима, яка може виникнути під час перемикання з основного елементу на резервний. У системах з постійним резервуванням відмова одного або декількох елементів не впливає на їх роботу, тобто їх можна представити паралельною моделлю надійності (рис. 4.1). Перевагами постійного резервування є простота реалізації і відсутність навіть короткочасних перерв у роботі, які необхідні для перемикання елементів. Даний спосіб найчастіше застосовується при резервуванні порівняно нескладних систем.

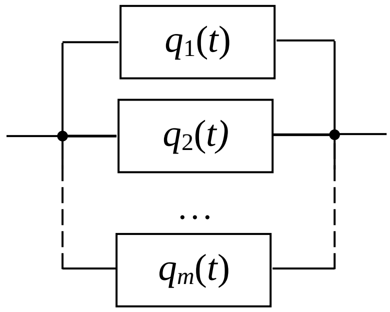


Рисунок 4.1 – Паралельна модель надійності

Оскільки відмова всієї системи наступає тільки при відмові всіх її підсистем, тобто основної і резервних систем, то, якщо вважати відмови незалежними, можна записати вираз для ймовірності відмови системи

$$Q_c(t) = \prod_{j=1}^{m} q_j(t), \tag{4.1}$$

де $Q_c(t)$ – ймовірність відмови системи;
$q_j(t)$ – ймовірність відмови j-ої підсистеми (j = 1, 2, …, m);
m – кількість підсистем.
Ймовірність безвідмовної роботи системи визначається формулою

$$P_c(t) = 1 - Q_c(t) = 1 - \prod_{j=1}^{m} q_j(t) = 1 - \prod_{j=1}^{m} \left[1 - p_j(t)\right], \tag{4.2}$$

де $p_j(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи j-ої підсистеми.
Якщо $p_j(t) = p(t)$, j = 1, ..., m, то

$$Q_c(t) = q^m(t); \tag{4.3}$$

$$P_c(t) = 1 - \left[1 - p_j(t)\right]^m. \tag{4.4}$$

При експоненціальному законі надійності окремих підсистем

$$p_j(t) = p(t) = \exp(-\lambda t),$$

формули для ймовірностей відмови та безвідмовної роботи системи мають вигляд

$$Q_c(t) = \left[1 - \exp\left(-\lambda t\right)\right]^m; \qquad (4.5)$$

$$P_c(t) = 1 - \left[1 - \exp\left(-\lambda t\right)\right]^m. \qquad (4.6)$$

Середній час безвідмовної роботи системи визначається за допомогою виразу

$$m_{tc} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{1+i}. \qquad (4.7)$$

Резервні системи також можуть з’єднуватися різними способами. В залежності від цього розрізняють **загальне, роздільне і змішане резервування**.

Загальне резервування – це резервування всієї системи в цілому. Цей спосіб резервування найширше поширений, завдяки своїй простоті. Особливо часто застосовується дублювання, при якому використовується тільки одна резервна система.

Роздільне резервування – це резервування системи на окремих ділянках. Роздільне резервування застосовується як для порівняно крупних вузлів і блоків системи, так і для окремих її елементів.

При **змішаному резервуванні** в системі резервуються як окремі пристрої, так і деякі первинні елементи.

При загальному резервуванні резервні системи з’єднані паралельно з основною системою протягом всього періоду роботи основної системи. Всі системи з’єднані постійно, перебудова схеми при відмовах не відбувається, система, що відмовила, не відключається. Під час застосування загального резервування система містить основну систему з послідовно з’єднаними n елементами та m – 1 резервних систем (рис. 4.2).

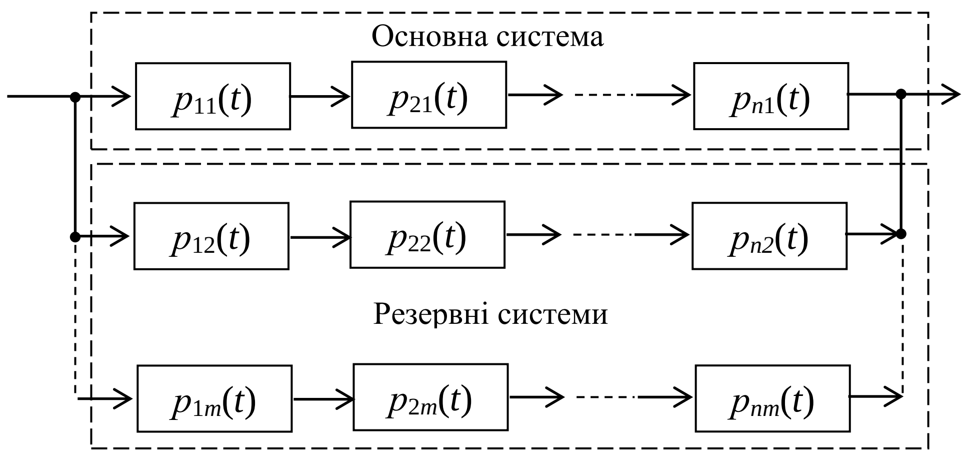


Рисунок 4.2 – Структурна модель системи з загальним резервуванням

В цьому випадку ймовірність безвідмовної роботи j-ої підсистеми визначається за формулою

$$p_j(t) = \prod_{i=1}^{n} p_{ij}(t)\,;\;\; j = 1, 2, ..., m \tag{4.8}$$

де $p_{ij}(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи i-го елементу j-ої підсистеми, $j = 1, 2, ..., m$; $i = 1, 2, 3, ..., n$

Ймовірність відмови j-ої підсистеми

$$q_j(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} p_{ij}(t)\,. \tag{4.9}$$

Ймовірність відмови системи з загальним резервуванням визначається за допомогою виразу

$$Q_c(t) = \prod_{j=1}^{m}\left[1 - \prod_{i=1}^{n} p_{ij}(t)\right], \tag{4.10}$$

а ймовірність безвідмовної роботи системи з загальним резервуванням

$$P_c(t) = 1 - \prod_{j=1}^{m}\left[1 - \prod_{i=1}^{n} p_{ij}(t)\right]. \tag{4.11}$$

Якщо основна і резервні системи мають однакову надійність, тобто

$$p_{ij}(t) = p_i(t). \tag{4.12}$$

то

$$Q_c(t) = \left[1 - \prod_{i=1}^{n} p_i(t)\right]^m; \tag{4.13}$$

$$P_c(t) = 1 - \left[1 - \prod_{i=1}^{n} p_i(t)\right]^m. \tag{4.14}$$

Якщо справедливий експоненціальний закон надійності, тобто

$$p_i(t) = \exp(-\lambda_i t), \tag{4.15}$$

то вирази (4.13) і (4.14) будуть мати вигляд

$$Q_c(t) = \left[1 - \exp\left(-\lambda_0 t\right)\right]^m, \qquad (4.16)$$

$$P_c(t) = 1 - \left[1 - \exp\left(-\lambda_0 t\right)\right]^m, \qquad (4.17)$$

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad (4.18)$$

де λ_0 – інтенсивність відмов підсистеми, що складається з n елементів.

Частота відмов системи з загальним резервуванням визначається за допомогою виразу

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = m\lambda_0 \exp\left(-\lambda_0 t\right)\left[1 - \exp\left(-\lambda_0 t\right)\right]^{m-1}. \qquad (4.19)$$

Інтенсивність відмов системи з загальним резервуванням

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{m\lambda_0 \exp\left(-\lambda_0 t\right)\left[1 - \exp\left(-\lambda_0 t\right)\right]^{m-1}}{1 - \left[1 - \exp\left(-\lambda_0 t\right)\right]^m}. \qquad (4.20)$$

Середній час безвідмовної роботи резервованої системи

$$m_{tc} = m_{t0} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{1+j}, \qquad (4.21)$$

де $m_{t0} = 1/\lambda_0$ – середній час безвідмовної роботи нерезервованої системи.

Коефіцієнт підвищення надійності G_Q при загальному резервуванні показує, у скільки разів знижується ймовірність відмови у резервованій системі у порівнянні з нерезервованою

$$G_Q = \frac{Q_n(t)}{\left[Q_n(t)\right]^m} = \frac{1 - p^n(t)}{\left[1 - p^n(t)\right]^m}. \qquad (4.22)$$

Якщо ймовірність безвідмовної роботи $p(t)$ близька до одиниці, що можливо при $\lambda t << 1$, то використавши співвідношення

$$p^n(t) = \exp(-n\lambda t) \approx 1 - n\lambda t,$$

можна отримати

$$1 - p^n(t) \approx n\lambda t,$$

а вираз (4.22) буде мати вигляд

$$G_Q \approx \frac{n\lambda t}{(n\lambda t)^m} = \frac{1}{(n\lambda t)^{m-1}}. \qquad (4.23)$$

За допомогою виразу (4.4) можна вирішити і зворотну задачу, тобто по відомій надійності нерезервованої системи $P_n(t) = p^n(t)$ отримати необхідну надійність $[P_n(t)]^m$, оцінивши порядок резервування:

$$m \geq \frac{\ln\{1-[P_n(t)]^m\}}{\ln[1-P_n(t)]}. \qquad (4.24)$$

4.2 Порядок виконання типових завдань

Завдання 4.1. Вимірювальна система (ВС) складається з п'яти рівнонадійних блоків, середній час безвідмовної роботи блоків дорівнює m_t = 2000 годин. Справедливий експоненціальний закон надійності для блоків ВС. Необхідно визначити середній час безвідмовної роботи ВС m_{tc}, а також частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ВС за час t = 400 годин, якщо система нерезервована та, якщо застосовано дублювання системи при постійно включеному резерві.

Рішення. Знайдемо показники надійності для нерезервованої вимірювальної системи.

Інтенсивність відмов блоку ВС дорівнює

$$\lambda_i = 1/m_{ti} = 1/2000 = 5\cdot10^{-4}\ 1/\text{год}.$$

Інтенсивність відмов вимірювальної системи дорівнює $\lambda_c = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$, якщо один канал ВС складається з n = 5 рівнонадійних блоків, то $\lambda = \lambda_i$, та

$$\lambda_c = \lambda\cdot n = 5\cdot10^{-4}\cdot5 = 2{,}5\cdot10^{-3}\cdot1/\text{год}.$$

Середній час безвідмовної роботи ВС дорівнює

$$m_{tc} = 1/\lambda_c = 1/(2{,}5\cdot10^{-3}) = 400 \text{ годин}.$$

Частота відмов ВС дорівнює

$$f_c(t) = \lambda_c(t)\cdot P_c(t); \qquad \lambda_c(t) = \lambda_c; \qquad P_c(t) = \exp(-\lambda_c t).$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$f_c(400) = \lambda_c \cdot \exp(-\lambda_c t) = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(-2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 400) = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(-1{,}0) \approx$$

$$\approx 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}37 \approx 9{,}25 \cdot 10^{-4} \text{ 1/год.}$$

Інтенсивність відмов ВС за час t = 400 годин дорівнює

$$\lambda_c(400) = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ 1/год.}$$

Знайдемо показники надійності для вимірювальної системи з дублюванням (кількість каналів ВС дорівнює m = 2).

Середній час безвідмовної роботи ВС дорівнює $m_{tc} = \dfrac{1}{\lambda_c} \sum_{i=0}^{m-1} \dfrac{1}{1+i}$

$$m_{tc} = \frac{1}{2{,}5 \cdot 10^{-3}} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{400 \cdot 3}{2} = 600 \text{ годин.}$$

Для визначення частоти відмов необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ВС

$$P_c(t) = 1 - \left[1 - \exp(-\lambda_0 t)\right]^m; \qquad \lambda_0 = \lambda_c = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ 1/год.;}$$

$$P_c(t) = 1 - \left[1 - \exp(-\lambda_0 t)\right]^2 = 2\exp(-\lambda_0 t) - \exp(-2\lambda_0 t).$$

Частота відмов ВС дорівнює

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = 2\lambda_0 \exp(-\lambda_0 t)\left[1 - \exp(-\lambda_0 t)\right].$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$f_c(400) = 2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(-2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 400) \cdot [1 - \exp(-2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 400)] =$$

$$= 5{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(-1{,}0) \cdot [1 - \exp(-1{,}0)] \approx 5{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}37 \cdot 0{,}63 \approx 1{,}17 \cdot 10^{-3} \text{ 1/год.}$$

Інтенсивність відмов ВС дорівнює

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{2\lambda_0\left[1 - \exp(-\lambda_0 t)\right]}{2 - \exp(-\lambda_0 t)}.$$

Для часу t = 400 годин з використанням додатку Д отримаємо

$$\lambda_c(400) = \frac{2\cdot 2{,}5\cdot 10^{-3}\left[1-\exp\left(-1{,}0\right)\right]}{2-\exp\left(-1{,}0\right)} \approx \frac{5{,}0\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}63}{1{,}63} = \frac{0{,}00315}{1{,}63} \approx 1{,}93\cdot 10^{-3}\ \text{1/год.}$$

Завдання 4.2. У вимірювальній системі застосовано дублювання каналу вимірювання. Інтенсивність відмов каналу $\lambda = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності, також основний та резервний канали рівнонадійні. Необхідно визначити середній час безвідмовної роботи ВС m_{tc}, а також ймовірність безвідмовної роботи $P_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ВС за час t = 100 годин.

Рішення. Оскільки кількість елементів (блоків) ВС у завданні не вказано, то $n = 1$, а інтенсивність відмов дорівнює $\lambda_i = \lambda$; $\lambda_0 = n\lambda = \lambda$, кількість каналів ВС дорівнює $m = 2$.

Середній час безвідмовної роботи ВС дорівнює $m_{tc} = \dfrac{1}{\lambda_0}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\dfrac{1}{1+i}$

$$m_{tc} = \frac{1}{1{,}5\cdot 10^{-3}}\left(1+\frac{1}{2}\right) \approx \frac{667\cdot 3}{2} \approx 1000\ \text{годин.}$$

Розрахуємо ймовірність безвідмовної роботи

$$P_c(t) = 1-\left[1-\exp\left(-\lambda_0 t\right)\right]^m .$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$P_c(100) = 1 - [1 - \exp(-1{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 100)]^2 = 1 - [1 - \exp(-0{,}15)]^2 \approx 1 - 0{,}14^2 \approx$$

$$\approx 1 - 0{,}0196 \approx 0{,}98.$$

Розрахуємо частоту відмов ВС

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = 2\lambda\exp\left(-\lambda t\right)\left[1-\exp\left(-\lambda t\right)\right].$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$f_c(100) = 2\cdot 1{,}5\cdot 10^{-3}\cdot \exp(-1{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 100)\cdot[1 - \exp(-1{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 100)] =$$

$$= 3{,}0\cdot 10^{-3}\cdot \exp(-0{,}15)\cdot[1 - \exp(-0{,}15)] \approx 3{,}0\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}86\cdot 0{,}14 \approx 3{,}61\cdot 10^{-4}\ \text{1/год.}$$

Розрахуємо інтенсивність відмов ВС

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{2\lambda[1-\exp(-\lambda t)]}{2-\exp(-\lambda t)}.$$

Для часу t = 100 годин з використанням додатку Д отримаємо

$$\lambda_c(100) = \frac{2\cdot 1{,}5\cdot 10^{-3}[1-\exp(-0{,}15)]}{2-\exp(-0{,}15)} \approx \frac{3{,}0\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}14}{1{,}14} = \frac{0{,}00042}{1{,}14} \approx 3{,}68\cdot 10^{-4}\ \text{1/год.}$$

Завдання 4.3. Нерезервована вимірювальна система складається з $n = 100$ рівнонадійних елементів. Для підвищення надійності ВС пропонується здійснити загальне дублювання елементів. Справедливий експоненціальний закон надійності елементів, також основний та резервний канали рівнонадійні. Потрібно визначити необхідну середню інтенсивність відмов одного елементу, щоб забезпечити ймовірність безвідмовної роботи вимірювальної системи $P_c(t)$ = 0,95 за час t = 100 годин.

Рішення. Ймовірність безвідмовної роботи ВС при загальному дублюванні та рівнонадійних елементах буде дорівнювати

$$P_c(t) = 1-\left[1-p^n(t)\right]^2 \qquad \text{або} \qquad P_c(t) = 1-\left[1-\exp(-\lambda_n t)\right]^2,$$

де $p(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи одного елементу.

Необхідно, щоб $P_c(t) \geq 0{,}95$, тобто

$$1-[1-p^n(t)]^2 \geq 0{,}95;$$

$$0{,}05 \geq [1-p^n(t)]^2;$$

$$\sqrt{0{,}05} \geq 1-p^n(t);$$

$$p(t) \geq \left[1-\sqrt{0{,}05}\right]^{1/n}.$$

Після розкладання $\left[1-\sqrt{0{,}05}\right]^{1/n}$ по ступеню $1/n$ у ряд і, не враховуючи членами ряду вищого порядку малості, отримаємо

$$\left[1-\sqrt{0{,}05}\right]^{1/100} \approx 1-\frac{1}{100}\sqrt{0{,}05} \approx 1-2{,}24\cdot 10^{-3}.$$

З урахуванням експоненціального закону надійності елементів

$$p(t) = \exp(-\lambda t) \approx 1 - \lambda t,$$

отримаємо

$$1 - \lambda t \leq 1 - 2{,}24 \cdot 10^{-3}.$$

Таким чином, середня інтенсивність відмов одного елементу повинна бути

$$\lambda \leq (2{,}24 \cdot 10^{-3})/t = (2{,}24 \cdot 10^{-3})/100 = 2{,}24 \cdot 10^{-5} \text{ 1/год.}$$

4.3 Завдання для самостійного виконання

Завдання 4.4. У вимірювальній системі застосовано дублювання каналу вимірювання. Основний та резервний канали складаються з 7 рівнонадійних блоків, інтенсивність відмов яких дорівнює $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності для блоків ВС, також основний та резервний канали рівнонадійні. Необхідно визначити середній час безвідмовної роботи ВС m_{tc}, а також ймовірність безвідмовної роботи $P_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ВС за час $t = 1000$ годин.

Завдання 4.5. Вимірювальна система складається з 4 блоків. Інтенсивність відмов першого блоку дорівнює $\lambda_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год.; другого – $\lambda_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год.; третього – $\lambda_3 = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$ 1/год.; четвертого – $\lambda_4 = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності для блоків ВС. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи $P_c(t)$ за час $t = 500$ годин, якщо система нерезервована та, якщо застосовано дублювання системи при постійно включеному резерві.

Завдання 4.6. Вимірювальна система складається з основного та резервного каналів, які містять 7 рівнонадійних блоків кожен, середній час безвідмовної роботи блоків дорівнює $m_t = 1000$ годин. Справедливий експоненціальний закон надійності для блоків ВС, також основний та резервний канали рівнонадійні. Необхідно визначити середній час безвідмовної роботи ВС m_{tc}, а також частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ВС за час $t = 100$ годин.

Завдання 4.7. У вимірювальній системі застосовано дублювання каналу вимірювання. Інтенсивність відмов каналу $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності, також основний та резервний канали рівнонадійні. Необхідно визначити середній час безвідмовної роботи ВС m_{tc}, а також ймовірність безвідмовної роботи $P_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ВС за час $t = 1000$ годин.

Завдання 4.8. Вимірювальна система складається з основного та резервного каналів, які містять по 3 блоки, середній час безвідмовної роботи першого блоку дорівнює $m_{t1} = 500$ годин; другого – $m_{t2} = 600$ годин; третього – $m_{t3} = 550$ годин. Справедливий експоненціальний закон надійності для блоків ВС, також основний та резервний канали рівнонадійні. Необхідно визначити середній час безвідмовної роботи ВС m_{tc}, а також частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ВС за час t = 200 годин.

Завдання 4.9. Вимірювальна система складається з основного та резервного каналів, які містять по 3 рівнонадійні блоки. Інтенсивність відмов першого блоку дорівнює $\lambda_1 = 4{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/год.; другого – $\lambda_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год.; третього – $\lambda_3 = 6{,}0 \cdot 10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності для блоків ВС. Необхідно визначити середній час безвідмовної роботи ВС m_{tc}, а також ймовірність безвідмовної роботи $P_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ВС за час t = 500 годин.

Завдання 4.10. Нерезервована вимірювальна система складається з n = 200 рівнонадійних елементів. Відома необхідна ймовірність безвідмовної роботи вимірювальної системи $P_c(t)$ = 0,9 за час t = 500 годин. Справедливий експоненціальний закон надійності елементів. Потрібно визначити необхідну середню інтенсивність відмов одного елементу, якщо ВС нерезервована та, якщо застосовано дублювання системи при постійно включеному резерві.

Завдання 4.11. Вимірювальна система складається з основного та двох резервних каналів, які містять 4 рівнонадійні блоки кожен, середній час безвідмовної роботи блоків дорівнює m_t = 2000 годин. Справедливий експоненціальний закон надійності для блоків ВС, також основний та резервні канали рівнонадійні. Необхідно визначити середній час безвідмовної роботи ВС m_{tc}, а також частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ВС за час t = 1000 годин.

Завдання 4.12. Вимірювальна система складається з основного та двох резервних каналів, які містять по 5 рівнонадійних блоків, інтенсивність відмов яких дорівнює $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності для блоків ВС, також основний та резервні канали рівнонадійні. Необхідно визначити середній час безвідмовної роботи ВС m_{tc}, а також ймовірність безвідмовної роботи $P_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ВС за час t = 500 годин.

Питання для самоперевірки:

1. З якою метою застосовують резервування та в чому його переваги та недоліки ?
2. Які існують види резервування у залежності від способу включення резерву ?
3. Які існують види резервування у залежності від способу з’єднання резерву ?
4. В чому переваги та недоліки резервування заміщенням та постійного резервування ?
5. В чому переваги та недоліки загального, роздільного та змішаного резервування ?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5

РОЗРАХУНОК ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАННЯ ПІД ЧАС РОЗДІЛЬНОГО РЕЗЕРВУВАННЯ

Навчальна мета заняття

закріпити знання щодо методів визначення показників надійності засобів вимірювання під час роздільного резервування;

отримати практичні навички щодо розрахунку показників надійності засобів вимірювання під час роздільного резервування.

5.1 Відомості з теорії. Загальні відомості про показники надійності системи з роздільним резервуванням

Роздільне резервування – це резервування системи на окремих ділянках. Роздільне резервування застосовується як для порівняно крупних вузлів і блоків системи, так і для окремих її елементів. Таке резервування ще називають поелементним. Під час поелементного резервування резервуються окремо елементи системи.

Розглянемо надійність системи з роздільним резервуванням, структурна модель якої наведена на рис. 5.1.

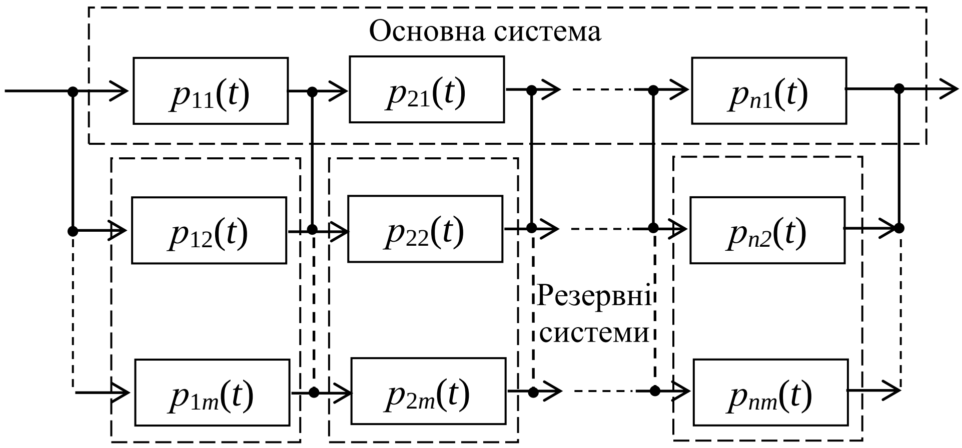


Рисунок 5.1 – Структурна модель системи з роздільним резервуванням

Ймовірність появи відмови в i-ій групі елементів системи, яка складається з m підсистем з n елементів визначається

$$q_i(t) = \prod_{j=1}^{m} q_{ij}(t); \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{5.1}$$

де $q_{ij}(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи i-ої групи елементів j-ої підсистеми на інтервалі часу $(0, t)$.

Ймовірність безвідмовної роботи в *i*-ій групі елементів системи визначається

$$p_i(t) = 1 - q_i(t) = 1 - \prod_{j=1}^{m} \left[1 - p_{ij}(t)\right], \tag{5.2}$$

де $p_{ij}(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи *i*-го елементу *j*-ої підсистеми.

Ймовірність безвідмовної роботи системи з роздільним резервуванням буде мати вигляд

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t)$$

або

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} \left\{1 - \prod_{j=1}^{m} \left[1 - p_{ij}(t)\right]\right\}. \tag{5.3}$$

Ймовірність появи відмови у системі з роздільним резервуванням можна записати у наступному вигляді

$$Q_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left\{1 - \prod_{j=1}^{m} \left[1 - p_{ij}(t)\right]\right\}. \tag{5.4}$$

Якщо елементи, що входять у систему, рівнонадійні, тобто $p_{ij}(t) = p(t)$, отримаємо

$$P_c(t) = [1 - [1 - p(t)]^m]^n. \tag{5.5}$$

При експоненціальному законі надійності, коли $p_i(t) = \exp(-\lambda_i t)$

$$P_c(t) = \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\lambda t\right)\right]^m\right\}^n. \tag{5.6}$$

Якщо $p_{ij}(t) = p_i(t)$, то вираз для ймовірності безвідмовної роботи буде мати вигляд

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} \left\{1 - \left[1 - p_i(t)\right]^m\right\}. \tag{5.7}$$

При експоненціальному законі надійності

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\lambda_i t\right)\right]^m\right\}. \tag{5.8}$$

Середній час безвідмовної роботи системи визначається співвідношенням

$$m_{tc} = \int_0^\infty P_c(t)dt\,. \qquad (5.9)$$

При експоненціальному законі надійності та рівнонадійних елементах

$$m_{tc} = \frac{(n-1)!}{m\lambda}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{k_j(k_j+1)\ldots(k_j+n-1)}, \qquad (5.10)$$

де $k_j = (j + 1)/m$.

Вираз для коефіцієнта підвищення надійності G_Q при роздільному резервуванні можна отримати з використанням виразу (5.5). Якщо $q(t) << 1$, то можна записати

$$\left[1-q^m(t)\right]^n \approx 1-nq^m(t) \approx 1-n(\lambda t)^m\,,$$

звідки

$$G_Q = \frac{Q_n(t)}{\left[Q_n(t)\right]^m} = \frac{n\lambda t}{1-\left[1-n(\lambda t)^m\right]} \approx \frac{1}{(\lambda t)^{m-1}}\,. \qquad (5.11)$$

З порівняння виразів (4.23) та (5.11) видно, що роздільне резервування забезпечує, при малих інтенсивностях відмов елементів, надійність у n^{m-1} разів більшу, ніж загальне резервування. Тому, роздільне резервування ефективніше для порівняно простих вузлів.

З використанням виразу (5.5) можна оцінити, скільки резервних систем m необхідно для досягнення необхідної надійності $[P_m(t)]_n$, якщо відома надійність $P_n(t) = p^n(t)$ нерезервованої системи

$$m \ge \frac{\ln\left\{1-\sqrt[n]{\left[P_m(t)\right]_n}\right\}}{\ln\left[1-\sqrt[n]{P_n(t)}\right]}\,. \qquad (5.12)$$

5.2 Порядок виконання типових завдань

Завдання 5.1. У засобі вимірювання для підвищення надійності застосовано дублювання всіх його елементів. Засіб вимірювання містить: 2 транзистори з інтенсивністю відмов $\lambda_1 = 3{,}0\cdot10^{-5}$ 1/год.; 7 резисторів з $\lambda_2 = 0{,}4\cdot10^{-5}$ 1/год.; 5 конденсаторів з $\lambda_3 = 0{,}35\cdot10^{-5}$ 1/год.; 2 діоди з $\lambda_4 = 2{,}0\cdot10^{-5}$ 1/год.; 2 котушки індуктивності з $\lambda_5 = 0{,}9\cdot10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності елементів ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$ за час t = 1000 годин.

Рішення. Кількість елементів ЗВ дорівнює $n = 2 + 7 + 5 + 2 + 2 = 18$, кількість каналів дорівнює $m = 2$.

З використанням виразу (5.8) отримаємо

$$P_c(1000) = \prod_{i=1}^{18} \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\lambda_i \cdot 1000\right)\right]^2\right\}.$$

У зв'язку з тим, що інтенсивність відмов елементів ЗВ $\lambda_i << 1$, то для наближеного розрахунку показову функцію можна розкласти у ряд з обмеженням першими двома членами розкладання

$$1 - \exp(-1000 \cdot \lambda_i) \approx 1000 \cdot \lambda_i.$$

З урахуванням цього

$$P_c(1000) = \prod_{i=1}^{18} \left\{1 - \left[1000 \cdot \lambda_i\right]^2\right\} \approx 1 - \sum_{i=1}^{18} \left(1000 \cdot \lambda_i\right)^2 \approx 1 - 1000^2 \sum_{i=1}^{18} \left(\lambda_i\right)^2 \approx$$
$$\approx 1 - 10^6 \left(2 \cdot 3{,}0^2 + 7 \cdot 0{,}4^2 + 5 \cdot 0{,}35^2 + 2 \cdot 2{,}0^2 + 2 \cdot 0{,}9^2\right) 10^{-10} \approx$$
$$\approx 1 - \left(18 + 1{,}12 + 0{,}6125 + 8 + 1{,}62\right) 10^{-4} \approx 1 - 0{,}003 \approx 0{,}997.$$

Завдання 5.2. Засіб вимірювання складається з двох рівнонадійних блоків, для підвищення надійності ЗВ застосовано роздільне резервування блоків (рис. 5.2). Інтенсивність відмов блоку дорівнює $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності блоків ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ЗВ за час t = 1000 годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

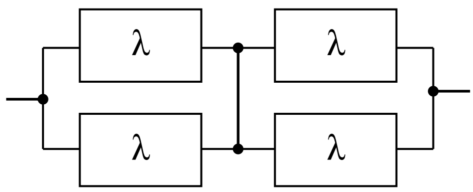


Рисунок 5.2 – Схема розрахунку надійності ЗВ

Рішення. Ймовірність безвідмовної роботи ЗВ при роздільному резервуванні та рівнонадійних блоках буде дорівнювати (кількість блоків $n = 2$, кількість каналів дорівнює $m = 2$)

$$P_c(t) = \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\lambda t\right)\right]^2\right\}^2$$

або

$$P_c(t) = \left[1 - 1 + 2\exp(-\lambda t) - \exp(-2\lambda t)\right]^2 =$$
$$= 4\exp(-2\lambda t) - 4\exp(-3\lambda t) + \exp(-4\lambda t).$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$P_c(1000) = 4\exp\left(-5{,}0\cdot 10^{-5}\cdot 10^{3}\right) - 4\exp\left(-7{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 10^{3}\right) + \exp\left(-1{,}0\cdot 10^{-4}\cdot 10^{3}\right) =$$
$$= 4\exp(-0{,}05) - 4\exp(-0{,}075) + \exp(-0{,}1) \approx 4\cdot 0{,}95 - 4\cdot 0{,}93 + 0{,}91 \approx$$
$$\approx 3{,}8 - 3{,}72 + 0{,}91 \approx 0{,}99.$$

Частота відмов ЗВ дорівнює

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = 8\lambda\exp(-2\lambda t) - 12\lambda\exp(-3\lambda t) + 4\lambda\exp(-4\lambda t) =$$
$$= 4\lambda\exp(-2\lambda t)\left[2 - 3\exp(-\lambda t) + \exp(-2\lambda t)\right].$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$f_c(1000) = 1{,}0\cdot 10^{-4}\cdot\exp(-0{,}05)\cdot[2 - 3\cdot\exp(-0{,}025) + \exp(-0{,}05)] \approx$$

$$\approx 1{,}0\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}95\cdot(2 - 3\cdot 0{,}98 + 0{,}95) \approx 9{,}5\cdot 10^{-5}\cdot(2 - 2{,}94 + 0{,}95) \approx$$

$$\approx 9{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}01 \approx 9{,}5\cdot 10^{-7}\ \text{1/год.}$$

Інтенсивність відмов ЗВ дорівнює

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{4\lambda\exp(-2\lambda t)\left[2 - 3\exp(-\lambda t) + \exp(-2\lambda t)\right]}{\exp(-2\lambda t)\left[4 - 4\exp(-\lambda t) + \exp(-2\lambda t)\right]} =$$
$$= \frac{4\lambda\left[2 - 3\exp(-\lambda t) + \exp(-2\lambda t)\right]}{\left[2 - \exp(-\lambda t)\right]^2}.$$

Для t = 1000 годин з використанням додатку Д отримаємо

$$\lambda_c(1000) \approx \frac{4\cdot 2{,}5\cdot 10^{-5}\left[2 - 3\cdot 0{,}98 + 0{,}95\right]}{\left[2 - 0{,}98\right]^2} \approx \frac{10^{-4}\cdot 0{,}01}{1{,}02^2} \approx \frac{1{,}0\cdot 10^{-6}}{1{,}0404} \approx 9{,}6\cdot 10^{-7}\ 1/\text{год.}$$

Також інтенсивність відмов ЗВ можна розрахувати наступним чином

$$\lambda_c(1000) = \frac{f_c(1000)}{P_c(1000)} = \frac{9{,}5\cdot 10^{-7}}{0{,}99} \approx 9{,}6\cdot 10^{-7}\ \text{1/год.}$$

Середній час безвідмовної роботи ЗВ дорівнює

$$m_{tc} = \int_0^{\infty} P_c(t)dt = \int_0^{\infty} \left[4\exp(-2\lambda t) - 4\exp(-3\lambda t) + \exp(-4\lambda t)\right]dt =$$

$$= \frac{2}{\lambda} - \frac{4}{3\lambda} + \frac{1}{4\lambda} = \frac{24 - 16 + 3}{12\lambda} = \frac{11}{12\lambda},$$

або з використанням виразу (5.10)

$$m_{tc} = \frac{(1)!}{2\lambda}\left[\frac{1}{(1/2)\cdot(3/2)} + \frac{1}{1\cdot 2}\right] = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{12\lambda}.$$

$$m_{tc} = \frac{11}{12\cdot 2{,}5\cdot 10^{-5}} = \frac{11}{0{,}0003} \approx 36667 \text{ годин.}$$

Завдання 5.3. Засіб вимірювання складається з трьох блоків, для підвищення надійності ЗВ застосовано резервування першого і третього блоків (рис. 5.3). Інтенсивність відмов першого блоку дорівнює $\lambda_1 = 1{,}5\cdot 10^{-4}$ 1/год.; другого – $\lambda_2 = 2{,}5\cdot 10^{-4}$ 1/год.; третього – $\lambda_3 = 5{,}0\cdot 10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності блоків ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ЗВ за час t = 2000 годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

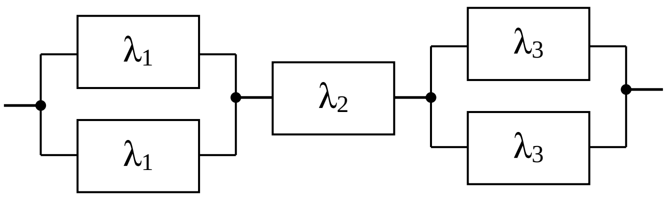


Рисунок 5.3 – Схема розрахунку надійності ЗВ

Рішення. Ймовірність безвідмовної роботи ЗВ при роздільному резервуванні блоків буде дорівнювати

$$P_c(t) = P_{\mathrm{I}}(t)\cdot P_{\mathrm{II}}(t)\cdot P_{\mathrm{III}}(t),$$

де $P_{\mathrm{I}}(t)$, $P_{\mathrm{II}}(t)$, $P_{\mathrm{III}}(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи I, II та III групи блоків.

Для першої групи блоків ймовірність безвідмовної роботи дорівнює

$$P_{\mathrm{I}}(t) = 1 - q_{\mathrm{I}}(t); \qquad q_{\mathrm{I}}(t) = [1 - p_1(t)]^m;$$

$$P_{\mathrm{I}}(t) = 1 - [1 - p_1(t)]^2 = 2p_1(t) - p_1^2(t).$$

Для другої групи блоків ймовірність безвідмовної роботи дорівнює

$$P_{\text{II}}(t) = p_2(t).$$

Для третьої групи блоків ймовірність безвідмовної роботи дорівнює

$$P_{\text{III}}(t) = 1 - q_{\text{III}}(t); \qquad q_{\text{III}}(t) = [1 - p_3(t)]^m;$$

$$P_{\text{III}}(t) = 1 - [1 - p_3(t)]^2 = 2p_3(t) - p_3^2(t).$$

Таким чином, ймовірність безвідмовної роботи ЗВ дорівнює

$$P_c(t) = [2p_1(t) - p_1^2(t)]\cdot p_2(t)\cdot[2p_3(t) - p_3^2(t)] =$$

$$= 4p_1(t)p_2(t)p_3(t) - 2p_1^2(t)p_2(t)p_3(t) - 2p_1(t)p_2(t)p_3^2(t) + p_1^2(t)p_2(t)p_3^2(t).$$

Для експоненціального закону надійності блоків

$$p_1(t) = \exp(-\lambda_1 t); \qquad p_2(t) = \exp(-\lambda_2 t); \qquad p_3(t) = \exp(-\lambda_3 t).$$

$$P_c(t) = 4\exp[-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t] - 2\exp[-(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t] -$$
$$- 2\exp[-(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)t] + \exp[-(2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)t].$$

Для t = 2000 годин з використанням додатку Д отримаємо

$$P_c(2000) = 4\cdot\exp[-(1{,}5\cdot10^{-4} + 2{,}5\cdot10^{-4} + 5{,}0\cdot10^{-5})\cdot2{,}0\cdot10^3] -$$

$$- 2\cdot\exp[-(2\cdot1{,}5\cdot10^{-4} + 2{,}5\cdot10^{-4} + 5{,}0\cdot10^{-5})\cdot2{,}0\cdot10^3] -$$

$$- 2\cdot\exp[-(1{,}5\cdot10^{-4} + 2{,}5\cdot10^{-4} + 2\cdot5{,}0\cdot10^{-5})\cdot2{,}0\cdot10^3] +$$

$$+ \exp[-(2\cdot1{,}5\cdot10^{-4} + 2{,}5\cdot10^{-4} + 2\cdot5{,}0\cdot10^{-5})\cdot2{,}0\cdot10^3] =$$

$$= 4\cdot\exp(-0{,}9) - 2\cdot\exp(-1{,}2) - 2\cdot\exp(-1{,}0) + \exp(-1{,}3) \approx$$

$$\approx 4\cdot0{,}41 - 2\cdot0{,}3 - 2\cdot0{,}37 + 0{,}27 \approx 1{,}64 - 0{,}6 - 0{,}74 + 0{,}27 \approx 0{,}57.$$

Частота відмов ЗВ дорівнює

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = 4(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\exp[-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t] -$$
$$-2(2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\exp[-(2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t] -$$
$$-2(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)\exp[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)t] +$$
$$+(2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)\exp[-(2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)t].$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$f_c(2000) = 4\cdot 4{,}5\cdot 10^{-4}\cdot\exp(-0{,}9) - 2\cdot 6{,}0\cdot 10^{-4}\cdot\exp(-1{,}2) - 2\cdot 5{,}0\cdot 10^{-4}\cdot\exp(-1{,}0) +$$
$$+ 6{,}5\cdot 10^{-4}\cdot\exp(-1{,}3) \approx 18\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}41 - 12\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}3 - 10^{-3}\cdot 0{,}37 +$$
$$+ 6{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}27 \approx 7{,}38\cdot 10^{-4} - 3{,}6\cdot 10^{-4} - 3{,}7\cdot 10^{-4} + 1{,}755\cdot 10^{-4} \approx 1{,}84 \text{ 1/год.}$$

Інтенсивність відмов ЗВ дорівнює

$$\lambda_c(2000) = \frac{f_c(2000)}{P_c(2000)} = \frac{1{,}84\cdot 10^{-4}}{0{,}57} \approx 3{,}23\cdot 10^{-7} \text{ 1/год.}$$

Середній час безвідмовної роботи ЗВ дорівнює

$$m_{tc} = \int_0^\infty P_c(t)dt = \frac{4}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} - \frac{2}{2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} - \frac{2}{\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3} + \frac{1}{2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3}.$$

$$m_{tc} = \frac{4}{4{,}5\cdot 10^{-4}} - \frac{2}{6{,}0\cdot 10^{-4}} - \frac{2}{5{,}0\cdot 10^{-4}} + \frac{1}{6{,}5\cdot 10^{-4}} \approx 8889 - 3333 - 4000 + 1539 \approx$$
$$\approx 3095 \text{ год.}$$

Завдання 5.4. Нерезервований засіб вимірювання складається з n = 100 рівнонадійних елементів. Для підвищення надійності ЗВ пропонується здійснити роздільне дублювання елементів. Справедливий експоненціальний закон надійності елементів, також основний та резервний канали рівнонадійні. Потрібно визначити необхідну середню інтенсивність відмов одного елементу, щоб забезпечити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$ = 0,95 за час t = 100 годин.

Рішення. Ймовірність безвідмовної роботи ВС при загальному дублюванні та рівнонадійних елементах буде дорівнювати

$$P_c(t) = \left\{1 - [1 - p(t)]^2\right\}^n,$$

де $p(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи одного елементу.

Необхідно, щоб $P_c(t) \geq 0{,}95$, тобто

$$\{1 - [1 - p(t)]^2\}^n \geq 0{,}95;$$

$$0{,}05 \geq [1 - p^2(t)]^n;$$

$$\sqrt[n]{0{,}05} \geq 1 - p^2(t);$$

$$p(t) \geq \sqrt{1 - \sqrt[n]{0{,}05}}.$$

Після розкладання $\sqrt[n]{0{,}05} = (1 - 0{,}95)^{1/n}$ по ступеню $1/n$ у ряд і, не враховуючи членами ряду вищого порядку малості, отримаємо

$$(1 - 0{,}95)^{1/100} \approx 1 - \frac{1}{100} 0{,}95 \approx 1 - 9{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

З урахуванням експоненціального закону надійності елементів

$$p(t) = \exp(-\lambda t) \approx 1 - \lambda t,$$

отримаємо

$$1 - \lambda t \leq \sqrt{1 - 1 + 9{,}5 \cdot 10^{-3}}.$$

Таким чином, середня інтенсивність відмов одного елементу повинна бути

$$\lambda \leq \frac{1 - \sqrt{9{,}5 \cdot 10^{-3}}}{t} \approx \frac{1 - 0{,}21}{100} \approx 7{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ 1/год.}$$

5.3 Завдання для самостійного виконання

Завдання 5.5. У засобі вимірювання для підвищення надійності застосовано дублювання всіх його елементів. Засіб вимірювання містить: 5 транзисторів з інтенсивністю відмов $\lambda_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/год.; 10 резисторів з $\lambda_2 = 0{,}35 \cdot 10^{-5}$ 1/год.; 3 конденсатори з $\lambda_3 = 0{,}4 \cdot 10^{-5}$ 1/год.; 4 діоди з $\lambda_4 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/год.; 3 котушки індуктивності з $\lambda_5 = 0{,}75 \cdot 10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності елементів ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$ за час $t = 500$ годин.

Завдання 5.6. Засіб вимірювання складається з трьох рівнонадійних блоків, для підвищення надійності ЗВ застосовано роздільне резервування блоків (рис. 5.4). Інтенсивність відмов блоку дорівнює $\lambda = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності блоків ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$ за час $t = 2000$ годин та середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

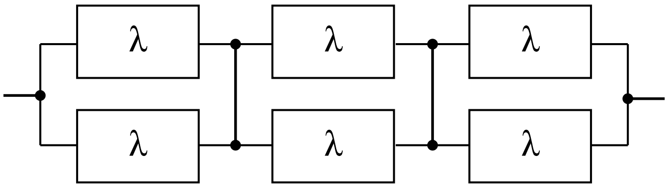


Рисунок 5.4 – Схема розрахунку надійності ЗВ

Завдання 5.7. Засіб вимірювання складається з трьох блоків, для підвищення надійності ЗВ застосовано резервування першого і третього блоків (рис. 5.3). Інтенсивність відмов першого та третього блоків дорівнює $\lambda_1 = \lambda_3 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год.; другого – $\lambda_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності блоків ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ЗВ за час $t = 1000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

Завдання 5.8. У засобі вимірювання для підвищення надійності застосовано дублювання всіх його елементів. Засіб вимірювання містить: 3 транзистори з інтенсивністю відмов $\lambda_1 = 3{,}0 \cdot 10^{-5}$ 1/год.; 5 резисторів з $\lambda_2 = 0{,}4 \cdot 10^{-5}$ 1/год.; 3 конденсатора з $\lambda_3 = 0{,}35 \cdot 10^{-5}$ 1/год.; 3 діоди з $\lambda_4 = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності елементів ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$ за час $t = 2000$ годин.

Завдання 5.9. Засіб вимірювання складається з трьох рівнонадійних блоків, для підвищення надійності ЗВ застосовано роздільне резервування блоків (рис. 5.4). Інтенсивність відмов блоку дорівнює $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності блоків ЗВ. Необхідно визначити частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ЗВ за час $t = 4000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

Завдання 5.10. Засіб вимірювання складається з трьох блоків, для підвищення надійності ЗВ застосовано резервування першого і третього блоків (рис. 5.3). Інтенсивність відмов першого блоку дорівнює $\lambda_1 = 4{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год.; другого – $\lambda_2 = 5{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/год.; третього – $\lambda_3 = 6{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності блоків ЗВ. Необхідно визначити частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ЗВ за час $t = 500$ годин.

Завдання 5.11. Засіб вимірювання складається з двох рівнонадійних блоків, для підвищення надійності ЗВ застосовано роздільне резервування блоків (рис. 5.2). Інтенсивність відмов блоку дорівнює $\lambda = 4{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності блоків ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$ за час $t = 500$ годин та середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

Завдання 5.12. Нерезервований засіб вимірювання складається з $n = 50$ рівнонадійних елементів. Для підвищення надійності ЗС пропонується здійснити роздільне дублювання елементів. Справедливий експоненціальний закон надійності елементів, також основний та резервний канали рівнонадійні. Потрібно визначити необхідну середню інтенсивність відмов одного елементу, щоб забезпечити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t) = 0{,}9$ за час $t = 1000$ годин.

Питання для самоперевірки:

1. З якою метою застосовують роздільне резервування та в чому його переваги та недоліки ?
2. В чому різниця між роздільним резервуванням та поелементним резервуванням ?
3. Яке резервування забезпечує більшу надійність, при малих інтенсивностях відмов елементів, загальне чи роздільне резервування ?
4. В чому переваги та недоліки загального, роздільного та змішаного резервування ?
5. Що розуміють під коефіцієнтом підвищення надійності ?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6

РОЗРАХУНОК ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІД ЧАС РЕЗЕРВУВАННЯ З ДРОБОВОЮ КРАТНІСТЮ

Навчальна мета заняття

закріпити знання щодо методів визначення показників надійності вимірювальних систем під час резервування з дробовою кратністю;

отримати практичні навички щодо розрахунку показників надійності вимірювальних систем під час резервування з дробовою кратністю та постійно включеним резервом.

6.1 Відомості з теорії. Загальні відомості про показники надійності систем під час резервування з дробовою кратністю та постійно включеним резервом

Розглянемо кількісні характеристики надійності при постійно включеному резерві. В цьому випадку резервована система складається з n окремих систем (рис. 6.1). Для нормальної роботи системи необхідно, щоб справними були не менше ніж k систем.

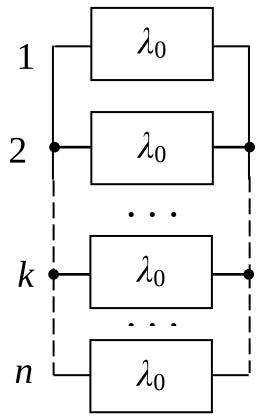


Рисунок 6.1 – Структурна схема системи під час резервування з дробовою кратністю та постійно включеним резервом

Кратність резервування такої системи дорівнює

$$m = \frac{n-k}{k}. \tag{6.1}$$

При резервуванні з дробовою кратністю величина m є дробовим число, яке не можна скорочувати. Наприклад, $m = \frac{4}{2}$ означає наявність резервування з дробовою кратністю, при якому число резервних елементів рівне 4, число основних – 2. Це резервування має місце, наприклад, у системах електропостачання, коли всі генератори працюють паралельно по виходу, а для нормальної роботи системи достатньо працездатності меншого числа генераторів. Резервована вказаним способом система працюватиме нормально при наступних можливих ситуаціях (H_i): жоден з генераторів не відмовив; відмовив один генератор; відмовили два генератора системи и т.д. Якщо відмовить більше $n-k$ генераторів, то система буде не працездатною.

Приймаючи вказані ситуації за гіпотези, ймовірність безвідмовної роботи можна записати у вигляді

$$P_c(t)=\sum_{i=0}^{n-k}P(H_i)\,, \tag{6.2}$$

де H_i – гіпотеза, що полягає в тому, що резервована система працює справно при відмові i будь-яких систем;

$P(H_i)$ – ймовірність появи гіпотези H_i;

$n-k$ – кількість резервних систем.

Відмови окремих систем є подіями незалежними, такими, що відбуваються за однакових умов роботи окремих систем. В цьому випадку ймовірність появи гіпотез підпорядковується біноміальному розподілу

$$P(H_i)=C_n^iP_0^{n-i}(t)q_0^i(t)\,, \tag{6.3}$$

де $C_n^i=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ – кількість поєднань ($C_n^1=n$; $C_n^n=C_n^0=1$);

$P_0(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи основної системи або будь-якої резервної системи;

$q_0(t)$ – ймовірність відмови однієї системи.

Розрахунок надійності системи при резервуванні з дробовою кратністю, як правило проводять при наступних припущеннях: відмови елементів задовольняють умовам простого потоку випадкових подій; перемикальні пристрої ідеальні; основна та всі резервні системи рівнонадійні. Ці припущення означають, що для будь-якої окремо взятої системи справедливий експоненціальний закон надійності, причому всі резервні елементи знаходяться у робочому стані з моменту включення резервованої системи у роботу. В цьому випадку ймовірність безвідмовної роботи резервованої системи дорівнює

$$P_c(t)=\sum_{i=0}^{n-k}C_n^iP_0^{n-i}(t)\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_i^jP_0^j(t)\,, \tag{6.4}$$

де n – загальна кількість основних і резервних систем;

k – кількість систем, необхідних для нормальної роботи.

На рис. 6.1 інтенсивність відмов будь-якої з систем позначена λ_0. При експоненціальному законі надійності, тобто

$$P_0(t) = \exp\left(-\lambda_0 t\right), \tag{6.5}$$

середній час безвідмовної роботи системи дорівнює

$$m_{tc} = \int_0^{\infty} P_c(t)dt = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{1}{k+i}. \tag{6.6}$$

Окремим випадком резервування з дробовою кратністю є **мажоритарне резервування**, яке часто використовується у системах дискретної дії, тобто у цифрових системах.

При мажоритарному резервуванні сигнал у двійковому коді (логічні 0 або 1) подається на непарне число ідентичних елементів. З виходів цих елементів сигнали поступають на вхід так званого вирішального елементу, який виділяє безпомилковий сигнал з груп сигналів, серед яких можуть бути і помилкові. Вихідний сигнал формується на основі закону функціонування вирішального елементу. Найбільш поширеним законом функціонування елементу є **закон більшості**, або **мажоритарний закон**, тому вирішальний елемент, що реалізовує цей закон, називається **мажоритарним**.

Вихідний сигнал такого елементу завжди приймає значення, рівне значенню більшості вхідних сигналів.

Найбільш часто застосовується мажоритарне резервування елементів, яке реалізує операцію “два з трьох” (рис. 6.2).

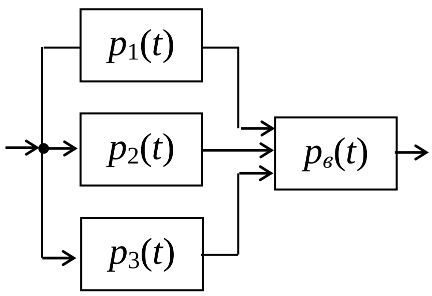


Рисунок 6.2 – Проста схема мажоритарного резервування

Визначимо ймовірність безвідмовної роботи мажоритарно резервованого елементу, якщо відомі надійності ідентичних елементів $p_i(t)$ (i = 1, ..., 3) та вирішального елементу $p_в(t)$. Для наочного представлення результатів складемо таблицю істинності (табл. 6.1), що відображає всі можливі стани елементів (0 – відмова елементу, 1 – працездатний елемент), які показані на рис. 6.2.

Таблиця 6.1 – Можливі стани елементів

Перший елемент	Другий елемент	Третій елемент	Вирішальний елемент
0	1	1	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	0
1	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1
1	0	1	1

З врахуванням рівно надійності основних елементів, тобто $p_i(t) = p(t)$, $i = 1, \ldots, 3$ та використовуючи дані табл. 6.1, можна знайти ймовірність безвідмовної роботи мажоритарно резервованого елементу $P_M(t)$ у припущенні, що вирішальний елемент має ідеальну надійність $p_в(t) = 1$.

Виберемо тільки ті рядки з табл. 6.1 для яких вирішальний елемент приймає рішення про працездатність резервованого елементу, тобто дорівнює одиницям в останньому стовпці. Для цього випадку можна записати

$$P_M(t) = q_1(t)p_2(t)p_3(t) + p_1(t)p_2(t)p_3(t) + p_1(t)p_2(t)q_3(t) + p_1(t)q_2(t)p_3(t). \quad (6.7)$$

Після підстановки у (6.7) виразів $p_i(t) = p(t)$ та $q_i(t) = 1 – p(t)$ отримаємо

$$P_M(t) = p^2(t)[3 - 2p(t)]. \quad (6.8)$$

Якщо вирішальний елемент неідеальний

$$P_M(t) = p^2(t)\, p_в(t)[3 - 2p(t)]. \quad (6.9)$$

Крім мажоритарних елементів, що реалізовують операцію “два з трьох”, також застосовують і більш складні операції, наприклад, операцію “три з п'яти” та ін.

6.2 Порядок виконання типових завдань

Завдання 6.1. Система електропостачання вимірювальної системи складається з чотирьох генераторів ($n = 4$), номінальна потужність кожного з яких 2 кВт. Вимірювальна системи є працездатною, якщо система електропостачання може забезпечувати потужність 3 кВт. Інтенсивність відмов кожного з генераторів дорівнює $\lambda_0 = 4{,}0 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності генераторів. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи системи енергопостачання $P_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ системи енергопостачання за час t = 1000 годин, а також середній час безвідмовної роботи системи енергопостачання m_{tc}.

Рішення. Для працездатності вимірювальної системи достатньо двох генераторів (k = 2), оскільки їх сумарна потужність складає 4 кВт. Це означає, що відмова системи електропостачання ще не наступить, якщо відмовлять один або два будь-яких генератора, тобто має місце випадок резервування з дробовою кратністю

$$m = \frac{n-k}{k} = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2}.$$

З використанням виразу $P_c(t) = \sum_{i=0}^{n-k} C_n^i P_0^{n-i}(t) \sum_{j=0}^{i} (-1)^j C_i^j P_0^j(t)$ отримаємо

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^{2} C_4^i P_0^{4-i}(t) \sum_{j=0}^{i} (-1)^j C_i^j P_0^j(t) = C_4^0 P_0^4(t) C_0^0 P_0^0(t) +$$
$$+ C_4^1 P_0^3(t) \left[C_1^0 P_0^0(t) - C_1^1 P_0^1(t) \right] + C_4^2 P_0^2(t) \left[C_2^0 P_0^0(t) - C_2^1 P_0^1(t) + C_2^2 P_0^2(t) \right].$$

З урахування $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$; $C_n^1 = n$; $C_n^n = C_n^0 = 1$ отримаємо

$$C_4^0 = 1;\; C_0^0 = 1;\; C_4^1 = 4;\; C_1^0 = 1;\; C_1^1 = 1;\; C_4^2 = 6;\; C_2^0 = 1;\; C_2^1 = 2;\; C_2^2 = 1.$$

Після підстановки цих значень отримаємо вираз для ймовірності безвідмовної роботи системи енергопостачання

$$P_c(t) = 1 \cdot P_0^4(t) \cdot 1 \cdot P_0^0(t) + 4 \cdot P_0^3(t) \left[1 \cdot P_0^0(t) - 1 \cdot P_0^1(t) \right] + 6 \cdot P_0^2(t) \left[1 \cdot P_0^0(t) - \right.$$
$$\left. - 2 \cdot P_0^1(t) + 1 \cdot P_0^2(t) \right] = P_0^4(t) P_0^0(t) + 4 \cdot P_0^3(t) P_0^0(t) - 4 \cdot P_0^3(t) P_0^1(t) +$$
$$+ 6 \cdot P_0^2(t) P_0^0(t) - 12 \cdot P_0^2(t) P_0^1(t) + 6 \cdot P_0^2(t) P_0^2(t) = P_0^4(t) + 4 \cdot P_0^3(t) -$$
$$- 4 \cdot P_0^4(t) + 6 \cdot P_0^2(t) - 12 \cdot P_0^3(t) + 6 \cdot P_0^4(t) = 3 \cdot P_0^4(t) - 8 \cdot P_0^3(t) + 6 \cdot P_0^2(t).$$

З урахуванням експоненціального закону надійності елементів

$$p(t) = \exp(-\lambda_0 t),$$

отримаємо

$$P_c(t) = 3\cdot\exp(-4\lambda_0 t) - 8\cdot\exp(-3\lambda_0 t) + 6\cdot\exp(-2\lambda_0 t).$$

Для t = 1000 годин з використанням додатку Д отримаємо

$$P_c(1000) = 3\cdot\exp(-4\cdot 4{,}0\cdot 10^{-4}\cdot 10^3) - 8\cdot\exp(-3\cdot 4{,}0\cdot 10^{-4}\cdot 10^3) +$$

$$+ 6\cdot\exp(-2\cdot 4{,}0\cdot 10^{-4}\cdot 10^3) = 3\cdot\exp(-1{,}6) - 8\cdot\exp(-1{,}2) + 6\cdot\exp(-0{,}8) \approx$$

$$\approx 0{,}6 - 2{,}4 + 2{,}7 \approx 0{,}9.$$

Частота відмов системи енергопостачання дорівнює

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = 12\lambda_0 \exp(-4\lambda_0 t) - 24\lambda_0 \exp(-3\lambda_0 t) + 12\lambda_0 \exp(-2\lambda_0 t).$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$f_c(1000) = 12\cdot 4{,}0\cdot 10^{-4}\cdot\exp(-1{,}6) - 24\cdot 4{,}0\cdot 10^{-4}\cdot\exp(-1{,}2) +$$

$$+ 12\cdot 4{,}0\cdot 10^{-4}\cdot\exp(-0{,}8) \approx 4{,}8\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}2 - 9{,}6\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}3 + 4{,}8\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}45 \approx$$

$$\approx 9{,}6\cdot 10^{-4} - 28{,}8\cdot 10^{-4} + 21{,}6\cdot 10^{-4} \approx 2{,}4\cdot 10^{-4} \text{ 1/год.}$$

Інтенсивність відмов системи енергопостачання дорівнює

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{12\lambda_0 \exp(-2\lambda_0 t)[\exp(-2\lambda_0 t) - 2\exp(-\lambda_0 t) + 1]}{\exp(-2\lambda_0 t)[3\exp(-2\lambda_0 t) - 8\exp(-\lambda_0 t) + 6]} =$$

$$= \frac{12\lambda_0[\exp(-2\lambda_0 t) - 2\exp(-\lambda_0 t) + 1]}{3\exp(-2\lambda_0 t) - 8\exp(-\lambda_0 t) + 6}.$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$\lambda_c(1000) = \frac{12\cdot 4{,}0\cdot 10^{-4}[\exp(-0{,}8) - 2\exp(-0{,}4) + 1]}{3\exp(-0{,}8) - 8\exp(-0{,}4) + 6} \approx$$

$$\approx \frac{4{,}8\cdot 10^{-3}(0{,}45 - 2\cdot 0{,}67 + 1)}{3\cdot 0{,}45 - 8\cdot 0{,}67 + 6} \approx \frac{4{,}8\cdot 10^{-3}(0{,}45 - 2\cdot 0{,}67 + 1)}{3\cdot 0{,}45 - 8\cdot 0{,}67 + 6} \approx$$

$$\approx \frac{5{,}28\cdot 10^{-4}}{1{,}99} \approx 2{,}65\cdot 10^{-4} \text{ 1/год.},$$

або

$$\lambda_c(1000) = \frac{f_c(1000)}{P_c(1000)} = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-4}}{0{,}9} \approx 2{,}67 \cdot 10^{-4} \text{ 1/год.}$$

Середній час безвідмовної роботи системи енергопостачання з використанням виразу $m_{tc} = \int_0^\infty P_c(t)dt = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{1}{k+i}$ дорівнює

$$m_{tc} = \frac{1}{4{,}0 \cdot 10^{-4}}\sum_{i=0}^{2}\frac{1}{2+i} = \frac{1}{4{,}0 \cdot 10^{-4}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{12 \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-4}} \approx 2708 \text{ годин.}$$

Завдання 6.2. Для підвищення точності вимірювання застосовується вимірювальна система, яка складається з п'яти засобів вимірювання ($n = 5$). Результат вимірювання вважається правильним за показаннями трьох ЗВ з п'яти ($k = 3$). Інтенсивність відмов кожного з ЗВ $\lambda_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ВС $P_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ВС за час $t = 2000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ВС m_{tc}.

Рішення. Вимірювальна система буде працездатною, якщо працездатні три та більше засобів вимірювання. Має місце загальне резервування з дробовою кратністю

$$m = \frac{n-k}{k} = \frac{5-3}{3} = \frac{2}{3}.$$

З використанням виразу $P_c(t) = \sum_{i=0}^{n-k} C_n^i P_0^{n-i}(t)\sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_i^j P_0^j(t)$ отримаємо

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^{2} C_5^i P_0^{5-i}(t)\sum_{j=0}^{i}(-1)^j C_i^j P_0^j(t) = C_5^0 P_0^5(t) C_0^0 P_0^0(t) +$$
$$+ C_5^1 P_0^4(t)\left[C_1^0 P_0^0(t) - C_1^1 P_0^1(t)\right] + C_5^2 P_0^3(t)\left[C_2^0 P_0^0(t) - C_2^1 P_0^1(t) + C_2^2 P_0^2(t)\right].$$

З урахування $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$; $C_n^1 = n$; $C_n^n = C_n^0 = 1$ отримаємо

$$C_5^0 = 1;\ C_0^0 = 1;\ C_5^1 = 5;\ C_1^0 = 1;\ C_1^1 = 1;\ C_5^2 = 10;\ C_2^0 = 1;\ C_2^1 = 2;\ C_2^2 = 1.$$

Після підстановки цих значень отримаємо вираз для ймовірності безвідмовної роботи ВС

$$P_c(t)=1\cdot P_0^5(t)\cdot 1\cdot P_0^0(t)+5\cdot P_0^4(t)\left[1\cdot P_0^0(t)-1\cdot P_0^1(t)\right]+10\cdot P_0^3(t)\left[1\cdot P_0^0(t)-\right.$$
$$\left.-2\cdot P_0^1(t)+1\cdot P_0^2(t)\right]=P_0^5(t)P_0^0(t)+5\cdot P_0^4(t)P_0^0(t)-5\cdot P_0^4(t)P_0^1(t)+$$
$$+10\cdot P_0^3(t)P_0^0(t)-20\cdot P_0^3(t)P_0^1(t)+10\cdot P_0^3(t)P_0^2(t)=P_0^5(t)+5\cdot P_0^4(t)-$$
$$-5\cdot P_0^5(t)+10\cdot P_0^3(t)-20\cdot P_0^4(t)+10\cdot P_0^5(t)=6\cdot P_0^5(t)-15\cdot P_0^4(t)+10\cdot P_0^3(t).$$

З урахуванням експоненціального закону надійності елементів

$$p(t) = \exp(-\lambda_0 t),$$

отримаємо

$$P_c(t) = 6\cdot\exp(-5\lambda_0 t) - 15\cdot\exp(-4\lambda_0 t) + 10\cdot\exp(-3\lambda_0 t).$$

З використанням додатку Д для t = 2000 годин отримаємо

$$P_c(2000) = 6\cdot\exp(-5\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 2\cdot 10^3) - 15\cdot\exp(-4\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 2\cdot 10^3) +$$
$$+ 10\cdot\exp(-3\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 2\cdot 10^3) = 6\cdot\exp(-1{,}5) - 15\cdot\exp(-1{,}2) + 10\cdot\exp(-0{,}9) \approx$$
$$\approx 6\cdot 0{,}22 - 15\cdot 0{,}3 + 10\cdot 0{,}41 \approx 1{,}32 - 4{,}5 + 4{,}1 \approx 0{,}92.$$

Частота відмов ВС дорівнює

$$f_c(t)=-\frac{dP_c(t)}{dt}=30\lambda_0\exp(-5\lambda_0 t)-60\lambda_0\exp(-4\lambda_0 t)+30\lambda_0\exp(-3\lambda_0 t)=$$
$$=30\lambda_0\exp(-3\lambda_0 t)\left[\exp(-2\lambda_0 t)-2\lambda_0\exp(-\lambda_0 t)+1\right]=$$
$$=30\lambda_0\exp(-3\lambda_0 t)\left[1-\exp(-\lambda_0 t)\right]^2.$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$f_c(2000) = 30\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}\cdot\exp(-0{,}9)\cdot[1 - \exp(-0{,}3)]^2 \approx$$
$$\approx 4{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}41\cdot[1 - 0{,}74]^2 \approx 4{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}41\cdot 0{,}0676 \approx 1{,}25\cdot 10^{-4}\ 1/\text{год}.$$

Інтенсивність відмов ВС дорівнює

$$\lambda_c(t)=\frac{f_c(t)}{P_c(t)}=\frac{30\lambda_0\exp(-3\lambda_0 t)\left[1-\exp(-\lambda_0 t)\right]^2}{\exp(-3\lambda_0 t)\left[6\exp(-2\lambda_0 t)-15\exp(-\lambda_0 t)+10\right]}=$$
$$=\frac{30\lambda_0\left[1-\exp(-\lambda_0 t)\right]^2}{6\exp(-2\lambda_0 t)-15\exp(-\lambda_0 t)+10}.$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$\lambda_c(2000) = \frac{30\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}\left[1-\exp(-0{,}3)\right]^2}{6\exp(-0{,}6)-15\exp(-0{,}3)+10} \approx \frac{4{,}5\cdot 10^{-3}(1-0{,}74)^2}{6\cdot 0{,}55-15\cdot 0{,}74+10} \approx$$

$$\approx \frac{4{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}0676}{3{,}3-11{,}1+10} \approx \frac{3{,}04\cdot 10^{-4}}{2{,}2} \approx 1{,}38\cdot 10^{-4}\ 1/\text{год.},$$

або

$$\lambda_c(2000) = \frac{f_c(2000)}{P_c(2000)} = \frac{1{,}25\cdot 10^{-4}}{0{,}92} \approx 1{,}36\cdot 10^{-4}\ 1/\text{год.}$$

Середній час безвідмовної роботи ВС з використанням виразу $m_{tc} = \int\limits_0^\infty P_c(t)dt = \frac{1}{\lambda_0}\sum\limits_{i=0}^{n-k}\frac{1}{k+i}$ дорівнює

$$m_{tc} = \frac{1}{1{,}5\cdot 10^{-4}}\sum_{i=0}^{2}\frac{1}{3+i} = \frac{1}{1{,}5\cdot 10^{-4}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) = \frac{47}{60\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}} \approx 5222\ \text{години.}$$

Завдання 6.3. Для підвищення точності вимірювання застосовується вимірювальна система, яка складається з трьох засобів вимірювання ($n = 3$) та вирішального блока (див. рис. 6.2). На виході вирішального блока результат вимірювання вважається правильним за показаннями двох ЗВ ($k = 2$). Ймовірність безвідмовної роботи першого ЗВ дорівнює $p_1(t) = 0{,}98$; другого – $p_2(t) = 0{,}99$; третього – $p_3(t) = 0{,}985$, вирішальний блок має ідеальну надійність $p_в(t) = 1$. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ВС $P_c(t)$.

Рішення. Вимірювальна система буде працездатною, якщо на вхід вирішального блоку надходять вимірювання від двох та більше засобів вимірювання. Має місце мажоритарне резервування.

За допомогою табл. 6.1, та з урахуванням, що $q_i(t) = 1 - p_i(t)$, отримаємо ймовірність безвідмовної роботи

$$P_c(t) = q_1(t)p_2(t)p_3(t) + p_1(t)p_2(t)p_3(t) + p_1(t)p_2(t)q_3(t) + p_1(t)q_2(t)p_3(t) =$$

$$= 0{,}02\cdot 0{,}99\cdot 0{,}985 + 0{,}98\cdot 0{,}99\cdot 0{,}985 + 0{,}98\cdot 0{,}99\cdot 0{,}015 + 0{,}98\cdot 0{,}01\cdot 0{,}985 \approx$$
$$\approx 0{,}0195 + 0{,}9557 + 0{,}0146 + 0{,}0097 \approx 0{,}9995.$$

Завдання 6.4. Для підвищення точності вимірювання застосовується вимірювальна система, яка складається з трьох рівнонадійних засобів вимірювання ($n = 3$) та вирішального блока (див. рис. 6.2). На виході вирішального блока результат вимірювання вважається правильним за показаннями двох ЗВ ($k = 2$). Інтенсивність відмов кожного ЗВ дорівнює

$\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год., а інтенсивність відмови вирішального блока – $\lambda_в = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності ВС. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ВС $P_c(t)$ за час $t = 1000$ годин.

Рішення. Вимірювальна система буде працездатною, якщо на вхід вирішального блоку надходять вимірювання від двох та більше засобів вимірювання. Має місце мажоритарне резервування.

З урахуванням, що $p_i(t) = p(t)$, отримаємо ймовірність безвідмовної роботи

$$P_c(t) = p^2(t)\, p_в(t)[3 - 2p(t)]$$

Для експоненціального закону надійності $p(t) = \exp(-\lambda t)$, отримаємо

$$P_c(t) = \exp(-2\lambda t) \cdot \exp(-\lambda_в t)\, [3 - 2 \cdot \exp(-\lambda t)].$$

Для $t = 1000$ годин з використанням додатку Д отримаємо

$$P_c(1000) = \exp(-2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3) \cdot \exp(-1{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3)\, [3 - 2 \cdot \exp(-2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3)] =$$

$$= \exp(-0{,}5) \cdot \exp(-0{,}015)\, [3 - 2 \cdot \exp(-0{,}25)] \approx 0{,}61\ 0{,}985\ (3 - 2 \cdot 0{,}78) \approx$$

$$\approx 0{,}61\ 0{,}985\ 1{,}44 \approx 0{,}865.$$

6.3 Завдання для самостійного виконання

Завдання 6.5. Для підвищення точності вимірювання застосовується вимірювальна система, яка складається з трьох засобів вимірювання. Результат вимірювання вважається правильним за показаннями двох ЗВ з трьох. Інтенсивність відмов кожного з ЗВ $\lambda_0 = 4{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ВС $P_c(t)$ за час $t = 1000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ВС m_{tc}.

Завдання 6.6. Система електропостачання вимірювальної системи складається з п'яти генераторів, номінальна потужність кожного з яких 1 кВт. Вимірювальна системи є працездатною, якщо система електропостачання може забезпечувати потужність 3 кВт. Інтенсивність відмов кожного з генераторів дорівнює $\lambda_0 = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності генераторів. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи системи енергопостачання $P_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ системи енергопостачання за час $t = 500$ годин.

Завдання 6.7. Для підвищення точності вимірювання застосовується вимірювальна система, яка складається з чотирьох засобів вимірювання. Результат вимірювання вважається правильним за показаннями двох ЗВ з чотирьох. Інтенсивність відмов кожного з ЗВ $\lambda_0 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ВС $P_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ВС за час $t = 1000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ВС m_{tc}.

Завдання 6.8. Система електропостачання вимірювальної системи складається з трьох генераторів, номінальна потужність кожного з яких 3 кВт. Вимірювальна системи є працездатною, якщо система електропостачання може забезпечувати потужність 4 кВт. Інтенсивність відмов кожного з генераторів дорівнює $\lambda_0 = 2,5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності генераторів. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи системи енергопостачання $P_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ системи енергопостачання за час $t = 500$ годин, а також середній час безвідмовної роботи системи енергопостачання m_{tc}.

Завдання 6.9. Для підвищення точності вимірювання застосовується вимірювальна система, яка складається з п'яти засобів вимірювання та вирішального блока. На виході вирішального блока результат вимірювання вважається правильним за показаннями трьох ЗВ. Ймовірність безвідмовної роботи першого ЗВ дорівнює $p_1(t) = 0,96$; другого – $p_2(t) = 0,97$; третього – $p_3(t) = 0,98$; четвертого – $p_4(t) = 0,975$; п'ятого – $p_5(t) = 0,985$, вирішальний блок має ідеальну надійність $p_в(t) = 1$. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ВС $P_c(t)$.

Завдання 6.10. Для підвищення точності вимірювання застосовується вимірювальна система, яка складається з п'яти рівнонадійних засобів вимірювання та вирішального блока. На виході вирішального блока результат вимірювання вважається правильним за показаннями трьох ЗВ. Інтенсивність відмов кожного ЗВ дорівнює $\lambda = 5,0 \cdot 10^{-5}$ 1/год., вирішальний блок має ідеальну надійність $p_в(t) = 1$. Справедливий експоненціальний закон надійності ВС. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ВС $P_c(t)$ за час $t = 2000$ годин.

Завдання 6.11. Для підвищення точності вимірювання застосовується вимірювальна система, яка складається з чотирьох засобів вимірювання та вирішального блока. На виході вирішального блока результат вимірювання вважається правильним за показаннями двох ЗВ. Ймовірність безвідмовної роботи першого ЗВ дорівнює $p_1(t) = 0,97$; другого – $p_2(t) = 0,96$; третього – $p_3(t) = 0,98$; четвертого – $p_4(t) = 0,975$, вирішальний блок має надійність $p_в(t) = 0,98$. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ВС $P_c(t)$.

Завдання 6.12. Для підвищення точності вимірювання застосовується вимірювальна система, яка складається з чотирьох рівнонадійних засобів вимірювання та вирішального блока. На виході вирішального блока результат вимірювання вважається правильним за показаннями двох ЗВ. Інтенсивність відмов кожного ЗВ дорівнює $\lambda = 4,5 \cdot 10^{-5}$ 1/год., а інтенсивність відмови вирішального блока – $\lambda_в = 1,5 \cdot 10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності ВС. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ВС $P_c(t)$ за час t = 2000 годин.

Питання для самоперевірки:

1. Що таке дробова кратність резервування ?
2. В яких випадках застосовують резервування дробовою кратністю та постійно включеним резервом ?
3. В чому переваги та недоліки резервування дробовою кратністю та постійно включеним резервом ?
4. Що таке мажоритарне резервуванням, в яких випадках застосовують елементів та в чому його переваги і недоліки ?
5. Які операції найчастіше реалізовують у мажоритарних елементах ?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7

РОЗРАХУНОК ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ З КОВЗАЮЧИМ РЕЗЕРВУВАННЯМ

Навчальна мета заняття

закріпити знання щодо методів визначення показників надійності вимірювальних систем з ковзаючим резервуванням;

отримати практичні навички щодо розрахунку показників надійності вимірювальних систем з ковзаючим резервуванням та експоненціальним законом надійності.

7.1 Відомості з теорії. Загальні відомості про показники надійності систем з ковзаючим резервуванням

При ковзаючому резервуванні резервний елемент може бути включений замість будь-якого з елементів основної системи, що відмовили. Структурна схема системи з ковзаючим резервуванням наведена на рис. 7.1.

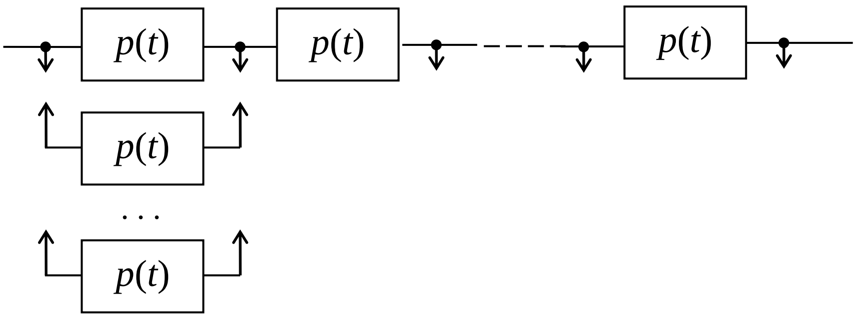


Рисунок 7.1 – Структурна схема системи з ковзаючим резервуванням

У системі з ковзаючим резервуванням спочатку працюють основні елементів, а резервні елементи не працюють (знаходяться у черзі на роботу). При відмові будь-якого основного елементу він замінюється новим з числа резервних, який починає виконувати функції основного елементу. При цьому кількість резервних елементів зменшується. При відмові наступного основного елементу він знову замінюється новим з числа резервних і так далі. Відмова системи наступає, коли будуть витрачені всі резервні елементи та відмовить будь-який з основних елементів.

Ковзаюче резервування є резервуванням заміщенням з кратністю

$$m = \frac{m_0}{n}, \qquad (7.1)$$

де n – число елементів основної системи;

m_0 – кількість резервних елементів, що знаходяться у ненавантаженому резерві.

Ймовірність безвідмовної роботи системи з ковзаючим резервом за умови, що всі елементи системи мають однакову надійність та справедливий експоненціальний закон надійності, дорівнює

$$P_c(t) = \exp(-n\lambda t)\left[1 + n\lambda t + \frac{(n\lambda t)^2}{2!} + ... + \frac{(n\lambda t)^{m_0}}{m_0!}\right] = \exp(-n\lambda t)\sum_{i=0}^{m_0}\frac{(n\lambda t)^i}{i!}, \quad (7.2)$$

де λ – інтенсивність відмови елементу.

З урахуванням, що інтенсивність відмов нерезервованої системи дорівнює $\lambda_0 = \lambda \cdot n$, ймовірність безвідмовної роботи системи з ковзаючим резервуванням визначається співвідношенням

$$P_c(t) = \exp(-\lambda_0 t)\sum_{i=0}^{m_0}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}. \quad (7.3)$$

Середній час безвідмовної роботи резервованої системи визначається формулою

$$m_{tc} = m_{t0}(m_0 + 1), \quad (7.4)$$

де m_{t0} – середній час безвідмовної роботи нерезервованої системи.

7.2 Порядок виконання типових завдань

Завдання 7.1. Засіб вимірювання складається з двох рівнонадійних блоків, для підвищення надійності ЗВ застосовано ковзаюче резервування з одним резервним блоком, який знаходиться у ненавантаженому стані (рис. 7.2). Інтенсивність відмов блоків дорівнює $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності блоків ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ЗВ за час t = 1000 годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

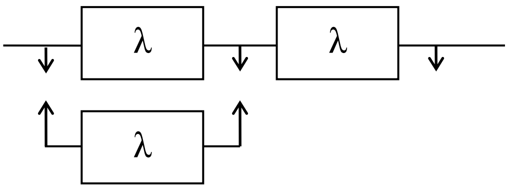


Рисунок 7.2 – Схема розрахунку надійності ЗВ

Рішення. Ймовірність безвідмовної роботи ЗВ з ковзаючим резервуванням та при рівнонадійних блоках, якщо кількість блоків $n = 2$, та кількість резервних елементів дорівнює $m_0 = 1$, $\lambda_0 = n\lambda = 2\lambda$, буде дорівнювати

$$P_c(t) = \exp(-\lambda_0 t)\sum_{i=0}^{1}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!} = \exp(-\lambda_0 t)(1+\lambda_0 t),$$

або

$$P_c(t) = \exp(-2\lambda t)(1+2\lambda t).$$

Для $t = 1000$ годин з використанням додатку Д отримаємо

$$P_c(1000) = \exp(-2\cdot 2{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 10^3)\cdot(1 + 2\cdot 2{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 10^3) =$$

$$= \exp(-0{,}05)\cdot(1 + 0{,}05) \approx 0{,}95\ 1{,}05 \approx 0{,}9975.$$

З урахуванням $(u\cdot v)' = u'\cdot v + v'\cdot u$ та $\left[e^{u(x)}\right]' = e^{u(x)}\left[u(x)\right]'$ частота відмов ЗВ дорівнює

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = -\left\{\left[\exp(-2\lambda t)\right]'\cdot(1+2\lambda t) + (1+2\lambda t)'\cdot\exp(-2\lambda t)\right\} =$$
$$= -\left\{\exp(-2\lambda t)\cdot(-2\lambda t)'\cdot(1+2\lambda t) + \left[1' + (2\lambda t)'\right]\cdot\exp(-2\lambda t)\right\} =$$
$$= -\left\{-2\lambda\exp(-2\lambda t) - 4\lambda^2 t\exp(-2\lambda t) + 0\cdot\exp(-2\lambda t) + 2\lambda\exp(-2\lambda t)\right\} =$$
$$= -\left[-4\lambda^2 t\exp(-2\lambda t)\right] = 4\lambda^2 t\exp(-2\lambda t).$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$f_c(1000) = 4\cdot(2{,}5\cdot 10^{-5})^2\cdot 10^3\cdot\exp(-2\cdot 2{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 10^3) =$$

$$= 4\cdot(2{,}5\cdot 10^{-5})^2\cdot 10^3\cdot\exp(-0{,}05) \approx 2{,}5\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}95 \approx 2{,}375\cdot 10^{-6}\ 1/\text{год}.$$

Інтенсивність відмов ЗВ дорівнює

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{4\lambda^2 t\exp(-2\lambda t)}{\exp(-2\lambda t)(1+2\lambda t)} = \frac{4\lambda^2 t}{1+2\lambda t}.$$

Для $t = 1000$ годин отримаємо

$$\lambda_c(1000) = \frac{4\cdot\left(2{,}5\cdot10^{-5}\right)^2\cdot10^3}{1+2\cdot2{,}5\cdot10^{-5}\cdot10^3} \approx \frac{2{,}5\cdot10^{-6}}{1+0{,}05} \approx 2{,}38\cdot10^{-6}\ 1/\text{год.},$$

або

$$\lambda_c(1000) = \frac{f_c(1000)}{P_c(1000)} = \frac{2{,}375\cdot10^{-6}}{0{,}9975} \approx 2{,}38\cdot10^{-6}\ 1/\text{год.}$$

Середній час безвідмовної роботи ЗВ з використанням виразів $m_{tc} = m_{t0}(m_0+1)$ та $m_{t0} = \dfrac{1}{\lambda_0}$ дорівнює

$$m_{tc} = \frac{1}{2\lambda}(1+1) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2{,}5\cdot10^{-4}} \approx 40000\ \text{годин.}$$

Завдання 7.2. Вимірювальна система складається з десяти однакових рівнонадійних засобів вимірювання. Конструктивно у ВС передбачено заміна будь-якого ЗВ одним з двох ЗВ, що знаходяться у резерві. Інтенсивність відмов ЗВ дорівнює $\lambda = 1{,}5\cdot10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ВС $P_c(t)$ та інтенсивність відмов ВС $\lambda_c(t)$ за час $t = 5000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ВС m_{tc}.

Рішення. У вимірювальній системі реалізоване ковзаюче резервування з кількістю основних ЗВ $n = 10$ та кількістю резервних ЗВ $m_0 = 2$. Ймовірність безвідмовної роботи ВС при рівнонадійних ЗВ, з урахуванням $\lambda_0 = n\lambda = 10\lambda$, буде дорівнювати

$$P_c(t) = \exp(-\lambda_0 t)\sum_{i=0}^{2}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!} = \exp(-\lambda_0 t)\cdot\left(1+\lambda_0 t+\frac{\lambda_0^2 t^2}{2}\right),$$

або

$$P_c(t) = \exp(-10\lambda t)\cdot\left(1+10\lambda t+50\lambda^2 t^2\right).$$

Для $t = 5000$ годин з використанням додатку Д отримаємо

$$P_c(5000) = \exp\left(-10\cdot1{,}5\cdot10^{-5}\cdot5{,}0\cdot10^3\right)\cdot\left[1+10\cdot1{,}5\cdot10^{-5}\cdot5{,}0\cdot10^3+\right.$$
$$\left.+50\cdot\left(1{,}5\cdot10^{-5}\right)^2\cdot\left(5{,}0\cdot10^3\right)^2\right] = \exp(-0{,}75)\cdot(1+0{,}75+0{,}28125)\approx$$
$$\approx 0{,}47\cdot2{,}03125 \approx 0{,}9547.$$

З урахуванням $(u\cdot v)' = u'\cdot v + v'\cdot u$, $(u^n)' = n\cdot u^{n-1}$ та $\left[e^{u(x)}\right]' = e^{u(x)}\left[u(x)\right]'$ частота відмов ВС дорівнює

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = -\Big\{\left[\exp(-10\lambda t)\right]'\cdot\left(1+10\lambda t+50\lambda^2t^2\right)+$$
$$+\left(1+10\lambda t+50\lambda^2t^2\right)'\cdot\exp(-10\lambda t)\Big\} = -\Big\{\exp(-10\lambda t)\cdot(-10\lambda t)'\times$$
$$\times\left(1+10\lambda t+50\lambda^2t^2\right)+\left[0+10\lambda+50\lambda^2t\right]\cdot\exp(-10\lambda t)\Big\} =$$
$$= -\Big\{-10\lambda\exp(-10\lambda t) - 100\lambda^2t\exp(-10\lambda t) - 500\lambda^3t^2\exp(-10\lambda t)+$$
$$+10\lambda\exp(-10\lambda t)+100\lambda^2t\exp(-10\lambda t)\Big\} = 500\lambda^3t^2\exp(-10\lambda t).$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$f_c(5000) = 500\cdot(1{,}5\cdot10^{-5})^3\cdot(5\cdot10^3)^2\cdot\exp(-10\cdot1{,}5\cdot10^{-5}\cdot5\cdot10^3) =$$

$$= 5\cdot(1{,}5\cdot10^{-5})^3\cdot25\cdot10^8\cdot\exp(-0{,}75)\approx 4{,}22\cdot10^{-5}\cdot0{,}47\approx1{,}98\cdot10^{-5}\ \text{1/год.}$$

Інтенсивність відмов ВС дорівнює

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{500\lambda^3t^2\exp(-10\lambda t)}{\exp(-10\lambda t)\cdot\left(1+10\lambda t+50\lambda^2t^2\right)} = \frac{500\lambda^3t^2}{1+10\lambda t+50\lambda^2t^2}.$$

Для t = 5000 годин отримаємо

$$\lambda_c(5000) = \frac{500\cdot\left(1{,}5\cdot10^{-5}\right)^3\cdot\left(5\cdot10^3\right)^2}{1+10\cdot1{,}5\cdot10^{-5}\cdot5\cdot10^3+50\cdot\left(1{,}5\cdot10^{-5}\right)^2\cdot\left(5\cdot10^3\right)^2}\approx$$
$$\approx\frac{4{,}22\cdot10^{-5}}{1+0{,}75+0{,}28125}\approx\frac{4{,}22\cdot10^{-5}}{2{,}03125}\approx2{,}08\cdot10^{-5}\ 1/\text{год.},$$

або

$$\lambda_c(5000) = \frac{f_c(5000)}{P_c(5000)} = \frac{1{,}98\cdot10^{-5}}{0{,}9547}\approx2{,}07\cdot10^{-5}\ \text{1/год.}$$

Середній час безвідмовної роботи ВС з використанням виразів $m_{tc} = m_{t0}(m_0+1)$ та $m_{t0} = \dfrac{1}{\lambda_0}$ дорівнює

$$m_{tc} = \frac{1}{10\lambda}(2+1) = \frac{3}{10\lambda} = \frac{3}{10 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-5}} \approx 20000 \text{ годин.}$$

Завдання 7.3. Засіб вимірювання складається з 15 рівнонадійних чарунок. У разі відмови чарунки її можна замінити запасною чарункою з ЗІПу. У ЗІПі знаходяться три чарунки, кожна з яких може замінити чарунку, що відмовила. Інтенсивність відмов чарунок дорівнює $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності чарунки. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов ЗВ $\lambda_c(t)$ за час $t = 1000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

Рішення. У засобі вимірювання реалізоване ковзаюче резервування з кількістю основних чарунок $n = 15$ та кількістю резервних чарунок $m_0 = 3$. Ймовірність безвідмовної роботи ЗВ при рівнонадійних чарунках, з урахуванням $\lambda_0 = n\lambda = 15\lambda = 15 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-5} = 3{,}75 \cdot 10^{-4}$ 1/год., буде дорівнювати

$$P_c(t) = \exp(-\lambda_0 t) \sum_{i=0}^{3} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!} = \exp(-\lambda_0 t) \cdot \left(1 + \lambda_0 t + \frac{\lambda_0^2 t^2}{2} + \frac{\lambda_0^3 t^3}{6}\right).$$

Для $t = 1000$ годин з використанням додатку Д отримаємо

$$P_c(1000) = \exp\left(-3{,}75 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3\right) \cdot \left[1 + 3{,}75 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 + \frac{\left(3{,}75 \cdot 10^{-4}\right)^2 \cdot \left(10^3\right)^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(3{,}75 \cdot 10^{-4}\right)^3 \cdot \left(10^3\right)^3}{6}\right] \approx \exp(-0{,}375) \cdot (1 + 0{,}375 + 0{,}0703 + 0{,}0088) \approx$$

$$\approx 0{,}685 \cdot 1{,}4541 \approx 0{,}9961.$$

Частота відмов ЗВ дорівнює

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = -\left\{\left[\exp(-\lambda_0 t)\right]' \cdot \left(1 + \lambda_0 t + \frac{\lambda_0^2 t^2}{2} + \frac{\lambda_0^3 t^3}{6}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \lambda_0 t + \frac{\lambda_0^2 t^2}{2} + \frac{\lambda_0^3 t^3}{6}\right)' \cdot \exp(-\lambda_0 t)\right\} = -\left\{\lambda_0 \exp(-\lambda_0 t) \cdot \left(1 + \lambda_0 t + \frac{\lambda_0^2 t^2}{2} + \frac{\lambda_0^3 t^3}{6}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(0 + \lambda_0 + \frac{2\lambda_0^2 t}{2} + \frac{3\lambda_0^3 t^2}{6}\right) \cdot \exp(-\lambda_0 t)\right\} = -\left\{-\lambda_0 \exp(-\lambda_0 t) - \lambda_0^2 t \exp(-\lambda_0 t) - \right.$$

$$-\frac{\lambda_0^3 t^2}{2}\exp(-\lambda_0 t)-\frac{\lambda_0^4 t^3}{6}\exp(-\lambda_0 t)+\lambda_0\exp(-\lambda_0 t)+\lambda_0^2 t\exp(-\lambda_0 t)+$$

$$+\left.\frac{\lambda_0^3 t^2}{2}\exp(-\lambda_0 t)\right\}=-\left\{-\frac{\lambda_0^4 t^3}{6}\exp(-\lambda_0 t)\right\}=\frac{\lambda_0^4 t^3}{6}\exp(-\lambda_0 t).$$

З використанням додатку Д отримаємо

$$f_c(1000)=\frac{\left(3{,}75\cdot10^{-4}\right)^4\left(10^3\right)^3}{6}\exp\left(-3{,}75\cdot10^{-4}\cdot10^3\right)\approx3{,}3\cdot10^{-6}\cdot\exp(-0{,}375)\approx$$

$$\approx3{,}3\cdot10^{-6}\cdot0{,}685\approx2{,}26\cdot10^{-6}\ 1/\text{год}.$$

Інтенсивність відмов ЗС дорівнює

$$\lambda_c(t)=\frac{f_c(t)}{P_c(t)}=\frac{6\lambda_0^4 t^3\cdot\exp(-\lambda_0 t)}{6\cdot\exp(-\lambda_0 t)\cdot\left(6+6\lambda_0 t+3\lambda_0 2t^2+\lambda_0^3 t^3\right)}=$$

$$=\frac{\lambda_0^4 t^3}{6+6\lambda_0 t+3\lambda_0 2t^2+\lambda_0^3 t^3}.$$

Для t = 1000 годин отримаємо

$$\lambda_c(1000)=\frac{\left(3{,}75\cdot10^{-4}\right)^4\cdot\left(10^3\right)^3}{6+6\cdot3{,}75\cdot10^{-4}\cdot10^3+3\cdot\left(3{,}75\cdot10^{-4}\right)^2\cdot\left(10^3\right)^2+\left(3{,}75\cdot10^{-4}\right)^3\cdot\left(10^3\right)^3}\approx$$

$$\approx\frac{1{,}98\cdot10^{-5}}{6+2{,}25+0{,}4219+0{,}0527}\approx\frac{1{,}98\cdot10^{-5}}{8{,}7246}\approx2{,}27\cdot10^{-6}\ 1/\text{год}.,$$

або

$$\lambda_c(1000)=\frac{f_c(1000)}{P_c(1000)}=\frac{2{,}27\cdot10^{-6}}{0{,}9961}\approx2{,}28\cdot10^{-6}\ 1/\text{год}.$$

Середній час безвідмовної роботи ЗВ з використанням виразів $m_{tc}=m_{t0}(m_0+1)$ та $m_{t0}=\dfrac{1}{\lambda_0}$ дорівнює

$$m_{tc}=\frac{1}{\lambda_0}(3+1)=\frac{4}{\lambda_0}=\frac{4}{3{,}75\cdot10^{-4}}\approx10667\ \text{годин}.$$

7.3 Завдання для самостійного виконання

Завдання 7.4. Засіб вимірювання складається з двох рівнонадійних блоків, для підвищення надійності ЗВ застосовано ковзаюче резервування з одним резервним блоком, який знаходиться у ненавантаженому стані. Інтенсивність відмов блоків дорівнює $\lambda = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності блоків ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$ за час $t = 2000$ годин.

Завдання 7.5. Засіб вимірювання складається з трьох рівнонадійних блоків, для підвищення надійності ЗВ застосовано ковзаючи резервування з двома резервними блоками, які знаходиться у ненавантаженому стані. Інтенсивність відмов блоків дорівнює $\lambda = 4{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності блоків ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$ за час $t = 5000$ годин та середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

Завдання 7.6. Засіб вимірювання складається з п’яти рівнонадійних блоків, для підвищення надійності ЗВ застосовано ковзаючи резервування з трьома резервними блоками, які знаходяться у ненавантаженому стані. Інтенсивність відмов блоків дорівнює $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності блоків ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ЗВ за час $t = 500$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

Завдання 7.7. Вимірювальна система складається з 20 однакових рівнонадійних засобів вимірювання. Конструктивно у ВС передбачено заміна будь-якого ЗВ одним з трьох ЗВ, що знаходяться у резерві. Інтенсивність відмов ЗВ дорівнює $\lambda = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності ЗВ. Відмова системи наступає, коли будуть витрачені всі резервні ЗВ та відмовить будь-який з основних ЗВ. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ВС $P_c(t)$ за час $t = 10000$ годин.

Завдання 7.8. Засіб вимірювання складається з 50 рівнонадійних елементів. Конструктивно у ЗВ передбачено заміна будь-якого елемента одним з двох резервних елементів. Інтенсивність відмов елементу дорівнює $\lambda = 5{,}0 \cdot 10^{-6}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності елементів. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$ за час $t = 500$ годин та середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

Завдання 7.9. Засіб вимірювання складається з 100 рівнонадійних елементів. Конструктивно у ЗВ передбачено заміна будь-якого елемента одним з трьох резервних елементів. Інтенсивність відмов елементу дорівнює $\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності елементів. Відмова ЗВ наступає, коли будуть витрачені всі резервні елементи та відмовить будь-який з основних елементів. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ ЗВ за час $t = 1000$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

Завдання 7.10. Засіб вимірювання складається з 20 рівнонадійних чарунок. У ЗІПі знаходяться дві чарунки, кожна з яких може замінити основну чарунку. Інтенсивність відмов чарунок дорівнює $\lambda = 5{,}0 \cdot 10^{-6}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності чарунки. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$ за час $t = 5000$ годин.

Завдання 7.11. Засіб вимірювання складається з 10 рівнонадійних чарунок. У разі відмови чарунки її можна замінити запасною чарункою з ЗІПу. У ЗІПі знаходяться три чарунки, кожна з яких може замінити чарунку, що відмовила. Інтенсивність відмов чарунок дорівнює $\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності чарунки. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$ за час $t = 1000$ годин та середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

Завдання 7.12. Засіб вимірювання складається з 25 рівнонадійних чарунок. У разі відмови чарунки її можна замінити запасною чарункою з ЗІПу. У ЗІПі знаходяться дві чарунки, кожна з яких може замінити чарунку, що відмовила. Інтенсивність відмов чарунок дорівнює $\lambda = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/год. Справедливий експоненціальний закон надійності чарунки. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи ЗВ $P_c(t)$, частоту $f_c(t)$ та інтенсивність відмов ЗВ $\lambda_c(t)$ за час $t = 500$ годин, а також середній час безвідмовної роботи ЗВ m_{tc}.

Питання для самоперевірки:

1. Що таке ковзаюче резервування ?
2. В яких випадках застосовують ковзаюче резервування ?
3. Як працюють системи з ковзаючим резервуванням ?
4. Як визначається кратність резервування у системах з ковзаючим резервуванням ?
5. В чому переваги та недоліки систем з ковзаючим резервуванням ?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 8

РОЗРАХУНОК ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ РЕЗЕРВОВАНИХ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ З УРАХУВАННЯМ ВІДНОВЛЕННЯ

Навчальна мета заняття

закріпити знання щодо методів визначення показників надійності резервованих вимірювальних систем з урахуванням відновлення;

отримати практичні навички щодо розрахунку показників надійності резервованих вимірювальних систем з урахуванням відновлення.

8.1 Відомості з теорії. Загальні відомості про показники надійності резервованих систем з урахуванням відновлення

Системи, що відновлюються, ремонтуються після відмов і після цього продовжується їх експлуатація. Надійність систем характеризується показниками у вигляді **функції готовності** $k_г(t)$ і **функції простою** $k_n(t)$. Ці функції є відповідно ймовірностями перебування системи у працездатному стані і стані простою. З часом експлуатації вони прагнуть до стаціонарних значень

$$\lim_{t\to\infty} k_г(t) = K_г \quad \text{та} \quad \lim_{t\to\infty} k_n(t) = K_n,$$

де $K_г$ і K_n – відповідно коефіцієнти готовності і простою системи.

Для обчислення функцій і коефіцієнтів готовності найчастіше використовується **метод диференціальних рівнянь**, який ґрунтується на основі теорії масового обслуговування, із застосуванням теорії графів.

Під час застосування цього методу перебираються всі можливі стани елементів системи і процеси зміни станів даної системи, а далі за допомогою теорії графів будується схема станів системи. Вузлами графу є стани системи, а гілками – переходи з одного стану в інший. Для складання диференціальних рівнянь задаються інтенсивності переходів λ із стану $i-1$ у стан i та інтенсивності зворотних переходів μ.

Будь-який стан системи описується диференціальним рівнянням, яке складається за наступним правилом: у лівій частині рівняння розміщують похідну за часом ймовірності даного стану dp_i/dt, де $i = 0, 1, ...$, а у правій частині рівняння – члени, що утворюються при множенні інтенсивностей переходів станів з різними знаками (“плюс”, якщо стрілка спрямована до стану, і “мінус” – якщо від нього). Для кожного стану системи складається своє диференціальне рівняння. Отримана таким чином система диференціальних рівнянь доповнюється умовою нормування: сума ймовірностей всіх можливих станів системи дорівнює одиниці. Сумісне вирішення цих рівнянь дозволяє визначити функції готовності і простою системи.

Розглянемо **надійність системи з ненавантаженим резервом**, що складається з одного основного і $m-1$ резервних елементів, що мають однакову надійність. Така система може перебувати у будь-якому з наступних m станів:

0 – основний і резервний елементи працездатні;

j – j елементів непрацездатні (j = 1, 2, ... $\le m$ – 1);

m – всі m елементів непрацездатні.

Складемо схему станів системи, яка наведена на рис. 8.1.

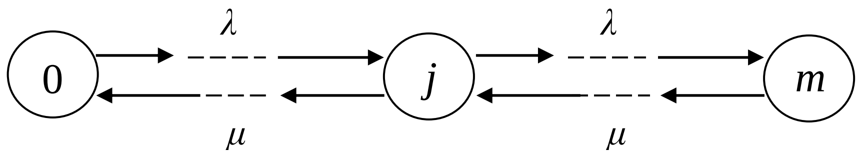


Рисунок 8.1 – Схема станів системи з ненавантаженим резервом та обмеженим відновленням

Оскільки всі m елементів системи ідентичні, а для умов нормальної її експлуатації необхідно і достатньо, щоб один елемент був працездатним, то інтенсивності переходів λ з працездатного стану у непрацездатний будуть однаковими, також будуть однаковими інтенсивності переходів μ з непрацездатного стану у працездатний. Будемо вважати, що перемикач резерву має ідеальну надійність і вихід з ладу одного з елементів не викликає перерви у роботі системи, а елементи, що перебувають у стані ненавантаженого резерву, мають нульову інтенсивність відмов λ = 0. Також, якщо відновлення системи здійснюється однією ремонтною бригадою, яка обслуговує систему (обмежене відновлення), то у разі непрацездатності елементів більше одного буде виникати черга на ремонт.

Відповідно до схеми, що наведена на рис. 8.1, запишемо систему диференціальних рівнянь, що характеризують роботу системи

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \dfrac{dp_j(t)}{dt} = \lambda p_{j-1}(t) - (\mu + \lambda) p_j(t) + \mu p_{j+1}(t) \\ \dfrac{dp_m(t)}{dt} = \lambda p_{m-1}(t) - \mu p_m(t), \end{cases} \tag{8.1}$$

де $p_j(t)$ – ймовірність перебування системи в станах $j = 1, 2, ..., m - 1$.

При вирішенні цієї системи використовується умова нормування $\sum_{j=0}^{m} p_j(t) = 1$, рівняння, яке може замінити будь-яке з рівнянь системи.

При $t \to \infty$ система диференційних рівнянь (8.1) перетвориться у наступну алгебраїчну систему

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ \lambda p_{j-1} - (\mu + \lambda) p_j + \mu p_{j+1} = 0 \\ \lambda p_{m-1} - \mu p_m = 0 \end{cases} \tag{8.2}$$

з умовою нормування $\sum_{j=0}^{m} p_j = 1$.

Вирішивши систему (8.2) з урахуванням того, що ймовірність p_m дорівнює коефіцієнту простою, отримаємо

$$K_n = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} \left(\dfrac{\mu}{\lambda} \right)^j} \tag{8.3}$$

та коефіцієнт готовності

$$K_г = 1 - K_n = 1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} \left(\dfrac{\mu}{\lambda} \right)^j}. \tag{8.4}$$

Якщо та ж сама система, що складається з m елементів, обслуговується m ремонтними бригадами (необмежене відновлення), то черга на ремонт відсутня. Схема станів для ненавантаженого резерву та необмеженого відновлення наведена на рис. 8.2.

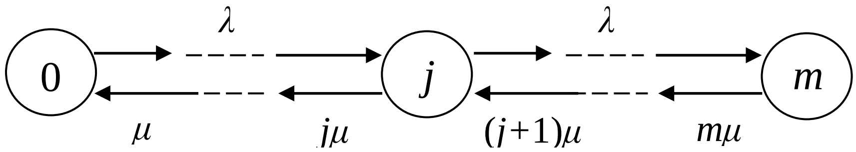


Рисунок 8.2 – Схема станів системи з ненавантаженим резервом та необмеженим відновленням

В результаті вирішення системи рівнянь отримаємо вираз для коефіцієнту простою

$$K_n = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{j!} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{m-j}} \tag{8.5}$$

та коефіцієнту готовності

$$K_г = 1 - K_n = 1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{j!} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{m-j}} . \tag{8.6}$$

У **системі з навантаженим резервом** на відміну від розглянутого вище всі $m-1$ резервних елементів знаходяться у робочому стані. Схема станів такої системи при обмеженому його відновленні показана на рис. 8.3.

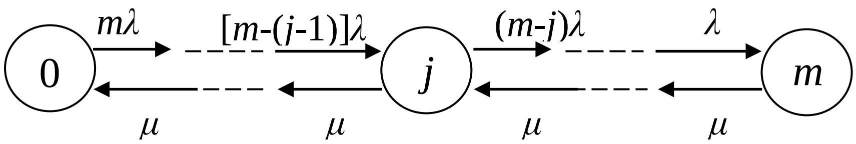


Рисунок 8.3 – Схема станів системи з навантаженим резервом та обмеженим відновленням

Оскільки у цьому випадку одночасно всі m елементів системи знаходяться у роботі, то не можливо вважати інтенсивності переходів системи з стану 0 у наступні стани однаковими. У той же час переходи системи з будь-якого непрацездатного стану у працездатний будуть однаковими через ідентичність його елементів.

Відповідно до схеми, що представлена на рис. 8.3, складемо систему диференціальних рівнянь, що характеризують роботу системи

$$
\begin{cases}
\dfrac{dp_0(t)}{dt} = -m\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\
\dfrac{dp_j(t)}{dt} = \left[m-(j-1)\right]\lambda p_{j-1}(t) - \left[(m-j)\lambda + \mu)\right]p_j(t) + \mu p_{j+1}(t) \\
\dfrac{dp_m(t)}{dt} = \lambda p_{m-1}(t) - \mu p_m(t)
\end{cases}
\tag{8.7}
$$

з умовою нормування $\sum\limits_{j=0}^{m} p_j(t) = 1$.

При $t \to \infty$ система диференціальних рівнянь (8.7) перетвориться у наступну систему алгебраїчних рівнянь

$$
\begin{cases}
-m\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\
-\left[m-(j-1)\right]p_{j-1} - \left[(m-1)\lambda + \mu)\right]p_j + \mu p_{j+1} = 0 \\
\lambda p_{m-1} - \mu p_m = 0
\end{cases}
\tag{8.8}
$$

з умовою нормування $\sum\limits_{j=0}^{m} p_j = 1$.

Вирішивши систему (8.8), отримаємо вираз коефіцієнт простою

$$
K_n = p_m(t) = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m} \dfrac{1}{j!}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^j}
\tag{8.9}
$$

та коефіцієнту готовності

$$
K_г = 1 - K_n = 1 - \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m} \dfrac{1}{j!}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^j}.
\tag{8.10}
$$

Для випадку навантаженого резерву та необмеженого відновлення схема станів наведена на рис. 8.4.

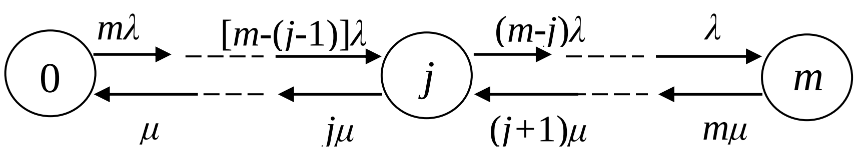


Рисунок 8.4 – Схема станів системи з навантаженим резервом та необмеженим відновленням

В результаті вирішення системи рівнянь отримаємо вираз для коефіцієнту простою

$$K_n = \left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda} \right)^m \qquad (8.11)$$

та коефіцієнту готовності

$$K_г = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda} \right)^m = \sum_{j=0}^{m-1k} C_m^{m-j} \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^{m-j} \left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda} \right)^j . \qquad (8.12)$$

Ймовірність безвідмовної роботи системи

$$P_c(t_i) = \sum_{j=0}^{m-1} p_j(t_i) \qquad (8.13)$$

знайдена у припущенні, що при $t = 0$ у системі немає невикористаних елементів, тобто $p_0(0) = 1$; $p_1(0) = ... = p_m(0) = 0$.

Ймовірність відмови системи дорівнює

$$Q_c(t_i) = p_m(t_i) . \qquad (8.14)$$

Середній час безвідмовної роботи системи дорівнює

$$m_t = \int_0^\infty P_c(t) dt = \int_0^\infty \sum_{j=0}^{m-1} p_j(t) dt . \qquad (8.15)$$

8.2 Порядок виконання типових завдань

Завдання 8.1. Система електропостачання вимірювальної системи складається з двох генераторів, номінальна потужність кожного з яких забезпечує нормальну роботу ВС. Генератори працюють по черзі, під час відмови основного генератора у роботу включається резервний генератор, а той, що відмовив відключається і підлягає ремонту. Вимірювальна системи є не працездатною, якщо система електропостачання не забезпечує її живлення. Конструкція системи електропостачання припускає одночасний ремонт обох генераторів, а для ремонту є потрібна кількість обслуговуючого персоналу.

Інтенсивність відмов кожного з генераторів дорівнює $\lambda = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ 1/год., а інтенсивність відновлення – дорівнює $\mu = 10\lambda$. Справедливий показовий закон часу безвідмовної роботи і часу відновлення генераторів. Необхідно визначити коефіцієнт готовності системи енергопостачання $K_{г}$.

Рішення. Система електропостачання ВС може знаходитися в одному з трьох станів, які позначені цифрами:

0 – система електропостачання працездатна, обидва генератори працездатні;

1 – система електропостачання працездатна, але один з генераторів відмовив і знаходиться у ремонті;

2 – система електропостачання непрацездатна, обидва генератори ремонтуються.

Ймовірність безвідмовної роботи системи електропостачання вказаних станів у момент часу t позначимо як $p_0(t)$, $p_1(t)$ та $p_2(t)$. Ці ймовірності при $t \to \infty$ мають межі p_0, p_1, p_2. Оскільки для працездатності системи електропостачання достатньо щоб працездатним був один генератор, то перехід із стану 0 в стан 1 не порушує її працездатності. Для таких умов інтенсивності відмов генераторів будуть рівними, а коефіцієнт готовності дорівнює

$$K_{г} = p_0 + p_1.$$

Якщо непрацездатні обидва генератори, то для скорішого відновлення працездатності системи електропостачання інтенсивність відновлення одного з них буде у два рази більше 2μ.

Складемо схему станів системи електропостачання з двох генераторів при її ремонті. Схема наведена на рис. 8.5.

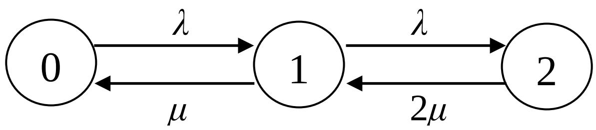


Рисунок 8.5 – Схема станів ЗВ з двох блоків при ремонті одного блоку однією бригадою

Система диференціальних рівнянь, що відповідає схемі станів системи електропостачання, яка показана на рис. 8.5, має наступний вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu) p_1(t) + 2\mu p_2(t) \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - 2\mu p_2(t). \end{cases}$$

При вирішенні цієї системи використовується умова нормування $p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1$, рівняння, яке може замінити будь-яке з рівнянь системи.

Для визначення сталих значень p_0 та p_1 покладемо їх похідні рівними нулю, та отримаємо систему алгебраїчних рівнянь у стаціонарному режимі

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ \lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + 2\mu p_2 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Для отримання величин p_0, p_1 будемо використовувати правило Крамера

$$p_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

де Δ – головний визначник, елементами якого є коефіцієнти при p_0, p_1, p_2 лівої частини системи рівнянь;

Δ_i – визначник, який утворюється з Δ шляхом заміни i-го стовпця коефіцієнтами правої частини системи рівнянь.

З урахуванням правила трикутника

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

визначимо Δ, Δ_0, Δ_1

$$\Delta=\begin{vmatrix}-\lambda & \mu & 0\\ \lambda & -(\lambda+\mu) & 2\mu\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\lambda\cdot\left[-(\lambda+\mu)\right]\cdot 1+\mu\cdot 2\mu\cdot 1+0\cdot\lambda\cdot 1-$$

$$-(-\lambda)2\mu\cdot 1-\mu\cdot\lambda\cdot 1-0\cdot\left[-(\lambda+\mu)\right]\cdot 1=\lambda(\lambda+\mu)+2\mu^2+2\mu\lambda-\mu\lambda=$$

$$=\lambda^2+\lambda\mu+2\mu^2+2\mu\lambda-\mu\lambda=\lambda^2+2\mu^2+2\mu\lambda=\lambda^2+2\mu(\mu+\lambda);$$

$$\Delta_0=\begin{vmatrix}0 & \mu & 0\\ 0 & -(\lambda+\mu) & 2\mu\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0+\mu\cdot 2\mu\cdot 1+0-0-0-0=2\mu^2;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 0\\ \lambda & 0 & 2\mu\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0+0+0-(-\lambda)\cdot 2\mu\cdot 1-0-0=2\mu\lambda\,.$$

Визначимо сталі значення p_0 і p_1

$$p_0=\frac{\Delta_0}{\Delta}=\frac{2\mu^2}{\lambda^2+2\mu(\mu+\lambda)};$$

$$p_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{2\mu\lambda}{\lambda^2+2\mu(\mu+\lambda)}.$$

Коефіцієнт готовності дорівнює

$$K_г=p_0+p_1=\frac{2\mu^2}{\lambda^2+2\mu(\mu+\lambda)}+\frac{2\mu\lambda}{\lambda^2+2\mu(\mu+\lambda)}=\frac{2\mu^2+2\mu\lambda}{\lambda^2+2\mu(\mu+\lambda)}.$$

З урахуванням, що $\mu = 10\lambda$, коефіцієнт готовності системи енергопостачання дорівнює

$$K_г=\frac{2\mu^2+2\mu\lambda}{\lambda^2+2\mu(\mu+\lambda)}=\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{\lambda^2+2\mu(\mu+\lambda)}=\frac{20\lambda(10\lambda+\lambda)}{\lambda^2+20\lambda(10\lambda+\lambda)}=\frac{220\lambda^2}{221\lambda^2}\approx 0{,}996.$$

Завдання 8.2. Вимірювальна система складається з двох рівнонадійних засобів вимірювання. Інтенсивність відмов ЗВ дорівнює $\lambda = 2{,}5\cdot 10^{-3}$ 1/год., а інтенсивність відновлення – дорівнює $\mu = 100\lambda$. Вимірювальну систему обслуговує одна ремонтна бригада. Вимірювальна система є непрацездатною, якщо непрацездатний будь-який з ЗВ. При цьому працездатний ЗВ не вимикається і в ньому можуть відбуватися відмови. Необхідно визначити коефіцієнт готовності ВС $K_г$ та коефіцієнт простою ВС $K_п$.

Рішення. Вимірювальна система у будь-який момент часу може знаходитися в одному з трьох станів:

0 – вимірювальна система справна з ймовірністю $p_0(t)$;

1 – один ЗВ справний з ймовірністю $p_1(t)$, а інший – відмовив і знаходиться у ремонті;

2 – несправні обидва ЗВ з ймовірністю $p_2(t)$.

Ймовірність безвідмовної роботи ВС при $t \to \infty$ має межі p_0, p_1, p_2. Оскільки для працездатності ВС необхідно щоб працездатними були обидва ЗВ, то коефіцієнт готовності дорівнює $K_г = p_0$.

Оскільки у стані 0 вимірювальна система складається з двох ЗВ, то у цьому стані її інтенсивність відмов буде у 2 рази вище. При відновленні ВС однією ремонтною бригадою інтенсивність ремонтів однакова для обох ЗВ, тобто ремонт ЗВ буде проводитися з однаковою інтенсивністю μ.

Складемо схему станів ВС з двох ЗВ при її ремонті однією бригадою. Схема наведена на рис. 8.6.

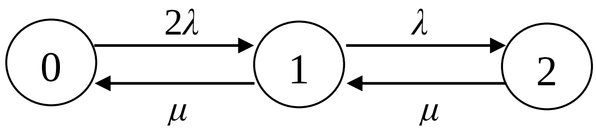


Рисунок 8.6 – Схема станів ВС з двох ЗВ при ремонті однією бригадою

Система диференціальних рівнянь, що відповідає схемі станів ВС, яка показана на рис. 8.6, має наступний вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -2\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = 2\lambda p_0(t) - (\lambda + \mu) p_1(t) + \mu p_2(t) \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - \mu p_2(t). \end{cases}$$

При вирішенні цієї системи використовується умова нормування $p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1$, рівняння, яке може замінити будь-яке з рівнянь системи.

Для визначення сталих значень p_0, p_1 та p_2 покладемо їх похідні рівними нулю, та отримаємо систему алгебраїчних рівнянь у стаціонарному режимі

$$\begin{cases} -2\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ 2\lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + \mu p_2 = 0 \\ \lambda p_1 - \mu p_2 = 0. \end{cases}$$

З урахуванням умови нормування $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ та правила трикутника визначимо Δ, Δ_0, Δ_1, Δ_2

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2\lambda & \mu & 0 \\ 2\lambda & -(\lambda+\mu) & \mu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\lambda \cdot [-(\lambda+\mu)] \cdot 1 + \mu \cdot \mu \cdot 1 + 0 \cdot 2\lambda \cdot 1 -$$

$$-(-2\lambda)\mu \cdot 1 - \mu \cdot 2\lambda \cdot 1 - 0 \cdot [-(\lambda+\mu)] \cdot 1 = 2\lambda(\lambda+\mu) + \mu^2 + 2\mu\lambda - 2\mu\lambda =$$

$$= 2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 + 2\mu\lambda - 2\mu\lambda = 2\lambda^2 + \mu^2 + 2\mu\lambda = 2\lambda^2 + \mu(\mu + 2\lambda);$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 0 & \mu & 0 \\ 0 & -(\lambda+\mu) & \mu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + \mu \cdot \mu \cdot 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = \mu^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 2\lambda & 0 & \mu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-2\lambda) \cdot \mu \cdot 1 - 0 - 0 = 2\mu\lambda .$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2\lambda & \mu & 0 \\ 2\lambda & -(\lambda+\mu) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2\lambda) \cdot [-(\lambda+\mu)] \cdot 1 + 0 + 0 - 0 - \mu \cdot 2\lambda \cdot 1 - 0 =$$

$$= 2\lambda^2 + 2\mu\lambda - 2\mu\lambda = 2\lambda^2.$$

З використанням правила Крамера визначимо значення p_0, p_1 та p_2

$$p_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{\mu^2}{2\lambda^2 + \mu(\mu + 2\lambda)};$$

$$p_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2\mu\lambda}{2\lambda^2 + \mu(\mu + 2\lambda)};$$

$$p_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2\lambda^2}{2\lambda^2 + \mu(\mu + 2\lambda)}.$$

Коефіцієнт готовності дорівнює

$$K_г = p_0 = \frac{\mu^2}{2\lambda^2 + \mu(\mu + 2\lambda)}.$$

Коефіцієнт простою дорівнює

$$K_п = p_1 + p_2 = \frac{2\mu\lambda}{2\lambda^2 + \mu(\mu + 2\lambda)} + \frac{2\lambda^2}{2\lambda^2 + \mu(\mu + 2\lambda)} = \frac{2\lambda(\mu + \lambda)}{2\lambda^2 + \mu(\mu + 2\lambda)}.$$

З урахуванням, що $\mu = 100\lambda$, коефіцієнт готовності ВС дорівнює

$$K_г = \frac{10000\lambda^2}{2\lambda^2 + 100\lambda(100\lambda + 2\lambda)} = \frac{10000\lambda^2}{10202\lambda^2} \approx 0{,}98.$$

Коефіцієнт простою дорівнює

$$K_п = \frac{2\lambda(100\lambda + \lambda)}{2\lambda^2 + 100\lambda(100\lambda + 2\lambda)} = \frac{202\lambda^2}{10202\lambda^2} \approx 0{,}02,$$

або

$$K_п = 1 - K_г = 1 - 0{,}98 = 0{,}02.$$

Завдання 8.3. Вимірювальна система складається з двох рівнонадійних засобів вимірювання та одного ЗВ, що знаходиться у ненавантаженому резерві. Інтенсивність відмов ЗВ дорівнює $\lambda = 2{,}5\cdot10^{-3}$ 1/год., а інтенсивність відновлення – дорівнює $\mu = 2{,}0$ 1/год. Вимірювальну систему обслуговує одна ремонтна бригада. Вимірювальна система є непрацездатною, якщо непрацездатні два ЗВ. При цьому працездатний ЗВ під час відновлення вимикається і в ньому не можуть відбуватися відмови. Необхідно визначити коефіцієнт простою ВС $K_п$.

Рішення. Вимірювальна система у будь-який момент часу може знаходитися в одному з трьох станів:

0 – всі засоби вимірювання ВС працездатні з ймовірністю $p_0(t)$;

1 – один ЗВ відмовив з ймовірністю $p_1(t)$, а інші два працездатні;

2 – несправні два ЗВ з ймовірністю $p_2(t)$.

При непрацездатності одного ЗВ, резервний засіб вимірювання переводиться у робочий стан. Працездатними є стани 0 та 1, непрацездатним стан 2. Ймовірність безвідмовної роботи ВС при $t \to \infty$ має межі p_0, p_1, p_2. Оскільки для працездатності ВС необхідно щоб працездатними були два ЗВ, то коефіцієнт простою дорівнює $K_n = p_2$.

Оскільки у станах 0 та 1 вимірювальна система складається з двох ЗВ, то у цих станах її інтенсивність відмов буде у 2 рази вище. При відновленні ВС однією ремонтною бригадою інтенсивність ремонтів однакова для обох ЗВ, тобто ремонт ЗВ буде проводитися з однаковою інтенсивністю μ.

Складемо схему станів ВС при її ремонті однією бригадою. Схема наведена на рис. 8.7.

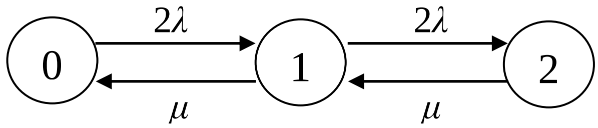


Рисунок 8.7 – Схема станів ВС при ремонті однією бригадою

Система диференціальних рівнянь, що відповідає схемі станів ВС, яка показана на рис. 8.7, має наступний вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -2\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = 2\lambda p_0(t) - (2\lambda + \mu) p_1(t) + \mu p_2(t) \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = 2\lambda p_1(t) - \mu p_2(t). \end{cases}$$

При вирішенні цієї системи використовується умова нормування $p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1$.

Для визначення сталих значень p_0, p_1 та p_2 покладемо їх похідні рівними нулю, та отримаємо систему алгебраїчних рівнянь у стаціонарному режимі

$$\begin{cases} -2\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ 2\lambda p_0 - (2\lambda + \mu) p_1 + \mu p_2 = 0 \\ 2\lambda p_1 - \mu p_2 = 0. \end{cases}$$

З урахуванням умови нормування $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ та правила трикутника визначимо Δ та Δ_2

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2\lambda & \mu & 0 \\ 2\lambda & -(2\lambda+\mu) & \mu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\lambda\cdot[-(2\lambda+\mu)]\cdot 1 + \mu\cdot\mu\cdot 1 + 0\cdot 2\lambda\cdot 1 -$$

$$-(-2\lambda)\mu\cdot 1 - \mu\cdot 2\lambda\cdot 1 - 0\cdot[-(2\lambda+\mu)]\cdot 1 = 2\lambda(2\lambda+\mu)+\mu^2+2\mu\lambda-2\mu\lambda =$$

$$= 4\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2+2\mu\lambda-2\mu\lambda = 4\lambda^2+\mu^2+2\mu\lambda = 4\lambda^2+\mu(\mu+2\lambda);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2\lambda & \mu & 0 \\ 2\lambda & -(2\lambda+\mu) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2\lambda)\cdot[-(2\lambda+\mu)]\cdot 1 + 0 + 0 - 0 - \mu\cdot 2\lambda\cdot 1 - 0 =$$

$$= 4\lambda^2 + 2\mu\lambda - 2\mu\lambda = 4\lambda^2.$$

З використанням правила Крамера визначимо значення p_2

$$p_2 = \frac{4\lambda^2}{4\lambda^2+\mu(\mu+2\lambda)}.$$

Якщо $\mu >> \lambda$ можна використовувати наближений вираз $p_2 \approx \dfrac{4\lambda^2}{\mu^2}$.

Коефіцієнт простою ВС дорівнює

$$K_n = p_2 = \frac{4\cdot\left(2{,}5\cdot 10^{-3}\right)^2}{4\cdot\left(2{,}5\cdot 10^{-3}\right)^2 + 2\cdot(2+2\cdot 2{,}5\cdot 10^{-3})} = \frac{2{,}5\cdot 10^{-5}}{2{,}5\cdot 10^{-5}+4{,}01} \approx 6{,}23\cdot 10^{-6},$$

або

$$K_n = \frac{4\cdot\left(2{,}5\cdot 10^{-3}\right)^2}{2^2} = \frac{2{,}5\cdot 10^{-5}}{4} \approx 6{,}25\cdot 10^{-6}.$$

Завдання 8.4. Вимірювальна система, що складається з двох рівнонадійних засобів вимірювання, повинна працювати безперервно. Інтенсивність відмов ЗВ дорівнює $\lambda = 1{,}5\cdot 10^{-2}$ 1/год., а інтенсивність відновлення – дорівнює $\mu = 2{,}0$ 1/год. Вимірювальна система є непрацездатною, якщо непрацездатний будь-який з ЗВ. При цьому працездатний ЗВ не вимикається і в ньому можуть відбуватися відмови. Необхідно визначити коефіцієнт простою ВС K_n та коефіцієнт готовності ВС $K_г$ під час обмеженого та необмеженого відновлення.

Рішення. Вимірювальна система у будь-який момент часу може знаходитися в одному з трьох станів:

0 – вимірювальна система справна;

1 – один ЗВ справний, а інший – відмовив і знаходиться у ремонті;
2 – несправні обидва ЗВ.
Таким чином, $m = 2$.

З використанням виразу $K_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^j}$ визначимо коефіцієнт простою під час обмеженого відновлення

$$K_n = \frac{1}{1+\dfrac{\mu}{\lambda}+\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^2} = \frac{1}{\dfrac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{\lambda^2}} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}.$$

Якщо $\mu >> \lambda$ можна використовувати наближений вираз $K_n \approx \dfrac{\lambda^2}{\mu^2}$.

Коефіцієнт простою ВС дорівнює

$$K_n = \frac{\left(1{,}5\cdot 10^{-2}\right)^2}{\left(1{,}5\cdot 10^{-2}\right)^2 + 2\cdot 1{,}5\cdot 10^{-2} + 2^2} = \frac{2{,}25\cdot 10^{-4}}{2{,}25\cdot 10^{-4} + 3{,}0\cdot 10^{-2} + 4} \approx \frac{2{,}25\cdot 10^{-4}}{4{,}030225} \approx 5{,}58\cdot 10^{-5},$$

або

$$K_n = \frac{\left(1{,}5\cdot 10^{-2}\right)^2}{2^2} = \frac{2{,}25\cdot 10^{-4}}{4} \approx 5{,}63\cdot 10^{-4}.$$

З використанням виразу $K_г = 1 - K_n = 1 - \dfrac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m}\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^j}$ визначимо коефіцієнт готовності під час обмеженого відновлення

$$K_г = 1 - K_n = 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2} \approx 1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}.$$

Коефіцієнт готовності ВС дорівнює

$$K_г = 1 - K_n \approx 1 - 5{,}63\cdot 10^{-4} \approx 0{,}99944.$$

З використанням виразу $K_п = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{j!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{m-j}}$ визначимо коефіцієнт простою під час необмеженого відновлення

$$K_п = \frac{1}{1+2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)+2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2}{\lambda^2}} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2}.$$

Якщо $\mu >> \lambda$ можна використовувати наближений вираз $K_п \approx \frac{\lambda^2}{2\mu^2}$.

Коефіцієнт простою ВС дорівнює

$$K_п = \frac{\left(1{,}5\cdot 10^{-2}\right)^2}{\left(1{,}5\cdot 10^{-2}\right)^2 + 2\cdot 2\cdot 1{,}5\cdot 10^{-2} + 2\cdot 2^2} = \frac{2{,}25\cdot 10^{-4}}{2{,}25\cdot 10^{-4} + 6{,}0\cdot 10^{-2} + 8} \approx$$

$$\approx \frac{2{,}25\cdot 10^{-4}}{8{,}060225} \approx 2{,}79\cdot 10^{-5},$$

або

$$K_п = \frac{\left(1{,}5\cdot 10^{-2}\right)^2}{2\cdot 2^2} = \frac{2{,}25\cdot 10^{-4}}{8} \approx 2{,}81\cdot 10^{-4}.$$

З використанням виразу $K_г = 1 - K_п = 1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{j!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{m-j}}$ визначимо коефіцієнт готовності під час обмеженого відновлення

$$K_г = 1 - K_п = 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2} \approx 1 - \frac{\lambda^2}{2\mu^2}.$$

Коефіцієнт готовності ВС дорівнює

$$K_г = 1 - K_п \approx 1 - 2{,}81\cdot 10^{-4} \approx 0{,}99972.$$

Таким чином, під час застосування необмеженого відновлення у порівнянні з обмеженим відновленням величина коефіцієнта простою ВС зменшується у два рази, величина коефіцієнт готовності ВС збільшується не значно.

8.3 Завдання для самостійного виконання

Завдання 8.5. Система електропостачання вимірювальної системи складається з двох генераторів, номінальна потужність кожного з яких забезпечує нормальну роботу ВС. Генератори працюють по черзі, під час відмови основного генератора у роботу включається резервний генератор, а той, що відмовив відключається і підлягає ремонту. Вимірювальна системи є не працездатною, якщо система електропостачання не забезпечує її живлення. Для ремонту системи електропостачання застосовується одна ремонтна бригада. Середній час безвідмовної роботи кожного з генераторів дорівнює $m_t = 2000$ годин, а інтенсивність відновлення – дорівнює $\mu = 100\lambda$. Справедливий показовий закон часу безвідмовної роботи і часу відновлення генераторів. Необхідно визначити коефіцієнт готовності системи енергопостачання $K_г$.

Завдання 8.6. Система електропостачання вимірювальної системи складається з двох генераторів, номінальна потужність кожного з яких забезпечує нормальну роботу ВС. Генератори працюють по черзі, під час відмови основного генератора у роботу включається резервний генератор, а той, що відмовив відключається і підлягає ремонту. Вимірювальна системи є не працездатною, якщо система електропостачання не забезпечує її живлення. Конструкція системи електропостачання припускає одночасний ремонт обох генераторів, а для ремонту застосовуються дві ремонтні бригади. Середній час безвідмовної роботи кожного з генераторів дорівнює $m_t = 1000$ годин, а інтенсивність відновлення – дорівнює $\mu = 10\lambda$. Справедливий показовий закон часу безвідмовної роботи і часу відновлення генераторів. Необхідно визначити коефіцієнт простою системи енергопостачання $K_п$.

Завдання 8.7. Вимірювальна система складається з двох рівнонадійних засобів вимірювання. Інтенсивність відмов ЗВ дорівнює $\lambda = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ 1/год., а інтенсивність відновлення – дорівнює $\mu = 10\lambda$. Вимірювальну систему обслуговує одна ремонтна бригада. Вимірювальна система є непрацездатною, якщо непрацездатний будь-який з ЗВ. При цьому працездатний ЗВ не вимикається і в ньому можуть відбуватися відмови. Необхідно визначити коефіцієнт готовності ВС $K_г$ та коефіцієнт простою ВС $K_п$.

Завдання 8.8. Вимірювальна система складається з двох рівнонадійних засобів вимірювання. Середній час безвідмовної роботи кожного з генераторів дорівнює $m_t = 1000$ годин, а інтенсивність відновлення – дорівнює $\mu = 100\lambda$. Вимірювальну систему обслуговує одна ремонтна бригада. Вимірювальна система є непрацездатною, якщо непрацездатний будь-який з ЗВ. При цьому працездатний ЗВ не вимикається і в ньому можуть відбуватися відмови. Необхідно визначити коефіцієнт готовності ВС $K_г$.

Завдання 8.9. Вимірювальна система складається з двох рівнонадійних засобів вимірювання та одного ЗВ, що знаходиться у ненавантаженому резерві. Середній час безвідмовної роботи ЗВ дорівнює $m_t = 2000$ годин, а інтенсивність відновлення – дорівнює $\mu = 4{,}0$ 1/год. Вимірювальну систему обслуговує одна ремонтна бригада. Вимірювальна система є непрацездатною, якщо непрацездатні два ЗВ. При цьому працездатний ЗВ під час відновлення вимикається і в ньому не можуть відбуватися відмови. Необхідно визначити коефіцієнт готовності ВС $K_г$ та коефіцієнт простою ВС $K_п$.

Завдання 8.10. Вимірювальна система складається з двох рівнонадійних засобів вимірювання та одного ЗВ, що знаходиться у ненавантаженому резерві. Інтенсивність відмов ЗВ дорівнює $\lambda = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ 1/год., а інтенсивність відновлення – дорівнює $\mu = 3{,}0$ 1/год. Вимірювальну систему обслуговує дві ремонтні бригада. Вимірювальна система є непрацездатною, якщо непрацездатні два ЗВ. При цьому працездатний ЗВ під час відновлення вимикається і в ньому не можуть відбуватися відмови. Необхідно визначити коефіцієнт простою ВС $K_п$.

Завдання 8.11. Вимірювальна система, що складається з двох рівнонадійних засобів вимірювання, повинна працювати безперервно. Середній час безвідмовної роботи ЗВ дорівнює $m_t = 1000$ годин, а інтенсивність відновлення – дорівнює $\mu = 0{,}5$ 1/год. Вимірювальна система є непрацездатною, якщо непрацездатний будь-який з ЗВ. При цьому працездатний ЗВ не вимикається і в ньому можуть відбуватися відмови. Необхідно визначити коефіцієнт простою ВС $K_п$ під час обмеженого та необмеженого відновлення.

Завдання 8.12. Вимірювальна система, що складається з двох рівнонадійних засобів вимірювання, повинна працювати безперервно. Інтенсивність відмов ЗВ дорівнює $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ 1/год., а інтенсивність відновлення – дорівнює $\mu = 0{,}5$ 1/год. Вимірювальна система є непрацездатною, якщо непрацездатний будь-який з ЗВ. При цьому працездатний ЗВ не вимикається і в ньому можуть відбуватися відмови. Необхідно визначити коефіцієнт простою ВС $K_п$ та коефіцієнт готовності ВС $K_г$ під час обмеженого та необмеженого відновлення.

Питання для самоперевірки:

1. В чому полягає суть розрахунку показників надійності резервованих систем з урахуванням відновлення методом диференціальних рівнянь ?
2. Яким чином будується схема станів резервованих систем з урахуванням відновлення ?
3. Як вирішується система диференціальних рівнянь, що характеризують роботу резервованої системи з урахуванням відновлення ?

4. В чому різниця розрахунку показників надійності резервованих систем з обмеженим та необмеженим відновленням ?

5. В чому переваги та недоліки розрахунку показників надійності резервованих систем з урахуванням відновлення методом диференціальних рівнянь ?

Значення гамма-функції

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
1	0,99433	6	0,90440	1	0,88659	6	0,92137
2	0,98884	7	0,90250	2	0,88704	7	0,92376
3	0,98355	8	0,90072	3	0,88757	8	0,92623
4	0,97844	9	0,89904	4	0,88818	9	0,92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
6	0,96874	1	0,89600	6	0,88964	1	0,93408
7	0,96415	2	0,89464	7	0,89049	2	0,93685
8	0,95973	3	0,89338	8	0,89142	3	0,93369
9	0,95546	4	0,89222	9	0,89243	4	0,94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
1	0,94740	6	0,89018	1	0,89468	6	0,94869
2	0,94359	7	0,88931	2	0,89592	7	0,95184
3	0,93993	8	0,88854	3	0,89724	8	0,95507
4	0,93642	9	0,88785	4	0,89864	9	0,95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
6	0,92980	1	0,88676	6	0,90167	1	0,96523
7	0,92670	2	0,88636	7	0,90330	2	0,96877
8	0,92373	3	0,88604	8	0,90500	3	0,97240
9	0,02089	4	0,88581	9	0,90678	4	0,97610
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
1	0,91558	6	0,88560	1	0,91057	6	0,98374
2	0,91311	7	0,88563	2	0,91258	7	0,98768
3	0,91075	8	0,88575	3	0,91467	8	0,99171
4	0,90852	9	0,88595	4	0,91683	9	0,99581
						2,00	1,00000

Додаток Б

Значення нормованої функції Лапласа

$$\Phi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^U \exp\left(-\frac{U^2}{2} \right) dU$$

U	Соті частки для U									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	040	080	120	160	199	239	279	319	359
0,1	398	438	478	517	557	596	636	675	714	753
0,2	793	832	871	910	948	987	026	064	103	141
0,3	0,1179	217	255	293	331	368	406	443	480	517
0,4	554	591	628	664	700	736	772	808	844	879
0,5	915	950	985	019	054	088	123	157	190	224
0,6	0,2257	291	324	357	389	422	454	486	517	549
0.7	580	611	642	673	703	734	764	794	823	852
0,8	881	910	939	967	995	023	051	078	106	133
0,9	0,3159	186	212	238	264	289	315	340	365	389
1,0	413	437	461	485	508	583	554	577	599	621
1,1	643	665	686	708	729	749	770	790	810	830
1,2	849	869	888	907	925	944	962	980	997	015
1,3	0,4032	049	066	082	099	115	131	147	162	177
1,4	192	207	222	236	251	265	279	292	306	319
1,5	332	345	357	370	382	394	406	418	429	441
1,6	452	463	474	484	495	505	515	525	535	545
1,7	554	564	573	582	591	599	608	616	625	633
1,8	641	649	656	664	671	678	686	693	699	706
1,9	713	719	726	732	738	744	750	756	761	767
2,0	772	778	783	788	793	798	803	808	812	817
2,1	821	826	830	834	838	842	846	850	854	857
2,2	860	864	867	871	874	877	880	883	886	889
	966	474	906	263	545	755	894	962	962	893
2,3	892	895	898	900	903	906	908	911	913	915
2,4	918	920	922	924	926	928	930	932	934	936
	025	237	397	506	564	572	531	493	309	128

Значення нормованої функції Лапласа

U	Соті частки для U									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,5	937	939	941	942	944	946	947	949	950	952
	903	634	323	969	574	139	664	151	600	012
2,6	0,4953	954	956	957	958	959	960	962	963	964
	388	729	035	308	547	754	930	074	189	274
2,7	965	966	967	968	969	970	971	971	972	973
	330	358	359	333	280	202	099	972	821	646
2,8	974	975	975	976	977	978	979	979	980	980
	449	229	988	726	443	140	818	476	116	738
2,9	981	981	982	983	983	984	984	985	985	986
	342	929	498	052	589	111	618	110	588	051
3,0	986	986	987	987	988	988	988	989	989	989
	501	938	361	772	171	558	933	297	650	992
3,1	990	990	990	991	991	991	992	992	992	992
	324	646	957	260	553	836	112	378	636	886
3,2	993	993	993	993	994	994	994	994	994	994
	129	363	590	810	024	230	429	623	810	991
3,3	995	995	995	995	995	996	996	996	996	996
	166	335	499	658	811	959	103	242	376	505
3,4	966	996	996	996	997	997	997	997	997	997
	631	752	869	982	091	197	299	398	493	585
3,5	997	997	997	997	997	998	998	998	998	998
	674	759	842	992	999	074	146	215	282	347
3,6	998	998	998	998	998	998	998	998	998	998
	409	469	527	583	637	689	739	787	834	879
3,7	998	998	999	999	999	999	999	999	999	999
	922	964	004	043	080	116	150	184	216	247
3,8	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	274	305	333	359	385	409	433	456	478	499
3,9	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	519	539	557	575	593	609	625	641	655	670
4,0	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	683	696	709	721	733	744	755	765	775	784
4,1	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	793	802	811	819	826	834	841	848	854	861
4,2	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	867	872	878	883	888	893	898	902	907	911
4,3	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	915	918	922	925	929	932	935	938	841	943
4,4	0,4999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	946	948	951	953	955	957	959	961	963	964
4,5	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
	966	968	969	971	972	973	974	976	977	978
5,0	999									
	997									

Значення нормованої функції Лапласа

Примітка. У таблиці наведені тільки три останні десятинні знаки з чотирьох. Перший десятинний знак з чотирьох записаний вище у графі «0», наприклад, у вигляді 0,1179 (перший знак дорівнює 1). Якщо перед останніми трьома десятинними знаками поставлена крапка, то це означає, що перший десятинний знак з чотирьох записаний нижче у графі «0». Наприклад, якщо $U = 0{,}53$, то функція Лапласа буде дорівнювати $\Phi(0{,}53) = 0{,}2019$, а не 0,1019.

Для значень $2{,}2 \leq U \leq 5{,}0$ нижче основних чотирьох десятинних знаків функції $\Phi(U)$ надані ще три десятинні знаки. Наприклад, якщо $U = 3{,}51$, то функція Лапласа з чотирма десятинними знаками буде дорівнювати $\Phi(3{,}51) = 0{,}4997$, а сьома десятинними знаками – $\Phi(3{,}51) = 0{,}4997759$.

Приклад. Необхідно визначити ймовірність того, що нормально розподілена нормована величина U має значення в інтервалі від 0 до 3,28 [$P(0 < U < 3{,}28)$]. За допомогою таблиці знаходимо $\Phi(3{,}28) = 0{,}4994810$.

Додаток В

Значення функції $\varphi(U)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{U^2}{2}\right)$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,	3 989	3 989	3 989	3 988	3 986	3 984	3 982	3 980	3 977	3 973
0,1	0,	3 970	3 965	3 961	3 956	3 951	3 945	3 939	3 932	3 925	3 918
0,2	0,	3 910	3 902	3 894	3 885	3 876	3 867	3 857	3 847	3 836	3 825
0,3	0,	3 814	3 802	3 790	3 778	3 765	3 752	3 739	3 725	3 712	3 697
0,4	0,	3 683	3 668	3 653	3 637	3 621	3 605	3 589	3 572	3 555	3 538
0,5	0,	3 521	3 503	3 485	3 467	3 448	3 429	3 410	3 391	3 372	3 352
0,6	0,	3 332	3 312	3 292	3 271	3 251	3 230	3 209	3 187	3 166	3 144
0,7	0,	3 123	3 101	3 079	3 056	3 034	3 011	2 989	2 966	2 943	2 920
0,8	0,	2 897	2 874	2 850	2 827	2 803	2 780	2 756	2 732	2 709	2 685
0,9	0,	2 661	2 637	2 613	2 589	2 565	2 541	2 516	2 492	2 468	2 444
1,0	0,	2 420	2 396	2 371	2 347	2 323	2 299	2 275	2 251	2 227	2 203
1,1	0,	2 179	2 155	2 131	2 107	3 083	2 059	2 036	2 012	1 989	1 965
1,2	0,	1 942	1 919	1 895	1 872	1 849	1 826	1 804	1 781	1 758	1 736
1,3	0,	1 714	1 691	1 669	1 647	1 626	1 604	1 582	1 551	1 539	1 518
1,4	0,	1 497	1 476	1 456	1 435	1 415	1 394	1 374	1 354	1 334	1 315
1,5	0,	1 295	1 276	1 257	1 238	1 219	1 200	1 182	1 163	1 145	1 127
1,6	0,	1 109	1 092	1 074	1 057	1 040	1 023	1 006	0 989	0 973	0 957
1,7	0,0	9 405	9 246	9 089	8 933	8 780	8 628	8 478	8 329	8 183	8 038
1,8	0,0	7 895	7 754	7 614	7 477	7 341	7 206	7 074	6 943	6 814	6 687
1,9	0,0	6 562	6 438	6 316	6 195	6 077	5 959	5 844	5 730	5 618	5 508
2,0	0,0	5 399	5 292	5 186	5 082	4 980	4 879	4 780	4 682	4 586	4 491
2,1	0,0	4 398	4 307	4 217	4 128	4 041	3 955	3 871	3 788	3 706	3 626
2,2	0,0	3 547	3 470	3 394	3 319	3 246	3 174	3 103	3 034	2 965	2 898
2,3	0,0	2 833	2 768	2 705	2 643	2 582	2 522	2 463	2 406	2 349	2 294
2,4	0,0	2 239	2 186	2 134	2 083	2 033	1 984	1 936	1 888	1 842	1 797
2,5	0,0	1 753	1 709	1 667	1 625	1 585	1 545	1 506	1 468	1 431	1 394
2,6	0,0	1 358	1 324	1 289	1 256	1 223	1 191	1 160	1 130	1 100	1 071
2,7	0,0	1 042	1 014	0 987	0 961	0 935	0 909	0 885	0 861	0 837	0 814
2,8	0,00	7 915	7 696	7 483	7 274	7 071	6 873	6 679	6 491	6 307	6 127
2,9	0,00	5 952	5 782	5 616	5 454	5 296	5 143	4 993	4 847	4 705	4 567
3,0	0,00	4 432	4 301	4 173	4 049	3 928	3 810	3 695	3 584	3 475	3 370
3,	0,00	4 432	3 267	2 384	1 723	1 232	0 873	0 612	0 425	0 292	0 199
4,	$0{,}0^3$	1 338	0 893	0 589	0 385	0 249	0 160	0 101	0 064	0 040	0 024
5,	$0{,}0^5$	1 487	0 897	0 536	0 317	0 186	0 108	0 062	0 035	0 020	0 011

Додаток Г

Вирази показників надійності для різних законів розподілу часу безвідмовної роботи

Закон розподілу	Ймовірність безвідмовної роботи $p(t)=1-\int_0^t f(t)dt$	Ймовірність відмов $q(t) = 1 - p(t)$	Частота відмов $f(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}=-\dfrac{dp(t)}{dt}$	Інтенсивність відмов $\lambda(t) = f(t)/p(t)$	Середні час напрацювання до відмови $m_t=\int_0^\infty p(t)dt$
Вейбулла $f(t)=\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{t}{a}\right)^{b-1}\exp\left(-\dfrac{t}{a}\right)^b$	$p(t)=\exp\left[-\left(\dfrac{t}{a}\right)^b\right]$	$q(t)=1-\exp\left[-\left(\dfrac{t}{a}\right)^b\right]$	$f(t)=\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{t}{a}\right)^{b-1}\exp\left(-\dfrac{t}{a}\right)^b$	$\lambda(t)=abt^{b-1}$	$m_t=\dfrac{\frac{1}{b}\Gamma\left(\frac{1}{b}\right)}{a^{1/b}}$
Експоненціальний $f(t)=\dfrac{1}{a}\exp\left(-\dfrac{t}{a}\right)$	$p(t)=\exp\left(-\dfrac{t}{a}\right)$	$q(t)=1-\exp\left(-\dfrac{t}{a}\right)$	$f(t)=\dfrac{1}{a}\exp\left(-\dfrac{t}{a}\right)$	$\lambda(t)=\dfrac{1}{a}=\lambda$	$m_t=a=\dfrac{1}{\lambda}$
Релея $f(t)=\dfrac{2t}{a^2}\exp\left[-\left(\dfrac{t}{a}\right)^2\right]$	$p(t)=\exp\left[-\left(\dfrac{t}{a}\right)^2\right]$	$q(t)=1-\exp\left[-\left(\dfrac{t}{a}\right)^2\right]$	$f(t)=\dfrac{2t}{a^2}\exp\left[-\left(\dfrac{t}{a}\right)^2\right]$	$\lambda(t)=\dfrac{2t}{a^2}$	$m_t=a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$
Нормальний $f(t)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{(t-t_{cp})^2}{2\sigma^2}\right]$	$p(t) = 0{,}5 - \Phi(U)$; $U = (t - m_t)/\sigma$; $\Phi(U)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^U\exp\left(-\dfrac{U^2}{2}\right)dU$	$q(t) = 0{,}5 + \Phi(U)$	$f(t)=\dfrac{\varphi(U)}{\sigma}$; $\varphi(U)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{U^2}{2}\right)$	$\lambda(t)=\dfrac{\varphi(U)}{\sigma}\times$ $\times\dfrac{1}{0{,}5-\Phi(U)}$	m_t

Додаток Д

Таблиця значень функції exp(–*X*)

X	*X*									
	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,00	1,0000	0,9990	0,9980	0,9970	0,9960	0,9950	0,9940	0,9930	0,9920	0,9910
0,01	0,9900	0,9891	0,9881	0,9871	0,9861	0,9851	0,9841	0,9831	0,9822	0,9812
0,02	0,9802	0,9792	0,9782	0,9773	0,9763	0,9753	0,9743	0,9734	0,9724	0,9714
0,03	0,9704	0,9695	0,9685	0,9675	0,9666	0,9656	0,9646	0,9637	0,9627	0,9618
0,04	0,9608	0,9598	0,9588	0,9579	0,9570	0,9560	0,9550	0,9541	0,9531	0,9522
0,05	0,9512	0,9502	0,9493	0,9484	0,9474	0,9465	0,9455	0,9446	0,9436	0,9427
0,06	0,9418	0,9408	0,9399	0,9389	0,9380	0,9371	0,9361	0,9352	0,9343	0,9333
0,07	0,9324	0,9315	0,9305	0,9226	0,9287	0,9277	0,9258	0,9259	0,9250	0,9240
0,08	0,9231	0,9222	0,9213	0,9204	0,9194	0,9185	0,9176	0,9167	0,9158	0,9148
0,09	0,9139	0,9130	0,9121	0,9112	0,9103	0,9094	0,9085	0,9076	0,9066	0,9057
	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,1	0,9048	0,8958	0,8869	0,8781	0,8694	0,8607	0,8521	0,8437	0,8353	0,8270
0,2	0,8187	0,8106	0,8025	0,7945	0,7866	0,7788	0,7711	0,7634	0,7558	0,7483
0,3	0,7408	0,7334	0,7261	0,7189	0,7118	0,7047	0,6977	0,6907	0,6839	0,6771
0,4	0,6703	0,6637	0,6570	0,6505	0,6440	0,6376	0,6313	0,6250	0,6188	0,6126

Таблиця значень функції exp(–*X*)

X	*X*									
	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,5	0,6065	0,6005	0,5945	0,5886	0,5825	0,5769	0,5712	0,5655	0,5599	0,5543
0,6	0,5488	0,5434	0,5379	0,5326	0,5273	0,5220	0,5169	0,5117	0,5066	0,5016
0,7	0,4966	0,4916	0,4868	0,4819	0,4771	0,4724	0,4677	0,4630	0,4584	0,4538
0,8	0,4493	0,4449	0,4404	0,4360	0,4317	0,4274	0,4232	0,4190	0,4148	0,4107
	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,9	0,4066	0,4025	0,3985	0,3946	0,3906	0,3867	0,3829	0,3791	0,3753	0,3716
1,0	0,3679	0,3642	0,3606	0,3570	0,3535	0,3499	0,3465	0,3430	0,3396	0,3362
1,1	0,3329	0,3296	0,3263	0,3230	0,3198	0,3166	0,3135	0,3104	0,3073	0,3042
1,2	0,3012	0,2982	0,2952	0,2923	0,2894	0,2865	0,2837	0,2808	0,2780	0,2753
1,3	0,2725	0,2698	0,2671	0,2645	0,2618	0,2592	0,2567	0,2541	0,2516	0,2491
1,4	0,2466	0,2441	0,2417	0,2393	0,2369	0,2346	0,2322	0,2299	0,2276	0,2254
1,5	0,2231	0,2209	0,2187	0,2165	0,2144	0,2122	0,2101	0,2080	0,2060	0,2039
1,6	0,2019	0,1999	0,1979	0,1959	0,1940	0,1920	0,1901	0,1882	0,1864	0,1845
1,7	0,1827	0,1809	0,1791	0,1773	0,1755	0,1738	0,1720	0,1703	0,1686	0,1670
1,8	0,1653	0,1637	0,1620	0,1604	0,1588	0,1572	0,1557	0,1541	0,1526	0,1511
1,9	0,1496	0,1481	0,1466	0,1451	0,1437	0,1423	0,1409	0,1395	0,1381	0,1367
2,0	0,1353	0,1340	0,1327	0,1313	0,1300	0,1287	0,1275	0,1262	0,1249	0,1237
2,2	0,1108	0,1097	0,1086	0,1075	0,1065	0,1054	0,1044	0,1033	0,1023	0,1013

Таблиця значень функції exp(–*X*)

X	*X*									
	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,3	0,1003	0,0993	0,0983	0,0973	0,0963	0,0954	0,0944	0,0935	0,0926	0,0916
2,4	0,0907	0,0898	0,0889	0,0880	0,0872	0,0863	0,0854	0,0846	0,0837	0,0829
2,5	0,0821	0,0813	0,0805	0,0797	0,0789	0,0781	0,0773	0,0765	0,0758	0,0750
2,6	0,0743	0,0735	0,0728	0,0721	0,0714	0,0707	0,0699	0,0693	0,0686	0,0679
2,7	0,0672	0,0665	0,0659	0,0652	0,0646	0,0639	0,0633	0,0627	0,0620	0,0614
2,8	0,0608	0,0602	0,0596	0,0590	0,0584	0,0578	0,0573	0,0567	0,0561	0,0556
2,9	0,0550	0,0545	0,0539	0,0534	0,0529	0,0523	0,0518	0,0513	0,0508	0,0503
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3	0.0498	0,0450	0,0408	0,0368	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0200
4	0,0183	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074
5	0,0067	0,0061	0,0055	0,0050	0,0045	0,0041	0,0037	0,0033	0,0030	0,0027
6	0,0025	0,0022	0,0020	0,0018	0,0017	0,0015	0,0014	0,0012	0,0011	0,0010
7	0,0009	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004
8	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

ЗАКІНЧЕННЯ

Практикум містить вісім практичних робіт, в яких розглядаються методи розрахунку надійності метрологічних засобів. Виконання даних робіт дозволить відпрацювати практичні навички у розрахунку показників надійності метрологічних засобів, що застосовуються під час проведення технологічних вимірювань.

У практикумі розглянуті методи визначення показників надійності засобів вимірювання за допомогою статистичних даних про відмови, а також розрахунок показників надійності для різних законів розподілу часу безвідмовної роботи ЗВ. Крім того, представлений порядок розрахунку показників надійності при послідовному з'єднанні елементів засобів вимірювання.

Практикум доповнює конспект лекцій з навчальної дисципліни "Метрологічна надійність" у частині розгляду методів розрахунку показників надійності вимірювальних систем під час загального та роздільного резервування. Також розглядаються загальні відомості про методи розрахунку показників надійності вимірювальних систем під час резервування з дробовою кратністю та постійно включеним резервом. Крім того, надані відомості про порядок розрахунку показників надійності вимірювальних систем з ковзаючим резервуванням.

Окрема увага приділена розрахунку показників надійності резервованих вимірювальних систем з урахуванням відновлення. Розглянуті системи з навантаженим та ненавантаженим резервом, а також з обмеженим та необмеженим відновленням.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Методика розрахунку надійності радіоелектронних пристроїв / [Недоступ Л.А., Бобало Ю.Я., Кіселичник М.Д., Лазько О.В.]. – Л.: НУ "Львівська політехніка", 2005. – 60с.
2. Конструювання і технологія радіоелектронних засобів / [Лободзінська Р.Ф., Костюк О.А., Нікольський О.І., Шеремета О.П.]. – Вінниця: ВНТУ, 2007. – 90 с.
3. Сборник задач по теории надежности / [Половко А.М., Маликов И.М., Жигарев А.Н., Зарудный В.И.]; под ред. А.М. Половко и И.М. Маликова. – М.: Сов. радио, 1972. – 408 с.
4. Половко А.М Основы теории надежности. Практикум / А.М. Половко, С.В. Гуров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 560 с.
5. Липатов И.Н. Решение задач по курсу “Прикладная теория надежности” / Липатов И.Н. – Пермь: ПГТУ, 1996. – 68 с.
7. Надежность электрорадиоизделий, 2006: справочник / С.Ф. Прытков и др. – М.: ФГУП “22 ЦНИИИ МО РФ”, 2008. – 641 с.
8. Боровиков С.М. Расчет показателей надежности радиоэлектронных средств / Боровиков С.М., Цырельчук И.Н., Троян Ф.Д.; под ред. С.М. Боровиков. – Минск: БГУИР, 2010. – 68 с.
9. Чебоксаров А.Н. Основы теории надежности диагностика / Чебоксаров А.Н. – Омск: СибАДИ, 2012. – 76 с.
10. Недоступ Л.А. Основи надійності радіоелектронних пристроїв / Недоступ Л.А., Кіселичник М.Д., Бобало Ю.Я. – Л.: ДУ “Львівська політехніка”, 1998. – 219 с.
11. Семенов О.О. Основи теорії надійності / О.О. Семенов, В.Г. Мелкумян. – К.: КМУЦА, 1998. – 84 с.
12. Труханов В.М. Надежность технических систем типа подвижных установок на этапе проектирования и испытания опытных образцов / Труханов В.М. – М.: Машиностроение, 2003. – 320 с.
13. Фролов А.Д. Теоретические основы конструирования и надежности радиоэлектронной аппаратуры / Фролов А.Д. – М.: Высшая школа, 1970. – 488 с.
14. Васілевський О.М. Нормування показників надійності технічних засобів / Васілевський О.М., Поджаренко В.О. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://posibnyky.vntu.edu.ua/v_p/1.htm

Навчальне видання

Практикум для проведення практичних занять з навчальної дисципліні “Метрологічна надійність” для студентів механічного факультету спеціальності “Метрологія та вимірювальна техніка”

Укладачі: О.І. Богатов
Р.Е. Пащенко
А.О. Коваль

Відповідальний за випуск: О.В. Крайнюк

Підп. до друку
Друковано на ризографі.
Зам №

Формат
Умовн.-др.арк.
Тираж прим.

Папір офсетний
Обл.– вид. арк..
Ціна договірна

Адреса редакції видавництва і поліграфічного підприємства
ХНАДУ 61002 Харків-02, вул. Ярослава Мудрого, 25
Надруковано видавництвом Харківського національного автомобільно-дорожнього університету