

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

О. В. ВОРОПАЙ, А. С. ШАРАПАТА

# ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій

Харків

2022

УДК 531(075)

Воропай О.В., Шарапата А. С. Технічна механіка: Конспект лекцій. Харків: ХНАДУ, 2022. 124 с.

У конспекті лекцій розглянуті теоретичні основи теоретичної механіки, теорії механізмів і машин, матеріалознавства, опору матеріалів та деталей машин. При викладенні навчального матеріалу автори намагалися розкрити фізичний сенс законів, теорем і формул, що розглядалися, і наведені кольорові рисунки.

Викладений матеріал дозволяє засвоїти теоретичні основи механіки для можливості подальшого вивчення наступних спеціальних дисциплін.

Призначений для студентів технічних ВНЗ не машинобудівних спеціальностей.

© Воропай О.В., Шарапата А. С., 2022

© Харківський національний автомобільно-дорожній університет, 2022

## Технічна механіка

## ВСТУП

**Технічна механіка** – дисципліна, що є основою загальноінженерної підготовки студентів не машинобудівних спеціальностей технічних ВНЗ.

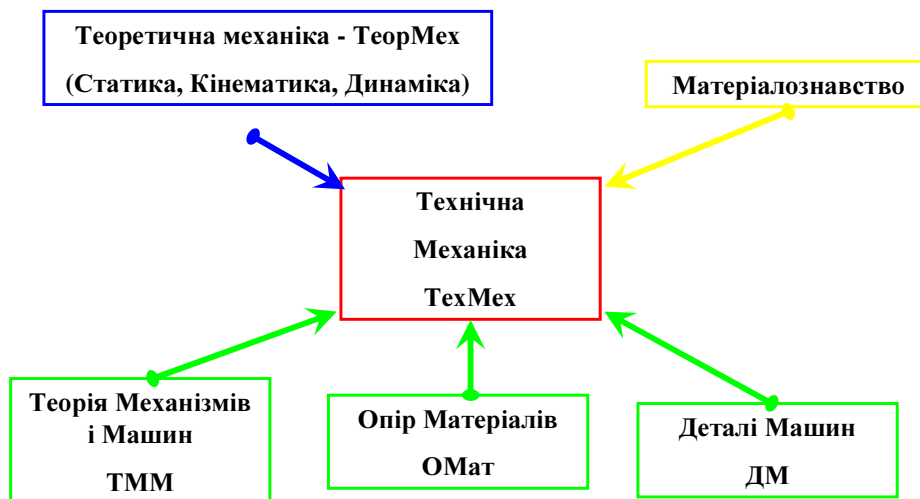


Рис. 1. Технічна механіка

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	3
ТЕМА 1. Теоретична механіка.....	5
ТЕМА 2. Кінематика. Кінематика точки. Кінематика твердого тіла. Кінематика важільних механізмів.....	19
ТЕМА 3. Динаміка .....	32
ТЕМА 4. ТММ.....	45
ТЕМА 5. Передачі .....	49
ТЕМА 6. Оцінка надійності деталей машин. Опір матеріалів .....	60
ТЕМА 7. Деталі машин.....	92

## ТЕМА 1

**Теоретична механіка**

Зміст:

1. Основні визначення теоретичної механіки.
2. Проекція сили та складова сили.
3. Аксиоми статички.
4. Правила складання векторів.
5. Зв'язки та сили реакції зв'язків (реакції).
6. Моментом сили.
7. Пара сил.
8. Перенос сили.
9. Зведення довільної системи сил.
10. Умови рівноваги.
11. Статично визначені та невизначені системи.
12. Теорема Варіньйона.
13. Контрольні питання.

**Теоретична механіка** (розділ фізики) – наука, що вивчає найбільш загальні закони механічного руху, яке визначається переміщенням у просторі та часі одного матеріального об'єкта щодо іншого.

**Ідеалізації:**

1) **Матеріальна точка** – тіло, розмірами якого можна знехтувати, але вона може мати масу.

2) **Тверде тіло** – незмінна механічна система, для якої відстань між двома будь-якими точками постійна, має постійну масу (Абсолютно тверде тіло).

3) **Механічна система** – сукупність матеріальних точок, тіл рух та становище яких пов'язано між собою.

Теоретична механіка складається з 3 основних розділів:

1. Статика

2. Кінематика

3. Динаміка

**Статика** – розділ теоретичної механіки, що вивчає рівновагу твердих тіл.

**Сила** – міра (механічної) взаємодії між тілами.

Сила – векторна величина  $\vec{F}$ , вимірюється у ньютонках (Н).

Сила характеризується (рис. 1):

1. Великою
2. Напрямком
3. Точкою прокладання

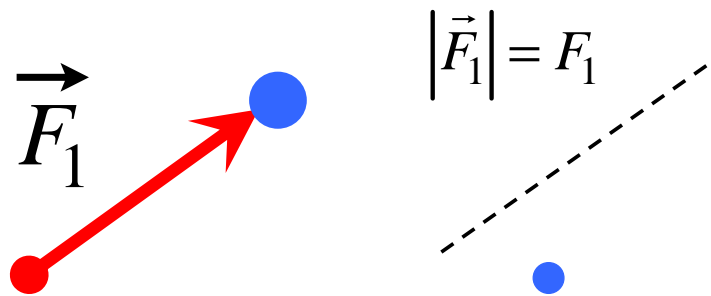


Рис. 2. Сила

### Проекція сили та складова сили

В технічній механіці використовують два різних поняття:

Складова сили – частина сили вздовж якогось напрямку, найчастіше використовують складові вздовж осей  $\vec{F}_x$  та  $\vec{F}_y$  або вздовж нормалі та дотичної  $\vec{F}^n$  та  $\vec{F}^t$ . Складова сили – це вектор.

Проекція сили – це проекція вектора сили на якусь вісь. Проекція сили – це скаляр.

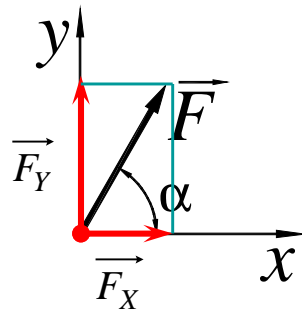


Рис. 3. Проекція сили та складова сили

Проекція сили на вісь  $OX$  :

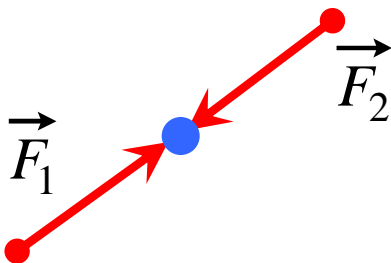
$$F_x = F \cos \alpha .$$

Проекція сили на вісь  $OY$  :

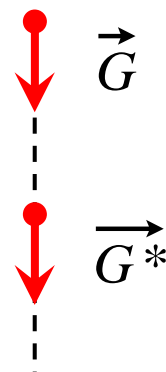
$$F_y = F \sin \alpha .$$

### Аксиоми статички

- 1) Система двох взаємно протилежних сил, рівних за величиною та прикладених в одній точці, яка перебуває в рівновазі.
- 2) Точка прикладання сили може змінюватися – її можна переносити вздовж лінії дії.
- 3) Дві сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці, можуть бути замінені однією.
- 4) Приєднання або відкидання сил, що взаємно врівноважуються, не порушує рівноваги тіла.



а)



б)

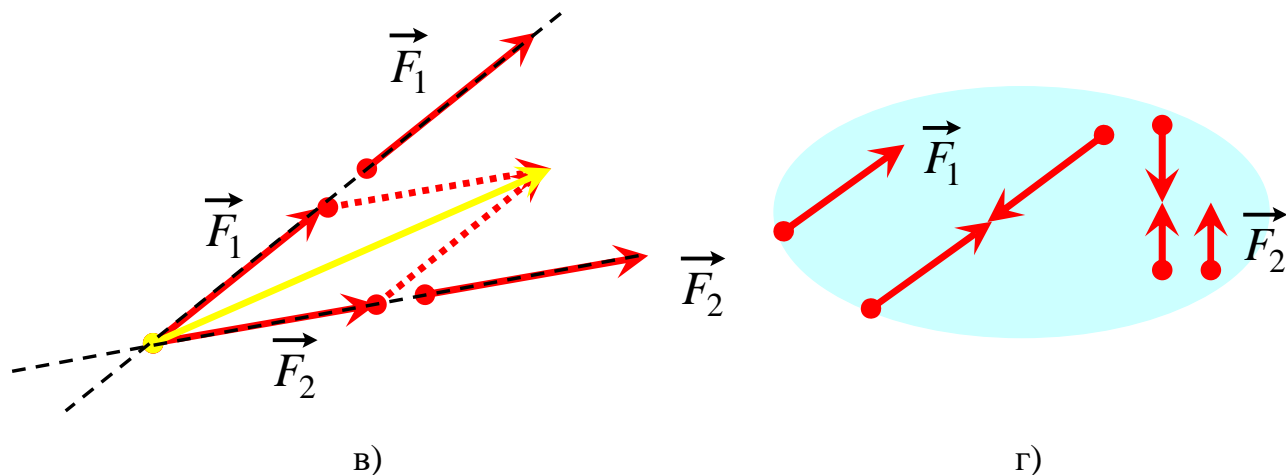


Рис. 4. Аксиоми статички:

а) аксіома 1; б) аксіома 2; в) аксіома 3; г) аксіома 4

**Аксиома інерції.** Під впливом сил, що врівноважуються, матеріальна точка (тіло) або перебуває в стані спокою, або рухається прямолінійно і рівномірно (1-й закон Ньютона).

**Аксиома рівності дії та протидії.** Будь-якій дії відповідає рівна і протилежно спрямована протидія (3-й закон Ньютона).

### Правила складання векторів:

1. Правило паралелограма

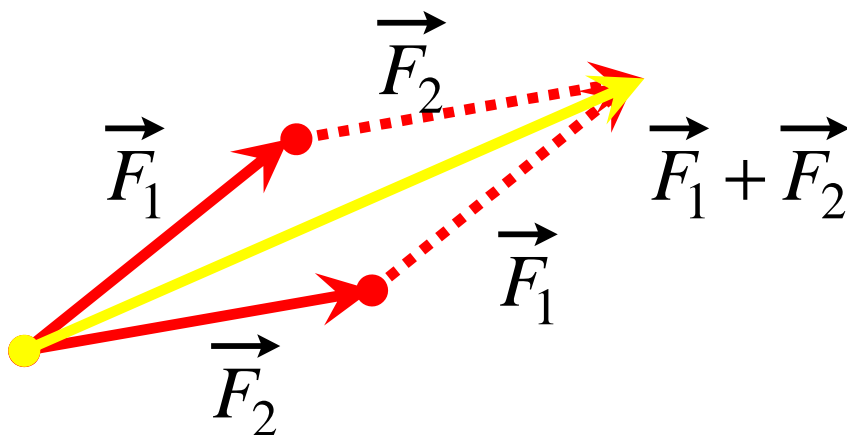


Рис. 5. Правило паралелограма

2. Правило трикутника

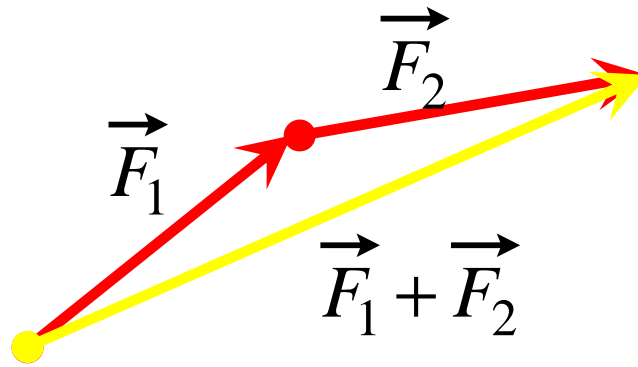


Рис. 6. Правило трикутника

**Системою сил** називається сукупність кількох сил, що діють на тіло або систему тіл.

**Еквівалентними системами сил** називають такі системи, під дією кожної з яких тверде тіло знаходиться в однаковому кінематичному стані.

**Рівнодійною силою** називається сила, еквівалентна деякій системі сил.

Системою взаємно врівноважуваних сил називається система сил, що прикладена до твердого тіла у спокої, не виводить його з цього стану.

Сили, що діють на механічну систему, поділяють на дві групи:

- Зовнішні;
- Внутрішні.

**Зовнішніми** називають сили, які діють на матеріальні точки (тіла) даної системи з боку матеріальних точок (тіл), що не належать цій системі.

**Внутрішніми** називають сили взаємодії між матеріальними точками системи, що розглядається.

Основне завдання статички є дослідження умов рівноваги зовнішніх сил, прикладених до абсолютно твердого тіла.

### **Зв'язки та сили реакції зв'язків (реакції)**

**Вільним** називається тверде тіло, яке може переміщатись у просторі в будь-якому напрямку.

**Зв'язком** є тіло, що обмежує свободу руху цього твердого тіла по відношенню до нього.

**Невільним** називається тверде тіло, свобода руху якого обмежена зв'язками.

Всі сили, що діють на невільне тверде тіло, поряд з розподілом на зовнішні та внутрішні сили, можна також розділити на сили, що задаються, і реакції зв'язків.

Сили, що задаються, виражають дію на тверде тіло інших тіл, що викликають або здатні викликати зміну його кінематичного стану.

Реакцією зв'язку називається сила або система сил, що виражає механічну дію зв'язку на тіло.

Одним з основних положень механіки є принцип звільнення твердих тіл від зв'язків: невільне тверде тіло можна розглядати як вільне, на яке, крім сил, що задаються, діють реакції зв'язків.

Приклад використання принципу звільнення твердих тіл від зв'язків.

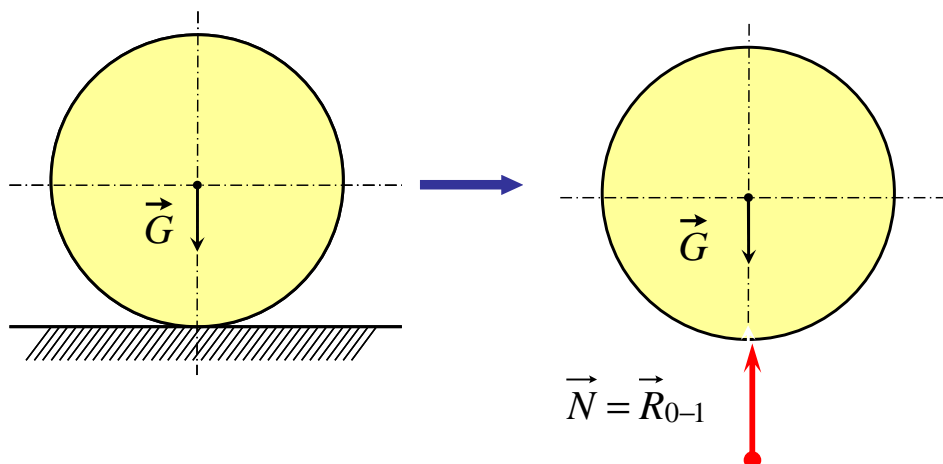


Рис. 7. Куля на площині

1) Ідеально гладка поверхня, точковий контакт

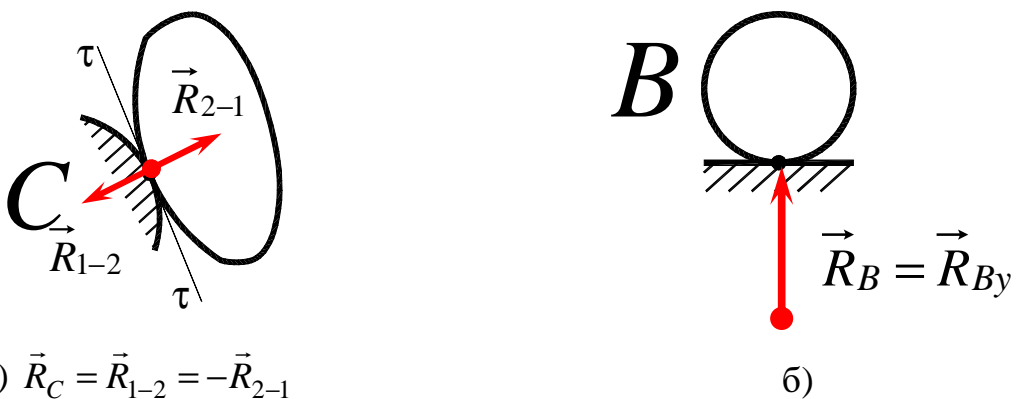


Рис. 8. Ідеально гладка поверхня, точковий контакт

2) Невагома нерозтяжна нитка / невагомий стрижень, що не стискається (на шарнірах)

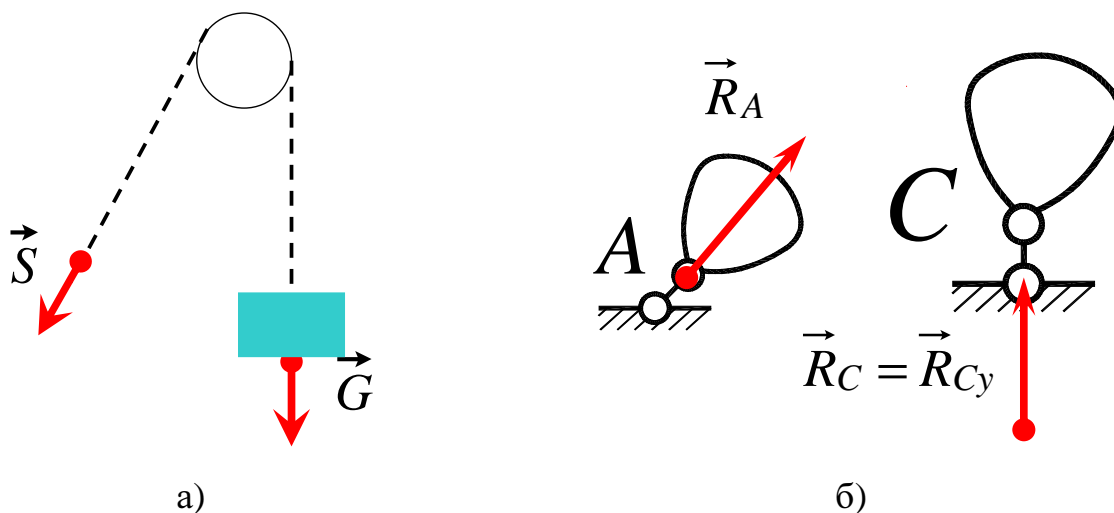


Рис. 9. Невагома нерозтяжна нитка (а).

## Невагомий стрижень на шарнірах (б)

## 3) Шарнірно-рухома опора

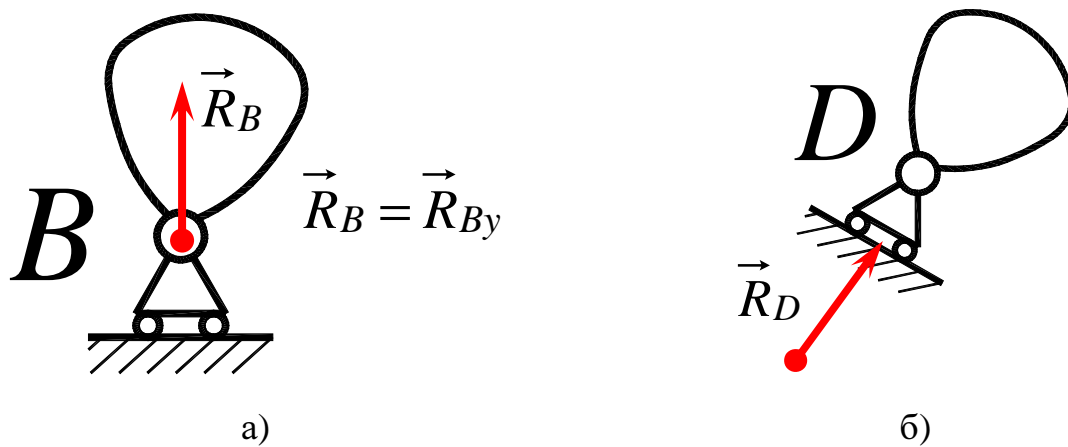


Рис. 10. Шарнірно-рухома опора.

## 4) Шарнірно-нерухома опора

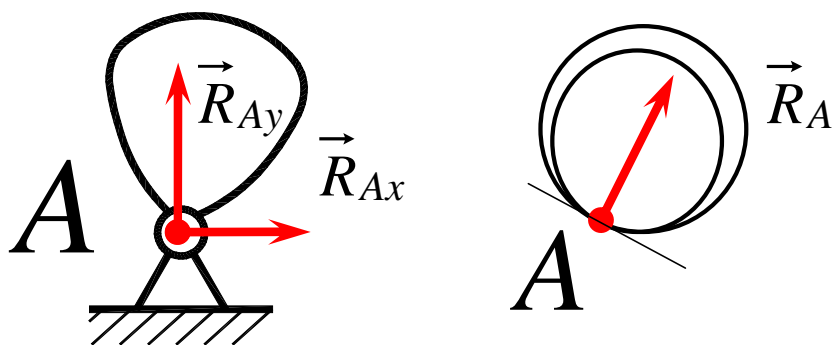


Рис. 11. Шарнірно-нерухома опора

## 5) Жорстке зацмлення (Жорстка закладка)

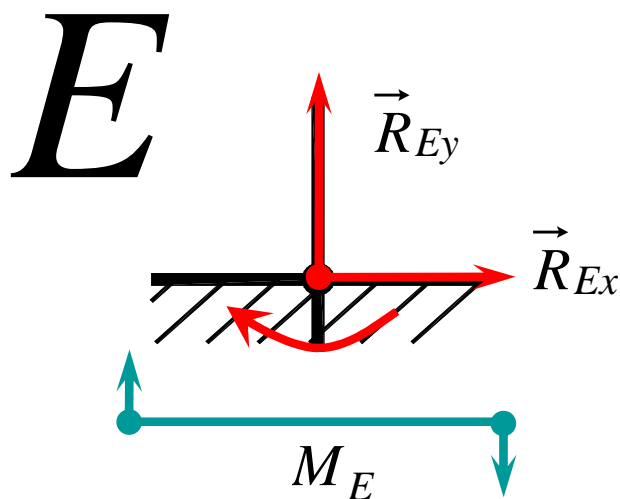


Рис. 12. Жорстке зацмлення

**Моментом сили** відносно деякої точки на площині називається **добуток** модуля **сили** на її **плече** ( $d$ ) відносно цієї точки, взятий зі знаком плюс або мінус.

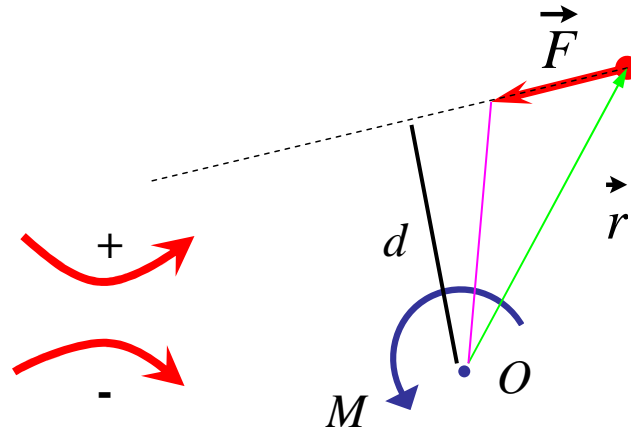


Рис. 13. Момент сили

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r},$$

$M = F \cdot r \cdot \sin(\alpha)$ , де  $\alpha$  – кут між векторами.

$$M = F \cdot d \text{ (Нм)}$$

### Пара сил

Система двох рівних за величиною та протилежних за напрямком сил

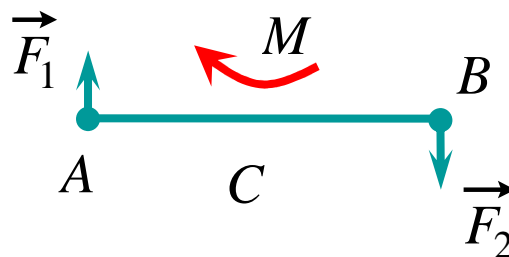


Рис. 14. Пара сил

**Парою сил** – система двох рівних за модулем, паралельних та протилежно спрямованих сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ .

Відстань  $d = AB$  між лініями дії сил, що становлять пару сил, називається **плечем пари**.

$$M_A = -F_2 \cdot AB = M_B = -F_1 \cdot AB$$

**Властивості пари сил:**

- пара сил не має рівнодіючої;
- сили пари, що не лежать на одній лінії, не врівноважуються;
- сили пари прагнуть зробити обертання тіла у напрямку руху годинникової стрілки або протилежно йому.

**Моментом пари сил** називається взятий зі знаком плюс або мінус добуток модуля сили на плече пари.

### Перенос сили

Якщо перенести силу в деяку точку, що не лежить на лінії дії цієї сили, то для збереження еквівалентності механічної системи необхідно додати до системи момент сили щодо точки перенесення.

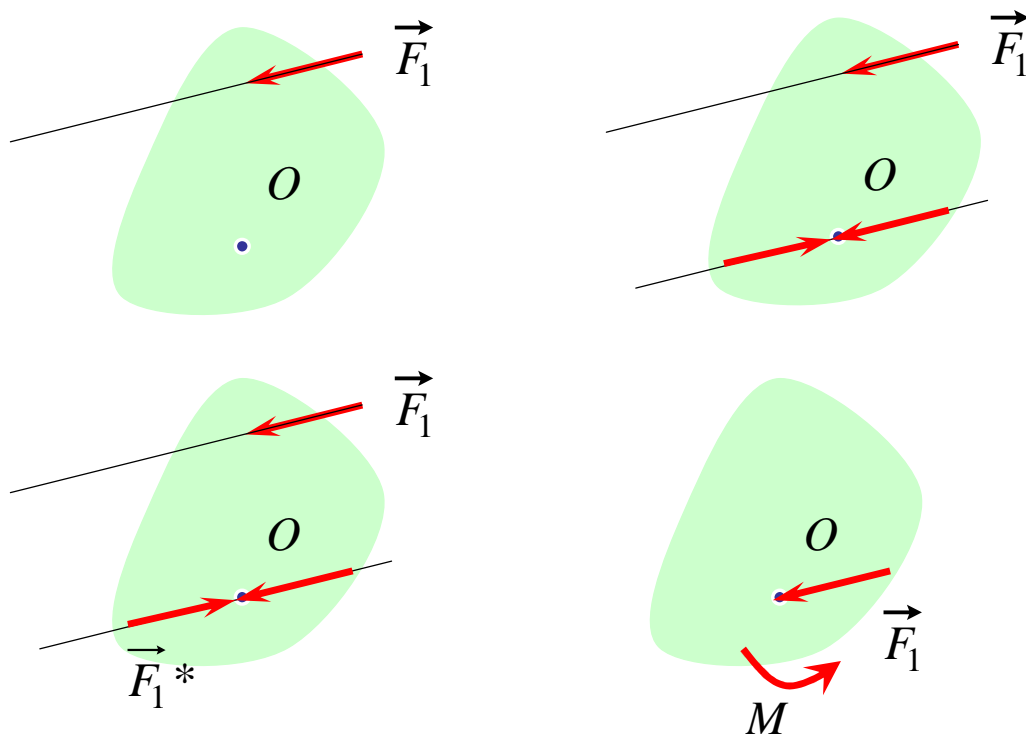


Рис. 15. Перенос сили

Дано силу  $\vec{F}_1$ , прикладену в деякій точці довільного тіла.

Прикладемо в точці  $O$  сили  $\vec{F}_1^*$  і  $\vec{F}_1^{**}$ , що врівноважуються, паралельні силі  $\vec{F}_1$  і рівні їй за модулем.

Отримаємо силу  $\vec{F}_1^{**}$ , геометрично рівну силі  $\vec{F}_1$ , прикладену в центрі приведення, та пару сил, складену силами  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_1^*$ , момент якої  $M = F \cdot d$ .

### Зведення довільної системи сил до заданого центру

Для зведення довільної системи сил до заданого центру необхідно знайти головний вектор та головний момент сил, що прикладені (відносно точки зведення).

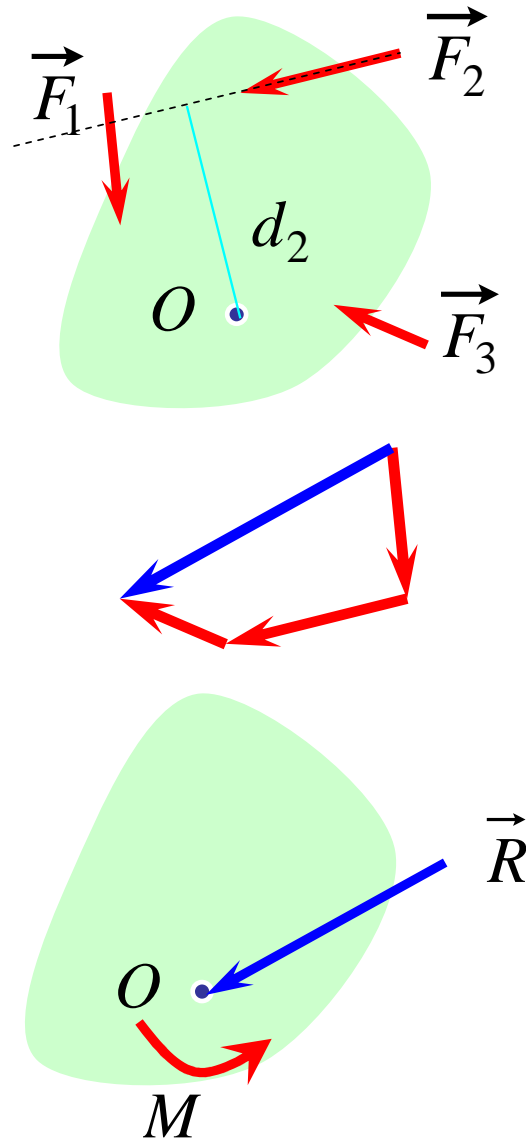


Рис. 16. Зведення довільної системи сил до заданого центру

Головний вектор:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$$

Головний момент

$$M_0(F_i) = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3 \pm \dots$$

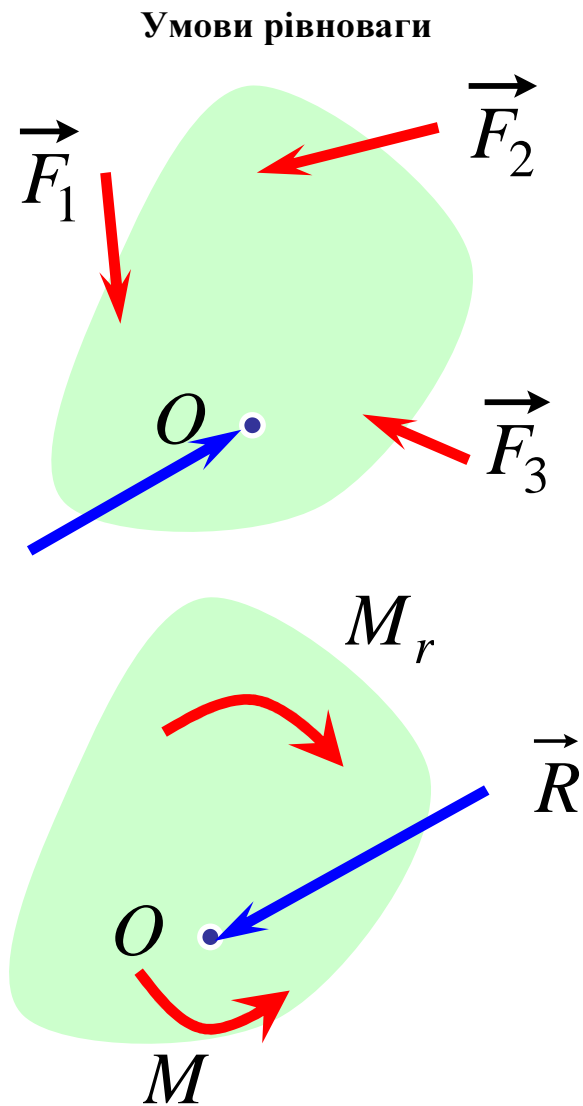


Рис. 17. Рівновага тіла

$$\begin{cases} \vec{R} = 0; \\ \vec{M} = 0 \end{cases}$$

В просторі

$$\begin{cases} \sum F_{iX} = 0; \\ \sum F_{iY} = 0; \\ \sum F_{iZ} = 0; \\ \sum M_{OX} = 0; \\ \sum M_{OY} = 0; \\ \sum M_{OZ} = 0, \end{cases}$$

У площині

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{iX} = 0; \\ \sum F_{iY} = 0; \\ \sum M = 0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sum F_{iX} = 0; \\ \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0; \\ \sum M_C = 0, \end{array} \right.$$

крім  $AB \perp OX (= \emptyset)$   $A, B, C \notin l$

### Статично визначені та невизначені системи

Статично визначеними задачами називаються задачі, які можна розв'язувати методами статички твердого тіла, тобто задачі, у яких кількість невідомих не перевищує числа рівнянь рівноваги сил.

Статично невизначеними задачами називаються задачі, із кількістю невідомих, що перевищує кількість рівнянь рівноваги, тобто задачі, які не можна вирішувати методами статички твердого тіла і для розв'язання яких потрібно враховувати деформації тіла, зумовлені зовнішніми навантаженнями.

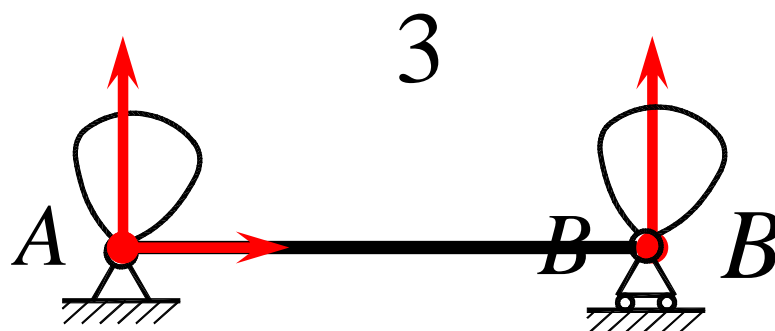


Рис. 18. Статично визначена система

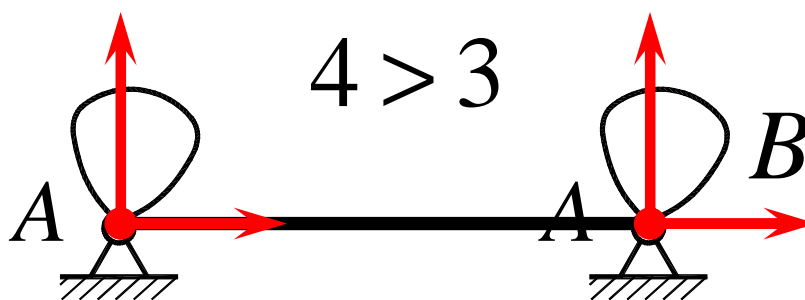
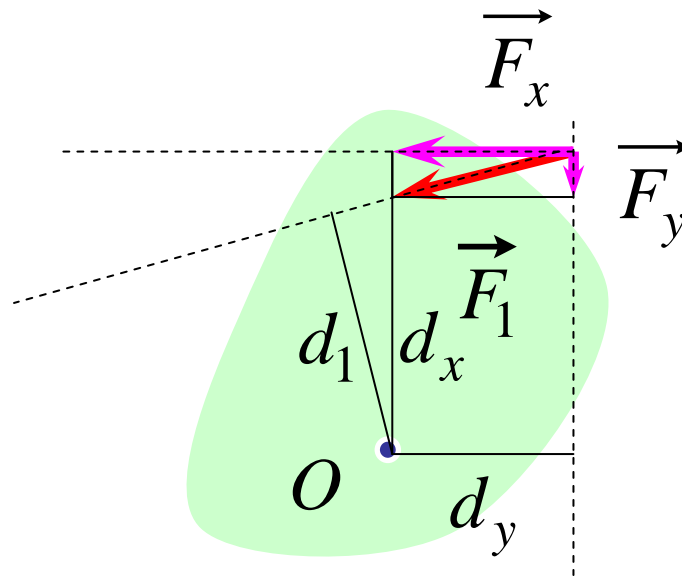


Рис. 19. Статично невизначна система

Для одного тіла у тривимірному просторі число рівнянь 6, тобто якщо ми будемо мати кількість невідомих реакцій більше 6, то задача буде статично невизначна.

### Теорема Варіньйона



$$F_1 \cdot d_1 = \pm F_x \cdot d_x \pm F_y \cdot d_y,$$

$$M_1 = F_1 \cdot d_1 = F_x \cdot d_x - F_y \cdot d_y.$$

### Контрольні питання

1. Сформулюйте основні визначення теоретичної механіки.
2. Як знайти проекцію сили?
3. Надайте визначення аксіом статички.
4. Якими способами можна скласти декілька векторів?
5. Які види опор ви знаєте і які реакції в них виникають?
6. Що таке момент сили?
7. Що таке пара сил?
8. Які особливості переносу сили на площині ви знаєте?
9. Запишіть умови рівноваги.
10. Які системи сил називають статично визначеними, а які статично невизначеними?
11. Сформулюйте теорему Варіньйона.

## ТЕМА 2

## Кінематика.

## Кінематика точки. Кінематика твердого тіла.

## Кінематика важільних механізмів.

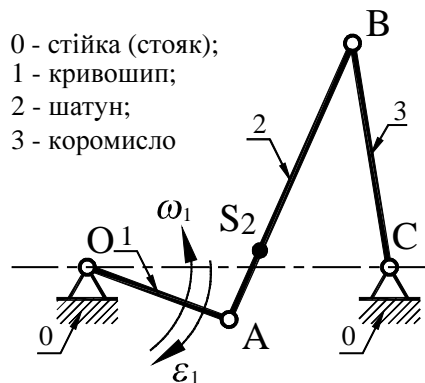
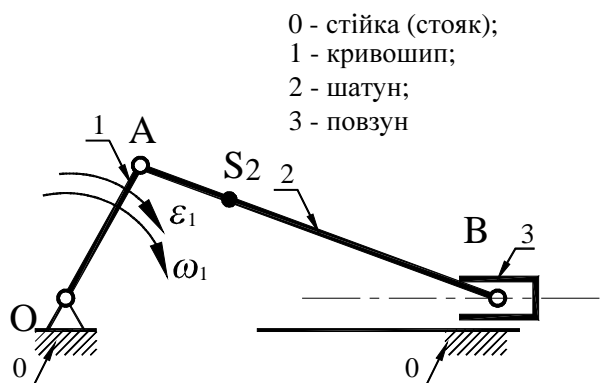
Зміст:

1. Основні визначення кінематики.
2. Види і властивості руху.
3. Миттєвий центр швидкостей.
4. Прискорення.
5. Коріолісове прискорення.
6. План швидкостей та план прискорень.
7. Контрольні питання.

**Кінематика** – розділ теоретичної механіки, що вивчає рух тіл без урахування мас і сил, що викликали цей рух.

У кінематиці вивчаються траєкторії, переміщення, швидкості та прискорення тіл під час їх руху.

**Траєкторія** – лінія по якій рухається точка (наприклад, центр мас твердого тіла).



Траєкторія руху т.  $O$  –

Ланка 1 – здійснює ...

Траєкторія руху т. *A* –

Ланка 3 – здійснює ...

Траєкторія руху т. *B* –

Ланка 2 – здійснює ...

## Види рухів

Найпростіші:

1. Поступальне
2. Обертальне

Найбільш загальний випадок:

3. Складне

Окремий випадок:

3.1. Плоскопаралельний (плаский) – рух відбувається в одній площині або паралельних площинах (поступально-обертальний).

### Поступальний

- 1) Переміщення  $S$ ,  $(X, Y)$ , м

- 2) Швидкість  $V$ , м/с (км/ч)

$$V = \frac{dS}{dt}$$

- 3) Прискорення  $a$ , м/с<sup>2</sup>

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$$

### Обертальний

- 1) Кутове переміщення  $\varphi$ , рад (радіани), ° (градуси).

$$180^\circ = \pi \text{ радіан,}$$

$$1 \text{ оберт} = 360^\circ = 2\pi \text{ радіан}$$

- 2) Кутова швидкість  $\omega$ , рад/с (1/с, с<sup>-1</sup>)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$n$  – частота обертів, об/с (об/хв)

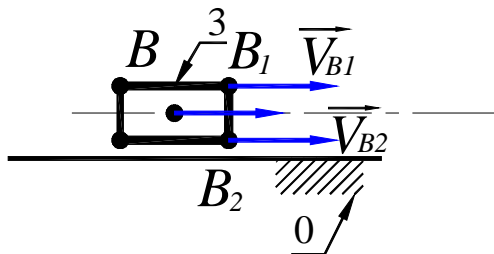
$$\omega = 2\pi \cdot n_s = \frac{\pi \cdot n_m}{30}$$

- 3) Кутове прискорення  $\varepsilon$ , рад/с<sup>2</sup>

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (1/\text{с}^2, \text{с}^{-2})$$

## Властивості рухів

## I Поступальний

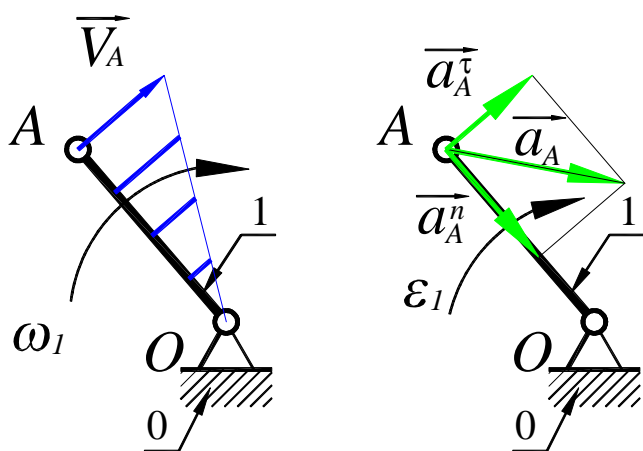


$$1) \vec{V}_B = \vec{V}_{B1} = \vec{V}_{B2}$$

$$2) \vec{V}_B \parallel \vec{a}_B$$

$$3) \vec{a}_B = \vec{a}_{B1} = \vec{a}_{B2}$$

## II Обертальний



$$1) \vec{V}_O = 0, V_O = 0$$

$$a_O = 0$$

$$2) \vec{V}_A \perp OA$$

$$V_A = \omega_{OA} \cdot l_{OA} \quad (V_A = \omega_1 \cdot l_1)$$

$$3) \vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau, \quad a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2}$$

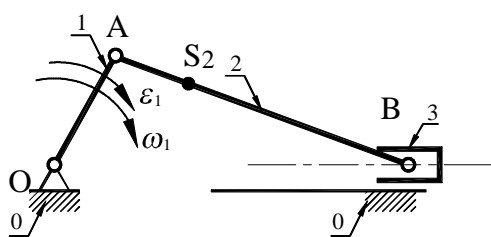
$$a_A^n = (\omega_{OA})^2 \cdot l_{OA}; \quad a_A^\tau = \epsilon_{OA} \cdot l_{OA}$$

Нормальне прискорення називають доцентровим,

вектор нормального прискорення завжди спрямований від точки до центру  $\vec{a}_A^n \parallel OA$ .

Дотичне прискорення (тангенціальне) спрямоване у бік кутового прискорення тіла (ланки)  $\epsilon_1 = \epsilon_{OA}$ ,  $\vec{a}_A^\tau \perp OA$ .

## III 3.1. Плоскопаралельний



$$1) \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} \quad (\vec{V}_B = \vec{V}_{A/O} + \vec{V}_{B/A})$$

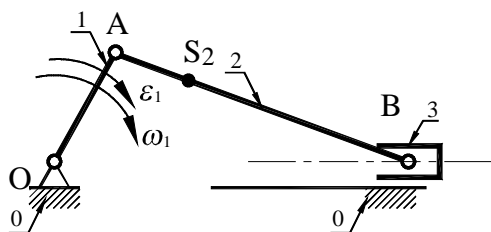
$\vec{V}_A$  – швидкість т. A (лінійна, абсолютна);

$\vec{V}_B$  – швидкість т. B (лін., абс.);

$\vec{V}_{B/A}$  – швидкість т. B навколо т. A (відн.);

швидкість відносного руху

$$V_{B/A} = \omega_2 \cdot l_{AB}; \quad \vec{V}_{B/A} = -\vec{V}_{A/B}$$



$$\vec{V}_{B/A} \perp AB$$

$$2) \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

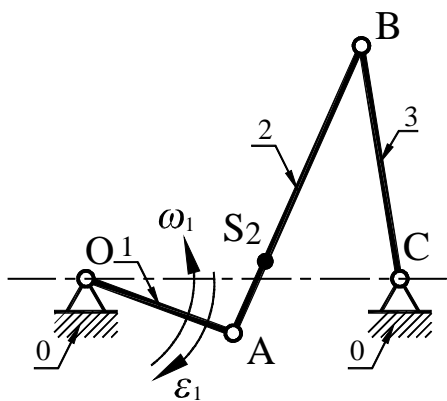
$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau,$$

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^\tau$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^\tau$$

$$a_{B/A}^n = (\omega_{AB})^2 \cdot l_{AB}; \quad a_{B/A}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot l_{AB}$$

$$a_{B/A}^n = (\omega_2)^2 \cdot l_{AB}; \quad a_{B/A}^\tau = \varepsilon_2 \cdot l_{AB}$$



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau$$

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^\tau$$

$$a_B^n = (\omega_{OB})^2 \cdot l_{OB}; \quad a_B^\tau = \varepsilon_{OB} \cdot l_{OB}$$

$$a_B^n = (\omega_3)^2 \cdot l_{OB}; \quad a_B^\tau = \varepsilon_3 \cdot l_{OB}$$

У плоскопаралельному русі для швидкості та прискорення точки  $B$  можна записати векторне рівняння, яке розв'язується:

- аналітично (розкладається на 2 рівняння проєкцій на площині);
- графоаналітично (методом планів та ін.);
- числовим методом.

### Миттєвий центр швидкостей (МЦШ).

Іноді називають – миттєвий центр обертання (не зовсім точно).

МЦШ використовують для ланок, які здійснюють плоскопаралельний рух.

МЦШ, як правило, позначають буквою латинського алфавіту –  $P$ , індекс цієї літери – номер ланки ( $P_2$ ).

Швидкість МЦШ дорівнює 0.  $\vec{V}_{P_2} = 0$ .

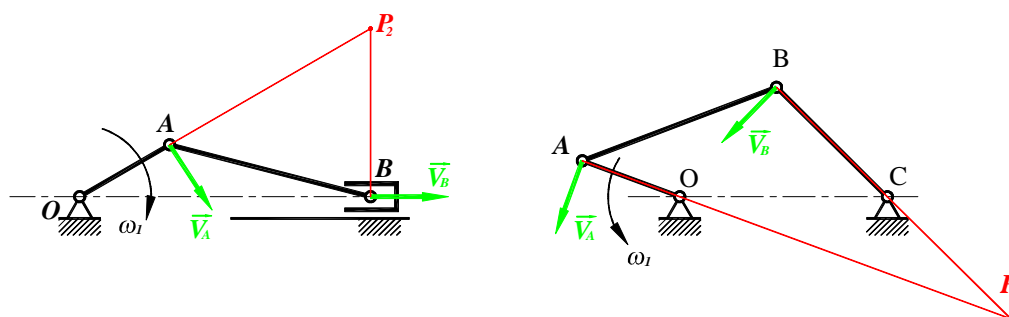
$$\omega_2 = \frac{V_A}{l_{AP_2}} = \frac{V_B}{l_{BP_2}}$$

### Правило знаходження МЦШ.

МЦШ знаходиться на перетині перпендикулярів до швидкостей у будь-яких двох точках ланки, яка рухається плоскопаралельно.

Правило знаходження МЦШ:

- 1) на ланці, яка рухається плоскопаралельно, вибираємо дві точки;
- 2) визначаємо напрямок швидкостей цих точок (досить лише лінії);
- 3) до кожної лінії, вздовж якої спрямована швидкість, проводимо перпендикуляр через вибрану точку;
- 4) МЦШ знаходиться на перетині цих двох перпендикулярів.



Якщо два перпендикуляри не перетинаються (вони паралельні) – кажуть, що МЦШ знаходиться "на нескінченності", а ланка здійснює миттєво-поступальний

рух. Тобто на даний момент часу швидкості всіх точок ланки рівні за напрямом та величиною.

Поряд з МЦШ іноді використовують поняття миттєвий центр прискорень МЦП, на відміну від МЦШ – користуватися МЦП не так зручно, оскільки для його визначення потрібно, крім кутової швидкості, знати і кутове прискорення ланки, яке теж не відоме.

### III 3.2. Складний рух (загальний випадок)

#### Швидкості

$$\vec{V}_A^a = \vec{V}_A^e + \vec{V}_A^r$$

$\vec{V}_A^a$  – абсолютна швидкість т. А;

$\vec{V}_A^e$  – переносна швидкість т. А;

$\vec{V}_A^r$  – відносна швидкість т. А.

#### Прискорення

$$\vec{a}_A^a = \vec{a}_A^e + \vec{a}_A^r + \vec{a}_A^c;$$

$$\vec{a}_A^e = \vec{a}_{An}^e + \vec{a}_{A\tau}^e,$$

$\vec{a}_A^e$  – переносне (повне) прискорення т. А

$\vec{a}_{An}^e$  – переносне нормальне прискорення т. А

$\vec{a}_{A\tau}^e$  – переносне дотичне прискорення т. А

$\vec{a}_A^r$  – відносне прискорення т. А

$\vec{a}_A^a$  – абсолютне прискорення т. А

$\vec{a}_A^c$  – коріолісове прискорення т. А

### Коріолісове прискорення

$$\vec{a}_A^c = \vec{a}_A^{cor} = \vec{a}_A^K; \quad \vec{a}_A^c = 2\vec{\omega}^e \times \vec{V}_A^r;$$

$$a_A^c = 2 \cdot \omega^e \cdot V_A^r \cdot \sin \alpha; \quad \alpha = 90^\circ \Rightarrow a_A^c = 2 \cdot \omega^e \cdot V_A^r.$$

**Правило Жуковського** для визначення коріолісового прискорення  $\vec{a}_A^c$

потрібно вектор відносної швидкості  $\vec{V}_A^r$  повернути на 90 градусів у бік кутової швидкості переносного руху  $\omega^e$ .

### План швидкостей та план прискорень

**План швидкостей** – це векторна діаграма, на якій у масштабі зображені вектори швидкостей всіх точок механізму.

**План прискорень** – це векторна діаграма, на якій у масштабі зображені вектори прискорень всіх точок механізму.

**Масштаб** – це відношення натуральної величини до відрізка, який їй відповідає.

Побудову плану швидкостей починають із швидкості точки  $A$ , величина якої

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA} \text{ (м/с)}.$$

Вектор швидкості т.  $A$  –  $\vec{V}_A$  (відрізок  $p_V a$  на плані швидкостей) перпендикулярний кривошипу  $OA$  і спрямований у бік кутової швидкості кривошипу  $\omega_1$ . Довжину відрізка  $p_V a$  рекомендується приймати 100 мм.

Швидкість точки  $B$  визначається шляхом графічного розв'язання векторного рівняння

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

де  $\vec{V}_A$  – швидкість точки  $A$  (вже є на плані швидкостей – це відрізок  $p_V a$ );

$\vec{V}_{B/A}$  – швидкість відносного обертального руху т.  $B$  навколо т.  $A$ , напрямом

$\vec{V}_{B/A}$  (лінія  $ab$  на плані швидкостей) перпендикулярний радіусу обертання, тобто відрізку  $AB$ );

$\vec{V}_B$  – швидкість точки  $B$  в обертальному чи поступальному її русі відносно стійки, напрямом  $\vec{V}_B$  (лінії  $p_V b$  на плані швидкостей) перпендикулярний коромислу  $BC$  чи паралельний переміщенню повзуна).

Порядок побудови плану швидкостей:

- 1) Вибираємо полюс плану швидкостей  $p_V$  ;
- 2) Вибираємо масштаб плану швидкостей  $\mu_V$  ;
- 3) Будуємо відрізок  $p_V a$  ;
- 4) Проводимо лінію  $ab$  через точку  $a$  ;
- 5) Проводимо лінію  $p_V b$  через точку  $p_V$  ;
- 6) На перетині ліній  $ab$  і  $p_V b$  лежить точка  $b$  .

Використовуючи побудований план швидкостей, можна знайти швидкість будь-якої точки кожної ланки механізму, помноживши відповідний відрізок із плану швидкостей на розрахунковий масштаб  $\mu_V$  :

$$\mu_V = \frac{V_A}{p_V a} \left( \frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right).$$

Крім того, легко визначити величину та напрямом кутових швидкостей ланок, які мають обертальний рух (у тому числі для відносного обертання). Наприклад, кутова швидкість шатуна 2.

$$\omega_2 = \frac{V_{B/A}}{l_{AB}} = \frac{(ab)\mu_V}{l_{AB}}, \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right),$$

а напрямом  $\omega_2$  визначається переносом вектора  $\vec{V}_{B/A}$  з плану швидкостей у точку  $B$  кінематичної схеми механізму.

### Побудова плану прискорень

Попередньо необхідно записати систему векторних рівнянь.

Побудову плану прискорення слід розпочинати з визначення прискорення точки  $A$ :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau,$$

де  $\vec{a}_A$  – вектор повного прискорення точки  $A$ ,

$\vec{a}_A^n$  – вектор нормального прискорення точки  $A$ :

$$a_A^n = (\omega_1)^2 \cdot l_{OA},$$

Оскільки нормальне прискорення спрямоване по радіусу до центру обертання, то

$\vec{a}_A^n$  паралельно  $OA$  і має напрямок від  $A$  до  $O$ .

$\vec{a}_A^\tau$  – вектор дотичного прискорення точки  $A$ :

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_{OA}.$$

Дотичне прискорення (тангенціальне) направлене у бік кутового прискорення тіла (ланки)  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{OA}$ ,  $\vec{a}_A^\tau \perp OA$ .

На кресленні вибираємо точку (полюс)  $p_a$  і паралельно  $OA$  (в напрямку від  $A$  до  $O$ ) проводимо  $p_a n_1$  (довжину відрізка рекомендується прийняти 100 мм).

Масштаб плану прискорень

$$\mu_a = \frac{a_A^n}{p_a n_1}, \left( \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right).$$

Далі проводимо відрізок  $n_1 a$  перпендикулярно відрізку  $p_a n_1$ . Довжина відрізка  $n_1 a$  визначаємо за формулою через масштаб:

$$n_1 a = \frac{a_A^\tau}{\mu_a}.$$

Відрізок  $p_a a$  відповідає повному прискоренню точки  $A$ , його величину ми можемо виміряти на плані прискорень.

$$a_A = p_a a \cdot \mu_a$$

Будуємо план прискорень для ланок 2 і 3. Векторне рівняння для цієї групи має вигляд

$$\begin{aligned} \underline{\vec{a}}_B &= \underline{\vec{a}}_A + \underline{\vec{a}}_{B/A}^n + \underline{\vec{a}}_{B/A}^\tau; \\ &\quad \parallel AB \quad \perp AB \\ (\vec{p}_a \vec{b}) &= (\vec{p}_a \vec{a}) + (\vec{a} n_2) + (\vec{n}_2 \vec{b}); \end{aligned}$$

де  $\vec{a}_B$  – прискорення точки  $B$ ;

$\vec{a}_{B/A}^n$  – вектор нормального прискорення відносного обертального руху т.  $B$  вокруг т.  $A$ , величина якого визначається за формулою  $a_{B/A}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}$  (спрямований паралельно ланці  $AB$  від т.  $B$  до центру відносного обертання т.  $A$ );

$\vec{a}_{B/A}^\tau$  – вектор дотичного (тангенціального) прискорення відносного обертального руху т.  $B$  навколо т.  $A$ , (за величиною це прискорення до побудови плану прискорень невідоме, а за напрямком перпендикулярно  $AB$ );

Відповідно до векторного рівняння з точки  $a$  плану прискорень, відкладаємо відрізок  $an_2$

$$an_2 = a_{B/A}^n / \mu_a,$$

який зображує нормальне прискорення  $\vec{a}_{B/A}^n$  у вибраному масштабі  $\mu_a$ . Відрізок  $an_2$  паралельний  $AB$  і направлений від точки  $B$  до точки  $A$ . Далі, через точку  $n_2$  (кінець відрізка  $an_2$ ), перпендикулярно  $AB$  проводимо пряму  $n_2b$ , тобто показуємо напрямок прискорення  $\vec{a}_{B/A}^\tau$ .

Із полюса  $p_a$  у напрямку вектора  $\vec{a}_B$  проводимо пряму  $p_a b$  до перетину з прямою, яка раніше проведена з точки  $n_2$ . Точка перетину – т.  $b$  визначає величини відрізків  $p_a b$  і  $n_2 b$ .

За допомогою плану прискорень можна знайти кутові прискорення ланок, що обертаються. Наприклад, кутове прискорення шатуна 2 (рад/с<sup>2</sup>)

$$\varepsilon_2 = a_{B/A}^\tau / l_{AB} = (n_2 b \cdot \mu_a) / l_{AB},$$

де  $l_{AB}$  – відома довжина шатуна 2, м;

$n_2 b$  – відрізок плану прискорень, що відображає вектор  $\vec{a}_{B/A}^\tau$ , вимірний в мм.

Для визначення напрямку  $\varepsilon_2$  переносимо вектор  $\vec{a}_{B/A}^\tau$  в точку  $B$  кінематичної схеми механізму (аналогічно вектору швидкості  $\vec{V}_{B/A}$ ). Напрямок  $\varepsilon_2$  збігається з напрямком вектора  $\vec{a}_{B/A}^\tau$ .

Прискорення центрів тяжіння ланок 2 і 3 (для кривошипно-коромислового механізму, тобто у випадку, коли ланка 3 обертається) визначити відповідно до теореми подібності для плану прискорень. Наприклад, для ланки 2:  $as_2 = ab \cdot AS_2 / AB$ , тоді  $a_{S_2} = p_a s_2 \cdot \mu_a$ .

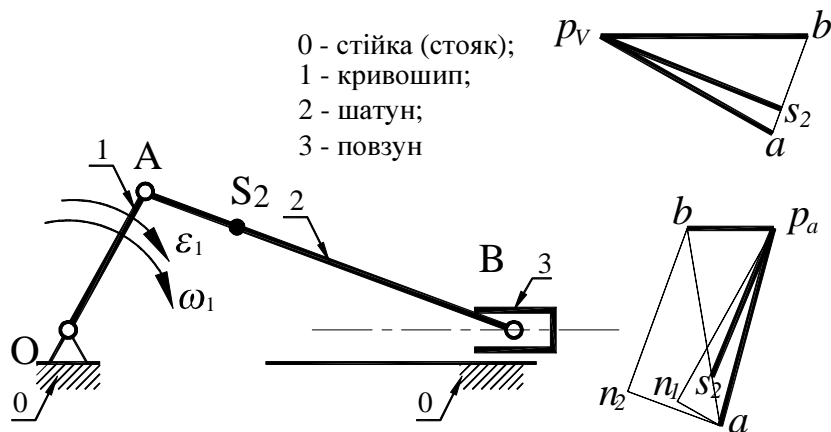


Рис. Побудова планів швидкостей і прискорень (механізм 1)

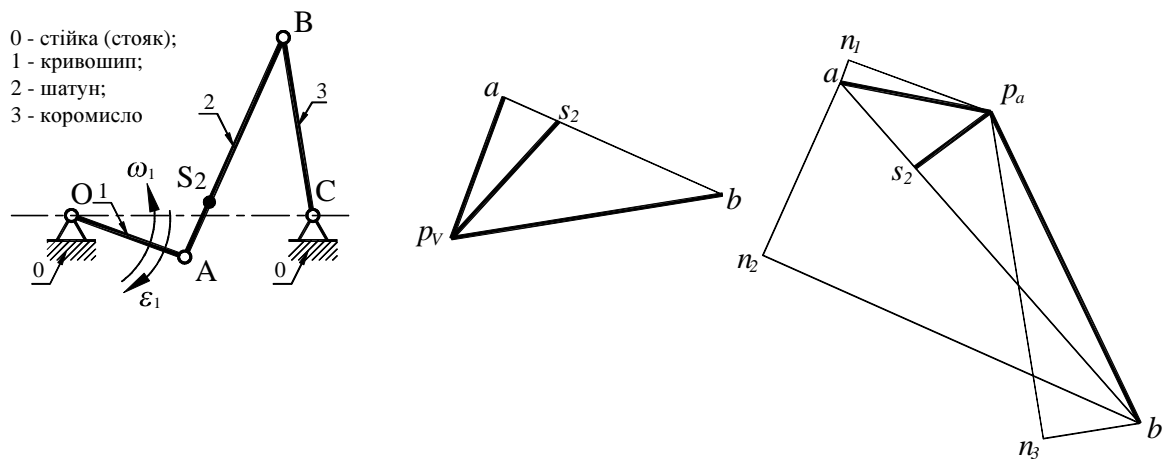


Рис. 20. Побудова планів швидкостей і прискорень (механізм 2)

### ***Контрольні питання***

1. Надайте основні визначення кінематики.
2. Які види руху ви знаєте і які у них властивості?
3. Як знайти миттєвий центр швидкостей?
4. Що таке прискорення ?
5. Коли виникає Коріолісове прискорення?
6. Як побудувати план швидкостей?
7. Як побудувати план прискорень?

### ТЕМА 3

#### Динаміка

Зміст:

1. Основні визначення динаміки.
2. Другий закон Ньютона.
3. Перший закон Ньютона.
4. Третій закон Ньютона.
5. Сили і моменти інерції.
6. Кінетична енергія і робота.
7. Потужність.
8. Теорема про кінетичну енергію.
9. Тертя.
10. Принцип Д'Аламбера.
11. Контрольні питання.

**Динаміка** – розділ теоретичної механіки, що вивчає рух тіл (механізмів) під дією прикладених сил (і моментів) які викликали цей рух з урахуванням мас (та моментів інерції).

#### Другий закон Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a}; \quad F = ma,$$

де  $F$  – сила, Н ( $\text{H} = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$ );

$m$  – маса, кг ( $m = \text{const}$ );

$a$  – прискорення,  $\text{м}/\text{с}^2$ ,

Для системи тіл

$$a = \frac{\sum F_i}{\sum m_k},$$

де  $\sum m_k$  – сума мас тіл, які рухаються разом (як одне ціле);

$\sum F_i$  – сума всіх сил (чи проєкцій всіх сил вздовж необхідного напрямку).

Диференціальний вигляд:

$$F = m \frac{dV}{dt}, \quad (m = \text{const});$$

$$F = (mV)' = \frac{dm}{dt}V + m \frac{dV}{dt}.$$

**Другий закон Ньютона при обертальному русі**

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}; \quad M = J\varepsilon,$$

де  $M$  – момент,  $Нм$ ;

$\varepsilon$  – кутове прискорення,  $рад/с^2$ ,

$J$  – момент інерції тіла відносно осі обертання,  $кг \cdot м^2$ ;

Осьовий момент інерції:  $J_a = \sum m_i R_i^2 = \int R^2 dm$ .

Момент інерції обода:  $J = mR^2$ , момент інерції диска:  $J = \frac{mR^2}{2}$ .

### Перший закон Ньютона

Якщо тіло перебуває у рівновазі (на нього не діють сили або їх дія компенсована), то дане тіло перебуває у стані спокою або рухається рівномірно та прямолінійно  $V = const$ .

Властивість тіл зберігати свою швидкість за відсутності дії інших тіл називається інерцією.

**Маса тіла** – кількісна *міра* його *інертності*.

Осьовий момент інерції тіла  $J_a$  є мірою інертності тіла у обертальному русі навколо осі подібно до того, як маса тіла  $m$  є мірою його інертності у поступальному русі.

### Третій закон Ньютона.

Сили, з якими тіла взаємодіють одне з одним, рівні за модулем і спрямовані вздовж однієї прямої в протилежні сторони.

$$\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1}.$$

*Сила дії дорівнює силі протидії.*

### Сили інерції

$$\vec{F}_{in} = -ma_S,$$

де  $F_{in}$  – сила інерції;

$a_S$  – прискорення центру мас.

### Момент сил інерції

$$\vec{M}_{in} = -J_S \vec{\varepsilon},$$

де  $M_{in}$  – момент сил інерції;

$J_S$  – момент інерції тіла щодо центру мас;

$\varepsilon$  – кутове прискорення.

### Кінетична енергія

$$\text{Поступальний рух: } E_k = \frac{mV^2}{2}.$$

$$\text{Обертальний рух: } E_k = \frac{J\omega^2}{2}$$

$$\text{Плоскопаралельний рух: } E_k = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

### Робота

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}; \quad A = F \cdot S \cdot \cos \alpha;$$

де  $A$  – робота, Дж (іноді роботу позначають  $W$ );

$F$  – сила;  $S$  – переміщення;  $\alpha$  – кут між векторами сили та переміщення.

$$A = \int F \cdot dS$$

### Робота моменту сил

$$A = M \cdot \Delta\varphi; \quad A = \int M \cdot d\varphi.$$

$M$  – момент сил;

$\varphi$  – кутове переміщення (кутова координата);

$\Delta\varphi$  – кут повороту.

### Робота сил тяжіння

$$\text{Сила тяжіння: } \vec{G} = m \cdot \vec{g}; \quad G = m \cdot g; \quad g = 9.81 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{Підйом вантажу } A = -G \cdot h = -mgh.$$

Опускання вантажу по похилій поверхні під кутом  $\beta$ :  $A = G \cdot S \cdot \sin \beta$

### Робота сил пружності

$$\text{Сила пружності: } \vec{F}_{el} = -c \cdot \vec{x}; \quad F_{el} = c \cdot x,$$

де  $c$  – коефіцієнт пропорційності, Н/м (іноді позначають  $k$ ),

також його часто називають – коефіцієнт жорсткості або просто жорсткість.

$$A = \int F_{el} \cdot dS = \int cxdx = c \frac{x^2}{2}; \quad A = - \int_{x_1}^{x_2} cxdx = - \left( c \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = c \left( \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} \right)$$

**Потужність**

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V};$$

$$P = F \cdot V \cdot \cos \alpha;$$

$$P = M \cdot \omega, \quad P = T \cdot \omega$$

де  $P$  – потужність, Вт (іноді механічну потужність позначають  $N$ );

$F$  – сила;  $V$  – швидкість;  $\alpha$  – кут між векторами сили та швидкості;

$M$  – момент сил;  $T$  – обертаючий момент;  $\omega$  – кутова швидкість.

**Зв'язок між потужністю та роботою/ енергією**

$$A = E = P \cdot t, \text{ де } t \text{ – час, с.}$$

$$A = \int P \cdot dt; \quad P = \frac{dA}{dt}.$$

**Теорема про кінетичну енергію**

(Теорема про зміну кінетичної енергії)

$$E_k - E_{k0} = \sum A(F_e) + \sum A(F_i);$$

$$T - T_0 = \sum A_e + \sum A_i,$$

де  $E_k$  чи  $T$  – кінетична енергія у заданий момент часу;

$E_{k0}$  чи  $T_0$  – кінетична енергія у початковий момент часу;

$\sum A_e$  – сума робіт зовнішніх сил;

$\sum A_i$  – сума робіт внутрішніх сил,

Для незмінної системи сума робіт усіх внутрішніх сил дорівнює нулю, тому часто в задачах  $\sum A_i = 0$ .

## Тертя

Види тертя розрізняють по відносному руху тіл, що труться.

При **терті ковзанні** (тертя першого роду) спостерігається відносна лінійна швидкість тіл, що труться, має постійну величину по всій поверхні контакту (по плямі контакту).

При **терті коченні** (терті другого роду) відносна лінійна швидкість тіл, що труться, відсутня по всій плямі контакту.

Якщо одночасно відбувається і ковзання і кочення тіл, що труться, тоді прийнято говорити про **комбіноване тертя**.

### Тертя ковзання

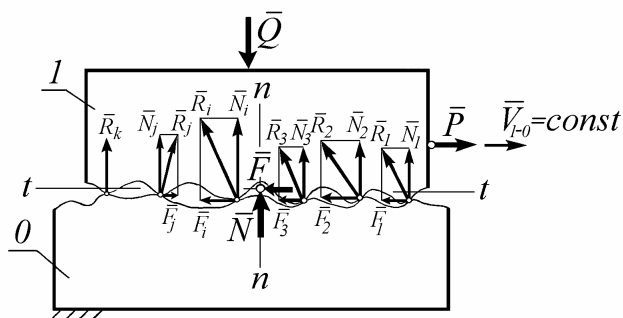


Рис. 1. Ковзання шорсткого повзуна 1 по шорсткій напрямній 0

$$\sum F_{iY} = N - Q = 0; \quad N = Q \quad (N = G)$$

$$\sum F_{iX} = F - P = 0; \quad F = P$$

Силу  $F = F_{mp}$  прийнято називати **силою тертя ковзання**. Вона завжди спрямована у бік, протилежний напрямку вектора швидкості відносного руху повзуна по напрямній  $\bar{V}_{1-0}$ , навіть і в тому випадку, коли напрямна повзуна сама рухається.

Існує також поняття – **сила тертя спокою**, яка може змінюватися в межах від 0 до деякого максимального значення  $F_{max}$ , тільки після досягнення якого можливе виникнення режиму ковзання.

### Закон Амонтона – Кулона:

$$F_{mp} = f \cdot N,$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання (безрозмірний), змінюється в залежності від виду тертя і від типів матеріалів, які труться, в межах приблизно від 1 (в окремих випадках – навіть від кількох одиниць) до 0,0001;

$N$  – нормальна складова сили реакції напрямної на повзун, Н.

Експерименти показують, що зазвичай справедлива нерівність  $f_0 > f$ , де  $f_0$  – коефіцієнт тертя спокою.

Крім того, на величину сили тертя ковзання  $F$  в різній мірі впливає велика кількість різних факторів, серед яких можна назвати: величина швидкості відносного руху, площа контакту (інакше, питомий тиск у контакті), вологість середовища, температура тіл тертя, клас чистоти поверхонь повзуна та напрямної, різновид матеріалу повзуна і напрямної та багато іншого.

Залежно від наявності у контакті третіх речовин прийнято розрізняти такі різновиди тертя ковзання:

1. **Тертя без мастила** (застарілий термін – **сухе тертя**).
2. **Граничне тертя** – тертя повзуна та напрямної, покритих найтоншою плівкою залишку змащення, яка через невелику товщину придбала характеристику твердого тіла і не може бути видалена інакше, як тільки спеціальними прийомами знежирення.
3. **Напівсухе тертя** – суміш граничного тертя та тертя без змащення (через прорив найтоншої плівки мастила в окремих місцях контакту при високих питомих тисках).
4. **Напіврідинне тертя** – суміш граничного тертя та тертя, при якому повзун та напрямна частково розділені шаром мастила достатньої товщини з характеристиками рідини.
5. **Рідинне тертя** – тертя повзуна та напрямної, повністю розділених прошарком рідкого мастила (у тому числі, іноді як мастило застосовується вода, або якийсь газ, або навіть просто повітря).

### Опір коченню. (Тертя кочення)

На рис. 2 показано абсолютно жорсткий (непружний) круглий каток 1 радіусом  $r$ , який котиться по абсолютно жорсткій горизонтальній основі 0 з постійною швидкістю  $\vec{V}_{1-0} = const$  та навантажений вертикальною силою  $\vec{Q}$ .

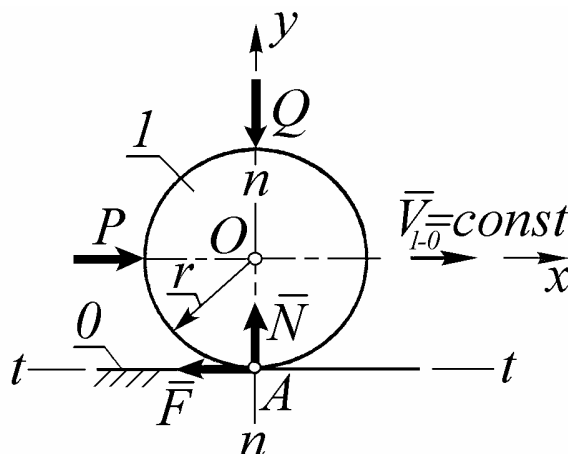


Рис. 2. Котіння абсолютно жорсткого катка 1 по абсолютно жорсткій основі 0

Для підтримки  $\vec{V}_{1-0} = const$  необхідно прикласти до катка деяку штовхаючу силу  $\vec{P}$ . При цьому з боку основи 0, на каток 1 будуть діяти (за аналогією з тертям ковзання) дві складові від повної сили реакції:  $\vec{N}$  – вздовж загальної нормалі  $n - n$  і  $\vec{F}$  – вздовж дотичної  $t - t$  у точці контакту.

Силу  $\vec{F}$  прийнято називати **силою тертя кочення**.

Скористаємося рівняннями статички, справедливими при дотриманні умови  $\vec{V}_{1-0} = const$ .

З рівняння  $\sum F_{iY} = 0$  знайдемо  $N = Q$ .

З рівняння  $\sum F_{iX} = 0$  знайдемо  $F = P$ .

З рівняння  $\sum M_O = 0$  знайдемо  $F \cdot r = 0$ .

Так як  $r \neq 0$ , у цій постановці задачі  $F = P = 0$ .

Приходимо до висновку, що без урахування деформацій тіл кочення величину сили тертя кочення  $F$  визначити неможливо.

Водночас проситься також наступний висновок: чим вищою буде жорсткість тіл кочення, тим менша сила тертя кочення. Це підтверджується досвідом.

Наприклад, на залізничному (рейковому) транспорті, де застосовуються жорсткі сталеві колеса та жорсткі сталеві рейки, сили тертя кочення невеликі.

Відомі випадки, коли зусиллям однієї людини по горизонтальним рейкам переміщувався 60-тонний вагон.

На рис. 3 показаний пружній каток 1, zdeформований під дією навантаження  $\vec{Q}$  на жорсткій основі 0, деформаціями якої, через їх малу величину, можна знехтувати ( $\vec{V}_{1-0} = 0$ ).

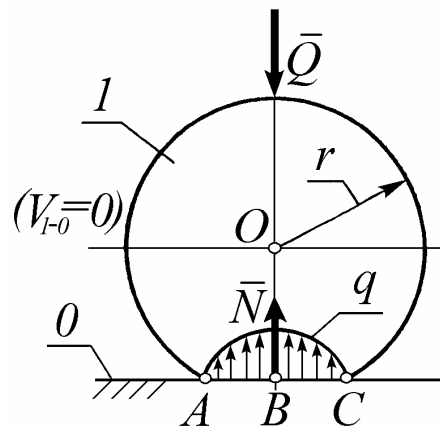


Рис. 3. Пружній каток, що не котиться, під навантаженням

Якщо каток однорідний (ізотропний), тоді епюра питомих сил тиску в контакті матиме симетричну еліптичну форму, яка описана Герцем.

Результуюча реакція основи на каток у цьому випадку включатиме лише одну складову  $\vec{N}$ , спрямовану по одній лінії протилежно силі  $\vec{Q}$ , причому  $N = Q$ .

Тоді, коли здійснюється кочення катка 1 вліво з  $\vec{V}_{1-0} = const$  (рис. 4). Для цього до катка прикладена відповідна штовхаюча горизонтальна сила  $\vec{P}$ . У площині контакту при цьому виникне сила тертя другого роду  $\vec{F}$ .

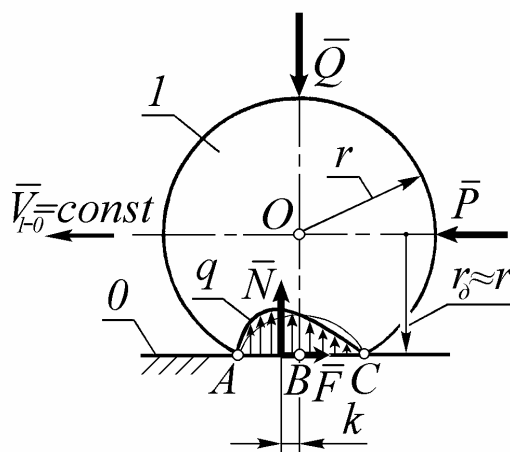


Рис. 4. Котіння пружного катка по жорсткій основі

У процесі кочення тіло катка 1 у передній частині зони контакту (від  $A$  до  $B$ ) буде зазнавати деформації стиснення, що наростає. З фізики пружного тіла відомо, що внутрішнє тертя перешкоджає зміні деформації, тому в зоні  $A - B$  контакту сили внутрішнього тертя додаватимуться до сил пружності, збільшуючи епюру питомих тисків  $q$ .

У задній частині контакту (від  $B$  до  $C$ ) спостерігається розпрямлення катка під дією сил пружності. Сили внутрішнього тертя і тут перешкоджатимуть зміні деформації, і тому вони будуть відніматися з сил пружності, зменшуючи епюру питомих тисків  $q$ .

Таким чином, результуюча епюра питомих тисків у зоні контакту  $q$  зміниться так, як це показано на рис. 4.

Результуюча нормальна сила  $\vec{N}$  пройде в цьому випадку через центр тяжіння фігури епюри питомих тисків  $q$  на деякій відстані  $k$  спереду від вертикальної центральної лінії.

Відповідно до рівнянь статки і в цьому випадку сила  $N = Q$ , а сила  $F = P$ .

З рівняння  $\sum M_O = 0$ , з урахуванням  $r_d \approx r$ , знайдемо вираз  $F \cdot r = N \cdot k$ , звідки

$$F = \frac{k}{r} N.$$

Тут  $r_d$  – динамічний радіус котка, залежить від його деформації під навантаженням,  $r$  – статичний радіус котка (за відсутності навантаження).

Плече  $k$  зміщення вектора нормальної реакції  $\vec{N}$  вперед по ходу руху названо **коефіцієнтом тертя другого роду**.

Експериментами встановлено, що величина коефіцієнта тертя кочення  $k$  залежить насамперед від матеріалу тіл кочення і мало залежить від кривизни катка.

У довідковій літературі можна знайти таблицю орієнтовних значень коефіцієнта  $k$  для різних пар тіл кочення. Наприклад, для тіл кочення із незагартованої сталі  $k \approx 0.005$  см, для тіл кочення зі загартованої сталі  $k \approx 0.001$  см, для тіл кочення з дерева  $k \approx 0.05$  см.

Зазвичай безрозмірне відношення  $k/r$  виявляється значно менше від коефіцієнта тертя котка  $f$ , тому кочення супроводжується значно меншими втратами потужності, чим це спостерігається при здійсненні ковзання.

Якщо враховувати деформації не лише катка, а й основи, а особливо, якщо основа зазнає пластичні деформації (каток у цьому випадку залишає колію), тоді опис явища кочення катка суттєво ускладнюється. З'являються пружні деформації не тільки вертикального, а також горизонтального напрямку, попереду котка може виникати валик спученої опорної поверхні. Опір коченню різко зростає.

Все ж таки і в цьому випадку запропонована вище модель кочення катка може бути використана, тільки плече  $k$  зміщення нормальної складової  $\vec{N}$  від повної реакції  $\vec{R}$  основи на коток необхідно визначити експериментально в умовах близьких до реальних.

Поступальний	Обертальний
1) Переміщення $S$ ( $X, Y$ ), м (Основні поняття: Положення – радіус-вектор, путь, переміщення, траєкторія)	1) Кутове переміщення $\varphi$ , рад (радіани), $^\circ$ (градуси). $180^\circ = \pi$ радіан, 1 оберт = $360^\circ = 2\pi$ радіан
2) Швидкість $V$ , м/с (км/ч)	2) Кутова швидкість $\omega$ , рад/с ( $1/c, c^{-1}$ )

$$V = \frac{dS}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$n$  – частота обертів, об/с (об/хв)

$$\omega = 2\pi \cdot n_s = \frac{\pi \cdot n_m}{30}$$

3) Прискорення  $a$ , м/с<sup>2</sup>

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$$

3) Кутове прискорення  $\varepsilon$ , рад/с<sup>2</sup>

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (1/c^2, c^{-2})$$

4) Маса  $m$  – маса, кг

4) Момент інерції тіла відносно осі обертання  $J$ , кг · м<sup>2</sup>

$$J_a = \sum m_i R_i^2 = \int R^2 dm$$

5) Другий закон Ньютона

$$F = ma$$

5) Другий закон Ньютона

$$M = J\varepsilon$$

6) Сила інерції

$$\vec{F}_{in} = -ma_S \vec{a}_S$$

6) Момент сил інерції

$$\vec{M}_{in} = -J_S \vec{\varepsilon}$$

7) Кінетична енергія

$$E_k = \frac{mV^2}{2}$$

7) Кінетична енергія

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}$$

8) Робота

$$A = F \cdot S \cdot \cos \alpha$$

8) Робота

$$A = M \cdot \varphi$$

9) Потужність

$$P = F \cdot V \cdot \cos \alpha$$

9) Потужність

$$P = M \cdot \omega$$

### Принцип Д'Аламбера

$$\begin{cases} \sum F_{iX} = 0; \\ \sum F_{iY} = 0; \\ \sum M = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_i F_{iX} + \sum_i F_{iX}^{in} = 0; \\ \sum_i F_{iY} + \sum_i F_{iY}^{in} = 0; \\ \sum_i M_i + \sum_i M_i^{in} = 0, \end{cases}$$

де  $\sum_i F_{iX}$  – сума проекцій зовнішніх сил уздовж осі  $OX$  ;

$\sum_i F_{iX}^{in}$  – сума проекцій сил інерції вздовж осі  $OX$  ;

Розділ *динаміки*, в якому використовують **принцип Д'Аламбера** називають *кінестатикою*.

### ***Контрольні питання***

1. Що таке динаміка?
2. Сформулюйте другий закон Ньютона.
3. Сформулюйте перший закон Ньютона.
4. Сформулюйте третій закон Ньютона.
5. Як знайти сили і моменти інерції в найпростіших видах руху?
6. Знайдіть кінетичну енергію при найпростіших видах руху.
7. Знайдіть роботу у найпростіших видах руху.
8. Надайте визначення потужності.
9. Сформулюйте визначення теореми про кінетичну енергію.
10. Які види тертя Ви знаєте і як його визначити кількісно?
11. Сформулюйте принцип Д'Аламбера.

## ТЕМА 4

## ТММ

Зміст:

1. Основні визначення ТММ.
2. Число ступенів свободи. Формула Чебишева.
3. Структурний аналіз механізмів.
4. Кінематичний аналіз механізмів.
5. Контрольні питання.

**Теорія механізмів та машин** – наука про структуру (побудову), кінематику та динаміку механізмів (машин), у зв'язку з їх аналізом та синтезом.

**Аналіз механізмів** – вивчення (дослідження) структури, кінематики та динаміки існуючих механізмів.

**Синтез механізмів** – проектування нових механізмів за наперед заданими їх властивостями.

**Механізм** – це система ланок, призначена для *перетворення руху* однієї або декількох ланок у потрібні рухи інших ланок.

**Машина** – пристрій, що виконує механічну роботу з *метою перетворення енергії* (матеріалів та інформації).

Під терміном “машина” в ТММ розуміється сукупність функціонально пов'язаних механізмів.

У ТММ вивчаються переважно механізми, що складаються з твердих (жорстких) ланок.

**Ланкою** механізму є сукупність тіл (деталей), що працюють (рухаються) як одне ціле.

**Кінематична схема** – це максимально спрощене зображення механізму (машини), що враховує ті розміри його ланок, які впливають на закон руху та силову взаємодію ланок.

По виду руху розрізняють наступні найменування ланок важільних механізмів:

**Стійка (Стояк)** – нерухома ланка.

Крім терміна **стійка (стояк)** також використовують терміни:

**опора** (нерухома опора) при обертальному русі та

**напрямна** (нерухома напрямна) при поступальному русі.

**Кривошип** – ланка, що здійснює *повнооборотний* обертальний рух.

**Коромисло** – ланка, що здійснює коливальний (або зворотно-обертальний, тобто *неповнооборотний*) рух.

**Шатун** – ланка, що здійснює складний рух (найчастіше плоскопаралельний).

**Повзун** – ланка, що здійснює поступальний (поворотно-пост.) рух.

**Камінь** – повзун, що здійснює складний рух.

**Куліса** – направляюча повзуна або каменю, яка рухається.

Ланки в механізмах з'єднуються в кінематичні пари та кінематичні ланцюги.

**Кінематична пара** – з'єднання двох ланок, що допускає їх відносний рух.

**Кінематичний ланцюг** – система ланок пов'язана між собою кінематичними парами.

**Нижчі КП** – це КП у яких контакт дотичних поверхонь здійснюється по поверхні або площині.

**Вищі КП** – це КП у яких контакт дотичних поверхонь здійснюється по лінії або в точці.

Приклади вищих КП: кулачки, зубчасті зачеплення.

### **Число ступенів свободи. Формула Чебишева.**

$$w = 3 \cdot n - 2 \cdot p_n - p_v,$$

де  $w$  – число ступенів свободи (число рухливостей);

$n$  – число рухливих ланок;

$p_n$  – число нижчих КП;

$p_v$  – число вищих КП.

$$w = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 - p_4.$$

### **Структурний аналіз механізмів. Задачі:**

- Побудова кінематичної схеми механізму.
- Нумерація та найменування ланок механізму.
- Визначення ступеня рухливості механізму.
- Виявлення надлишкових зв'язків у механізмі.

### **Кінематичний аналіз механізмів. Задачі:**

1. Побудова положень механізму (сумісних) на його кінематичній схемі.
  2. Визначення траєкторій руху будь-яких точок ланок механізму.
  3. Визначення лінійних швидкостей та прискорень будь-яких точок ланок механізму.
  4. Визначення крайніх положень вихідної ланки, повертання (існування) кривошипу.
- Критерій крайньої (мертвої) точки – зупинка, тобто швидкість дорівнює 0.
5. Визначення кутових швидкостей та прискорень ланок механізму.

### **Методи кінематичного аналізу:**

1. Аналітичний
2. Графічний (метод кінематичних діаграм)
3. Комбінований (графоаналітичний – метод планів)

### ***Контрольні питання***

1. Сформулюйте основні визначення ТММ?
2. Як розрахувати число ступенів свободи механізма?
3. Запишіть формулу Чебишева.
4. Які задачі структурного аналізу механізмів?
5. Які задачі кінематичного аналізу механізмів?

## ТЕМА 5

### Передачі

Зміст:

1. Основні визначення передач. Класифікація.
2. Параметри механічних передач.
3. Передатне відношення.
4. Рядовий зубчастий механізм.
5. Треступінчаста циліндрична зубчаста передача.
6. Планетарні зубчасті передачі.
7. Контрольні питання.

**Передача** – передача енергії на відстань.

Передачі бувають:

- 1) механічні;
- 2) електричні;
- 3) гідравлічні;
- 4) пневматичні;
- 5) комбіновані

#### Механічні передачі

Залежно від способу передачі можна розділити на:

- 1) передачі тертям (фрикційні, пасові);
- 2) передачі зачепленням (зубчасті).

Також поділяють передачі:

- з безпосереднім контактом від ведучої до веденої ланки;
- передачі з проміжною ланкою, найчастіше, з гнучким зв'язком (пасові, ланцюгові).

## **Передачі зачепленням / Зубчасті передачі**

Класифікація розташування осей (валів):

– з паралельними осями валів

циліндричні зубчасті колеса з прямими, косими та шевронними зубами;

Циліндрична передача може бути із внутрішнім зачепленням, із зовнішнім зачепленням, рейкова.

– з осями валів, пересікаються

конічні колеса з прямими, косими та круговими зубами;

– з осями валів, що перехрещуються (схрещуються) – мимобіжні гіпоїдні, зубчасто-гвинтові (гвинтові), черв'ячні;

– із співвісними валами (пряма передача).

### Параметри передачі

1) Кутова швидкість  $\omega$ , рад/с ( $1/\text{с}$ ,  $\text{с}^{-1}$ )

2) Частота обертів  $n$ , об/с (об/хв)

$$\omega = 2\pi \cdot n_s = \frac{\pi \cdot n_m}{30}$$

3) Окружна швидкість  $V$ , м/с

$$V = \omega \cdot r = \omega \cdot \frac{d}{2}$$

4) Окружна сила  $F_t$ , Н

5) Крутний момент  $T$ , Нм

$$T = F_t \cdot r = F_t \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow F_t = \frac{2T}{d}$$

6) Потужність  $P$ , Вт

$$P = F_t \cdot V = T \cdot \omega$$

7) Передатне відношення – відношення кутових швидкостей входу до виходу

$$i_{\text{вх-вих}} = \frac{\omega_{\text{вх}}}{\omega_{\text{вих}}}, i_{\text{заг}} = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot \dots \cdot i_N = \prod_{n=1}^N i_n$$

Якщо ланка 1 – ведуча, а ланка 2 – ведена:

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, i_{2-1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{i_{1-2}}, i_{2-1} = \frac{1}{i_{1-2}}$$

8) ККД – коефіцієнт корисної дії

$$\eta_{\text{вх-вих}} = \frac{P_{\text{вих}}}{P_{\text{вх}}}, \eta_{1-2} = \frac{P_2}{P_1}, \eta_{2-1} = \frac{P_1}{P_2}$$

$$\eta_{\text{заг}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_N = \prod_{n=1}^N \eta_n$$

$$-\infty < \eta < 1$$

### Передатне відношення

Ведуче колесо називають шестернею.

Ділильний діаметр зубчастого колеса:

$$d = m \cdot z,$$

де  $m$  – модуль зубчастого колеса, стандартна величина, вимірюється в мм;

$z$  – кількість зубів.

У зачеплення входять зубчасті колеса з однаковим модулем!!!

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2,$$

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

Знак передатного відношення ( $\omega_1 \neq 0$ ,  $\omega_2 \neq 0$ ,  $i \neq 0$ )

$i > 0$  – напрямок обертання не змінюється (внутрішнє зачеплення).

$i < 0$  – напрямок обертання змінюється на протилежний (зовнішнє зачеплення).

За величиною передатного відношення виділяють

$|i| \in (0,1)$  – мультиплікатор (прискорювач)  $\omega_1 < \omega_2$ .

$|i| > 1$  – редуктор (уповільнювач, демумultiплікатор)  $\omega_1 > \omega_2$ .

При  $i \neq const$  також виділяють:

$i = var$  (змінне передатне відношення) – варіатор,

$i = i_I, i_{II}, i_{III} \dots$  – якщо передатне відношення змінюється ступінчасто, такий пристрій називають *коробка передач*.

В окремих випадках також застосовується зовнішнє зачеплення некруглих циліндричних коліс.

При розрахунках передач застосовується поняття – **передатне число  $u$** .

Це відоме число (або відношення двох цілих чисел).

Числу  $u$  не присвоюється знак і воно завжди більше чи дорівнює 1 ( $u \geq 1$ ).

Наприклад, можна сказати: "Прискорювач з передатним числом 2".

### Зубчасті механізми

Зубчастою передачею називається триланковий механізм, в якому дві рухомі зубчасті ланки утворюють з нерухомою ланкою обертальні кінематичні пари або обертальну та поступальну кінематичну пару.

Зубчаста передача призначена для передачі та перетворення обертального руху зі зміною кутових швидкостей та моментів, а також для перетворення обертального руху у поступальний та навпаки.

$$\eta_{1-2} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow P_2 = P_1 \eta_{1-2}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= T_1 \cdot \omega_1 \\ P_2 &= T_2 \cdot \omega_2 \end{aligned} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 \cdot \omega_1 \cdot \eta_{1-2}}{\omega_2} = T_1 \cdot i_{1-2} \cdot \eta_{1-2}$$

Багатоланкові зубчасті передачі з нерухомими осями валів

Зубчастий ряд із паразитними колесами

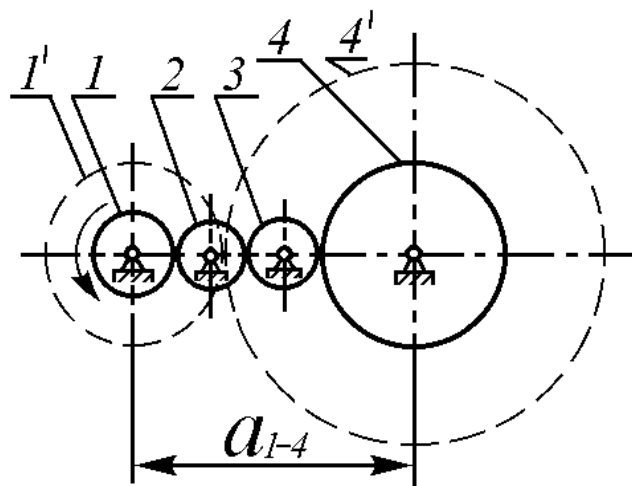


Рис. 7.1. Зубчастий ряд із паразитними колесами

$$i_{1-n} = (-1)^k \cdot \frac{z_n}{z_1},$$

де  $z_n$  – число зубів останнього колеса;

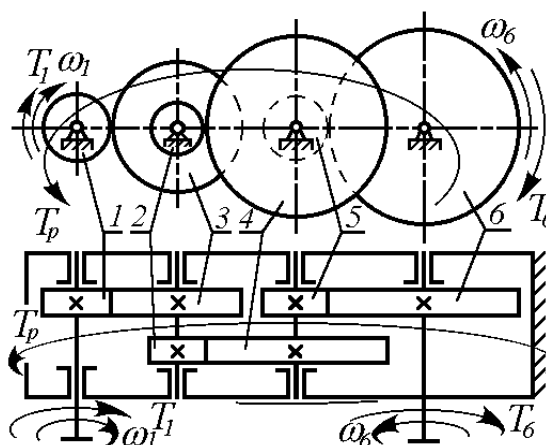
$z_1$  – число зубів колеса 1;

$k$  – кількість зовнішніх пар зачеплень.

### Властивості паразитного колеса:

1. Числа зубів паразитних коліс не впливають на величину передатного відношення (звідси і походить їхня назва – паразитні.).
2. Кожне паразитне колесо зовнішнього зачеплення змінює напрямок обертання вихідного валу на протилежний.
3. Застосування паразитних коліс дозволяє в широкому діапазоні змінювати міжосьову відстань між вхідним та вихідним валами.
4. При заданій (фіксованій) значній міжосьовій відстані між вхідним і вихідним валами застосування паразитних коліс забезпечує велике зменшення габаритів передачі.

### Триступінчаста циліндрична зубчаста передача



$$i_{1-6} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = (-1)^3 \cdot \left( \frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5} \right)$$

$$i_{заг} = i_{1-6} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = i_I \cdot i_{II} \cdot i_{III},$$

де  $i_I, i_{II}, i_{III}$  – передатні відношення окремих ступеней передачі, взяті зі своїм знаком.

$$i_{1-n} = \frac{\omega_1}{\omega_k} = (-1)^k \cdot \frac{\prod z_{веден}}{\prod z_{ведуч}}$$

де  $\prod z_{веден}$  – добуток чисел зубів ведених коліс;

$\prod z_{ведуч}$  – добуток чисел зубів ведучих коліс.

## Планетарні зубчасті передачі

*Планетарними передачами* називаються такі, у яких є *колеса*, що здійснюють складний рух у просторі, тобто *колеса* – з *рухомими* в просторі *осями* валів (*сателіти*).

Планетарна передача має дві корпусні ланки.

Перший корпус нерухомий – стійка.

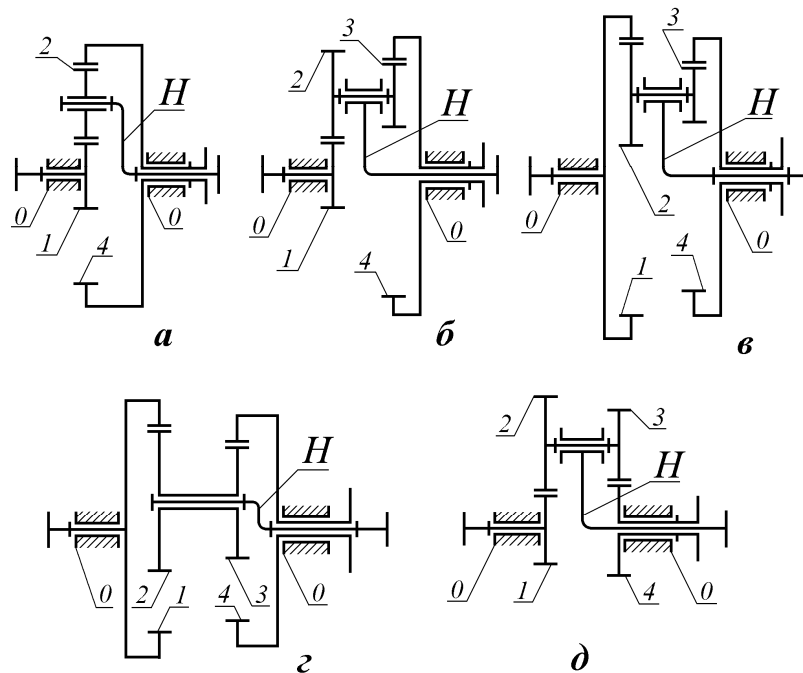
Другий корпус рухається. Його називають *водилом*, оскільки цей рухомий корпус водить зубчасті колеса, які називають сателітами (супутниками чи планетами), за їх просторовими орбітами.

Наявність складного руху сателітів зумовлює підвищену складність кінематичного аналізу планетарних передач порівняно з кінематичним аналізом простих (рядових чи не планетарних) передач.

Планетарна передача в двоступінчастому виконанні може забезпечувати практично будь-яке велике передатне відношення (теоретично необмежене). При цьому зі зростанням величини передатного відношення виявляється суттєве зниження ККД передачі.

*Друга* особливість планетарних зубчастих механізмів – можливість інтегрування (підсумовування) рухів або диференціювання (поділу) сил (крутних моментів).

### Найпростіші циліндричні планетарні передачі



Тут позначено: 1, 2, 3, 4 – зубчасті колеса. 1 і 4 – центральні; 2 і 3 – сателіти;  $H$  – водило; 0 – стояк.

Зауважимо, що схема  $a$  походить зі схеми  $б$ , якщо прийняти  $z_2 = z_3$ .

Схеми  $a$  і  $б$  представляють так званий **планетарний механізм Джемса** (з одним вінцем –  $a$  і сателітами з двома вінцями –  $б$ ).

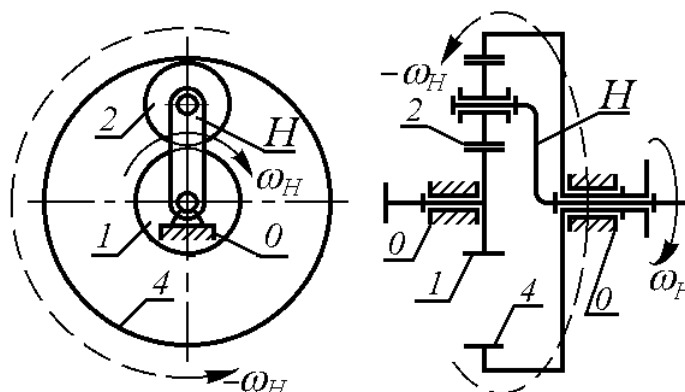
Схеми  $в$ ,  $г$  і  $д$  представляють **планетарні механізми Давида**.

Схеми ( $в$  і  $г$ ) по суті однакові, відмінність лише у відносній величині сателітів, їх називають **схемою Давида з двома внутрішніми зачепленнями**.

Схема  $д$  – **схема Давида із двома зовнішніми зачепленнями**.

## Кінематична схема планетарного механізму

## Джемса з одновінцевим сателітом



- 1) центральне “сонячне” зубчасте колесо;
  - 2) сателіт;
  - 4) центральне “коронне” зубчасте колесо (чи “вінець”);
- H – “води́ло”.

Механізм Джемса відноситься до плоских механізмів.

Його число ступенів свободи можна підрахувати за формулою Чебишева:

$$w = 3n - 2p_n - p_e = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2,$$

де  $n=4$  (1, 2, 4, H) – число рухливих ланок;

$p_n=4$  (0-1, 2-H, 0-4, 4-H) – кількість нижчих кінематичних пар;

$p_e=2$  (1-2, 2-4) – кількість вищих кінематичних пар.

Оскільки механізм має дві ступені свободи, у ньому може спостерігатися велика різноманітність сполучень кутових швидкостей всіх рухомих ланок. Необхідно знайти рівняння, якому всі ці швидкості підпорядковуються.

Принцип оберненого руху.

Формула Віліса.

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = (-1)^k \frac{z_4 z_2}{z_2' z_1}$$

Передатне відношення при зупиненому водилі

$$i_{1-4}^{(H)} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_1}.$$

Передатне відношення при зупиненому колесі із внутрішнім зачепленням

(коронне колесо, ланка 4)  $\omega_4 = 0$ .

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = -\frac{z_4}{z_1},$$

$$i_{1-H}^{(4)} = \frac{\omega_1}{\omega_H},$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = -\frac{z_4}{z_1},$$

$$\frac{\omega_1}{-\omega_H} + 1 = -\frac{z_4}{z_1}$$

$$i_{1-H}^{(4)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 + \frac{z_4}{z_1} = 1 + i_{1-4}^{(H)}$$

Загальний вигляд формули Віліса

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = (-1)^k \frac{z_4 z_2}{z_2' z_1}$$

### ***Контрольні питання***

1. Що таке механічна передача?
2. Як класифікуються механічні передачі?
3. Як визначити передатне відношення?
4. Як знайти кінематичні і силові характеристики в рядовій зубчастій передачі?
5. Як знайти параметри в триступінчастій циліндричній зубчастій передачі?
6. Як знайти передатне відношення планетарної передачі?

## ТЕМА 6

## Оцінка надійності деталей машин.

## Опір матеріалів

Зміст:

1. Основні вимоги до машин.
2. Основні критерії працездатності.
3. Короткі відомості про конструкційні матеріали.
4. Основні гіпотези опору матеріалів.
5. Основні види деформацій і деформування.
6. Основні форми елементів конструкцій.
7. Класифікація сил, що діють на деталі.
8. Метод перерізів.
9. Геометричні характеристики плоских перерізів.
10. Оцінка міцності деталей.
11. Діаграма розтягування/стиснення. Закон Гука.
12. Умови міцності.
13. Визначення допустимих напружень.
14. Концентратори напруження.
15. Умови міцності при різних видах деформування.
16. Умови жорсткості.
17. Складний напружений стан.
18. Контрольні питання.

## Основні вимоги до машин

(деталей машин, виробів, конструкцій):

1. **Працездатність** – стан об'єкта, при якому він здатний виконувати задані функції та його параметри будуть знаходитись у необхідному діапазоні.

2. **Надійність** – здатність машини (конструкції) працювати без пошкоджень (поломок) у заданий термін експлуатації.

3. **Технологічність** – виготовлення при мінімумі витрат праці, часу та коштів, але за повної відповідності споживчих властивостей.

4. **Економічність** – мінімум вартості виробництва та експлуатації.

Додаткові вимоги:

- зручність експлуатації;
- ремонтпридатність;
- вартість;
- естетичність і та інші.

Основні критерії працездатності:

1. Міцність.
2. Жорсткість.
3. Стійкість/Вібростійкість.
4. Зносостійкість.
5. Теплостійкість.

**Опір матеріалів** – це наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість та стійкість елементів конструкцій та деталей машин.

**Міцність** – здатність конструкції, її частин та деталей витримувати певне навантаження, не руйнуючись.

**Жорсткість** – це здатність деталі чинити опір зміні її форми та розмірів під дією сил.

**Стійкість** – здатність конструкції та її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

**Вібростійкість** – здатність конструкцій працювати у потрібному діапазоні режимів без неприпустимих коливань.

Вібрація деталей погіршує якість роботи машини, породжує шум і може спричинити їх руйнування у разі резонансних коливань.

Питаннями вібрацій займаються спеціальні дисципліни – теорія коливань та віброзахист.

**Зносостійкість** – здатність чинити опір зносу...

Зношування призводить до втрати точності, до зниження ККД, до зниження міцності, до зростання шуму, до поломок деталей внаслідок стирання. Знос розрізняють:

- механічний;
- молекулярно-механічний;
- корозійно-механічний.

Заходи боротьби зі зносом деталей машин: підвищення зносостійкості поверхонь, що зношуються; збільшення товщини мастильного шару; поліпшення фізико-хімічних властивостей мастильного матеріалу і т.п.

**Теплостійкість** – здатність зберігати міцність за високих температур, і навіть збереження інших властивостей працездатності за високих температур.

Також вводяться додаткові терміни: жароміцність, жаростійкість...

## Короткі відомості про конструкційні матеріали

### Основні конструкційні матеріали:

- 1) метали
- 2) деревина і т.п. (дерево, ДСП, ДВП)

ДДФ (дрібнодисперсна фракція, або на англ. MDF – Medium Density Fibreboard) – це деревноволокниста плита (ДВП) середньої щільності, виготовлена методом сухого пресування висушеної дрібнодисперсної деревної стружки при високій температурі та тиску.

- 3) пластмаси / пластики
- 4) гуми
- 5) кераміка
- 6) сучасні композитні матеріали

У будівельній механіці також виділяють різні будівельні матеріали: камінь, цегла, бетон, асфальтобетон, цементобетон тощо.

### Метали

Насамперед виділяють *чорні* та *кольорові*.

**Чорні** – залізовмісні метали:

- чисте та коване залізо (низьковуглецеве);
- сталі;
- чавуни.

Сталь – механічний сплав заліза та вуглецю (вміст вуглецю до 2.13%).

Чавун – механічний сплав заліза та вуглецю (вміст вуглецю від 2% до 6%)

Сталі діляться на:

- вуглецеві (за вмістом *C* низьковуглецевими, високовуглецевими...);
- леговані (сталі з додаванням спеціальних легуючих елементів).

Чавуни:

- сірий чавун;
- білий чавун;

- ковкий чавун;
- високоміцний чавун.

#### Кольорові метали

- мідні метали – латунь (аналог сталі) і бронза (ливарний, аналог чавуну).
- легкі:
  - алюмінієві сплави – силумін (ливарний аналог чавуну) і дюраль (аналог сталі);
  - титанові сплави.
- сплави, що містять нікель і хром.

### Основні гіпотези опору матеріалів

1. Гіпотеза про *суцільність* матеріалу.

Передбачається, що матеріал повністю заповнює обсяг, який він займає.

2. Гіпотеза про *однорідність* та *ізотропність*.

Передбачається, що властивості матеріалу однакові у всіх точках, і в кожній точці у всіх напрямках.

3. Гіпотеза про *малі* деформації. Передбачається, що деформації малі в порівнянні з розмірами тіла, що деформується.

4. Гіпотеза про досконалу *пружність* матеріалу. Всі тіла передбачаються абсолютно пружними.

5. Гіпотеза про *лінійну залежність* між деформаціями та навантаженнями.

\* Гіпотеза плоских перерізів. Передбачається, що перерізи перпендикулярні до осі стрижня, в процесі деформування залишаються плоскими та перпендикулярними до осі.

#### Основні види деформацій

**Пружні деформації** – це деформації, що зникають після зникнення навантаження.

**Пластичні деформації** – це деформації, які не зникають після зняття навантаження.

#### Основні види деформування:

- 1) розтягнення / стиск;
- 2) зсув або зріз;
- 3) згин,
- 4) кручення / скручування.

### Основні форми елементів конструкцій:

(деталей, що використовуються при складанні розрахункових схем)

**Стрижень** – тіло, один розмір якого (довжина) значно перевищує інші.  $l \gg a$  і

$$l \gg b \text{ чи } l \gg r$$

Стрижні розрізняють за формою геометричної осі:

*прямолінійні* – вали, осі, балки;

*криволінійні* – гаки, ланки ланцюгів

за перетином: (призматичні, трубчасті, таврові, ін.).

– швелер;

– тавр;

– двотавр;

– кут (куток) рівнобокий і не рівнобокий;

– труба;

– короб (квадратна труба, прямокутна труба).

До особливого типу відносяться тонкостінні стрижні, у яких товщина стінки значно менша від габаритних розмірів поперечного перерізу.

**Оболонка** – тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, розташованими на близькій відстані одна від одної.  $a \gg h$  і  $b \gg h$

Середня поверхня – це така поверхня, яка ділить оболонку за товщиною на рівні частини.

За формою серединної поверхні розрізняють циліндричні, конічні, сферичні, тороїдальні та ін..

**Пластина** – це оболонка, серединна поверхня якої є площиною. Пластини бувають круглі, прямокутні, та ін.

Також пластини та оболонки поділяють за товщиною: тонкі; середньої товщини; товсті.

**Масивне тіло** – тіло, у якого всі три розміри є величини одного порядку (порівнянні)  $a \sim b \sim c$ .

## Класифікація сил, що діють на деталі

### Внутрішні та зовнішні сили

Зовнішніми силами називаються сили взаємодії між елементом конструкції, що розглядається, і пов'язаними з ним тілами.

Зовнішні сили бувають: поверхневі та об'ємні (масові).

**Поверхневі сили** – це результат контактної взаємодії даного тіла з іншими тілами.

*Поверхневі сили* бувають зосереджені та розподілені.

*Розподілені сили* – по лінії, за площею, по поверхні ...

Можуть бути рівномірно та нерівномірно розподілені.

**Об'ємні (масові) сили** – це сили прикладені до кожної точки тіла (власна вага/сили тяжіння, сили інерції, електромагнітні сили).

За характером зміни сил у часі бувають статичні та динамічні (квазістатичні, періодичні, імпульсні тощо).

**Внутрішні сили** – це сили, які прагнуть зберегти тіло як єдине ціле, протидіючи всьому, що може змінити взаємне розташування частинок, тобто деформувати тіло.

Для визначення внутрішніх сил користуються *методом перерізів*.

### Метод перерізів

$N$  – поздовжня сила, що викликає розтягування або стиснення;

$Q_x, Q_y$  – поперечні (перерізуючі) сили, викликають зсув або зріз;

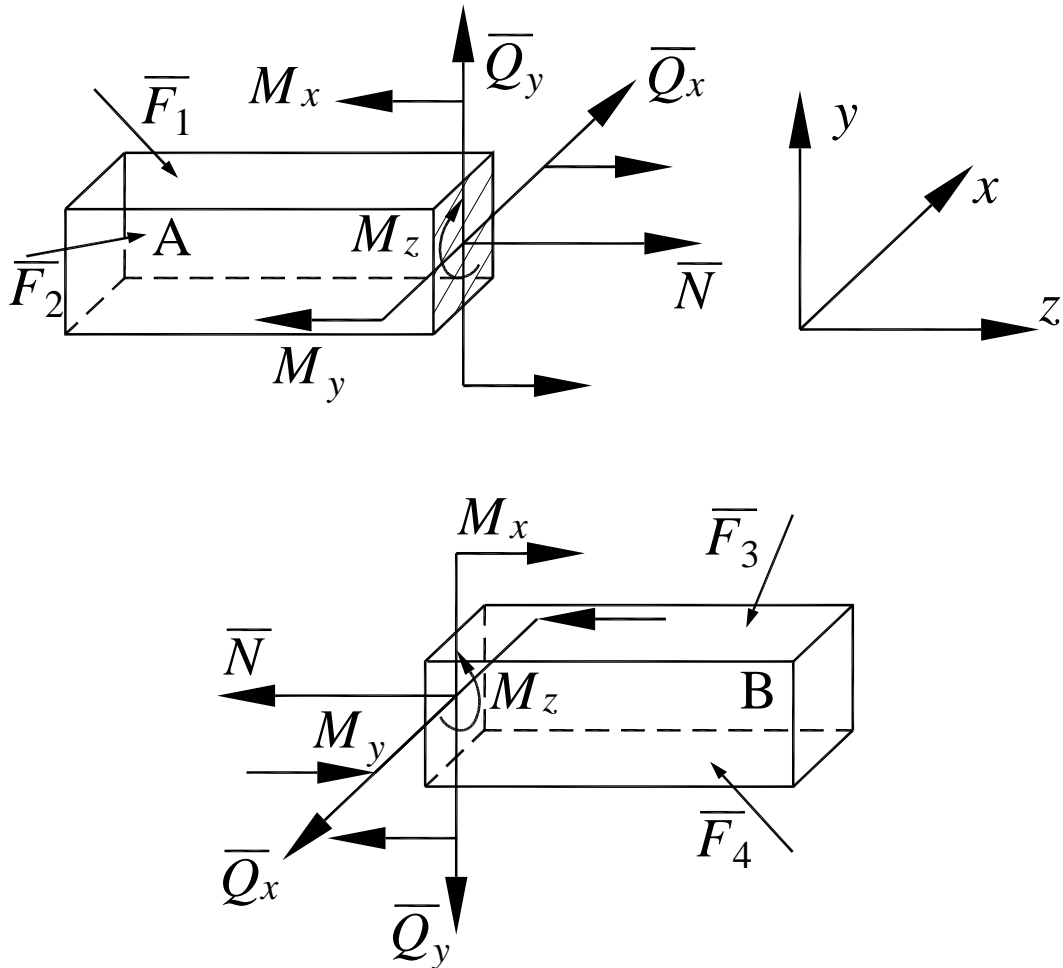
$M_z$  – крутний момент (кручення);

$M_x, M_y$  – згинальні моменти, викликають згинання.

Метод перерізів дозволяє знайти всі зусилля та моменти у будь-якому перерізі при дії будь-якого навантаження, для цього виконують такі дії:

1) Провести подумки поперечний переріз у тому місці, де необхідно знайти внутрішні зусилля та моменти.

2) Обчислити зусилля  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$  та моменти  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  як алгебраїчні суми проєкцій всіх зовнішніх сил на вибрані осі координат та моментів усіх зовнішніх сил щодо вибраних осей, що діють на одну з частин.



**Епюрами** називаються графіки, що показують, як змінюються зусилля та моменти при переході від перерізу до перетину.

## Геометричні характеристики плоских перерізів

Опір елементів конструкції навантаженням *залежить* не тільки від:

– матеріалу;

– точок та напрямки програми *навантажень*,

але й від форми та **характеристики поперечного перерізу**

1) **Площа**  $A$ ,  $\text{мм}^2$ ,  $\text{см}^2$ ,  $\text{м}^2$

$$A = \int_{\Omega} dA, \quad A = \sum_i \Delta A_i$$

2) **Статичний момент перетину**

(статичний момент площі)  $S_x, S_y, S_z$ ,  $\text{мм}^3$ ,  $\text{см}^3$ ,  $\text{м}^3$

$$S_z = \int_{\Omega} y dA, \quad S_y = \int_{\Omega} z dA$$

3) **Момент інерції перерізу**  $J$ ,  $\text{м}^4$

3.1) **Осьовий** момент інерції  $J_x, J_y, J_z$   $\text{мм}^4$ ,  $\text{см}^4$ ,  $\text{м}^4$

$$J_z = \int_{\Omega} y^2 dA, \quad J_y = \int_{\Omega} z^2 dA$$

3.2) **Полярний** момент інерції  $J_{\rho}$ ,  $\text{мм}^4$ ,  $\text{см}^4$ ,  $\text{м}^4$

$$J_{\rho} = \int_{\Omega} \rho^2 dA, \quad J_{\rho} = J_x + J_y$$

3.3) **Відцентровий** момент інерції  $J_{xy}, J_{yz}, J_{xz}$ ,  $\text{мм}^4$ ,  $\text{см}^4$ ,  $\text{м}^4$

$$J_{zy} = \int_{\Omega} yz dA$$

4) **Момент опору перерізу**

4.1) **Осьовий** момент опору перерізу  $W_x, W_y, W_z$ ,  $\text{мм}^3$ ,  $\text{см}^3$ ,  $\text{м}^3$ ;

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{J_y}{z_{\max}}$$

4.1) **Полярний** момент опору перерізу  $W_{\rho}$   $\text{мм}^3$ ,  $\text{см}^3$ ,  $\text{м}^3$ ;

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{\rho_{\max}}$$

## Оцінка міцності деталей (елементів конструкцій)

**Механічне напруження** – інтенсивність внутрішніх сил.

Одиниця виміру Па – паскалі (МПа, ГПа...)  $1Pa = 1 \frac{H}{m^2}$

**Тиск** прикладається зовні деталі, а напруження – всередині!!!

Напруження бувають:

**Нормальне напруження** – їх вектор спрямований уздовж нормалі до перетину:

$$\text{напруження в точці перерізу: } \sigma = \frac{dN}{dA},$$

$$\text{напруження на площадці } \sigma = \frac{N}{A},$$

де N – внутрішня поздовжня сила;

A – площа поперечного перерізу.

**Дотичні напруження** – вектор спрямований за дотичною до перерізу:

$$\tau = \frac{dQ}{dA}, \quad \tau = \frac{Q}{A}$$

де Q – внутрішня поперечна (перерізуюча) сила.

**Повне (механічне) напруження**

$$\vec{p} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$$

## Розрахунок деталей машин (елементів конструкцій) на міцність

Існує 2 види розрахунків:

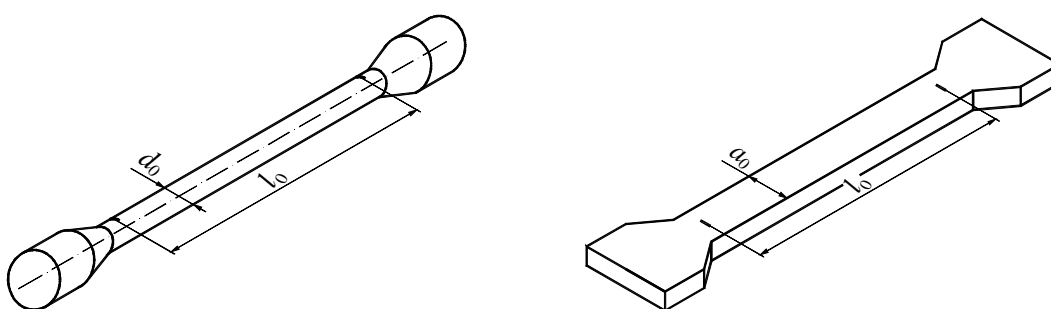
1) проектувальний – за відомими навантаженнями та матеріалом потрібно знайти надійні розміри поперечного перерізу.

2) перевірочний – за відомою формою поперечного перерізу, розмірами та матеріалом елемента конструкції потрібно визначити чи зможе цей елемент витримати навантаження не руйнуючись.

### Діаграма розтягування/стиснення

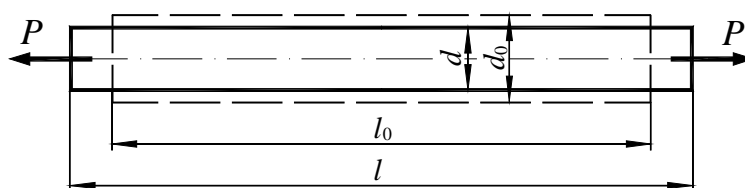
Діаграму розтягування одержують при випробуваннях на розтягування циліндричного або плоского зразка з матеріалу деталі на розривній випробувальній машині (зазвичай застосовують машини з розривним зусиллям від 5 до 100 т на розтяг і від 200 до 500 т на стиск).

Форми зразків, обумовлені вимогою забезпечення розриву в їх центральній частині, а не по краях (у місцях кріплення зразків). Розрізняють короткі ( $l_0/d_0=5$ ) та довгі ( $l_0/d_0=10$ ) зразки. Як основні застосовують зразки з  $d_0=10$  мм.



Циліндричний та плоский зразки для випробування на розтягування

За допомогою розривної машини будується **діаграма розтягування** – графік, що показує залежність між навантаженням  $P$  та подовженням (абсолютною деформацією) зразка  $\Delta l$  у процесі розтягнення його до моменту розриву.



Вздовж горизонтальної осі відкладають абсолютну деформацію  $\Delta l$  (зміна довжини зразка, абсолютне подовження/укорочення при стисканні) або відносну деформацію  $\varepsilon$

$$\Delta l = l - l_0; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

де  $l_0$  – довжина недеформованого зразка;

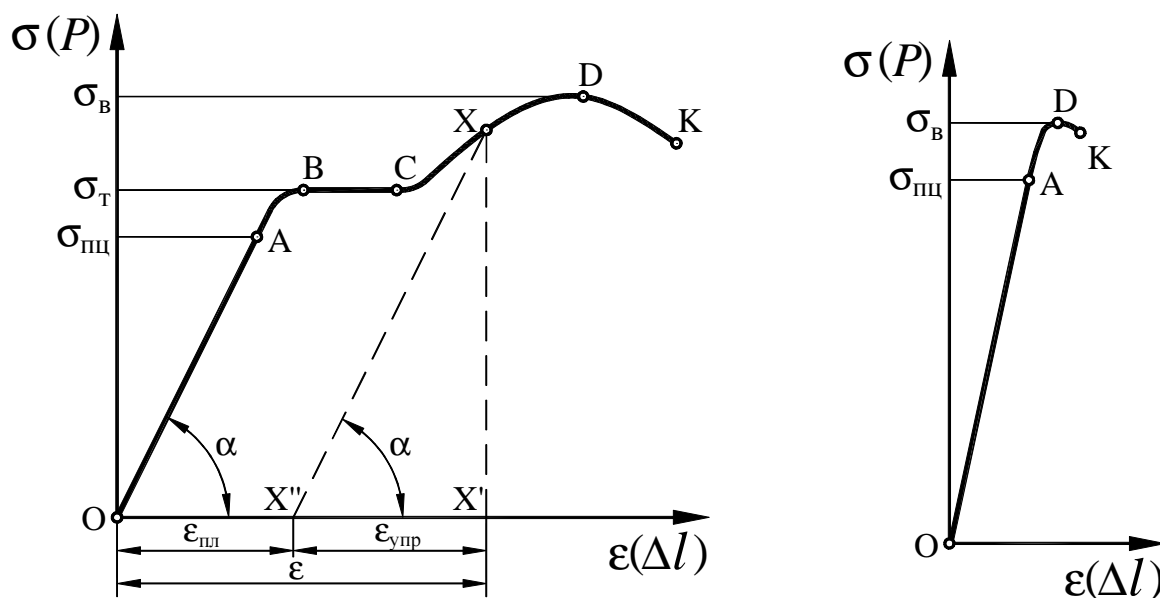
$l$  – довжина деформованого зразка;

$\Delta l$  – абсолютна деформація або зміна довжини зразка.

Вздовж вертикальної вісі – розривне зусилля  $N = P$  або нормальне напруження  $\sigma = \frac{N}{A_0}$ , де  $A_0$  – площа перерізу недеформованого зразка.

При визначенні  $\sigma$  використовують принцип Сен-Венана та *гіпотезу плоских перерізів* – поперечні перерізи стрижня, плоскі до деформації, залишаються плоскими та після неї. Досліди підтверджують вірність цієї гіпотези, особливо для довгих стрижнів ( $l \gg d$ ).

Приблизний характер діаграми розтягування.



$\sigma_{\text{пц}}$  – межа пропорційності;

$\sigma_T$  – межа плинності;

$\sigma_B$  – межа міцності (тимчасовий опір).

Також іноді виділяють  $\sigma_y$  – межу пружності та  $\sigma_p$  – напруження розриву.

На діаграмі виділяють такі ділянки:

$OA$  – відповідає приблизно пропорційній залежності напруження від деформації. Справедливий закон Гука.

$AB$  – зона пружно-пластичних деформацій.

$BC$  – ділянка текучості.

$CD$  – ділянка зміцнення.

Точка  $D$  – кінець ділянки зміцнення. На зразку виникає шийка.

Точка  $K$  – точка руйнування ...

Прямолінійна ділянка  $OA$  ( $\sigma \leq \sigma_{\text{пц}}$ ) відповідає закону Гука.

Ділянка  $BC$  є площадкою плинності. При  $\sigma = \sigma_{\text{т}}$  подовження зразка відбувається без збільшення зовнішнього навантаження:

$$\sigma_{\text{т}} = \frac{N_{\text{т}}}{A_0},$$

де  $N_{\text{т}} = P_{\text{т}}$  – зусилля, у якому спостерігається “плинність” матеріалу.

Слід мати на увазі, що не всі матеріали мають таку яскраво виражену площадку плинності. Багато металів, як, наприклад, мідь, дюраль, високовуглецеві та легovanі сталі, не дають площадки плинності.

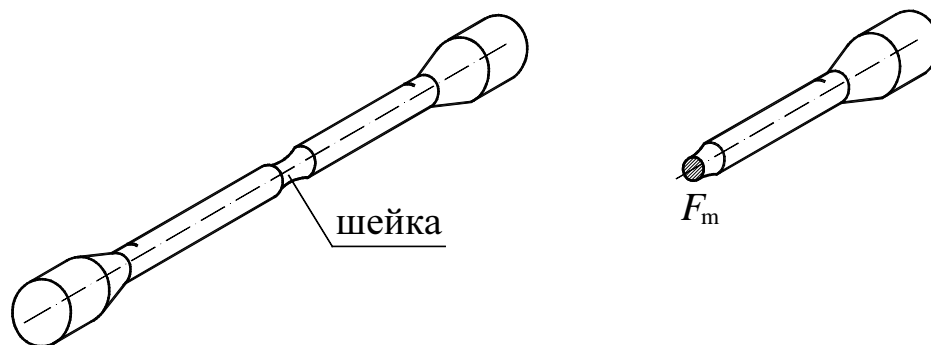
В точці  $A$  досягається  $\sigma = \sigma_{\text{пц}}$  – межа пропорційності – найбільше напруження, до якого деформація матеріалу слідує за законом Гука.

Після завершення плинності змінюються деякі властивості матеріалу, також тьмяніє полірована поверхня і відбувається “наклеп” – зразок набуває зміцнення та крихкості. Тому подальша деформація (ділянка  $CD$ ) можлива зі збільшенням зовнішнього навантаження до максимально можливого значення  $N_{\text{max}} = P_{\text{max}}$ . Таким чином ділянка  $CD$  – ділянка зміцнення. В кінці ділянки  $CD$   $\sigma = \sigma_{\text{в}}$  – межа міцності або тимчасовий опір руйнуванню:

$$\sigma_{\text{в}} = \frac{N_{\text{max}}}{A_0},$$

де  $N_{\text{max}} = P_{\text{max}}$  – максимальне розривне зусилля, яке здатне витримати зразок.

Після досягнення точки  $D$  на діаграмі деформація зразка починає зосереджуватися на одній невеликій ділянці. На цій ділянці спостерігається зростаюче зменшення площі поперечного перерізу – поява шийки.



### Шийка у зразку перед розривом

Зменшення площі поперечного перерізу у шийці супроводжується падінням зусилля  $N = P$ , необхідного для подальшої деформації зразка. Насправді значення напруження в цей момент не падає, а весь час росте аж до розриву (точка  $K$  на діаграмі). Навантаження, що відповідає моменту розриву зразка, позначається через  $N_K$ , а дійсне напруження в момент розриву

$$\sigma_K = \frac{N_K}{A_m},$$

де  $A_m$  – площа поперечного перерізу шийки в момент розриву.

Слід також зазначити таке, що якщо в момент розриву  $\varepsilon_K > 5\%$ , то матеріал умовно прийнято вважати пластичним, якщо  $\varepsilon_K < 5\%$ , то умовно вважають матеріал крихким.

Напруження  $\sigma_{\text{пл}}$ ,  $\sigma_T$  і  $\sigma_B$  є основними характеристиками пружності та міцності матеріалів. На сьогодні є великі довідкові дані за цими показниками.

Наприклад, для маловуглецевої сталі Ст2:

$$\sigma_{\text{пл}} \approx 200 \text{ МПа}, \sigma_T \approx 200 \div 260 \text{ МПа}, \sigma_B \approx 340 \div 420 \text{ МПа}, \varepsilon_K \approx 31\% .$$

### Закон Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon ,$$

де  $E$  – коефіцієнт пропорційності, званий **модулем пружності I-го роду (модуль пружності при розтягуванні, модуль Юнга)**.

Модуль пружності характеризує жорсткість матеріалу., тобто здатність чинити опір пружній лінійній деформації. Для більшості сталей  $E \approx 2.1 \cdot 10^{11}$  Па. Для титану  $E \approx 1.1 \cdot 10^{11}$  Па. Для алюмінію  $E \approx 0.7 \cdot 10^{11}$  Па.

$E \sim \operatorname{tg}(\alpha)$ , тобто модуль пружності це тангенс кута нахилу до осі абсцис прямолінійної (початкової) частини діаграми розтягування.

Закон Гука можна записати також через деформацію:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{E \cdot A} \Rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l_0}{E \cdot A}.$$

Добуток  $E \cdot A$  називають *жорсткістю поперечного перерізу* стрижня. Вона характеризує податливість матеріалу деформування при розтягуванні та стисканні. А величину  $c = E \cdot A / l_0$  називають відносною жорсткістю.

Крім поздовжніх деформацій у стрижнях, що працюють на розтягування (стиснення), виникають поперечні деформації. При розтягуванні відбувається зменшення товщини (при стисканні – збільшення товщини) зразка. Як і при поздовжній деформації  $\varepsilon$ , відзначають абсолютну  $\Delta d$  та відносну поперечну деформацію  $\varepsilon_t = \frac{\Delta d}{d_0}$ , де  $\Delta d = d - d_0$  – абсолютна зміна розміру зразка у поперечному перерізі.

**Коефіцієнтом Пуасона  $\nu$  ( $\mu$ )** або коефіцієнтом поперечної деформації:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon} \right|.$$

Поряд із модулем пружності  $E$ , коефіцієнт Пуасона  $\nu$  характеризує пружні властивості матеріалів. Для матеріалів, у яких величини  $E$  і  $\nu$  практично однакові у будь якому напрямі, вводять поняття ізотропності властивостей. До ізотропних відносяться практично всі сталі ( $\nu = 0.25 \div 0.33$ ) і чавуни ( $\nu = 0.23 \div 0.27$ ). Існують і анізотропні матеріали (дерево, шаруваті пластмаси, тканини, ін.), для яких важливо знати значення  $E$  і  $\nu$  у різних напрямках (наприклад, вздовж та у поперек волокон).

По діаграмі розтягування можна встановити характеристики пластичності випробуваного матеріалу. Однією з характеристик пластичності є відносне

залишкове подовження  $\epsilon_{пл}$ . Повне відносне подовження зразка у довільний момент (наприклад, у точці  $X$  на діаграмі) виражається відрізком  $OX' = \epsilon$ . Сюди входить як залишкова  $\epsilon_{пл}$ , так і пружна  $\epsilon_{уп}$  деформація зразка. Щоб визначити діаграму залишкове подовження, потрібно з точки  $X$  провести похилу пряму  $XX''$  паралельну  $OA$ , яка відсікає на осі абсцис відрізок  $OX'' = \epsilon_{пл}$ , відповідний величині залишкової деформації зразка. Відрізок  $X''X' = \epsilon_{уп}$  висловлює його пружну деформацію.

### Закон Гука при зсуві (зрізі)

$$\tau = G \cdot \gamma,$$

де  $G$  – **модуль зсуву** (модуль пружності II-го роду, модуль пружності при зсуві), МПа;

$$\gamma \approx \operatorname{tg}(\gamma) = \frac{\Delta S}{h} \text{ – відносний зсув;}$$

$\Delta S$  – абсолютний зсув;

$h$  – відстань між площинами, що зміщуються.

Між модулями пружності I-го роду  $E$  і II-го роду  $G$  для ізотропних матеріалів існує зв'язок

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

При значеннях  $\nu = 0.25 \div 0.33$  будемо мати  $G = (0.375 \div 0.4)E$ .

Закон Гука при зсуві можна також записати як

$$\gamma = \frac{Q}{G \cdot A}.$$

Добуток  $G \cdot A$  називають жорсткістю стрижня при зсуві.

До деталей, що працюють в умовах зсуву, тобто на зріз та зминання, відносяться заклепки, болтові з'єднання, штифти, шпонки, шліци, зварні шви, розрахунки на міцність яких вивчаються в курсі деталей машин.

### Закон Гука під час кручення

$$\tau(r) = G \cdot \theta \cdot r,$$

де  $G$  – модуль пружності II-го роду;

$\theta = \varphi / l_0$  – відносний кут закручування, рад/мм;

$\varphi$  – кут закручування, рад;

$l_0$  – довжина частини валу, що закручується, мм.

Закон Гука при крученні кругового валу можна подати також у такому вигляді:

$$\theta = \frac{T}{G \cdot J_p},$$

де  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$  – полярний момент інерції перерізу.

Добуток  $G \cdot J_p$  у такому поданні закону Гука називають жорсткістю поперечного перерізу стержня при крученні.

### Умова міцності

Оцінюючи міцність деталі орієнтуються не на внутрішні сили і моменти, а на значення найбільших нормальних  $\sigma_{\max}$  та дотичних  $\tau_{\max}$  напружень, які виникають в перерізах. Для забезпечення міцності деталі ці величини мають бути обмежені деякими граничними значеннями, які називаються **допустимою напруженнями** і позначаються як  $[\sigma]$  для нормальних напружень і як  $[\tau]$  для дотичних. У цьому полягає **умова міцності**, математичне формулювання якого має такий вигляд:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad \text{і/чи} \quad \tau_{\max} \leq [\tau]$$

Залежно від виду деформування розрізняють напруження розтягування, що допускаються.  $[\sigma_+]$ , стиску  $[\sigma_-]$ , зминання  $[\sigma_{\text{см}}]$ , зрізу  $[\tau_{\text{ср}}]$ , кручення  $[\tau_{\text{кр}}]$ , ін.

Зазначимо, що для пластичних матеріалів (більшість сталей, метали та різні їх сплави)  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = [\sigma]$ , для крихких матеріалів (скло, чавун, камінь, бетон) –  $[\sigma_+] < [\sigma_-]$ .

### Визначення допустимих напружень

Втрата міцності, під якою мається на увазі не виконання умови міцності, не обов'язково означає руйнування деталі. При цьому також може розумітися поява в деталі пластичних (залишкових) деформацій. У деталі з пластичного матеріалу залишкові деформації виникають, коли максимальне напруження  $\sigma_{\max}$  в ній досягає межі плинності  $\sigma_T$ . Якщо ж деталь виконана із крихкого матеріалу, то вона майже не деформується і втрата міцності збігається з її руйнуванням, яке відбувається за  $\sigma_{\max} = \sigma_B$  ( $\sigma_B$  – межа міцності).

Виходячи з цього як допустимі  $[\sigma]$  не можна призначати граничні напруження, при яких настає руйнування матеріалу або необоротна деформація ( $\sigma_B$  для крихких,  $\sigma_T$  для пластичних). Необхідно передбачити певний запас міцності, щоб врахувати можливість випадкового навантаження, похибки розрахунків, пов'язаних зі припущеннями для спрощення, та невизначеними умовами, наявності дефектів у матеріалі та концентраторів напруження та ін.

Тому для пластичних матеріалів приймають

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T},$$

а для крихких

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B}$$

де  $n_T = 1.4 \div 1.6$  – коефіцієнт запасу міцності за плинністю;

$n_B = 2.5 \div 3.0$  – коефіцієнт запасу міцності за межею міцності.

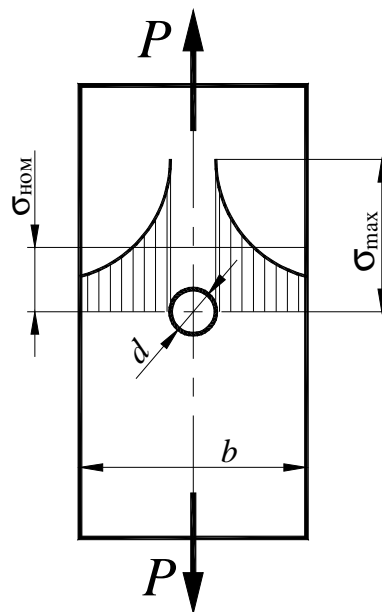
Іноді при визначенні  $[\sigma]$  для пластичних матеріалів використовують межу міцності  $\sigma_B$ , тільки в цьому випадку  $n_B = 2.4 \div 2.6$ .

Коефіцієнт запасу міцності залежить також від призначення деталі, режиму її роботи, вимоги до надійності, матеріалу, технології виготовлення, відповідальності, ін.

## Концентратори напруження

Одним із факторів, що впливають на значення коефіцієнта запасу міцності (коефіцієнта безпеки), є наявність у досліджуваній деталі концентраторів напружень.

**Концентратор напружень** – це різкі переходи у поперечних перерізах, перехідні канавки, отвори, проточки, надрізи, які викликають місцеве підвищення (концентрацію) напружень.



Розподіл нормальних напружень у перерізі смуги, ослабленим отвором (при  $d/b = 4$   $\sigma_{\max}/\sigma_{\text{НОМ}} \approx 2.2$ )

Ступінь концентрації напруження характеризується **теоретичним коефіцієнтом концентрації напруження**  $\alpha$  ( $\alpha > 1$ ), який визначається методами теорії пружності, у т. ч. за емпіричними таблицями для конкретного концентратора:

$$\alpha = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{НОМ}}} \Rightarrow \sigma_{\max} = \alpha \cdot \sigma_{\text{НОМ}},$$

де  $\sigma_{\max}$  – максимальне напруження, що має місцевий характер;

$\sigma_{\text{НОМ}} = N/A$  – номінальне (розрахункове) напруження, обчислене на основі припущення про відсутність концентратора;

$N = P$  – поздовжнє зусилля;

$A$  – площа ослабленого поперечного перерізу (*площа нетто*).

Однак на практиці для обчислення  $\sigma_{\max}$  використовують **ефективний коефіцієнт концентрації напружень**  $k$ , який на відміну від  $\alpha$  враховує не лише геометрію концентратора, а й властивості матеріалу деталі. Пластичні матеріали малочутливі до концентраторів і тому  $k \approx 1$ , а для крихких матеріалів  $k \approx a$ .

### Умови міцності при різних видах деформування

$$1) \text{ Розтягування / стиснення } \sigma = \frac{N}{A} < [\sigma],$$

де ...  $[\sigma]$  – допустиме нормальна напруження (на розтягнення або стиснення).

При побудові епюр поздовжніх сил використовується таке **правило знаків**:



$$2) \text{ Зсув та зріз } \tau = \frac{Q}{A} < [\tau],$$

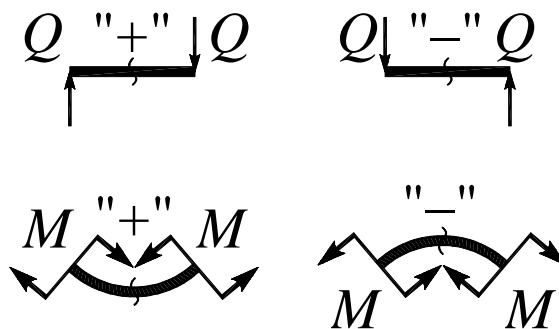
де ...  $[\tau]$  – допустиме дотичне напруження (на зсув або зріз).

Зазвичай приймають  $[\tau] = 0.5 \div 0.6 \cdot [\sigma]$ .

$$3) \text{ вигин } \sigma = \frac{M}{W} < [\sigma],$$

де ...

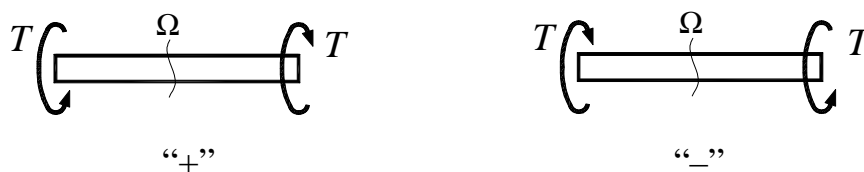
#### Правило знаків на зсув / зріз та вигин



$$4) \text{ кручення / скручування } \tau = \frac{T}{W_p} < [\tau],$$

де ...

#### Правило знаків при побудові епюр крутних моментів:



### Умова жорсткості

Для певного класу деталей в оцінці надійності визначальною є перевірка виконання умови жорсткості, яке полягає в обмеженні зміни розмірів та форми. Тобто при заданих зовнішніх силах деформації не повинні перевищувати певної величини, що встановлюється відповідно до вимог, пред'являються до деталі або елемента конструкції. Розрахунок за умов жорсткості завжди доповнюють розрахунком на міцність.

Розглянемо умови жорсткості при найпростіших видах деформування.

1. Умова жорсткості деталі під час розтягування (стиснення)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{N}{E \cdot A} < [\varepsilon] \quad \text{або} \quad \Delta l = \frac{N \cdot l_0}{E \cdot A} < [\Delta l],$$

де  $[\varepsilon]$  – граничне значення відносної деформації;

$[\Delta l]$  – максимально допустима зміна довжини при розтягуванні (стисненні).

2. Умова жорсткості деталі під час зсуву (зрізу)

$$\gamma = \frac{\Delta S}{h} = \frac{Q}{G \cdot A} < [\gamma] \quad \text{або} \quad \Delta S = \frac{Q \cdot h}{G \cdot A} < [\Delta S],$$

де  $[\gamma]$  і  $[\Delta S]$  – граничні значення відносної та абсолютної деформацій відповідно.

3. Умова жорсткості деталі при згині

$$w_{\max} = f = < [w] \quad \text{і} \quad \theta_{\max} < [\theta],$$

де  $w$  – переміщення точки нейтральної осі балки, спрямоване перпендикулярно до початкового положення осі внаслідок дії зовнішніх сил;  $f = < [w]$  – максимальне значення прогину балки;  $\theta_{\max}$  – максимальне значення кута повороту перерізу балки щодо початкового положення.

4. Умова жорсткості деталі під час кручення

$$\theta = \frac{\varphi}{l_0} = \frac{T}{G \cdot J_p} < [\theta] \quad \text{або} \quad \varphi = \frac{T \cdot l_0}{G \cdot J_p} < [\varphi],$$

де  $[\theta]$  і  $[\varphi]$  – граничні значення відносного та абсолютного кутів закручування ( $[\theta] = 15' \div 20'$ ).

### Складний напружений стан

### Складний деформований стан

Сукупність деформацій, що виникають у різних напрямках та в різних площинах, проходячи через точку, визначають деформований стан у цій точці. Складний деформований стан виникає, якщо деталь одночасно піддається декільком найпростішим навантаженням. У ряді випадків нормальні та дотичні напруження, що виникають у деталі, мають однаковий порядок і ними не можна нехтувати. Універсального критерію, що дозволяє розрахувати граничний стан будь-якого матеріалу, не існує. Розроблено кілька різних гіпотез граничних станів, при розрахунках використовують найбільш відповідну гіпотезу. Розрахунки за теоріями міцності дозволяють уникати дорогих випробувань конструкції.

В даний час для розрахунку валів при спільній дії вигину та кручення використовують тільки третю та п'яту теорії міцності.

Порівняння різнотипних станів проводиться за допомогою еквівалентного (простого або одновісного) напруженого стану. Зазвичай складний напружений стан замінюють простим розтягуванням. У ряді випадків нормальні та дотичні напруження, що виникають в деталі, мають однаковий порядок і ними не можна нехтувати. Тоді розрахунок проводять за складним напружено-деформованим станом (НДС). Розрахункове напруження, що відповідає обраному одновісному розтягуванню, називають еквівалентним напруженням.

*Зведення складного напруженого стану здійснюється заміною фактичного напруженого стану на еквівалентний одновісний напружений стан. Тобто знаходяться напруження, які потрібно прикласти, щоб отримати рівнонебезпечний напружений стан.*

Зведення до еквівалентних напружень ґрунтується на теоріях міцності:

#### 1) Теорія найбільших нормальних напружень

Її виникнення пов'язують з ім'ям Галілео (Італія, 1564-1642 р.), який першим досліджував міцність балок.

Причиною наступу граничного напруженого стану є найбільші нормальні напруження.

Умова порушення міцності:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_{\text{max}} < [\sigma].$$

Недоліком гіпотези є те, що нею не враховуються дві інші головні напруження та, ті які впливають на міцність матеріалу. (Наприклад, при всебічному стисканні цементного кубика він не руйнується від напружень, що перевершують межу міцності у багато разів.).

Перша гіпотеза міцності має суто історичне значення і нині не застосовується.

## 2) Теорія найбільших лінійних деформацій

(Друга гіпотеза міцності. Гіпотеза найбільших подовжень. Гіпотеза максимальних відносних лінійних деформацій).

Причиною виникнення граничного напруженого стану у матеріалі є найбільші відносні подовження.

$$\varepsilon_{\text{max}} < [\varepsilon]$$

Гіпотеза більшою мірою виправдовується для крихких матеріалів.

## 3) Теорія найбільших дотичних напружень

(Третя гіпотеза міцності. Гіпотеза найбільшого дотичного напруження.)

У теорії пластичності цей критерій називається критерієм Тріска-Сен-Венана.

Причиною виникнення граничного напруженого стану є найбільше дотичне напруження.

$$\tau_{\text{max}} < [\tau]$$

Для плоского напруженого стану:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} < [\sigma].$$

Недоліки гіпотези:

– у випадках об'ємного напруженого стану не враховується вплив головного напруження.

– так як з дотичним напруженням пов'язані деформації зсуву, а експериментами показано, що зсув буває лише у пластичних матеріалів, то третя

гіпотеза придатна лише для пластичних матеріалів, які однаково опираються стиску та розтягуванню.

Однак, дана гіпотеза широко використовується в даний час.

4) Енергетична теорія міцності.

(Четверта гіпотеза міцності. Гіпотеза потенційної енергії формозміни.)

Найчастіше її пов'язують із критерієм пластичності Губера (Хубера)-Мізеса.

Причиною настання граничного напруженого стану матеріалу є досягнення питомою потенційною енергією формозміни своєї критичної величини.

Гіпотеза ґрунтується на припущенні, що кількість питомої потенційної енергії деформації, накопиченої на момент настання граничного напруженого стану у матеріалі, однаково як при будь-якому складному напруженому стані, так і при простому розтягуванні.

Гіпотеза пов'язується з розвитком лише пластичних деформацій, що характеризуються зміною форми тіла без зміни об'єму.

$$U_{\max} < [U],$$

де  $U$  – питома потенційна енергія.

Для плоского напруженого стану:

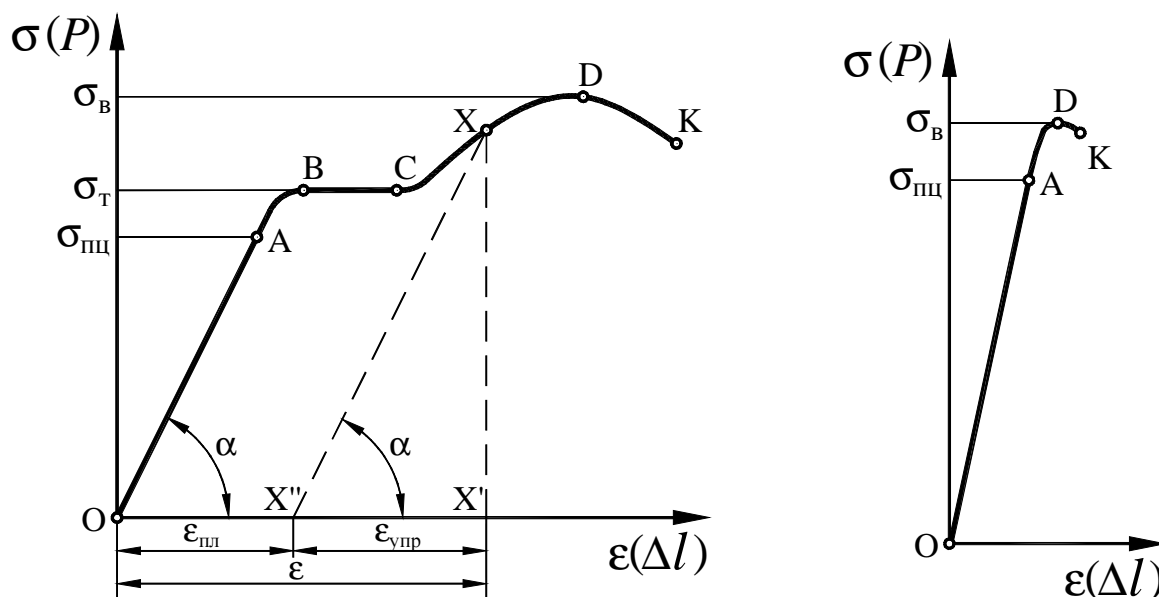
$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} < [\sigma].$$

Існують інші гіпотези / теорії міцності.

Також часто зустрічається «П'ята теорія міцності», «Теорія міцності Мора», «Теорія граничних напружених станів», «Теорія Кулона-Мора».

### Для ледарів

Наближений характер діаграми розтягування.



$\sigma_{\text{пц}}$  – межа пропорційності;

$\sigma_T$  – межа плинності;

$\sigma_B$  – межа міцності (тимчасовий опір).

Також іноді виділяють  $\sigma_y$  – межа пружності та  $\sigma_p$  – напруження розриву.

На діаграмі виділяють такі ділянки:

$OA$  – відповідає приблизно пропорційній залежності напруження від деформації. Справедливий закон Гука.

$AB$  – зона пружно-пластичних деформацій.

$BC$  – площадка плинності.

$CD$  – ділянка зміцнення.

Точка  $D$  – кінець ділянки зміцнення. На зразку виникає шийка.

Точка  $K$  – точка руйнування ...

### Закон Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon,$$

де  $E$  – коефіцієнт пропорційності, який називають **модулем пружності I-го роду** (**модуль пружності при розтягуванні, модуль Юнга**).

Коефіцієнтом Пуасона  $\nu$  або коефіцієнтом поперечної деформації:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right|.$$

### Закон Гука при зрушенні (зрізі)

$$\tau = G \cdot \gamma,$$

де  $G$  – модуль пружності II-го роду (модуль пружності при зсуві), МПа;

$$\gamma \approx \operatorname{tg}(\gamma) = \frac{\Delta S}{h} \text{ – відносний зсув;}$$

Між модулями пружності I-го роду  $E$  і II-го роду  $G$  для ізотропних матеріалів існує зв'язок

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

### Закон Гука при крученні

$$\tau(r) = G \cdot \theta \cdot r,$$

де  $G$  – модуль пружності II-го роду;

$$\theta = \varphi / l_0 \text{ – відносний кут закручування, рад/мм;}$$

$\varphi$  – кут закручування, рад;

$l_0$  – довжина частини валу, що закручується, мм.

### Визначення допустимих напружень

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{n}$$

### Теорії міцності

1) Теорія найбільших нормальних напружень

$$\sigma_{\text{екв}} = \sigma_{\text{max}} < [\sigma].$$

2) Теорія найбільших лінійних деформацій

$$\varepsilon_{\text{max}} < [\varepsilon]$$

3) Теорія найбільших дотичних напружень

$$\tau_{\max} < [\tau]$$

Для плоского напруженого стану:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} < [\sigma].$$

4) Енергетична теорія міцності

$$U_{\max} < [U],$$

де  $U$  – питома потенційна енергія.

Для плоского напруженого стану:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} < [\sigma].$$

5) Теорія міцності Мора.

### ***Контрольні питання***

1. Які вимоги висуваються до сучасних машин?
2. Перелічіть основні критерії працездатності?
3. З яких матеріалів виготовляються елементи машин?
4. Назвіть основні гіпотези опору матеріалів.
5. Які Ви знаєте основні види деформацій і деформування?
6. Як класифікуються сили, що діють на деталі?
7. Для чого потрібен метод перерізів і в чому він полягає?
8. Як оцінити міцність деталей?
9. Як визначаються допустимі напруження?
10. Коли виникає концентрація напружень?
11. Назвіть умови міцності при різних видах деформування.
12. Назвіть умови жорсткості при різних видах деформування.
13. Як оцінити міцність деталі у складному напруженому стані?

## ТЕМА 7

### Деталі машин

Зміст:

1. Загальні визначення деталей машин.
2. Класифікація деталей машин.
3. З'єднання деталей. Загальні визначення і відомості.
4. Зварні з'єднання.
5. Паяні з'єднання.
6. Клейові з'єднання.
7. Заклепкові з'єднання.
8. З'єднання деталей із натягом.
9. Роз'ємні з'єднання. Різьбові з'єднання.
10. Шпонкові з'єднання.
11. Шліцеве з'єднання.
12. Вали та осі.
13. Опори валів та осей.
14. Контрольні питання.

Машини складаються з деталей.

**Деталь** – це складова частина машини, виготовлена з одного матеріалу без застосування складальних операцій.

**Складальна (збірна) одиниця** – сукупність деталей об'єднаних за допомогою складальних операцій та працюючих як одне ціле.

Універсальний термін – **виріб**.

Великі об'єднання деталей називаються **вузлами**.

**Вузли** об'єднуються в **агрегати**.

Нерухомі та взаємно нерухомі скріплені між собою деталі називають **ланками** (ТММ). Виконання ланок не з однієї, а з кількох з'єднаних між собою деталей забезпечує можливість:

- а) виготовлення деталей із різних матеріалів (корпус – чавун, вкладиш – бронза);
- б) зручної заміни швидкозношуваних деталей;
- в) збірка та полегшення збірки;
- г) полегшення виготовлення через спрощення їх форми та зменшення розмірів;
- д) більшої нормалізації, стандартизації та централізованого виготовлення деталей.

Більшість типів деталей машин є спільними для всіх машин. Вони вивчаються в курсі “Деталі машин”.

#### Класифікація деталей машин.

##### 1. З'єднувальні деталі та з'єднання.

- а) Нероз'ємні з'єднання – зварювання, паяння, клепка, запресування;
- б) Роз'ємні з'єднання – різьбові, шпонкові, клинові, шліцеві (зубчасті) і т.п.

##### 2. Передачі.

- а) Зачепленням (зубчасті, черв'якові, ланцюгові, зубчасто-пасові);
- б) Тертям (пасові, фрикційні).

##### 3. Деталі, що обслуговують обертальний рух у машинах.

- а) Осі (вісі) – підтримують деталі, що обертаються;
- б) Вали – передають крутні моменти та підтримують деталі;
- в) Підшипники: – ковзання;  
– кочення.
- г) Муфти: – постійні (не допускають роз'єднання валів у роботі);  
– зчіпні (допускають роз'єднання валів у роботі);

##### 4. Корпуси, корпусні деталі, станини, рами, фундаменти, основи.

##### 5. Важільні та кулачкові механізми – перетворюють рухи. Найбільш поширений кривошипно-повзунний механізм (КПМ).

Деталі К.П.М. (та інших важільних механізмів) – кривошипи, шатуни, коромисла, призми, куліси, повзуни.

Деталі кулачкових механізмів – кулачки, ексцентрики, ролики.

6. *Пружні елементи, пружини та ресори. Амортизатори, гасники* і т.д. Здійснюють захист від ударів та вібрацій, акумулюють енергію, здійснюють зворотний хід, створюють притиск деталей.

7. *Маховики, маятники, вантажі, баби, шаботи* – для підвищення рівномірності руху, врівноваження мас, для накопичення енергії і т.д.

8. *Захисні та змащувальні пристрої.*

9. *Деталі та механізми управління (керування).*

10. *Специфічні деталі* (циліндри, поршні, клапани, колеса, лопатки турбін, ротори, статори електричних машин і т.д.).

(В курсі ДМ вивчаються лише деталі з пунктів 1-4.)

### З'єднання деталей

З'єднання деталей у машинах бувають **нерухомі**, не допускають відносного руху деталей у процесі експлуатації, та **рухомі (рухливі)**, що допускають таке переміщення.

**Рухомі з'єднання** являють собою кінематичні пари, які називаються опорами при обертальному русі та направляючими при поступальному русі (шарніри, підшипники, зачеплення та ін.).

До **нерухомих з'єднань** відносяться *нероз'ємні* та *роз'ємні* з'єднання. Роз'ємні та нероз'ємні з'єднання здійснюють або за допомогою спеціальних деталей, що з'єднують (кріпильних), або без них. З'єднуючі деталі (заклепки, гвинти, болти, гайки, шайби, шпонки тощо) зазвичай, стандартизовані. Вибір типу з'єднання визначається технологічними, економічними вимогами та забезпеченням працездатності з'єднання.

Вимоги до з'єднань

- рівноміцність із деталями, що з'єднуються;
- жорсткість;
- для роз'ємних з'єднань багаторазовість складання та розбирання;

– універсальність та зручність методу складання.

**Нероз'ємні з'єднання** не допускають розбирання зібраних деталей. Можна розібрати лише за умови повної чи часткової руйнації.

Нероз'ємні з'єднання:

- зварні (зварені),
- заклепкові,
- з'єднання з натягом / пресові,
- паяні,
- клейові,
- завальцюванням, заформуванням.

**Роз'ємні з'єднання** допускають багаторазове складання і розбирання деталей, що з'єднуються, без їх руйнування скріплювальних елементів.

Роз'ємні з'єднання:

- різьбові,
- шпонкові,
- шліцеві (зубчасті),
- штифтові,
- клинові,
- профільні, клемові та ін.

Нероз'ємні з'єднання застосовують там, де немає необхідності в розбиранні.

### **Зварні з'єднання**

Зварювання – це технологічний процес з'єднання частин деталей, заснований на використанні сил молекулярного зчеплення і який здійснюється:

а) при сильному місцевому нагріванні їх до розплавленого стану (зварювання плавленням);

б) пластичного стану із застосуванням механічного зусилля (зварювання тиском).

Зварювання є одним із найпоширеніших прогресивних способів отримання різних складних просторових конструкцій деталей.

Затверділий після зварювання матеріал, що з'єднує зварні деталі, називається зварним швом.

У порівнянні з клепаними та литими зварні конструкції забезпечують суттєву економію металу та значно знижують трудомісткість процесу виготовлення.

*Переваги зварного з'єднання:*

- рівноміцність;
- економічність;
- простота (низька трудомісткість);
- більш конструктивне розміщення елементів;
- менше маса зварної конструкції;
- висока продуктивність.

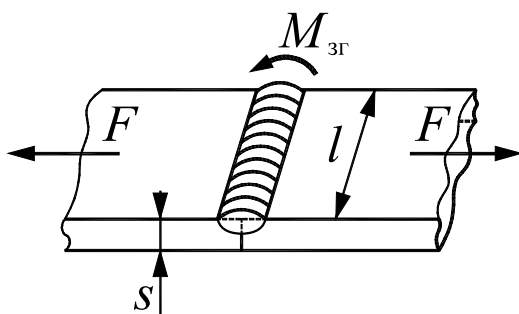
*Недоліки зварювання:*

- 1) виникнення залишкових напружень у зварюваних елементах;
- 2) жолоблення;
- 3) погане сприйняття змінних та особливо вібраційних навантажень;
- 4) складність та трудомісткість контролю якості зварних швів.

Залежно від розташування частин, що з'єднуються, розрізняють такі *види зварних з'єднань*: стикові, внапуск, з накладками, кутові та таврові, що здійснюються стиковими та кутовими швами.

Стикові з'єднання – найпоширеніші, оскільки зварені в стик деталі майже повністю замінюють цілісні. Зварні шви стикових з'єднань називають *стиковими*.

Стикові шви



$$\sigma = \frac{F}{s \cdot l} \leq [\sigma]; \quad \sigma = \frac{F}{s \cdot b} + \frac{6 \cdot M_{зг}}{s \cdot l^2} \leq [\sigma]$$

де  $F$  – розтягуюча сила, Н;

$M_{зг}$  – згинальний момент, Нм;

$\sigma$  – нормальне напруження, МПа;

$l$  – довжина зварного шва, м;

$s$  – товщина деталі, м

Зварні шви напусткових, кутових та таврових з'єднань називають *кутовими*.

Кутові шви за розташуванням шва відносно сили, що діє на шов, розрізняють:– лобові, розташовані перпендикулярно до напрямку сили;

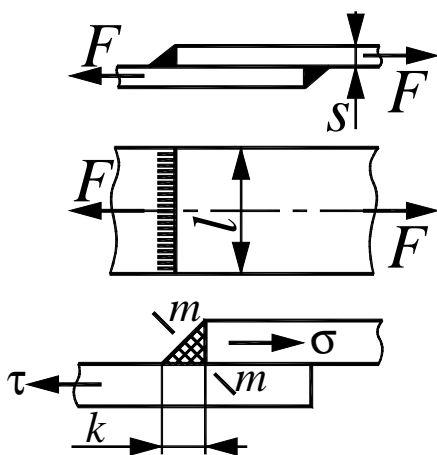
– флангові, розташовані паралельно до напрямку сили;

– косі, розташовані під кутом до напрямку сили;

– комбіновані, що складаються з двох або всіх трьох вищезгаданих швів.

Лобові шви в інженерній практиці розраховують лише за дотичним напруженням. За розрахунковий переріз приймають бісектрису *m-m*, де зазвичай спостерігається руйнування. Розрахунок тільки за дотичним напруженням не залежить від кута прикладання навантаження.

#### Кутові шви



$$\tau = \frac{F}{0.7 \cdot k \cdot l} \leq [\tau],$$

$$\tau = \frac{F}{0.7 \cdot k \cdot l} + \frac{6 \cdot M}{0.7 \cdot k \cdot l^2} \leq [\tau]$$

де  $F$  – розтягуючи сила;  $\tau$  – дотичне напруження, МПа;

$l$  – довжина зварного шва, м;

$k$  – катет шва, м

(катет поперечного перерізу шва)

### Паяні з'єднання

Пайка – це технологічний процес з'єднання металевих деталей за допомогою присадного матеріалу (металу або сплаву), який називають припоєм, заснований на дифузійній взаємодії матеріалів та зчепленні паяного шва з металом деталі (радіатори автомобілів та тракторів, тонкостінні трубопроводи, радіоелектронні прилади).

*Переваги паяного з'єднання:*

- Можливість з'єднання різних металів (сталь та алюміній).
- З'єднання тонкостінних деталей.
- Менше викривлення деталей.

*Недоліки паяної з'єднання:* додаткова підготовка поверхонь деталей для паяння; менше міцність з'єднання порівняно зі зварними з'єднаннями.

### Клейові з'єднання

**Клейові з'єднання** – це з'єднання деталей неметалевою речовиною за допомогою поверхневого схоплювання (адгезії) та внутрішнього міжмолекулярного зв'язку в клеючому шарі.

*Переваги клейового з'єднання:*

- Можливість з'єднання деталей із різнорідних матеріалів.
- З'єднання тонких листів.
- Знижена концентрація напружень та гарний опір втомі.
- Забезпечення герметичності.
- Невелика маса.
- Можливість отримання гладкої поверхні виробу.

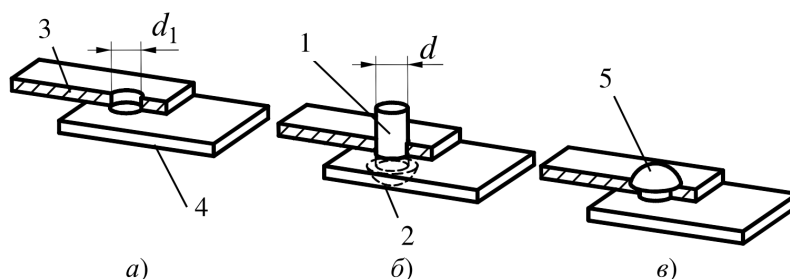
*Недоліки клейової з'єднання:*

- Слабо пручаються нерівномірному відриву.
- Обмежена теплостійкість (до 250° С) та залежність міцності з'єднання від поєднання матеріалів, температури склеювання, технологічного процесу з'єднання та умов роботи.
- Потрібна висока точність пригонки поверхонь деталей, що склеюються.

### Заклепкові з'єднання

Заклепкове з'єднання – це з'єднання за допомогою заклепки або цапфи, яка вставляється в спільно просвердлені деталі, а потім хвостовик ударами молотка чи преса розклепується. При цьому деталі сильно стискаються, утворюючи міцне, нерухоме нероз'ємне з'єднання.

Заклепка – суцільний або порожнистий циліндричний стрижень із двома головками на кінцях. Одну називають *заскладною головкою* (виконується заздалегідь), другу – *закладаючою головкою* (утворюється за місцем під час розклепування).



*Область застосування заклепкового з'єднання:*

- Нагрів з'єднань неприпустимий.
- З'єднання деталей, що не зварюються.
- З'єднання деталей у літаках.
- З'єднання в рамках вантажних машин.

*Переваги заклепкового з'єднання:*

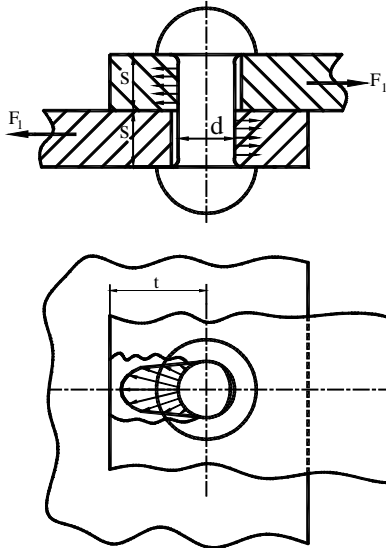
- Стабільність з'єднання та хороша контрольованість якості.
- Нормальна сприйнятливність вібраційних навантажень.
- Можливість з'єднувати незварювані деталі
- Найменше пошкодження деталей під час роз'єму.

*Недоліки заклепкового з'єднання:*

- Підвищена витрата металу.
- Висока вартість.
- Незручні конструктивні форми через необхідність накладання одного листа на інший.
- Ослаблення деталей отворами.

Заклепки випробовують на зсув (зріз) та зминання бічних поверхонь. За цими двома критеріями розраховується діаметр заклепки. При цьому розрахунок на зріз – проектувальний, а розрахунок на зминання – перевірочний.

Однозрізне заклепувальне з'єднання.



$$F_1 = [\tau_{зр}] \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \quad z = \frac{F}{F_1}$$

де  $F_1$  – сила, яку витримає одна заклепка на зріз;

$F$  – сила, що діє на з'єднання;

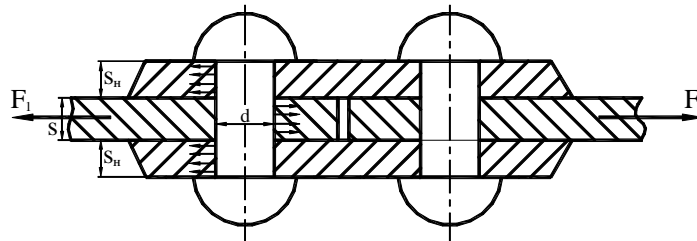
$z$  – число заклепок;

$d$  – діаметр стрижня заклепки;

$[\tau_{зр}]$  – умовне допустиме

напруження зрізу.

Узагальнення на багатозрізне заклепувальне з'єднання.



$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot i \cdot z \cdot [\tau_{зр}]}}$$

де  $i$  – кількість площин зрізу.

Напруження зминання на бічних поверхнях заклепки

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{s \cdot d \cdot z \cdot (i-1)} \leq [\sigma_{зм}],$$

де  $s$  – товщина найменшої з деталей, що з'єднуються.

Крім цього, необхідно перевіряти міцність деталей у перерізі, ослабленому отворами.

### З'єднання деталей із натягом

**З'єднання з натягом** – це з'єднання деталей за рахунок сил тертя, виникаючих між охоплюваною та охоплюючою поверхнями деталей, виконаних з деякою різницею посадкових розмірів.

З'єднання деталей із натягом – це напружені з'єднання, в яких натяг створюється необхідною різницею посадкових розмірів насаджуваних одна на одну деталей. Для скріплення деталей використовуються сили пружності попередньо деформованих деталей.

З'єднання можна розділити на дві групи:

1. з'єднання деталей по циліндричних або конічних поверхнях, причому одна деталь охоплює іншу;
2. з'єднання деталей по площині за допомогою стяжних кілець або планок.

Взаємне зміщення деталей запобігає силам тертя на поверхні контакту. З'єднання з натягом можуть сприймати довільно спрямовані сили та моменти.

#### Способи збирання

1. Запресування
2. Нагрів поверхні, що охоплює поверхні
3. Охолодження поверхні, що охоплюється

*Надійність* з'єднання, що збирається з нагріванням або охолодженням, приблизно в 1,5 рази вище, ніж у з'єднання, що збирається запресуванням, через те, що при запресуванні нерівності контактних поверхонь деталей частково зрізаються і згладжуються, що послаблює міцність з'єднання.

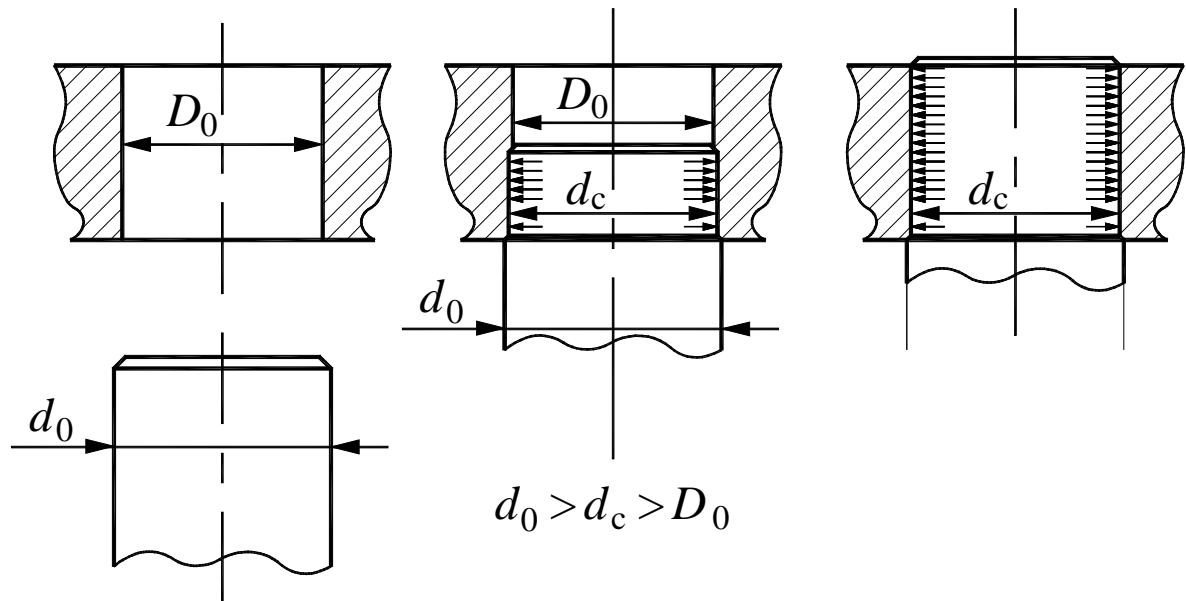
Зі з'єднань деталей, що виконуються з натягом, найбільш поширені циліндричні.

*Переваги* циліндричних з'єднань з натягом:

- 1) простота;
- 2) хороше центрування деталей, що з'єднуються;
- 3) можливість сприйняття великих навантажень;
- 4) добре сприйняття динамічних навантажень (у тому числі вібраційних та ударних).

*Недоліки* циліндричних з'єднань з натягом:

- 1) складність складання та розбирання з'єднань;
- 2) можливість зменшення натягу та пошкодження їх посадкових поверхонь під час збирання (запресування);
- 3) вимога зниженої шорсткості посадкових поверхонь та підвищеної точності виготовлення.



Охоплююча поверхня – отвір.

Охоплювана поверхня – вал.

$d_0$  – діаметр валу (вихідного);

$d_c$  – діаметр з'єднання з натягом;

$D_0$  – діаметр отвору (вихідного).

Натяг – різниця між діаметрами охоплюваної та охоплюючої поверхонь.

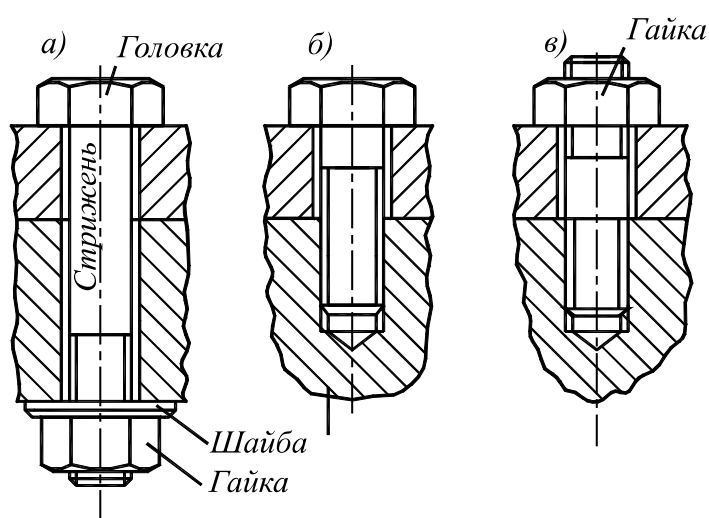
Вимірюється у мікрометрах.

$$N = d_0 - D_0$$

### Роз'ємні з'єднання. Різьбові з'єднання

Різьбовими називають такі з'єднання, які здійснюються кріпильними деталями за допомогою різьб. Різьба отримується виготовленням на циліндричному або конічному стрижні канавок з поперечним перерізом певного профілю (у вигляді трикутника, трапеції тощо), кожна точка якого розташовується на гвинтових лініях. Розташовані між канавками виступи називають *витками різьби*.

Основними кріпильними деталями різьбових з'єднань є болти, гвинти, шпильки та гайки.



а) болтове; б) гвинтове; в) шпилькове

*Болт* є стрижнем з різьбою для гайки на одному кінці і головкою на іншому.

*Гвинт* – це стрижень, зазвичай з головкою на одному кінці і різьбою на іншому кінці, який загвинчується в одну з деталей, що скріплюються.

*Шпилька* є стрижнем з різьбленням на обох кінцях; одним кінцем вона вгвинчується в одну з деталей, що скріплюються, а на інший кінець нагвинчується гайка.

*Гайка* – це деталь з різьбовим отвором, що нагвинчується на гвинтовий стрижень, наприклад, на болт або на шпильку і використовується для замикання деталей з'єднання, що скріплюються за допомогою гвинтів, болтів або шпильок.

*Болтами* скріплюються деталі відносно невеликої товщини. Болти застосовують також для скріплення деталей з матеріалів, які не забезпечують необхідну надійність різьбового з'єднання стрижня гвинта та деталі.

*Гвинти* застосовують, коли одна із деталей, що скріплюються, має відносно велику товщину і з'єднання не вимагає частого збирання-розбирання. Матеріал, з якого виготовляється деталь більшої товщини, повинен забезпечувати необхідну міцність та надійність різьбового з'єднання.

*Шпильки* застосовують замість гвинтів у тих випадках, коли з'єднання піддається частим збиранням-розбиранням.

### Різьби

За формою профілю розрізняють *трикутну, прямокутну, трапецієподібну та круглу* різьби (різьблення).

За призначенням різьби ділять на:

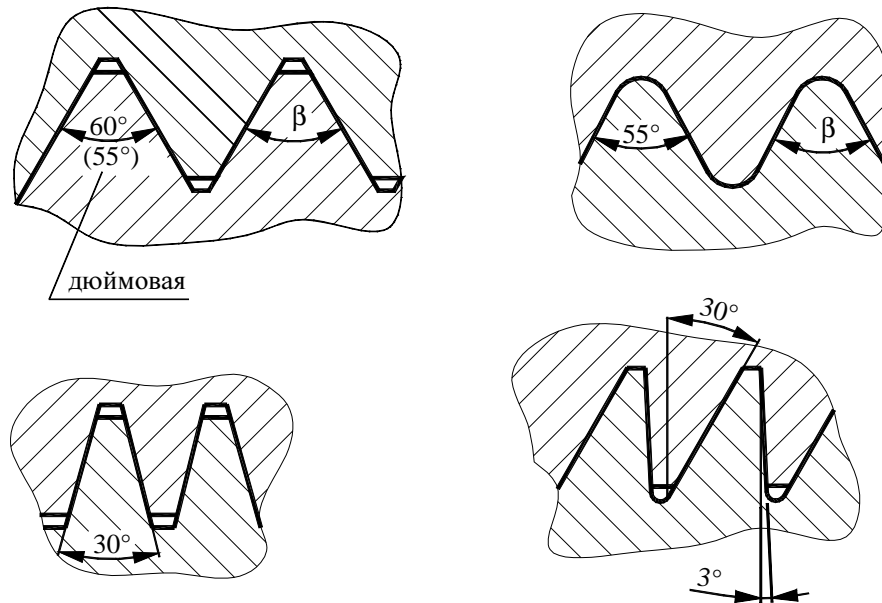
*Кріпильні різьблення* – мають трикутний профіль із притупленими вершинами.

Трикутний профіль дає підвищені сили тертя, що перешкоджає самовідгвинчуванню. **Метрична** різьба ( $\beta=60^\circ$ ) і **дюймова** ( $\beta=55^\circ$ ) забезпечують підвищену міцність витків різьби. Метричні різьби бувають з великими та дрібними кроками. При великому кроці різьба має підвищену статичну міцність, а при дрібному – динамічну. Крім того дрібне різьби характеризується найкращим самосполученням. Крім того дрібні різьби характеризуються найкращою самоспряженістю.

*Кріпильно-ущільнюючі різьби* – служать як для скріплення деталей, так і для герметизації з'єднання. **Трубні** різьби мають трикутний профіль, але без радіальних зазорів – профілі мають плавні закруглення.

*Різьби для передачі руху* застосовуються в ходових та вантажних гвинтах. Ці різьби для зменшення сил тертя виконують **трапецієподібними** з симетричним профілем або з несиметричним профілем (**упорні**), а інколи – з прямокутним профілем. Упорні різьби призначені для сприйняття великих осьових сил, що діють в одному напрямку. Широкого поширення такі різьби набули в домкратах. Різьби у світовій практиці стандартизовані. Свого часу вони стали першим об'єктом стандартизації в машинобудуванні.

Прямокутні різьби виготовляються на токарно-гвинторізних верстатах. Такий спосіб не дозволяє отримати високу точність, і тому дана різьба застосовується порівняно рідко і вона не стандартизована.



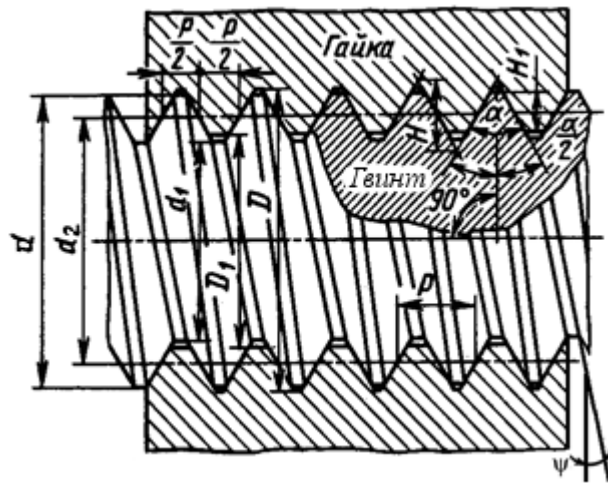
*Переваги різьбового з'єднання:*

- висока надійність;
- простота та точність виготовлення;
- точне встановлення деталей, що з'єднуються;
- мають невеликі габарити та вагу;
- зручність складання та розбирання;
- здатність створювати та сприймати великі осьові зусилля;
- дешевизна внаслідок стандартизації;
- універсальність та технологічність.

*Недоліки:*

- висока концентрація напруження в місцях різкої зміни поперечного перерізу;
- низький к.к.д. рухомих різьбових з'єднань;
- низька вібраційна стійкість.

### Основні параметри різьб



де  $d$  – зовнішній діаметр різьби;

$d_1$  – внутрішній діаметр різьби;

$d_2$  – середній діаметр різьби;

$\alpha$  – кут профілю різьби;

$p$  – крок різьби;

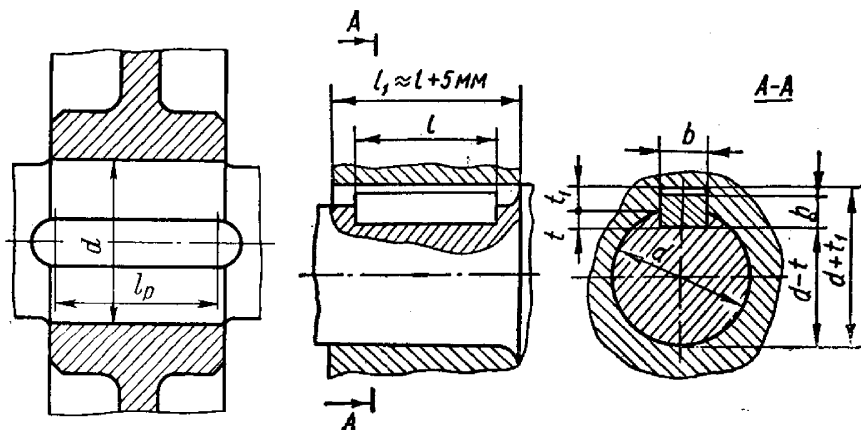
$\psi$  – кут підйому витка різьби.

Якщо болт вставлений в отвір без зазору та з'єднання навантажене поперечною силою  $P$ , то болт працює на зріз і на зминання.

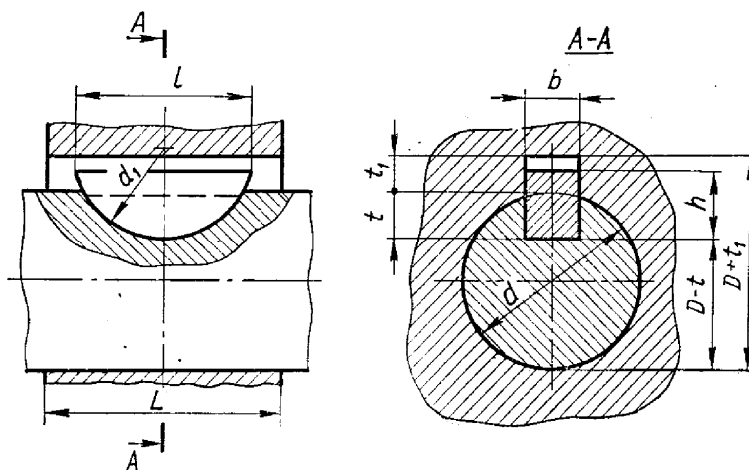
Якщо болт вставлений із зазором та з'єднання навантажене поперечною силою  $F$ , то сила затягування болта повинна дати таку силу тертя між деталями, яка була б більша за поперечну силу зсуву  $F$ . Болт працює на розтягування, а від моменту затяжки отримує ще й крутіння, яке враховується підвищенням нормальних напружень на 30% (у 1,3 рази).

## Шпонкові з'єднання

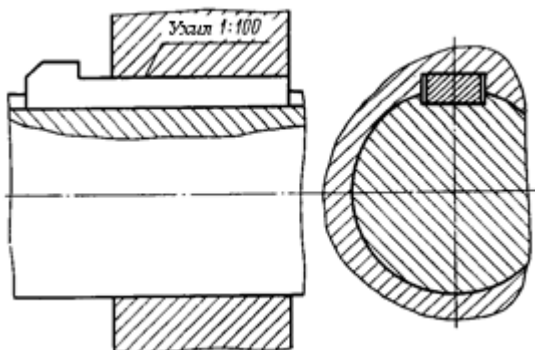
Шпонкові з'єднання – це з'єднання за допомогою шпонки, яку закладають у пази деталей, що з'єднуються. Шпонкові з'єднання служать для закріплення деталей, що обертаються, на осях і валах (шків, зубчасті колеса, муфти, маховики, кулачки).



З'єднання деталей призматичною шпонкою



З'єднання деталей сегментною шпонкою



З'єднання деталей клинвою шпонкою

Шпонки бувають:

- призматичні (найчастіше застосовуються);
- сегментні;
- спеціальні, в тому числі клинові.

У редукторах для кріплення зубчастих коліс та встановлення елементів муфт застосовують ненапружені призматичні шпонки.

На вихідних кінцях валів за їх достатньої довжини використовують звичайні шпонки по СТ СЭВ 189-75 (чи ГОСТ 23360–78), а при укорочених вихідних кінцях валів – високі шпонки (ГОСТ 10748–79). Допускається виконання двох шпонкових канавок (опозитне розміщення/ опозитне розташування).

Паз під шпонку у ступиці колеса виконують на прохід, а на валу виконують паз зі скругленими кінцями, щоб призматичну шпонку можна було вкласти в паз валу з мінімальними зазорами. Такі пази виконують пальцевими фрезами.

Пази на валах для шпонок із відкритими плоскими торцями виконують дисковими фрезами (більш технологічне виконання та менша концентрація напружень).

Найбільш небезпечна деформація для шпонок та пазів – їхнє зминання від діючого в перерізі крутного моменту.

На стадії проектування попередню робочу довжину шпонки можна вибрати за такою формулою

$$l_p \geq \frac{2 \cdot T}{d \cdot (h - t_1) \cdot [\sigma_{зм}]} \approx \frac{4 \cdot T}{d \cdot h \cdot [\sigma_{зм}]}$$

де  $l_p$  – робоча довжина шпонки, рівна прямолінійній робочій частині бічної грані (із запасом);

$\sigma_{зм}$  – напруження зминання;

$T$  – крутний момент, що діє;

$h$  – висота шпонки;

$t_1$  – глибина паза на валу (фактична – від бічної виступаючої кромки)

$d$  – діаметр шпонкового з'єднання.

Перевірочний розрахунок за напруженням зминання бічних поверхонь шпонки виконується за формулою

$$\sigma_{зм} = \frac{2 \cdot T}{(h - t_1) \cdot l_p \cdot d} \approx \frac{4 \cdot T}{h \cdot l_p \cdot d} \leq [\sigma]$$

де  $[\sigma]$  – допустиме нормальне напруження.

Перевірочний розрахунок шпонки за напруженням на зріз виконується за формулою

$$\tau = \frac{2 \cdot T}{b \cdot l_p \cdot d} \leq [\tau],$$

де  $\tau$  – дотичне напруження (на зріз);

$[\tau]$  – допустиме дотичне напруження;

$b$  – ширина шпонки.

Усі розміри шпонок стандартизовані, починаючи від діаметра валу, на який їх потрібно встановити.

*Переваги:*

- простота;
- висока надійність;
- невисока вартість.

*Недоліки:*

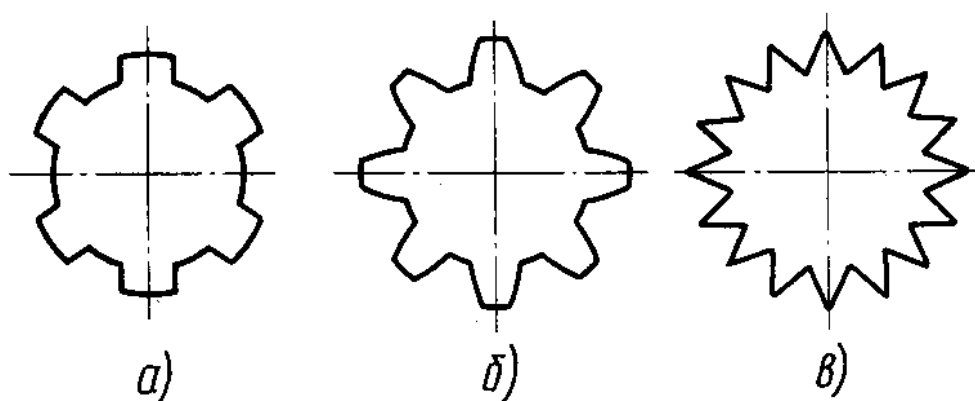
- шпонкове з'єднання послаблює вал і маточину.

## Шліцеве з'єднання

Шліцеве з'єднання – це багатошпонкове з'єднання в якому шпонки виконані заодно з валом.

Воно служить для передачі моменту, що крутить, і одночасно дозволяє здійснити осьове переміщення.

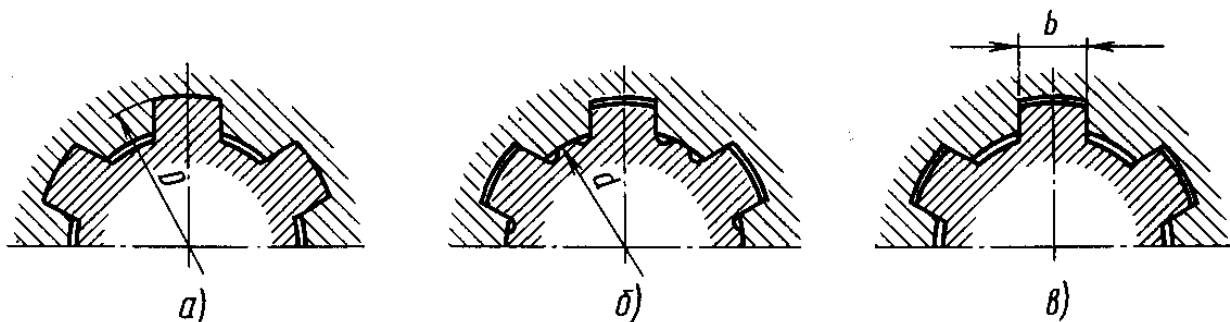
Примітка: іноді їх називають зубчасті з'єднання, не плутати із зубчастими передачами.



Основні форми бічних поверхонь шліців:

- прямобічні (а);
- евольвентні (б);
- трикутні (в).

Прямобічні шліцеві з'єднання мають найбільше поширення в загальному машинобудуванні. Профіль шліців окреслюється коло виступів, колом западин та прямими, утворюючими на валу виступи – Зубці постійної товщини.



Види центрування прямобічних шліцевих з'єднань

Шліцеві з'єднання розрізняють за системою центрування ступиці на валу:

- а) за боковими гранями;
- б) по зовнішньому діаметру;
- в) за внутрішнім діаметром.

Центрування з бокових граней зубців не забезпечує точної співвісності ступиці та валу, але забезпечує найбільш рівномірний розподіл сил між зубами, тому його застосовують за необхідності передачі великих крутних моментів, але за низьких вимог до точності центрування.

Для точного центрування осей ступиці та валу використовують центрування за зовнішнім або внутрішнім діаметром.

З'єднання евольвентного профілю окреслюються колом виступів, колом западин та евольвентами, як профілі зубів зубчастих коліс.

Евольвентний профіль шліців шліцевих з'єднань має наступні переваги:

- а) підвищена міцність;
- б) технологічність;
- в) теоретичний коефіцієнт концентрації напружень у 2 рази менше, ніж у прямобічного профілю.

З'єднання трикутного профілю, як правило, нерухомі, використовують при жорстких вимогах до діаметральних габаритів.

Розрахунок на міцність аналогічний до розрахунку шпонкового з'єднання, але необхідно враховувати кількість шліців.

Розглядаючи шліці як набір шпонок, можна перевірити їх за напруженням зминання.

$$\sigma_{зм} = \frac{2 \cdot T}{d_c \cdot z \cdot h \cdot \psi} \leq [\sigma_{зм}],$$

де  $T$  – розрахунковий крутний момент;

$d_c$  – середній діаметр шліцевого з'єднання, мм;

$z$  – число шліців (зубців);

$h$  – висота поверхні контакту, мм;

$\psi = 0.2 \div 0.8$  – коефіцієнт, що враховує нерівномірність навантаження по шліцях (зубцях);

$[\sigma_{зм}]$  – допустиме напруження.

*Переваги в порівнянні зі шпонковими з'єднаннями:*

- висока здатність навантаження при однакових габаритах через значно більшу робочу поверхню та рівномірний розподіл тиску по висоті зубів;
- вище точність центрування та мають кращий напрямок при пересуванні вздовж валу;
- мають велику втомну міцність валу;

*Недоліки:*

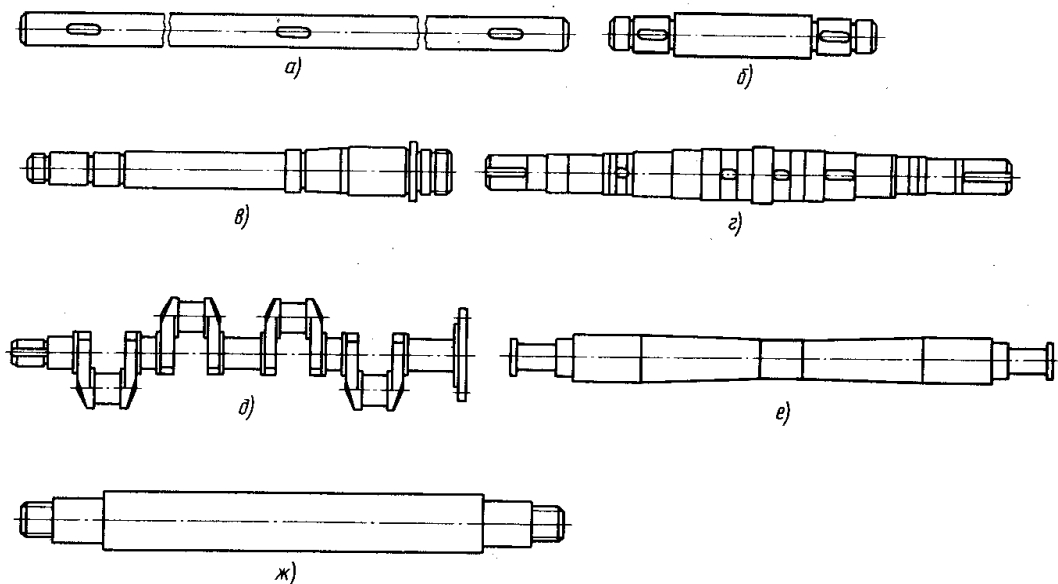
- концентрація напружень
- підвищені вимоги до точності виготовлення.

## Вали та осі

Невід'ємними частинами механізмів є вали і осі, що несуть деталі, які обертаються. Вали – тіла обертання, що підтримують інші деталі, які обертаються та служать для передачі крутного моменту від однієї деталі до іншої, причому потік потужності передається в осьовому напрямку.

Вал відрізняється від осі тим, що він працює на вигин та кручення, а вісь – тільки на вигин.

За формою геометричної осі розрізняють прямі та колінчасті вали, а також гнучкі вали, що звиваються із сталевого дроту. Прямі вали знаходять найширше застосування у переважній більшості машин та приладів точної механіки. Колінчасті вали складають особливу групу, що мають «ламану» вісь. (застосовуються в поршневих двигунах внутрішнього згорання, компресорах, системах перетворення обертання і т. п.).



## Вали та осі

Залежно від виду навантажень і характерної деформації розрізняють:

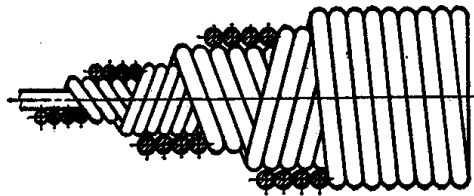
– прості вали – працюють в умовах спільної дії кручення, вигину та (додатково) розтягування або стиснення, їх застосовують, як правило, у редукторних

пристроях. Вали можуть бути гладкими (одного діаметра вздовж осі), або, частіше, ступінчастими;

– торсіонні вали (або просто торсіони) – працюють лише за умов кручення і виконують одночасно дві ролі: передачі моменту, що обертається, і підресорювання.

Осі – працюють в умовах вигину (без кручення) і, значно рідше, розтягнення або стиснення.

Якщо потрібно передати обертання від одного тіла до іншого, чий осі не збігаються, застосовують спеціальні гнучкі вали, мають криволінійну геометричну вісь при роботі.



Гнучкий вал

Такі вали мають високу жорсткість при їх крученні і малу жорсткість при згині. Зазначене дозволяє передавати момент, що крутить, без істотних втрат, одночасно змінюючи конфігурацію валу в просторі.

Розрахунок валів:

Основні:

- 1) Проектувальний / Попередній розрахунок на міцність (кручення)
- 2) Розрахунок валу на міцність / розрахунок валу на складний опір (вигин та кручення)
- 3) Перевірочний розрахунок валу на витривалість

Також виконують:

- Перевірку на жорсткість;
- На міцність з урахуванням температур (термічних напружень);
- На вібростійкість / крутильні коливання

**Попередній розрахунок на міцність**, як правило, виконується за відомим значенням крутного моменту при занижених значеннях допустимих напружень при крученні (оскільки при цьому не враховується дія згинальних моментів) для суцільних круглих валів.

$$d = \sqrt[3]{\frac{T}{0,2 \cdot [\tau]}},$$

де  $T$  – крутний момент у розрахунковому перерізі валу;

$[\tau]$  – допустиме напруження на кручення.

Для сталевих валів  $[\tau] = 15 \div 30$  МПа.

### **Розрахунок валу на складний опір (вигин та кручення).**

Для розрахункової схеми виконується побудова епюр згинальних моментів у двох ортогональних площинах  $M_x$  і  $M_y$ . Потім отримують епюру сумарних згинальних моментів

$$M_{32} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Далі виконується побудова епюри моменту, що крутить і потім побудова підсумкової епюри наведених моментів

$$M_{36} = \sqrt{M_{32}^2 + (\alpha T)^2}.$$

З наведеної епюри виділяється небезпечні перерізи та визначаються розрахункові значення діаметрів

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{36}}{0,1 \cdot [\sigma_{-1}]}},$$

де  $[\sigma_{-1}]$  – межа витривалості при симетричному циклі напружень вигину.

## Опори валів та осей

Вали та осі спираються на підшипники. Підшипники служать опорами для валів і осей, що обертаються. Вони сприймають радіальні та осьові навантаження, прикладені до валу, зберігають задане положення осі обертання валу.

Підшипники класифікуються за видом тертя:

а) підшипники ковзання / тертя

б) підшипники кочення

Для кожного типу своя сфера застосування, де його переваги переважають недоліки.

За типом тертя ковзання підшипники ділять на:

- підшипники сухого тертя (працюють на твердих мастильних матеріалах, на первинному просоченні мастилом або без неї);
- підшипники граничного (напіврідинного тертя);
- підшипники рідинного тертя;
- підшипник з газовим мастилом;
- так звані підшипники (в магнітних полях).

За видом навантаження, що сприймається:

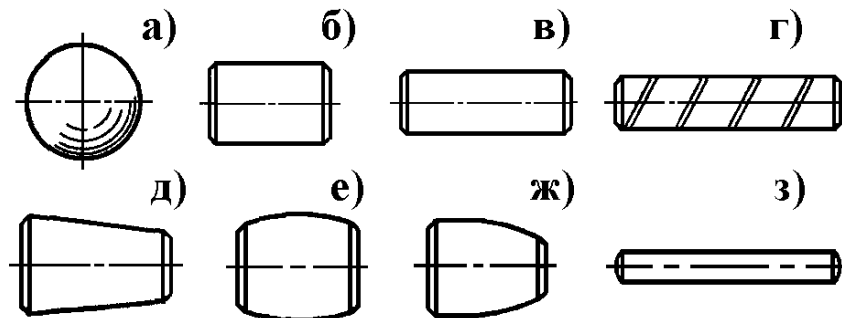
- радіальні;
- радіально-упорні;
- упорно-радіальні;
- упорні.

За формою тіл кочення:

- кулькові;
- роликові

## Тіла кочення

- а) кульки;
- б) ролики циліндричні короткі;
- в) ролики циліндричні видовжені;
- г) ролики циліндричні подовжені з навивкою;
- д) ролики конусні;
- е) ролики бочкоподібної форми (циліндричні);
- ж) ролики бочкоподібної форми (конічні);
- з) голкоподібні (підшипники – голчасті)



Основні типи підшипників:

- 1) підшипник кульковий радіальний однорядний.

Нерозбірний, найпростіший і найдешевший. Дозволяє мати універсальні опори обертання. В основному призначений для сприйняття радіальних навантажень. Може сприймати до 70% невикористаного радіального навантаження у вигляді осьового або реверсивного. Максимально допустима кількість обертів обмежена. Часто використовується замість упорного, коли осьове навантаження становить приблизно до 1/3 радіального, особливо, при високій частоті обертання. Допускає незначні перекося осей кілець до 10...15' (при великих перекосях різко зменшується ресурс).

Область застосування – жорсткі двоопорні вали з відстанню між опорами  $l \leq 10d$ , де  $d$  – внутрішній діаметр підшипника.

- 2) підшипник кульковий радіально-упорний.

Сприймає радіальне та одностороннє осьове навантаження (залежить від кута контакту “ $\alpha$ ”). Дозволяє при збільшенні кута “ $\alpha$ ” перерозподіляти радіальне навантаження для сприйняття більшої осьової. Має зріз борту зовнішнього або внутрішнього кільця для полегшення збирання та розміщення більшої кількості кульок. Зазвичай має "замок" для можливості легкого "складання" та "розбирання". Вантажопідйомність на 30...40% більше, ніж у радіальних того ж розміру. При зростанні кута “ $\alpha$ ” гранична швидкохідність знижується на 25%, а осьова сила, що сприймається, може збільшитися до двох разів.

Область застосування та ж, але за наявності осьової сили, наприклад, у косозубих зубчастих передачах.

3) підшипник кульковий радіальний дворядний сферичний.

Має сферичну поверхню всередині зовнішнього кільця, тобто по біговій доріжці. Нормально працює при перекосах кілець до  $3^\circ$ . Сприймає радіальне та реверсивне осьове навантаження в межах 20% від невикористаної осьової. При великих осьових навантаженнях працює практично один ряд кульок. Два таких підшипники поруч не ставлять, тому що при цьому втрачається основна перевага – здатність самовстановлюватися.

Область застосування – у вузлах з нежорсткими валами, при недостатній співвісності базових отворів у корпусах.

4) підшипник кульковий упорний.

Призначений для сприйняття великих односторонніх осьових навантажень. Добре працює при швидкостях валів до 5...6 м/с. Зазвичай встановлюється у високошвидкісних вузлах при вертикальному розміщенні валу. При горизонтальному розташуванні валу застосування не рекомендується через труднощі регулювання зазорів.

Область застосування: важко навантажені вертикальні вали (зазвичай – у нижній опорі) при низьких та середніх частотах обертання.

5) підшипник роликовий однорядний з короткими циліндричними роликами. Сприймає значні радіальні навантаження. Чутливий до монтажних перекосів та пружних деформацій валів.

Для зменшення кромкових тисків використовують ролики з випускною утворюючою (бочки, або комбіновані ролики). Використовується як «плаваюча опора». Безбортове кільце обов'язково фіксують.

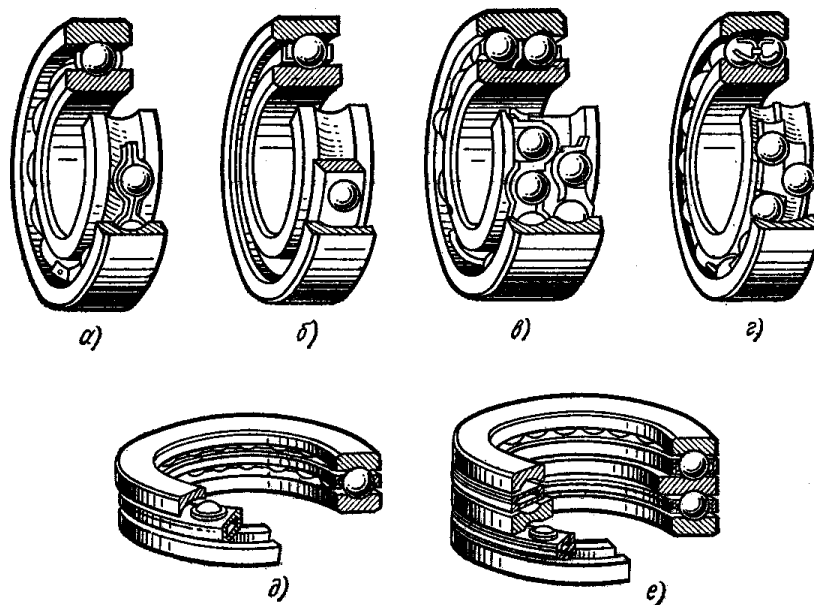
Область застосування: жорсткі короткі двоопорні вали.

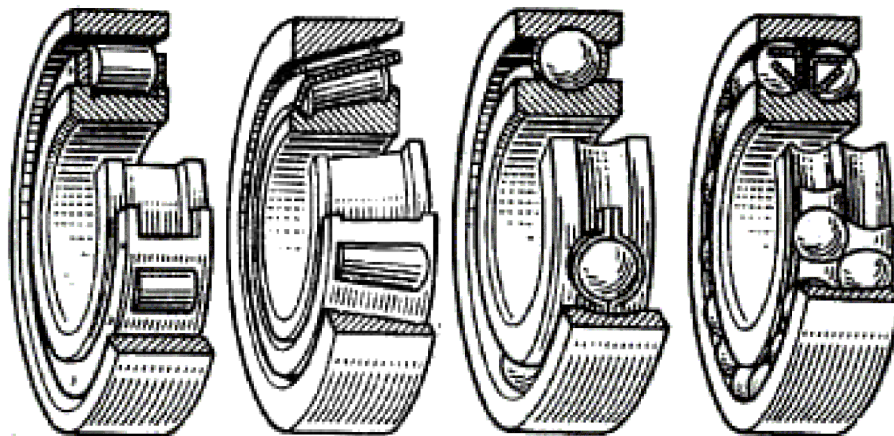
6) підшипник роликовий радіально-упорний конічний. Сприймає радіальне та одностороннє осьове навантаження. Розбірний, допускає регулювання зазорів та компенсацію зносу (установкою прокладок). Зі збільшенням кута контакту « $\alpha$ » можна збільшувати осьове навантаження. Менш швидкохідний у порівнянні з кульковими. Чутливий до монтажних перекосів та пружних деформацій валів.

Область застосування: важко навантажені опори жорстких коротких валів.

7) спеціальні підшипники, у тому числі з довгими роликами, голчасті.

Загальне зауваження: конструктивне виконання підшипників різноманітне. Можуть мати захисні шайби (одно- та двосторонні). У них може бути закладено тугоплавке мастило, що утримується ущільнювачами.





Підшипники кочення підбирають по динамічній та статичній вантажопідйомності.

Більш сприятливим є випадок обертання внутрішнього кільця при нерухомому зовнішньому. Це пов'язано зі зниженням числа циклів навантаження в більш навантаженій точці контакту тіла кочення та внутрішнього кільця.

Роликові підшипники мають менші радіальні габарити, більшу навантажувальну здатність, менші втрати та кращу зносостійкість. Однак вони погано працюють при перекосах валу.

Підшипник зазвичай підбирають по діаметру валу, а потім роблять перевірочний розрахунок.

Вибір підшипників по динамічній вантажопідйомності (ГОСТ 1855-73).

$$L = \left( \frac{C}{P} \right)^p$$

де  $L$  – ресурс, млн. оборотів;

$C$  – каталожна динамічна вантажопідйомність,  $H$ ;

$P$  – еквівалентне розрахункове навантаження,  $H$ ;

$p$  – степеневий показник. Для кулькових підшипників він дорівнює 3, а для роликових –  $10/3$ .

Номінальна довговічність підшипника у годинах роботи ( $L_h$ ) пов'язана з довговічністю ( $L$ ) залежністю

$$L_h = \frac{10^6 L}{60 \cdot n},$$

де  $n$  – число обертів за хвилину;

Формула справедлива при  $n \geq 10 \text{ хв}^{-1}$ .

$$P = (XVF_r + YF_a) \cdot K_b \cdot K_T,$$

де  $F_r$  – радіальне навантаження на підшипник,  $H$ ;

$F_a$  – осьове навантаження на підшипник,  $H$ ;

$X$  – коефіцієнт радіального навантаження;

$Y$  – коефіцієнт осьового навантаження;

$V$  – коефіцієнт обертання ( $V = 1$  при внутрішньому кільці, що обертається, і  $V = 1.2$  – при зовнішньому);

$K_b$  – коефіцієнт безпеки;  $K_T$  – температурний коефіцієнт.

### ***Контрольні питання***

1. Чим відрізняється деталь від складальної одиниці?
2. Як класифікуються деталі машин?
3. Надайте основні визначення для з'єднань.
4. Як оцінюють міцність зварних з'єднань?
5. Які з'єднання називають паяними?
6. Коли використовують клейові з'єднання?
7. Як розраховують заклепкові з'єднання?
8. До якого типу з'єднання відносять з'єднання з натягом?
9. Чим відрізняється болт, гвинт, шпилька?
10. Які різьби бувають?
11. Які параметри мають різьби?
12. Як розрахувати довжину призматичної шпонки?
13. Як розрахувати напруження зминання для шліцевого з'єднання?