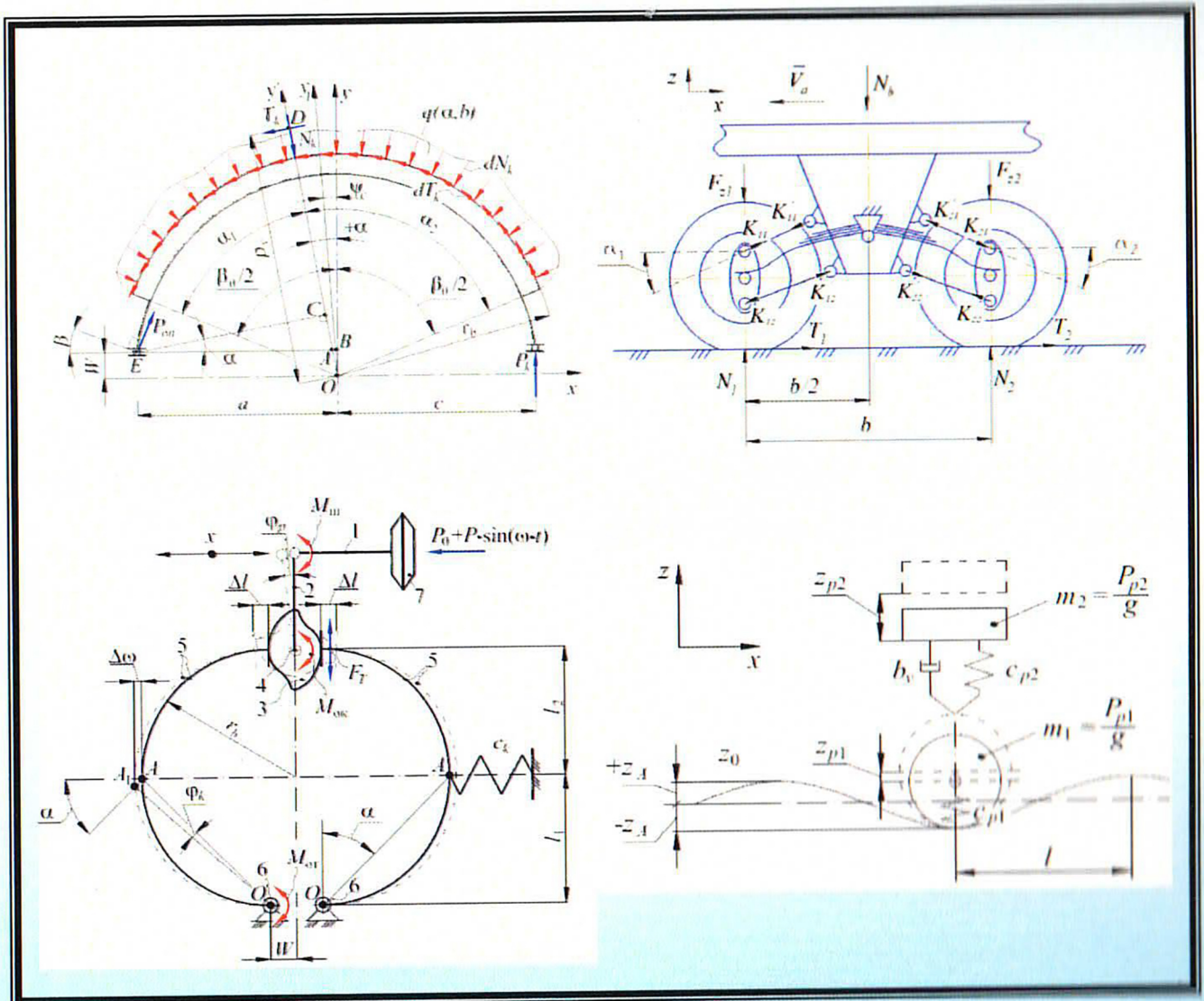


В.О. Богомолов, Д.М. Леонтьев

Математичне моделювання робочих процесів колісних та гусеничних транспортних засобів

Навчальний посібник



Міністерство освіти і науки України
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

В.О. Богомолів, Д.М. Леонтєв

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
РОБОЧИХ ПРОЦЕСІВ КОЛІСНИХ ТА
ГУСЕНИЧНИХ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ**

Навчальний посібник

Харків
ХНАДУ
2025

УДК 629.3
ББК 30
Б 74

Рекомендовано вченою радою (дозвіл №70/24/6.6 «08» листопада 2024 року)
як навчальний посібник для здобувачів закладів вищої освіти

Рецензенти:

О.Ю. Ребров – завідувач кафедри Автомобіле- і тракторобудування, д.т.н., професор,
Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”

М.Л. Шуляк – завідувач кафедри агроінжинірингу, д.т.н., професор,
Сумський національний аграрний університет

Р.В. Зінько – професор кафедри проектування машин та автомобільного
інжинірингу, д.т.н., професор, Національного університету «Львівська політехніка»

С.М. Шуклінов – професор кафедри автомобілів ім. А.Б.Гредескула, д.т.н., професор,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Автори:

В.О. Богомолов, д.т.н., професор, Д.М. Леонт'єв, д.т.н., професор, ХНАДУ.

В.О. Богомолов

Б 74 Математичне моделювання робочих процесів колісних та гусеничних
транспортних засобів: навчальний посібник / В. О. Богомолов, Д. М. Леонт'єв
– Харків : ФОП Бровін О.В., 2025. – 170 с.

ISBN 978-617-8238-74-2

У даному виданні описано математичне моделювання робочих процесів в
механізмах, агрегатах і системах колісних та гусеничних транспортних засобів з
метою навчання та самопідготовки здобувачів закладів освіти або наукових установ з
напрямку «механічна інженерія» та «транспорт» в обсязі навчального плану.

Іл. 80. Табл. 5. Ліст. 30 Бібліогр. 10 назви

ISBN 978-617-8238-74-2

УДК 629.3
ББК 30
© В.О. Богомолов, Д.М. Леонт'єв, 2025
© ХНАДУ, 2025

ВСТУП

Активне зростання технічних засобів, їх різноманітність на ринку, а також взаємозамінність деяких елементів автомобілів та тракторів, особливо техніки подвійного використання, обумовлює підвищення кваліфікації інженерів в частині більш глибокого пізнання математичного апарату при моделювання робочих процесів в автомобілях та тракторах. Кваліфікований спеціаліст в галузі інженерії повинен не тільки вміти практично вирішувати задачі, що є традиційними під час проектування вузлів, агрегатів та систем автомобілів та тракторів, а й формулювати та вирішувати нові задачі, що потребують використання нових математичних методів. Тому кругозір спеціаліста в галузі інженерії постійно повинен розширюватися та вдосконалюватися. Тому саму цю мету й покладено в основу даного навчального посібника.

Математичний апарат інженера (спеціаліста в галузі інженерії) визначається як взаємопов'язана сукупність мови, моделей та методів математики, орієнтована на рішення інженерних задач. На меті лекційного матеріалу, викладеного в даному навчальному посібнику, є допомога здобувачам вищої освіти або спеціалістам в галузі інженерії освоїти деякі практично важливі розділи математичного апарату, що знайшли світове застосування в практичній діяльності інженера-механіка.

Технічні науки постійно розвиваються в тісній взаємодії та співпраці з математикою та електронікою. Це проявляється, з одного боку, в використанні математичного апарату для розв'язання науково-технічних завдань, а з іншого – інженерна практика значною мірою орієнтує та стимулює розвиток самої математики. Можна навести безліч прикладів, що ілюструють це твердження.

Дослідження різних типів диференційних рівнянь з самого початку тісно пов'язувалося з вирішенням технічних та фізичних проблем під час моделювання технічних систем. Метод найменших квадратів, що став одним з ефективних засобів обробки результатів спостережень, виник з потреб геодезичної практики. Нарисна геометрія розвинулася під впливом будівельної справи, архітектури

та механіки. Величезний арсенал чисельних методів сформувався та продовжує розвиватися завдяки практичним потребам механіки та інженерії.

В результаті взаємодії математики та техніки виникають і успішно розвиваються нові прикладні науки. Так, на стику теорії ймовірності з технікою зв'язку і передачі повідомлень виникла теорія інформації, методи якої використовуються не тільки в техніці, а й в економіці, лінгвістиці, біології, тощо. Під впливом і за безпосередньої участі математики розвиваються такі загальні науки, як кібернетика, теорія ланцюгів і систем, а також й багато інших.

Одним з найбільш ефективних результатів взаємодії математики та техніки стало створення сучасних обчислювальних машин. Симбіоз математичних методів і технічних засобів електроніки, магнітної техніки, прикладної оптики і механіки вже досить високо зарекомендував себе в цьому відношенні і відкриває неозорі перспективи у майбутньому. Розвиток обчислювальної техніки дозволяє привести в дію більш потужні ресурси математики і підсилює її роль як безпосередньої продуктивної сили, сприяючи тим самим прогресу самої математики.

Математика розвивається як єдина наука з притаманними їй методами. Залежно від точки зору на її предмет, математику поділяють на змістовну математику, формальну математику та прикладну математику.

Прикладна математика включає математичні теорії, орієнтовані на вивчення проблем в явищах природи та суспільства. Така орієнтація здійснюється шляхом тлумачення об'єктів формальних і змістовних теорій в категоріях реального світу (емпірична інтерпретація). Наприклад, пов'язуючи поняття точки, лінії, паралельності (або відповідні їм символи та терміни) з об'єктами фізичного простору, тим самим приводячи нас до прикладної (емпіричної теорії), яка обслуговує проблематику відповідної галузі. Одна і та ж математична теорія, отримуючи різні інтерпретації, може стати основою для побудови багатьох прикладних теорій.

Відомо, що інженерія характеризується надзвичайно широкою сферою застосування, а спеціаліст в галузі інженерії може бути зайнятий безпосередньо у виробництві, в проектній або науково-дослідній установі чи організації, в державних органах управління тощо.

Поряд з розширенням сфери застосування інженерної справи, посилюється його спеціалізація. Внаслідок розвитку виробництва та прикладних наук відбувається розщеплення традиційних спеціальностей з'являються нові.

Будучи фахівцем у вузькій галузі, спеціаліст з інженерії повинен бути підготовлений до співпраці та взаєморозумінню з представниками інших галузей науки та техніки, що абсолютно необхідно в умовах сучасного виробництва, при розробці складних технічних проектів або проведенні наукових досліджень. Яно, що така підготовка може бути досягнута тільки на міцному фундаменті природничих і математичних наук.

Незважаючи на велику різноманітність конкретних форм інженерної діяльності, центральне місце в ній займають процеси обробки даних і прийняття рішень. Прийняття рішень при проектуванні ґрунтується на аналізі технічних умов шляхом розщеплення складного завдання на більш прості, використанні науково-технічного досвіду при теоретичній та експериментальній перевірці висунутих гіпотез, всебічному врахуванні можливостей та обмежень технологічних, економічних, соціальних і психологічних факторів. Участь у наукових дослідженнях покладає на спеціаліста в галузі інженерії необхідність прийняття рішень, спрямованих на забезпечення надійного функціонування технічних засобів і отримання достовірних даних про досліджувану систему або об'єкти цієї системи. Таким чином виходить, що спеціалісти в галузі інженерії повинні брати участь не тільки при оформленні наукових результатів, а під час планування експерименту та обробці отриманих експериментальних даних.

Процеси обробки даних і прийняття рішень вимагають залучення математичних методів і обчислювальних засобів, рівень яких залежить від складності розв'язуваних завдань. Зрозуміло, успіх справи значною мірою визначається особистими якостями інженера, його професійною та теоретичною підготовкою. Найважливішу роль в цьому відношенні грає вміння спеціаліста в галузі інженерії обирати відповідний до його задачі математичний апарат і найбільш ефективно використовувати його для отримання необхідного результату.

Основні задачі та поняття курсу «Математичне моделювання робочих процесів колісних та гусеничних транспортних засобів». Основні можливості програмного продукту MatLAB

- 1.1. Математичний апарат спеціаліста в галузі інженерії.**
- 1.2. Математичні моделі.**
- 1.3. Математичні методи.**
- 1.4. Основні можливості програмного продукту MatLAB.**

1.1. Математичний апарат спеціаліста в галузі інженерії

За словами відомого академіка О.М. Крилова, математика для інженера є інструмент такий же, як штангенциркуль, зубило, напилек для слюсаря. Інженер повинен за своєю спеціальністю вміти володіти інструментом, але він зовсім не повинен вміти його робити, подібно до того, як слюсар не повинен сам насікати напилек, але зате - вміти вибрати той напилек, який йому потрібен.

Для інженера початковою є реальна система, при проектуванні або дослідженні якої він повинен знайти та використати відповідну або, як кажуть, адекватну математичну теорію. Необхідним етапом на шляху до адекватної теорії є ідеалізація реальної системи відповідно до завдання дослідження або проектування. Властивості ідеалізованої системи абстрагуються та ототожнюються з властивостями математичних об'єктів, в результаті чого приходимо до того, що називають математичною моделлю системи.

1.2. Математичні моделі

Реальні об'єкти, з якими має справу інженер, мають, нескінченну безліч властивостей та характеризуються нескінченною

безліччю зв'язків, як всередині самого об'єкта, так і поза ним (зв'язки з іншими об'єктами та навколишнім середовищем). Перехід до відповідних моделей є найбільш складним і відповідальним етапом застосування математичного апарату в інженерній справі. Значною мірою успішне вирішення цього завдання визначається досвідом та інтуїцією фахівця в даній конкретній області. У той же час можна вказати і ряд загальних вимог, які звичайно пред'являються до математичної моделі: достатня точність, гранична простота і стандартна форма.

Забезпечити достатню точність моделі - це значить врахувати при ідеалізації реального об'єкта всі істотні властивості та зв'язки, відволікаючись від другорядних і несуттєвих. Вирішення цього питання залежить не тільки від характеру самого об'єкта, але і від поставленого завдання. Тому, для одного і того ж об'єкта може знадобитися не одна, а декілька моделей, які обслуговують різні завдання при його проектуванні або дослідженні.

Представляючи реальний об'єкт з достатньою точністю, математична модель в той же час повинна бути по можливості простішою, так як подальша робота зі складною моделлю не тільки утрудлива, але може виявитися і практично неможливою. Суперечливість цих вимог нерідко змушує поступитися точністю в інтересах простоти, проте такий компроміс припустим тільки в тих межах, при яких модель ще відображає істотні властивості реального об'єкта.

При моделюванні реальних об'єктів доцільно орієнтуватися на математичні моделі стандартного виду, які забезпечені відповідним апаратом.

Важливим методом спрощення моделі є представлення об'єкта або сукупності об'єктів у вигляді системи таких її частин (компонентів), зв'язок між якими можна з достатньою точністю охарактеризувати функціями тільки однієї змінної (наприклад часу).

Якщо відомі моделі компонентів системи у вигляді деяких залежностей щодо їх зовнішніх зв'язків, то модель такої системи можна представити звичайними диференціальними рівняннями. Тим самим здійснюється перехід від моделі з розподіленими параметрами до більш простої моделі з зосередженими параметрами.

У загальному випадку моделі компонентів характеризуються нелінійними залежностями. Однак багато завдань допускають їх

лінеаризацію, що відповідно суттєво спрощує і самі моделі систем, які в таких випадках описуються лінійними рівняннями. Якщо параметри компонентів можна вважати незалежними від часу, то система представляється стаціонарною, статичною моделлю. В іншому випадку модель часто називають динамічною.

Параметри системи та додані до неї впливи можна розглядати як детерміновані або випадкові величини, що приводить відповідно до детермінованих або стохастичних моделей.

Однією з різновидів стохастичних моделей є так звані імовірнісні моделі.

1.3. Математичні методи

Після того, як математична модель побудована, подальша робота полягає в застосуванні відповідних математичних методів з метою отримання необхідних характеристик даної моделі, а значить, і досліджуваного реального об'єкта. Велику різноманітність математичних методів можна звести до трьох основних видів: аналітичні, графічні та чисельні.

Отримання характеристик моделі в аналітичній формі бажано у багатьох відношеннях. Перш за все представляється можливим провести дослідження в загальному вигляді, незалежно від чисельних значень параметрів системи. Аналітичні залежності дозволяють використовувати ефективні методи оптимізації та отримати співвідношення, що характеризують поведінку системи при зміні її параметрів. Не менш важливо і те, що при підстановці в аналітичні вирази чисельних значень можна контролювати точність обчислень. Однак аналітичні методи можуть бути застосовні тільки для найпростіших моделей. Рішення алгебраїчних рівнянь вище четвертого ступеня в загальному випадку не представимо в радикалах. Через громіздкість аналітичних виразів або неможливість їх отримання взагалі, значення аналітичних методів в інженерній практиці значно обмежується. У той же час аналітична форма є основною при викладі і розвитку математичного апарату в загальному вигляді.

Графічні методи мають наочність і успішно використовуються як для ілюстрації аналітичних методів, так і безпосередньо в інженерних розрахунках. Вони особливо зручні, якщо не потрібна

висока точність або якщо інтерес представляє якісна картина процесів, що відбуваються.

На жаль, графічні методи обмежені можливостями побудов на площині або в тривимірному просторі, внаслідок чого вони можуть бути застосовані тільки для простих моделей. У практиці інженерних розрахунків графічні методи часто використовуються спільно з аналітичними. У таких випадках їх називають графоаналітичними методами.

Найбільш загальними є чисельні методи. Схема обчислень задається формулою або сукупністю правил (алгоритмом), виконання яких у визначеному порядку приводить до необхідного результату. Залежно від характеру обчислювального процесу чисельні методи поділяються на прямі та ітераційні.

При використанні прямих методів результат виходить шляхом послідовних операцій над числами, і його точність залежить виключно від точності проміжних обчислень. В ітераційних методах результат виходить шляхом послідовних наближень, починаючи від деяких початкових значень. Кожне наступне значення (ітерація) обчислюється по одній і тій же схемі, що представляє собою цикл обчислювального процесу.

Часто прямі методи називають точними, а ітераційні - наближеними. Однак ці назви не пов'язані безпосередньо з точністю одержуваних результатів. Нерідко, як раз навпаки, результати, отримані прямими методами, уточнюються за допомогою ітераційних процесів.

В даний час розроблена величезна кількість обчислювальних процедур, які обслуговують різні завдання дослідження математичних моделей. До них відносяться, наприклад, чисельні методи інтегрування та диференціювання, інтерполяції і наближення функцій, рішення систем різних типів алгебраїчних і диференціальних рівнянь, оптимізації, дослідження стійкості, тощо. З розвитком обчислювальної техніки чисельні методи стали незамінним засобом проектування, організації виробництва і наукових досліджень. Сьогодні в комп'ютерних інженерних розрахунках набула широкого поширення система MatLAB. Вона розрахована на рішення самого широкого кола математичних задач. Одним з основних її переваг є дуже зручне надання результатів розрахунку в графічному вигляді.

1.4. Основні можливості програмного продукту MatLAB

1.4.1. Формати чисел

За замовчуванням MatLAB видає числові результати в нормалізованій формі з чотирма цифрами після десяткової точки. Багатьох така форма надання не завжди влаштовує. Тому, при роботі з числовими даними можна задавати різні формати представлення чисел. Однак в будь-якому випадку усі обчислення проводяться з граничною, так званою подвійною точністю. Для установки формату представлення чисел використовується команда:

```
>> format name
```

де *name* - ім'я формату. Для числових даних, *name* може бути наступним повідомленням: **short** - коротке представлення в фіксованому форматі (5 знаків), **short e** - коротке представлення в експоненціальному форматі (5 знаків мантиси і 3 знаки порядку), **long** - довге подання у фіксованому форматі (15 знаків), **long e** - довге подання в експоненціальному форматі (15 знаків мантиси і 3 знаки порядку), **hex** - подання чисел в шістнадцятиричній формі; **bank** - представлення для грошових одиниць.

Для ілюстрації різних форматів розглянемо вектор, що містить два елементи-числа:

```
>> X = [4/3 1.2345e-6]
```

У різних форматах, числа представлені в якості значення X матимуть вигляд наведений у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Представлення значень X у різних форматах

format short	1.3333	0.0000
format short e	1.3333E+000	1.2345E-006
format long	1.3333333333333333	0.000001234500000
format long e	1.3333333333333333E+000	1.2345000000000000E-006
format bank	1.33	0.00

Завдання формату позначається тільки на формі виведення чисел. Обчислення, як вже зазначалося раніше, все одно відбуваються в форматі подвійної точності, а введення чисел можливо в будь-якому зручному для користувача вигляді.

1.4.2. Присвоєння значень змінним

В системі MatLAB змінним можна присвоювати певні значення. Для цього використовується операція присвоювання, що вводиться знаком рівності =

Ім'я_змінної = Вираз

Ім'я змінної (її ідентифікатор) може містити скільки завгодно символів, але запам'ятовується і ідентифікується тільки 31 початковий символ. Ім'я будь-якої змінної не повинно збігатися з іменами інших змінних функцій та процедур системи, тобто воно повинно бути унікальним. Ім'я повинно починатися з літери, може містити букви, цифри і символ підкреслення `_`. Неприпустимо включати в імена змінних прогалини і спеціальні знаки, наприклад, +, -, *, /, та інші, оскільки в цьому випадку правильна інтерпретація виразів стає неможливою.

MatLAB - система, спеціально призначена для проведення складних обчислень з векторами, матрицями і масивами. При цьому вона за умовчанням передбачає, що кожна задана змінна - це вектор, матриця або масив. Все визначається конкретним значенням змінної. Наприклад, якщо задано $X = 1$, то це означає, що X - це вектор з єдиним елементом, який має значення 1. Якщо треба задати вектор з трьох елементів, то їх значення слід перерахувати в квадратних дужках, розділяючи пробілами.

Так, наприклад, присвоєння:

```
>> V = [1 2 3]
```

```
V =
```

```
1 2 3
```

задає вектор V , який має три елементи зі значеннями 1, 2 і 3.

Після введення вектора система виводить його на екран дисплея.

Завдання матриці вимагає вказівки декількох рядків. Для розмежування рядків використовується знак «;» (крапка з комою). Цей же знак в кінці введення запобігає виводу матриці або вектора (і взагалі результату будь-якої операції) на екран дисплея. Так, введення

```
>> M = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
```

задає квадратну матрицю 3x3.

Ця матриця може бути виведена на екран ноутбука або комп'ютера у вигляді:

```
>> M
M =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

Можливе введення елементів матриць і векторів у вигляді арифметичних виразів, що містять будь-які доступні системі функції, наприклад:

```
>> V=[2+2/(3+4) exp(3) sqrt(10)];
>> V
V =
  2.2857  20.0855  3.1623
```

Вектор значень також може бути заданий у вигляді:

Початкове_значення: Крок: Кінцеве_значення

Дана конструкція породжує зростаючу послідовність чисел, яка починається з *початкового* значення, йде з заданим *кроком* і завершується *кінцевим значенням*. Якщо *Крок* не заданий, то він приймає значення 1. Якщо *кінцеве значення* вказано меншим, ніж *початкове значення*, - видається повідомлення про помилку.

Приклади застосування оператора «:» дани нижче:

```
>> 1:5
ans =
     1     2     3     4     5
>> i=0:2:10
i =
     0     2     4     6     8    10
>> j=10:-2:2
j =
    10     8     6     4     2
>> V = 0:pi/2:2*pi
>> V =
V =
     0     1.5708     3.1416     4.7124     6.2832
```

1.4.3. Деякі особливості побудови графіків в системі MatLAB

У декартовій системі графіки функцій однієї змінної будуються за допомогою команди *plot*:

- $plot(X, Y)$ - будує графік функції $y(x)$, координати точок (x, y) якої беруться з векторів однакового розміру Y та X ;

- $plot(X, Y, 'S')$ - аналогічна команді $plot(X, Y)$, але тип лінії графіка можна задавати за допомогою строкової команди S ;

Значеннями константи S можуть бути наступні символи представлені в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 – Значеннями константи S у вигляді символів

Колір лінії	
y	Жовтий (yellow)
m	Фіолетовий (magenta)
c	Блакитний (cyan)
r	Червоний (red або ruddy)
g	Зелений (green)
b	Синій (blue)
w	Білий (white)
k	Чорний (kohl – тьмяна речовина або khaki – тьмянний колір)
Тип точки	
.	точка
o	коло
x	хрест
+	плюс
*	зірочка
s	квадрат
d	ромб
v	трикутник (вниз)
^	трикутник (вгору)
<	трикутник (вліво)
>	трикутник (вправо)
p	п'ятикутник
h	шестикутник
Тип лінії	
-	суцільна
:	подвійний пунктир
-.	штрих-пунктир
--	штрихова

Таким чином, за допомогою константи S можна змінювати колір лінії, представляти вузлові точки різними відмітками (точка, коло, хрест, трикутник з різною орієнтацією вершини і т.ін.), а також міняти тип лінії графіка;

- $plot(X1, Y1, S1, X2, Y2, S2, X3, Y3, S3 \dots)$ – ця команда буде на одному графіку ряд ліній, представлених даними виду (X_i, Y_i, S_i) , де X_i та Y_i - вектори або матриці, а S_i - строкові константи. За допомогою такої конструкції можлива побудова, наприклад, графіка функції лінією, колір якої відрізняється від кольору вузлових точок. Так, якщо треба побудувати графік функції лінією синього кольору з червоними крапками, то спочатку треба задати побудову графіка з точками червоного кольору (без ліній), а потім графіка тільки ліній синього кольору (без крапок).

При відсутності вказівки на колір ліній і точок він вибирається автоматично з таблиці кольорів (білий виключається). Якщо ліній більше шести, то вибір кольорів повторюється.

Якщо виникає необхідність розташувати кілька координатних осей з різними графіками без накладення їх один на одного, то використовується команда `Subplot`, яка стає перед командою `plot` (див. рядки 20, 37 Лістингу 1.1 програми «Розрахунок кривих реалізованого зчеплення»):

- $subplot(m, n, p)$ - розбиває графічне вікно на $m \times n$ підвікон, при цьому m - число підвікон по вертикалі, n - число підвікон по горизонталі, p - номер підвікна, в яке буде виводитися поточний графік (підвікна відраховуються послідовно за строками).

Після того, як графік вже побудований, MatLAB дозволяє виконати його форматування або оформлення в потрібному вигляді. Відповідні цьому засоби описані нижче.

Для установки над графіком титульного напису використовується команда:

- $title('String')$ - установка на двовимірних і тривимірних графіках титульного напису, заданого строковою константою $'String'$.

Для установки написів біля осей x , y , z використовуються команди:

- $xlabel('String')$

- $ylabel('String')$

- $zlabel('String')$

Відповідна напис задається символною константою або змінною $'String'$.

Часто виникає необхідність додавання тексту в певне місце графіка, наприклад, для позначення тієї чи іншої кривої графіка. Для цього використовується команда:

- *text(X, Y, 'String')* - додає в двовимірний графік текст, заданий строково. константою *'String'*, так що початок тексту, розташовано в точці з координатами (X, Y).

Аналогічна команда існує і для тривимірного графіка:

- *text(X, Y, Z, 'String')*

Пояснення у вигляді відрізків ліній з довідковими написами, розміщується всередині графіка або біля нього, та називається легендою.

Для створення легенди використовується команда:

- *legend('String1', 'String2', 'String3' ...)* - додає до поточного графіку легенду у вигляді рядків, зазначених у списку параметрів.

Зазвичай графіки виводяться в режимі автоматичного масштабування. Але діапазон зміни параметрів може задаватися і «вручну»:

- *axis([XMIN XMAX YMIN YMAX])* - установка діапазонів координат по осях *x* і *y* для поточного двовимірного графіка.

Аналогічна команда існує і для тривимірного графіка:

- *axis([XMIN XMAX YMIN YMAX ZMIN YMAX])*

Команда *grid* дозволяє задавати побудову масштабної сітки або скасовувати цю побудову:

- *grid on* - додає сітку до поточного графіку;

- *grid off* - відключає сітку;

- *grid* - послідовно проводить включення і відключення сітки.

Часто для зручності аналізів результатів розрахунку, можна рекомендувати на початку програми використовувати команди:

- *clc* - очищає екран і розміщує курсор в лівому верхньому кутку порожнього екрану;

- *clear* - знищення визначень всіх змінних.

Оскільки MatLAB використовується для досить складних обчислень, важливе значення має наочність їх опису. Вона досягається, зокрема, за допомогою текстових коментарів.

Текстові коментарі вводяться за допомогою символу *%*, наприклад:

% Введення даних

Як приклад розглянемо побудову так званих кривих реалізованого зчеплення у гальмуючого автомобіля.

Відповідно до міжнародних вимог Додатка 10 Правил № 13 ООН «Єдині технічні приписи щодо офіційного затвердження

дорожніх транспортних засобів категорій M , N і O стосовно гальмування», для кожного новостворюваного транспортного засобу будуються так звані криві реалізованого зчеплення. Для двохвісного автомобіля вони (див. рис. 1.1) описуються рівняннями

$$f_1 = \frac{T_1}{N_1} = \frac{T_1}{P_1 + Z \cdot \frac{h}{E} \cdot P \cdot g}, \quad (1.1)$$

$$f_2 = \frac{T_2}{N_2} = \frac{T_2}{P_2 - Z \cdot \frac{h}{E} \cdot P \cdot g}, \quad (1.2)$$

де 1, 2 – індекс параметра, відповідно для 1-ої та 2-ої вісі двохвісного транспортного засобу;

T_1 та T_2 – гальмові сили, відповідно на 1-й та 2-й вісі двохвісного транспортного засобу;

N_1 та N_2 – нормальні (вертикальні) реакції поверхні дорожнього покриття відповідно на 1-й та 2-й вісі двохвісного транспортного засобу;

P_1 та P_2 – нормальні (вертикальні) реакції поверхні дорожнього покриття відповідно на 1-й та 2-й вісі двохвісного транспортного засобу, при статичних умовах;

$g = 9.8 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння;

h – висота центра тяжіння транспортного засобу;

E – колісна база транспортного засобу;

P – маса транспортного засобу;

$z = (T_1 + T_2)/(P \cdot g)$ – коефіцієнт гальмування.

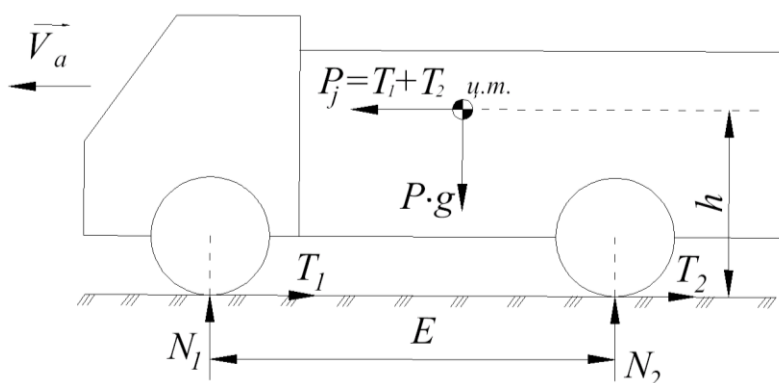


Рис. 1.1 Схема сил, які діють на транспортний засіб, що гальмується: P_j – сила інерції транспортного засобу при його гальмуванні; $ц.т.$ – центр тяжіння

Для транспортних засобів категорій M_2 , M_3 , N_2 , N_3 до кривих реалізованого зчеплення пред'являються вимоги:

- для коефіцієнтів гальмування в діапазоні 0,15 ... 0,3 криві реалізованого зчеплення для кожної осі транспортного засобу повинні бути розташовані між двома прямими (див. рис. 1.2 а)

$$k = z \pm 0.08, \quad (1.3)$$

паралельними до прямої

$$k = z; \quad (1.4)$$

- крива реалізованого зчеплення для задньої осі, для коефіцієнтів гальмування $z \geq 0.3$, повинна задовольняти вимозі (див. рис. 1.2 а)

$$z \geq 0.3 + 0.74(k - 0.38). \quad (1.5)$$

Розрахунки будемо робити для вантажного автомобіля категорії N_2 з вагово-геометричними параметрами, які наведено у таблиці 1.3.

Таблиця 1.3 – Вагово-геометричні параметри вантажного автомобіля категорії N_2

Найменування параметру	Завантажений автомобіль	Споряджений автомобіль
1. Колісна база E , м	3.8	3.8
2. Висота центру мас h , м	1.28	0.85
3. Маса автомобіля P , кг	11130	4905
4. Вага, що припадає на задню вісь P_2 , Н	80370	35419
5. Вага, що припадає на передню вісь P_1 , Н	28704	12650

Вважаємо, що гальмівна система вантажівки спроектована таким чином, що виконується рівність

$$T_2 = 0.57(T_1 + T_2). \quad (1.6)$$

Програма для розрахунку кривих реалізованого зчеплення може бути представлена у вигляді Лістингу 1.1.

Лістинг 1.1 – Програма «Розрахунок кривих реалізованого зчеплення»

```
1 % Розрахунок кривих реалізованого зчеплення
2- clc, clear
3 % Завантажений автомобіль
4- E=3.8;hg=1.28;Pg=11130;P1g=28704;P2g=80370;
5- z1=[0 0.8];
6- k1=z1;
7- z2=[0.15 0.3];
8- k2=z2+0.08;
9- k3=z2-0.08;
10- z4=[0.3 0.3+0.74*(0.8-0.38)];
11- k4=(z4-0.3)/0.74+0.38;
12- z=0:0.01:0.65;
13- Tg=z*Pg*9.8;
14- T2g=0.57*Tg;
15- T1g=Tg-T2g;
16- N1g=P1g+z*hg*Pg*9.8/E;
17- f1g=T1g./N1g;
18- N2g=P2g-z*hg*Pg*9.8/E;
19- f2g=T2g./N2g;
20-subplot(1,2,1),plot(z1,k1,'--r',z2,k2,'-r',z,f1g,'-m',z,f2g,'-g',z2,k3,'-r',z4,k4,'-r'),grid
21- legend('k=z',' граничні прямі',' f1',' f2');
22- title('Розрахунок реалізованого зчеплення. Завантажений автомобіль');
23- xlabel('z');
24- ylabel('k1, k2, k3, k4, f1, f2');
25- text(0.12, 0.3, 'k=z+0.08');
26- text(0.23, 0.13, 'k=z-0.08');
27- text(0.61, 0.62, 'k=z'); text(0.02,0.67, 'z>=0.3+0.74*(k-0.38)');
28 % Споряджений автомобіль
29- hs=0.85;Ps=4905;P1s=12650;P2s=35419;
30- Ts=z*Ps*9.8;
31- T2s=0.57*Ts;
32- T1s=Ts-T2s;
33- N1s=P1s+z*hs*Ps*9.8/E;
34- f1s=T1s./N1s;
35- N2s=P2s-z*hs*Ps*9.8/E;
36- f2s=T2s./N2s;
37-subplot(1,2,2),plot(z1,k1,'--r',z2,k2,'-r',z,f1s,'-m',z,f2s,'-g',z2,k3,'-r',z4,k4,'-r'),grid
38- legend('k=z',' граничні прямі',' f1',' f2');
39 title('Розрахунок реалізованого зчеплення. Споряджений автомобіль');
40- xlabel('z');
41- ylabel('k1, k2, k3, k4, f1, f2');
```

Результати розрахунків, відповідно за програмою зображеною у Лістингу 1.1, представлені на рисунку 1.2.

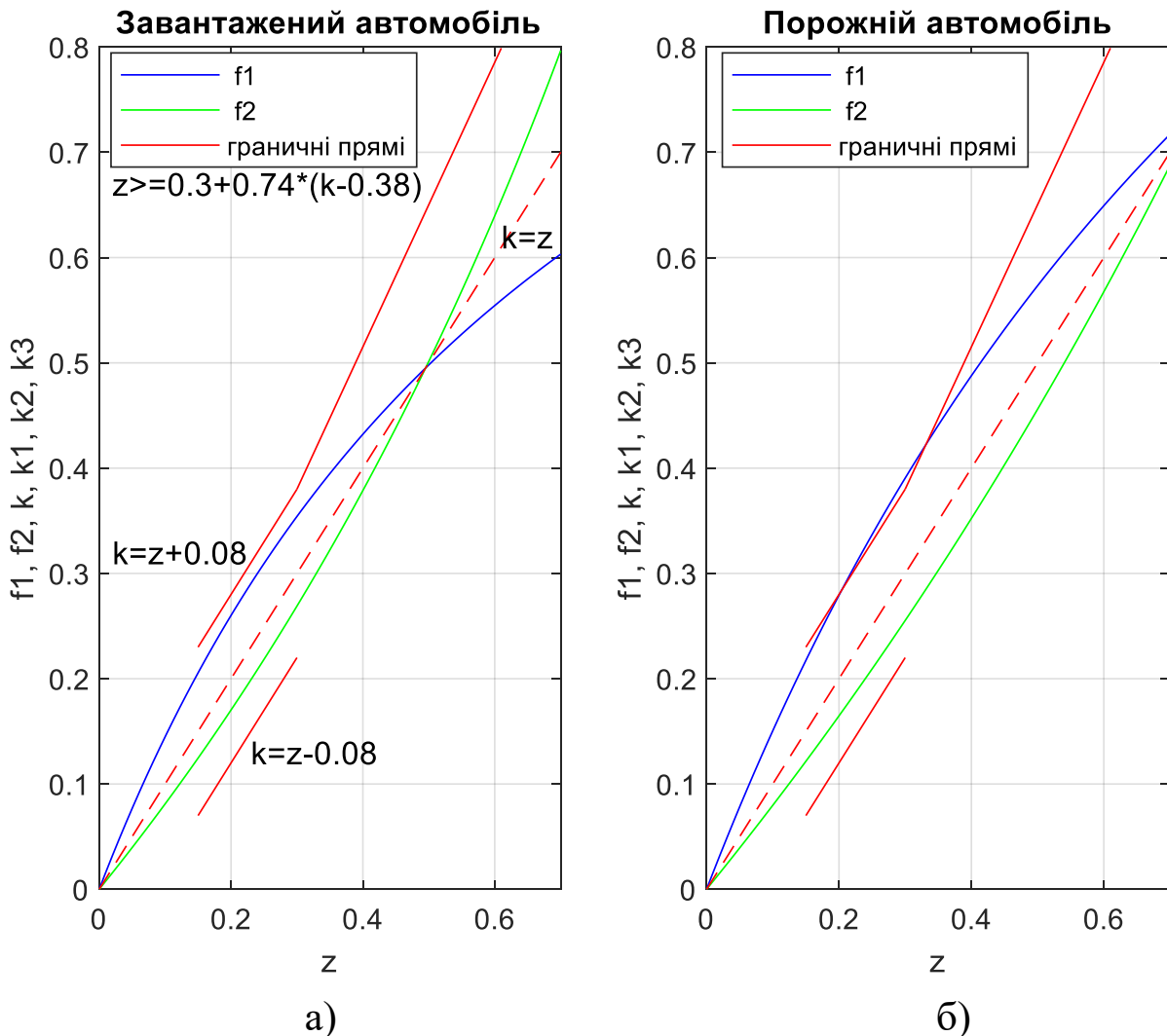


Рис. 1.2 Розрахунок кривих реалізованого зчеплення двохвісного вантажного транспортного засобу категорії N_2 :

а) - завантажений автомобіль; б) - споряджений автомобіль

Прокоментуємо запропоновану програму, що зображена у Лістингу 1.1:

- рядок 4 - завдання величин констант;
- рядки 5-11 - формують відповідні вектори значень для побудови граничних прямих (1.3)...(1.5);
- рядок 12 - формує значення вектора z ;
- рядки 13-19 - формують вектори значень f_{1g} та f_{2g} . Слід звернути увагу, що (див. рядки 17, 19) при діленні вектора на вектор, щоб в результаті отримати вектор значень тієї ж розмірності,

необхідно перед знаком ділення ставити крапку << ./ >>. Те ж саме необхідно робити при здійсненні операцій множення << .* >> та зведення в ступінь << .^ >>. При проведенні цих операцій між константою і вектором (див. рядки 13, 14, 16, 18) крапку ставити не потрібно. Не потрібно її ставити і перед знаками «-», «+», навіть якщо складаються вектори;

- рядок 20 - команда на друк графіка результатів розрахунку;
- рядки 21-27 - команди на оформлення графіків;
- аналогічні операції для оформлення векторів f_{1s} і f_{2s} представлені в рядках 29-41.

З рисунку 1.2 видно, що для спорядженого стану, криві реалізованого зчеплення не відповідають вимогам (1.3) ... (1.5). Тому можна зробити висновок: в гальмову систему транспортного засобу який розглянуто необхідно встановити регулятор гальмових сил, що забезпечує в спорядженому стані співвідношення гальмових сил, наприклад

$$T_2 = 0.62(T_1 + T_2). \quad (1.7)$$

Після відповідного корегування рядка 31, графік кривих реалізованого зчеплення набирає вигляду, що представлено на рисунку 1.3.

При створенні програм, крім уже зазначених арифметичних операцій відзначимо додатково:

- «...» – продовження рядка, ставиться в кінці рядка, в разі його перенесення на наступний рядок;
- « π » – повертає число $\pi = 3.1414926 \dots$;
- « $abs(X)$ » – повертає абсолютну величину для кожного числового елемента вектора X . Якщо X містить комплексні числа, $abs(X)$ обчислює модуль кожного числа;
- « $exp(X)$ » – повертає експоненту для кожного елемента X ;
- « $log(X)$ » – повертає натуральний логарифм елементів масиву X ;
- « $log10(X)$ » – повертає логарифм за підставою 10 для кожного елемента X ;
- $sin(X)$, $cos(X)$, $tan(X)$, $sec(X)$, $csc(X)$, $cot(X)$ – повертають відповідно синус, косинус, тангенс, секанс, косеканс, котангенс для кожного елемента масиву X ;

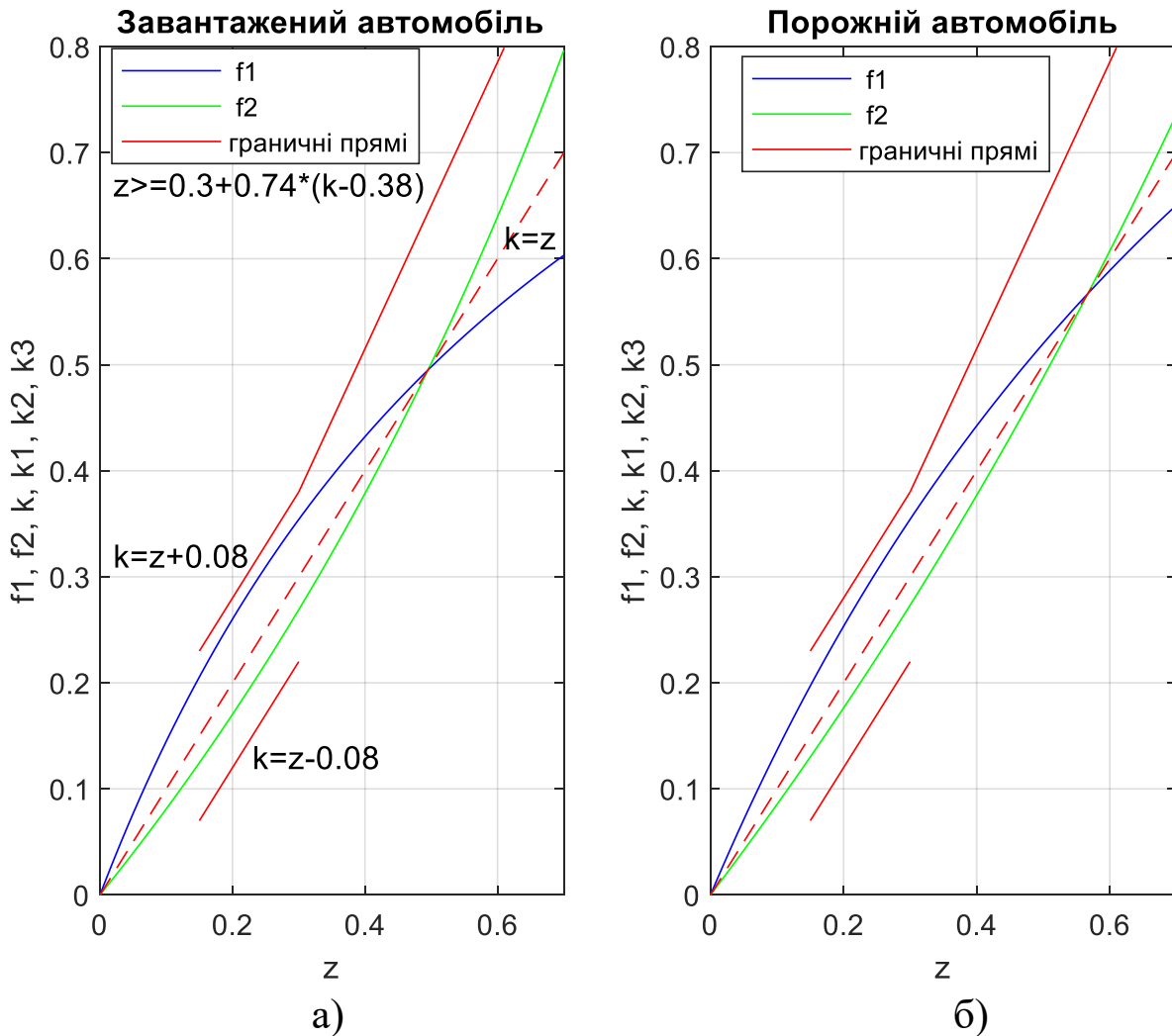


Рис. 1.3 Розрахунок кривих реалізованого зчеплення двохвісного вантажного транспортного засобу категорії N_2 з регулятором гальмівних сил:

а) - завантажений автомобіль; б) - споряджений автомобіль

- $asin(X)$, $acos(X)$, $atan(X)$, $asec(X)$, $acsc(X)$, $acot(X)$ – повертають значення відповідних зворотних тригонометричних функцій;

- « \sqrt{X} » – повертає квадратний корінь кожного елемента масиву X ;

Зручно представлена в MatLAB можливість виведення графіку у вигляді тривимірної поверхні.

Тривимірні поверхні зазвичай описуються функцією двох змінних $z(x, y)$.

Специфіка побудови графіків у вигляді тривимірних поверхонь вимагає не просто завдання ряду значень x та y , тобто векторів x та y . Вона вимагає визначення для x та y двовимірних масивів – матриць X та Y . Для створення таких масивів служить функція:

$[X,Y]=meshgrid(x,y)$ – перетворює область, задану векторами x та y в масиви X та Y , які використовуються для обчислення функції двох змінних та побудови графіку у вигляді тривимірної поверхні.

При побудові такого графіка можна використовувати команду:

$plot3(x,y,z)$ – будує масив точок, представлених векторами x , y , z , поєднуючи їх відрізками прямих;

$plot3(x,y,z,'s')$ – забезпечує побудови аналогічні розглянутим раніше, але зі специфікою стилю ліній і точок, що відповідає специфікації команди $plot$;

$plot3(x1,y1,z1,'s1', x2,y2,z2,'s2', x3,y3,z3,'s3', \dots)$ – будує на одному рисунку графіки декількох функцій $z_1(x_1,y_1)$, $z_2(x_2,y_2)$, $z_3(x_3,y_3)$, тощо, зі специфікацією ліній та маркерів кожної з них.

Як приклад використання команди для побудови тривимірного графіку, розглянемо програму, що представлена у Лістингу 1.2.

Лістинг 1.2 – Програма для побудови тривимірної поверхні з використанням команди $plot3$

```
1- clc, clear
2- [x,y]=meshgrid(-3:0.1:3,-2:0.1:2);
3- z=x.^2+y.^4;
4- plot3(x,y,z);grid
5- xlabel('x');
6- ylabel('y');
7- zlabel('z');
```

Результати розрахунків, з використанням програми зображеної у Лістингу 1.2, наведені на рисунку 1.4.

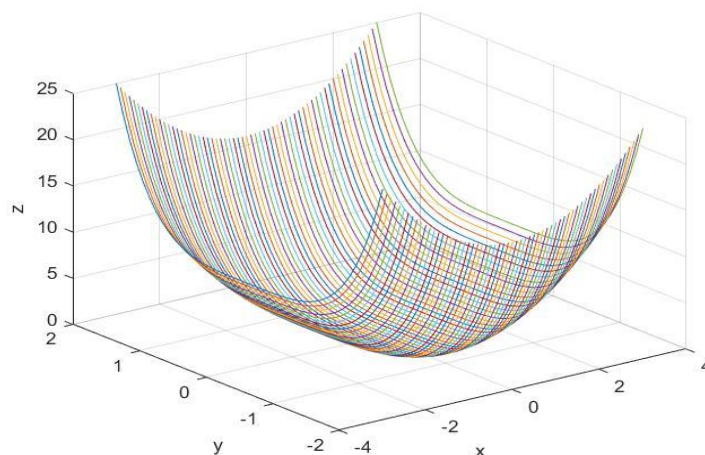


Рис. 1.4. Графік тривимірної поверхні побудований командою $plot3(x,y,z)$

Найбільш представницькими і наочними є сітчасті графіки поверхонь з функціональним забарвленням.

Тут можна рекомендувати команди:

- $mesh(x,y,z)$ - виводить в графічне вікно сітчасту поверхню $z(x,y)$ з функціональним забарвленням, при якому колір задається висотою поверхні.

На рисунку 1.5 представлені результати розрахунків, при заміні рядка 4 на команду « $mesh(x,y,z)$ » в програмі, що зображена в Лістингу 1.2.

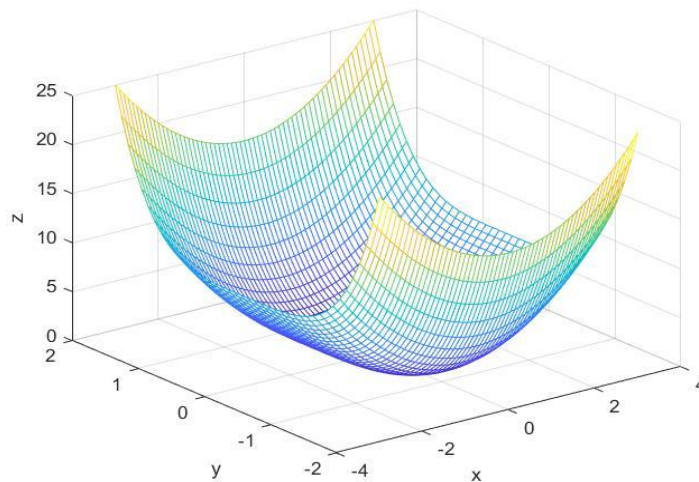


Рис. 1.5 Графік тривимірної поверхні побудований за командою $mesh(x,y,z)$

- $surf(x,y,z)$ – будує кольорову поверхню за даними матриць x , y , z так, що колір задається висотою того чи іншого осередку поверхні.

На рисунку 1.6 представлені результати розрахунків, при заміні рядка 4 на команду « $surf(x,y,z)$ » в програмі, що зображена в Лістингу 1.2

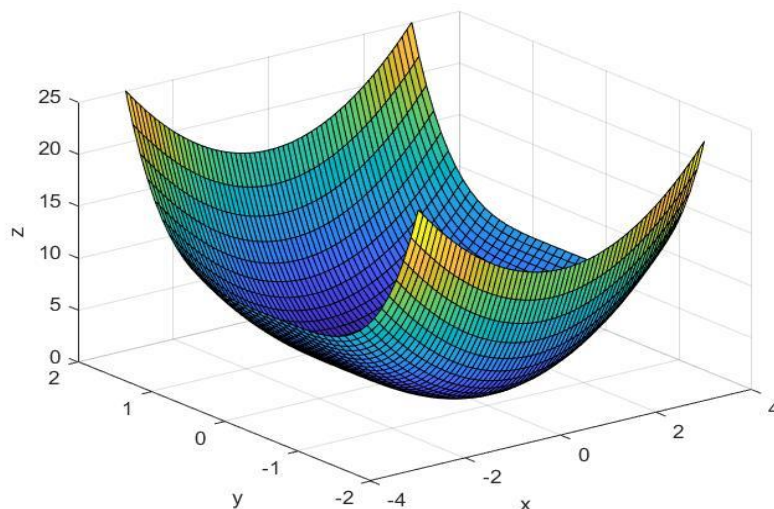


Рис. 1.6 Графік тривимірної поверхні побудований за командою $surf(x,y,z)$

Аналітичні, чисельні та графічні методи рішення рівнянь. Робота з поліномами

- 2.1. Застосування закону Амонтона. Визначений інтеграл**
- 2.2. Застосування методу найменших квадратів для спрощення математичної моделі**
- 2.3. Застосування рівнянь статичної рівноваги для отримання необхідної математичної моделі**
- 2.4. Способи рішення рівнянь**
- 2.5. Робота з поліномами**

Для створення математичної моделі механічної системи, спочатку, як правило, використовують один або декілька з відомих: фізичних законів, наприклад - рівняння рівноваги, закон Амонтона (про сухе тертя), закон Кулона (про тертя-кочення), 2-ий закон Ньютона, принцип Д'Аламбера, закон збереження кількості руху системи, потенційна та кінетична енергія, закон збереження енергії і т.ін .; математичних методів, теорем або теорій, наприклад - формула Ньютона-Лейбніца та повний інтеграл, рівняння Лагранжа, методи вирішення диференціальних рівнянь, теорія стійкості Ляпунова, метод найменших квадратів та багато інших.

Дуже важливо, в процесі створення і фізичної, і математичної моделей зробити справедливі допущення, принципи формування яких можна викласти в наступному:

- вони повинні виходити з відомих законів і закономірностей;
- можуть спиратися на вже раніше опубліковані результати теоретичних і експериментальних досліджень;
- вони не повинні суперечити здоровому глузду.

2.1. Застосування закону Амонтона. Визначений інтеграл

Продемонструємо наступний приклад. На рисунку 2.1 показана схема навантаження притискної колодки барабанного гальма.

Потрібно визначити величину умовного радіуса тертя ρ_ϕ див. рисунок 2.1.

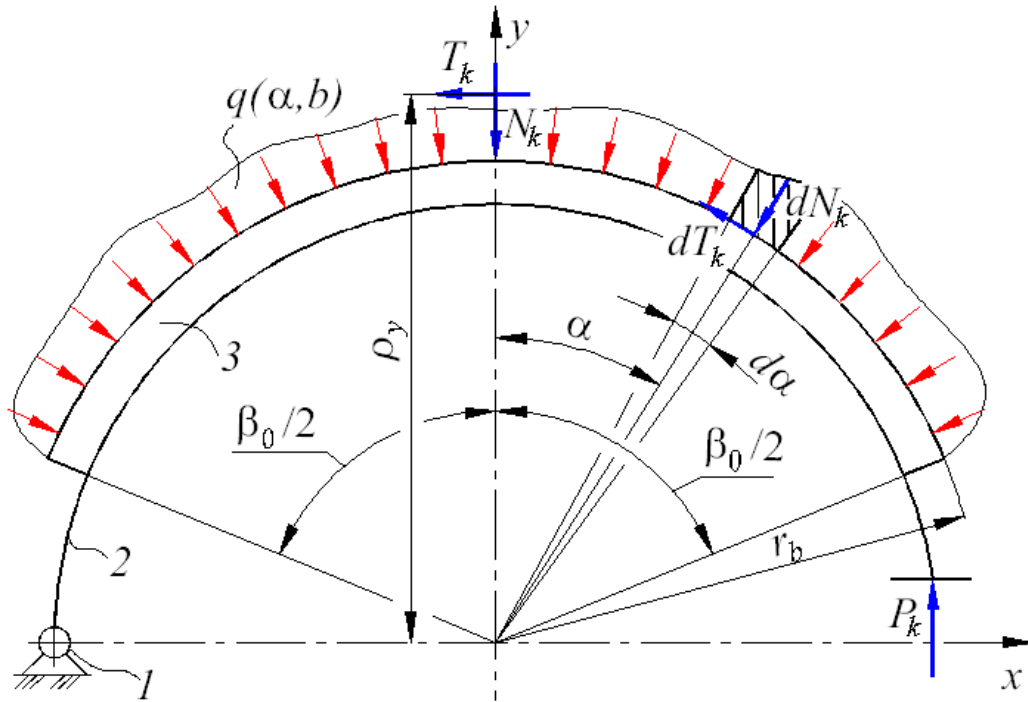


Рис. 2.1. Схема навантаження притисної колодки з одним ступенем свободи: 1 - поворотна опора колодки; 2 - обід колодки; 3 - гальмівна накладка; $q(\alpha)$ - закон розподілу нормальних тисків по поверхні гальмівної накладки у загальному випадку; dN_k , dT_k - елементарні нормальні і дотичні сили; N_k , T_k - результуючі від відповідних dN_k та dT_k ; β_0 - кут охоплення гальмівної накладки; r_b - радіус гальмівного барабана; ρ_ϕ - умовний радіус тертя; P_k - привідна сила від розтискного механізму гальма

У загальному випадку елементарну силу dN_k , яка діє на елементарній площадці $r_b \cdot d\alpha \cdot db$ можна записати як:

$$dN_k = q(\alpha, b) \cdot r_b \cdot d\alpha \cdot db. \quad (2.1)$$

де $q(\alpha, b)$ - закон розподілу тисків на поверхні гальмівної накладки, як функція двох координат: по куту α і по ширині гальмівної накладки b ;

db - нескінченно мала ділянка ширини накладки, на малюнку не показана.

У Харківському автомобільно-дорожньому інституті були проведені експериментальні дослідження, які дозволяють припустити, що в процесі гальмування, нормальні тиску по гальмівній накладці розподіляються рівномірно. Це дозволяє вважати, що:

$$q(\alpha, b) = \text{const} = q. \quad (2.2)$$

Таке припущення дає можливість значно спростити поставлене завдання. Та перейти до аналізу так званої «плоскої» задачі, без урахування ширини гальмівної накладки, тоді:

$$dN_k = q \cdot r_b \cdot d\alpha. \quad (2.3)$$

Гальмівний момент на колодці з урахуванням, у даному випадку, її симетрії щодо осі y (дивись рис. 2.1):

$$M_k = 2 \int_0^{\beta_0/2} dT_k \cdot r_b. \quad (2.4)$$

Відповідно до закону Амонтона, можна вважати:

$$dT_k = \mu \cdot dN_k. \quad (2.5)$$

де μ – коефіцієнт тертя між накладкою і гальмівним барабаном. Підставляючи (2.3, 2.5) в (2.4) отримуємо:

$$M_k = \mu \cdot q \cdot r_b^2 \cdot \beta_0. \quad (2.6)$$

З іншого боку, знову ж таки з урахуванням симетрії гальмівної накладки щодо осі y , та використовуючи правила підсумовування векторів, можна показати, що вся система елементарних сил dN_k і dT_k може бути приведена до двох результуючих N_k і T_k , які показано на рисунку 2.1. Причому відповідно до закону Амонтона:

$$T_k \perp N_k \text{ і } T_k = \mu \cdot N_k. \quad (2.7)$$

З рисунка 2.1

$$M_k = T_k \cdot \rho_y = N_k \cdot \mu \cdot \rho_y, \quad (2.8)$$

звідки:

$$\rho_y = \frac{M_k}{T_k} = \frac{M_k}{\mu \cdot N_k}, \quad (2.9)$$

З рисунку 2.1:

$$N_k = 2 \int_0^{\beta_0/2} dN_k \cdot \cos \alpha, \quad (2.10)$$

Підставляючи (2.3) в (2.10), а (2.10) в (2.9) та з урахуванням (2.6), після відповідних перетворень отримуємо:

$$\rho_y = r_b \frac{\beta_0}{2 \cdot \sin(\beta_0 / 2)}, \quad (2.11)$$

2.2. Застосування методу найменших квадратів для спрощення математичної моделі

Вираз (2.11) є точним аналітичним рішенням, але лише для випадку симетричної накладки щодо вісі y , і при цьому вектор результуючої N_k також повинен збігатися з віссю y . Але це лише окремий випадок. Так, наприклад, у разі якщо у колодки з одним ступенем свободи є зміщення накладки на кут $\psi_{\bar{n}}$ (дивись наприклад рис. 2.4), то (2.11) вже вимагає корегування. Або якщо, наприклад, аналізується само встановлювальна колодка з двома ступенями свободи. Для забезпечення рівноваги колодки (як це буде показано трохи нижче) вектор N_k найчастіше не збігається з віссю y (дивись рис. 2.4) тому необхідне корегування рівняння (2.11).

Дослідження, проведені з цього питання в Харківському національному автомобільно-дорожньому університеті, показали, що в загальному випадку можна вважати:

$$\rho_y = r_b \frac{\alpha_1 + \frac{q_2}{q_1} \alpha_2}{\sin \alpha_1 + \frac{q_2}{q_1} \sin \alpha_2}, \quad (2.12)$$

де

$$\frac{q_2}{q_1} = \left[\frac{\sin(\alpha_1 / 2)}{\sin(\alpha_2 / 2)} \right]^2, \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_0 / 2 - \alpha + \psi_{\bar{n}}; \\ \alpha_2 = \beta_0 / 2 + \alpha - \psi_{\bar{n}}; \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_0. \end{cases} \quad (2.14)$$

де всі ці геометричні параметри позначені на рисунку 2.4.

Спробуємо спростити вираз (2.12), привівши його до виду:

$$\rho_{yn} = r_b \frac{\beta_0}{2 \sin(\beta_0 / 2)} \cdot \sqrt[n]{\cos(\alpha - \psi_c)}, \quad (2.15)$$

Тобто проведемо апроксимацію рівняння (2.12) у вигляді рівняння (2.15) за допомогою методу найменших квадратів, підібравши найбільш прийнятне значення кореня n у рівнянні (2.15).

Програма для відповідних розрахунків приведена у вигляді Лістингу 2.1.

Лістинг 2.1 – Програма для підбору значення кореня n

```

1- clc, clear
2 % Розрахунок оптимального значення кореня n
3- b0=110*pi/180;psi=0*pi/180;
4- al=-20*pi/180:1*pi/180:25*pi/180;
5- al1=b0/2-al+psi;
6- al2=b0/2+al-psi;
7- q=(sin(al1/2)./sin(al2/2)).^2;
8- kr=(al1+q.*al2)./(sin(al1)+q.*sin(al2));
9- i=0;
10- for n1=2:0.01:4

```

```

11- i=i+1;
12- n(i)=n1;
13- kr1=b0.*(cos(al-psi)).^(1/n(i))/(2*sin(b0/2));
14- nk=(kr-kr1).^2;
15- sv(i)=sum(nk);
16- pg=(kr-kr1)./kr*100;
17- pgm(i)=max(abs(pg));
18- end
19 %plot(n,pgm),grid
20 %xlabel('Показник ступеня n');
21 %ylabel('Похибка [(kr-kr1)/kr]*100%;');
22- plot(n,sv),grid
23- xlabel('Показник ступеня n');
24- ylabel('sv - Сума квадратів різниць між kr и kr1');

```

Результати розрахунків наведені на рисунку 2.2 та 2.3.

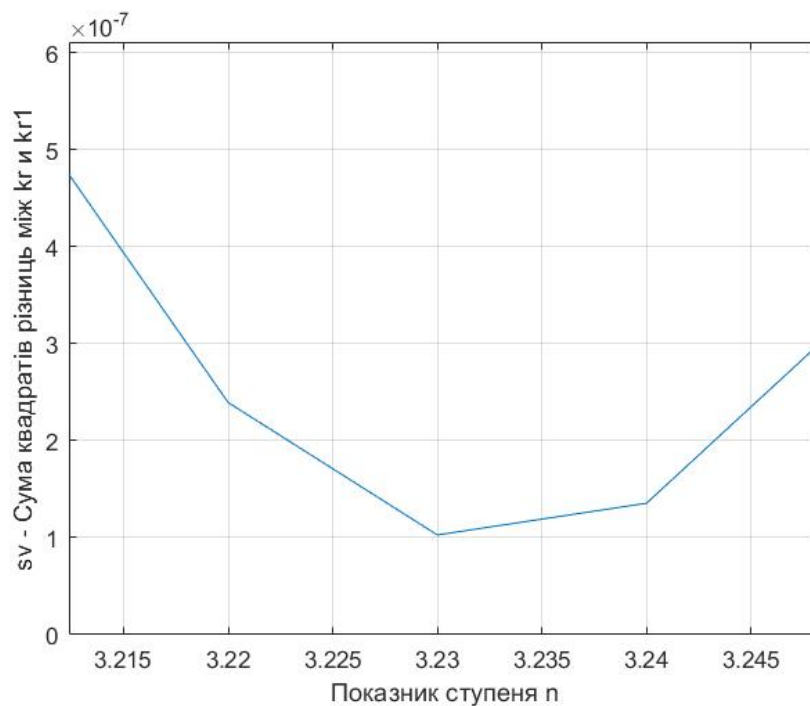


Рис. 2.2. Розрахунок оптимального показника кореня n за методом найменших квадратів

Прокоментуємо програму, яку представлено в Лістингу 2.1:

- рядок 3 - введення констант $b_0 = \beta$; $\psi = \Psi_c$;
- рядки 4 ... 7 – розрахунок $al = \alpha$, $al_1 = \alpha_1$, $al_2 = \alpha_2$, $q = q_2/q_1$ – дивись рівняння (2.12);

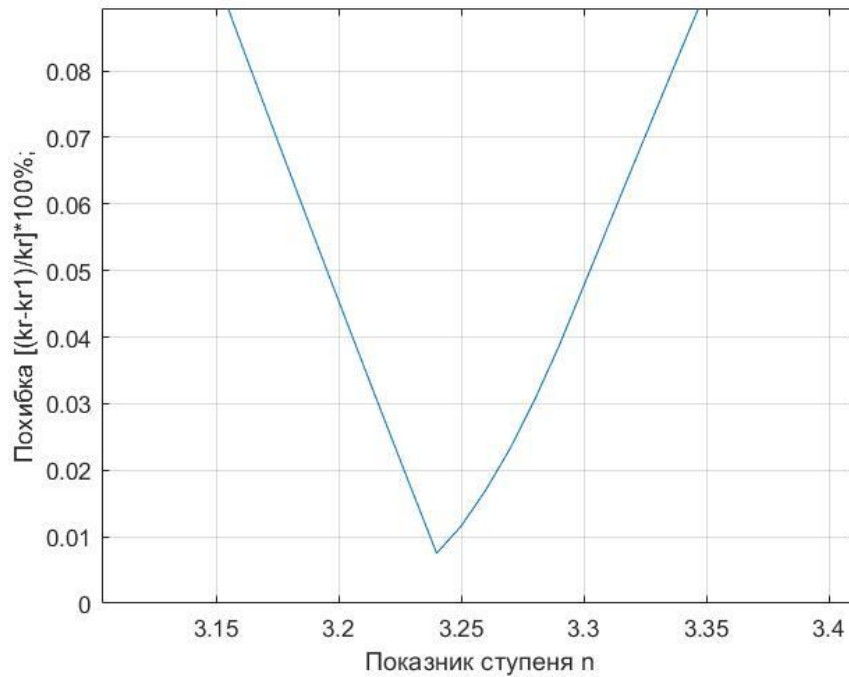


Рис. 2.3. Розрахунок абсолютної похибки при обчисленнях по рівнянню (2.15)

- рядок 8 - розрахунок по рівнянню (2.12) наведеного умовного радіуса тертя $k_r = \rho_o / r_b$;

- рядки 9 ... 18 - організація циклу типу *for ... end*. Цикл здійснюється за показником ступеня $n_1 = n$ в межах від 2 до 4 з кроком 0.01;

- рядок 13 – розрахунок $k_{r1} = \rho_{o1} / r_b$, відповідно до рівняння (2.15);

- рядки 14, 15 - розрахунок суми квадратів різниць між k_r та k_{r1} через команду *sum(nk)*;

- рядки 16, 17 - розрахунок абсолютної похибки у %%, яку дає рівняння (2.15) по відношенню до точного рішення за рівнянням (2.12);

- рядок 17: команда *abs(pg)* - повертає абсолютну величину для кожного числового елемента вектора *pg*;

- команда *max(abs(pg))* - повертає найбільший елемент вектора *abs(pg)*;

- рядок 18 - команда *end* - позначає кінець циклу;

- рядки 19 ... 24 - організують висновок на друк результатів розрахунку.

З рисунку 2.2 видно, що найбільш оптимальним значенням кореня n є значення 3.23.

З рисунку 2.3 видно, що при $n = 3.23$ похибка в розрахунках становить менше 0.02%, що цілком прийнятно для інженерних розрахунків.

Далі розглянемо схему навантаження притискної плаваючої колодки, представлені на рисунку 2.4.

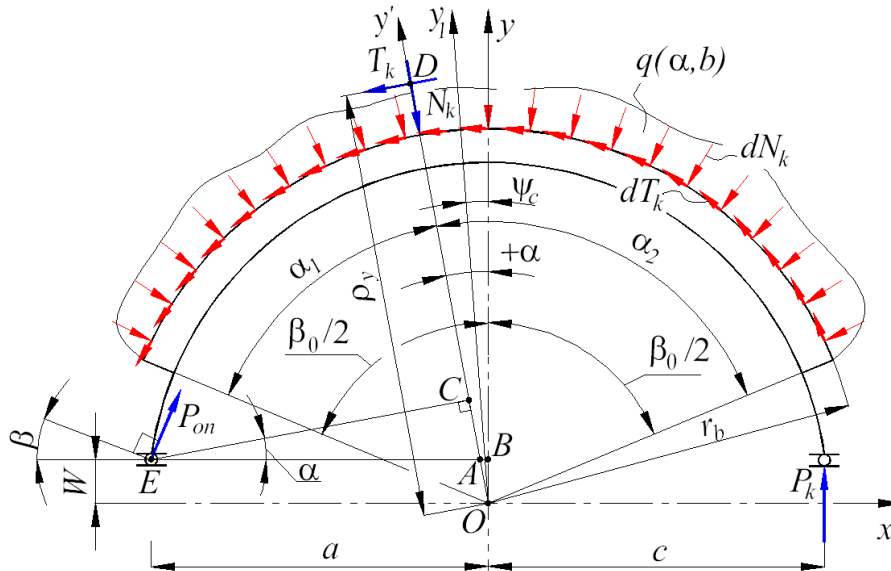


Рис. 2.4. Модель притискної плаваючої колодки з двома ступенями вільності: $q(\alpha)$ - закон розподілу контактних тисків на гальмівну накладку (в загальному випадку цей закон є випадковим); y_1 - бісектриса кута охоплення гальмівної накладки; β_0 - кут охоплення гальмівної накладки; P_k - приводне зусилля з боку механізму розтискання; $\psi_{\bar{n}}$ - кут зміщення бісектриси кута охоплення гальмівної накладки щодо вісі y ; α - кут зміщення N_k (осі y') відносно вісі y

2.3. Застосування рівнянь статичної рівноваги для отримання необхідної математичної моделі

Ця колодка є самоустановлювальною і тому кут α (див. рис. 2.4) тут є функцією її трибо-геометричних параметрів.

Визначимо, чому дорівнює цей кут. З умови рівноваги цієї колодки можна записати три рівняння:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= -N_k \cdot \cos \alpha - \mu \cdot N_k \cdot \sin \alpha + P_{on} \cdot \cos \beta + P_k = 0; \\ \sum F_x &= +N_k \cdot \sin \alpha - \mu \cdot N_k \cdot \cos \alpha + P_{on} \cdot \sin \beta = 0; \\ \sum M_E &= P_k(a + c) + \mu \cdot N_k \cdot CD - N_k \cdot EC = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Розділимо перше рівняння на $\cos\beta$, а друге на $\sin\beta$. З другого рівняння віднімемо перше, помноживши результат на $\sin\beta$ отримаємо:

$$N_k \cdot \sin\alpha - \mu \cdot N_k \cdot \cos\alpha + N_k \cdot \cos\alpha \cdot \tan\beta + \\ + \mu \cdot N_k \cdot \sin\alpha \cdot \tan\beta - P_k \cdot \tan\beta = 0,$$

звідки:

$$N_k = \frac{P_k \cdot \tan\beta}{\sin\alpha \cdot (1 + \mu \cdot \tan\beta) + \cos\alpha \cdot (\tan\beta - \mu)} \quad (2.17)$$

З геометричних співвідношень (див. рис. 2.4) очевидні рівності:

$$CD = \rho_y - OC; \quad OC = OA + AC; \quad AC = EA \cdot \sin\alpha; \\ OA = \frac{W}{\cos\alpha}; \quad EA = a - AB; \quad AB = W \cdot \tan\alpha; \quad EC = EA \cdot \cos\alpha. \quad (2.18)$$

Підставляючи рівняння (2.18) в третє рівняння (2.16) і після відповідних алгебраїчних перетворень отримаємо:

$$N_k = \frac{P_k \cdot (a + c)}{\cos\alpha \cdot (a + \mu \cdot W) - \sin\alpha(W - \mu \cdot a) - \mu \cdot \rho_y}, \quad (2.19)$$

паралельно відзначимо, що якщо при μ поміняти знак на протилежний, отримаємо значення N_k для відтискної колодки.

Прирівнявши праві частини рівняння (2.17) і рівняння (2.19), після нескладних перетворень отримаємо рівняння:

$$\sin\alpha[c(1 + \mu \cdot \tan\beta) + a + W \cdot \tan\beta] = \\ = \cos\alpha[\mu(W \cdot \tan\beta + a + c) - c \cdot \tan\beta] - \mu \cdot \rho_y \cdot \tan\beta, \quad (2.20)$$

В рівнянні (2.20) залишилася невідомою тільки величина α . Однак рівняння (2.20) є нелінійним рівнянням і його можна вирішувати наступними способами:

- графічно;
- чисельно, з використанням команд на знаходження \min або нульового значення вектора;
- наближено за допомогою методів апроксимації;
- методом ітерацій;
- отримати аналітичне, близьке до точного рішення.

2.4. Способи рішення рівнянь

2.4.1. Графічний спосіб розв'язання рівняння (2.20)

Перепишемо рівняння (2.20) у вигляді системи рівнянь:

$$Y_1 = \sin \alpha [c(1 + \mu \cdot \tan \beta) + a + W \cdot \tan \beta], \quad (2.21)$$

$$Y_2 = \cos \alpha [\mu(W \cdot \tan \beta + a + c) - c \cdot \tan \beta] - \mu \cdot \rho_y \cdot \tan \beta. \quad (2.22)$$

Побудуємо графіки цих функцій в одних координатах. Точка їх перетину і буде рішенням рівняння (2.20).

Програма для таких обчислень та побудов приведена у вигляді Лістингу 2.2

Лістинг 2.2 – Програма для побудови графіків за відповідним рівнянням (2.21) та (2.22)

```

1  % Графічне рішення рівняння
2-  clc, clear
3-  b0=110*pi/180;b=12*pi/180;psi=0*pi/180;mu=0.4;
4-  al=0*pi/180:0.1*pi/180:20*pi/180;
5-  a=0.15;c=0.15;w=0.07;rb=0.2;
6-  Y1=sin(al).*(c*(1+mu*tan(b))+a+w*tan(b));
7-  ru=rb*b0*(cos(al-psi)).^(1/3.23)/(2*sin(b0/2));
8-  Y2=cos(al).*(mu*(w*tan(b)+a+c)-c*tan(b))-mu*ru*tan(b);
9-  plot(al*180/pi,Y1,'r',al*180/pi,Y2,'b'),grid
10- title('Графічне рішення рівняння');
11- xlabel('Кут \alpha, град');
12- ylabel('Y1, Y2');
```

Результати розрахунків наведені на рисунку 2.5.

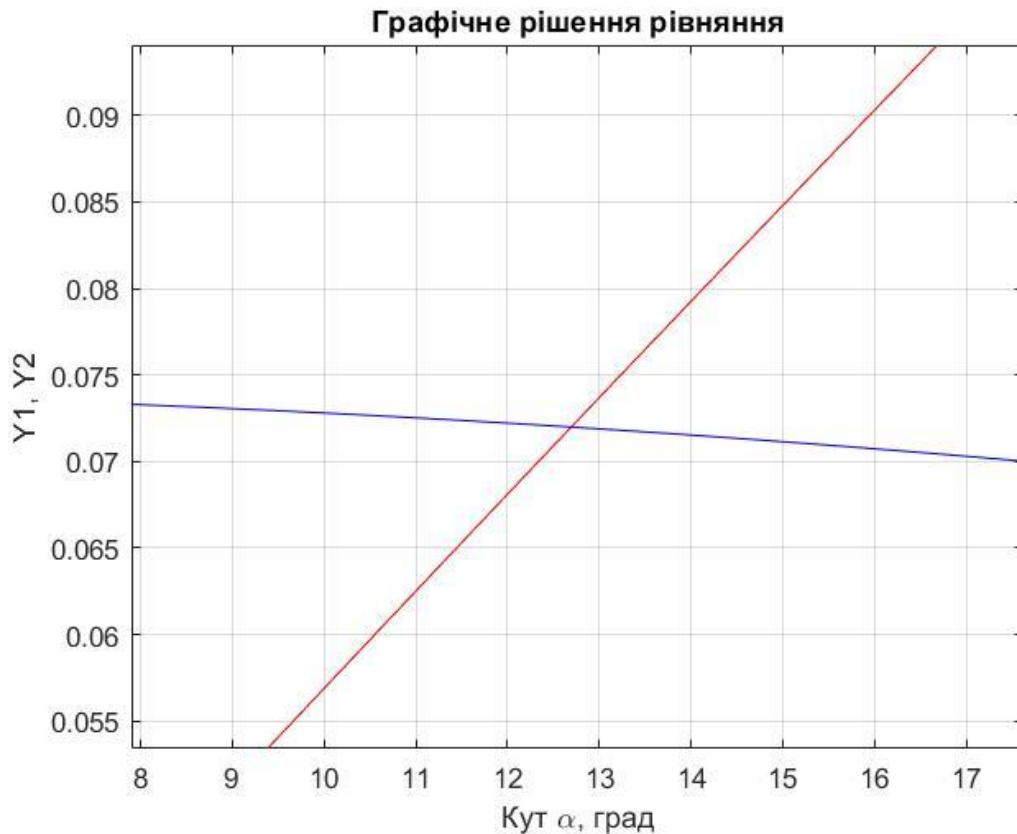


Рис. 2.5. Графічне рішення рівняння

Як бачимо з рисунку 2.5 при прийнятих трибо-геометричних параметрах колодки, рішенням є $\alpha = 12.69^\circ$.

2.4.2. Рішення рівняння (2.20) з використанням команди на знаходження нульового значення функції

Перепишемо рівняння (2.20) у вигляді:

$$\begin{aligned} & \sin \alpha [c(1 + \mu \cdot \tan \beta) + a + W \cdot \tan \beta] - \\ & - \cos \alpha [\mu(W \cdot \tan \beta + a + c) - c \cdot \tan \beta] + \mu \cdot \rho_y \cdot \tan \beta = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Тепер це рівняння можна чисельно вирішувати з використанням команди:

`fzero(@fun,[x1, x2])` – повертає значення x , при якому досягається нуль функції fun із завданням інтервалу пошуку за допомогою вектора $x = [x_1, x_2]$, такого, що знак $fun(x(1))$ відрізняється від знака $fun(x(2))$. Якщо це не так, видається повідомлення про помилку.

Приклад програми для вирішення рівняння (2.23) наведено у вигляді Лістингу 2.3.

Лістинг 2.3 – Програма для побудови графіків за рівнянням (2.23)

```
1 % Рішення рівняння з використанням команди fzero
2- clc, clear
3- al1=(fzero(@fun1,[0*pi/180 20*pi/180]))*180/pi
```

В кінці рядка 3 не поставлена ";", що дає можливість в командному вікні виводити результати розрахунку. Результат розрахунку $\alpha = 12.69^\circ$, що повністю збігається з розрахунком, який наведено в Лістингу 2.2.

При виконанні рядка 3 використовується функція *fun1*. Її *m*-файл, структура якого наведена в Лістингу 2.4, повинен бути розташований в тій же папці, що і файл програми, яка наведена в Лістингу 2.3.

Лістинг 2.4 – Програма для знаходження коренів рівняння (2.23)

```
1 % Функція для знаходження коренів рівняння з використанням
команди ...
2 fzero
3- function f=fun1(al)
4- b0=110*pi/180;b=12*pi/180;psi=0*pi/180;mu=0.4;
5- a=0.15;c=0.15;w=0.07;rb=0.2;
6- f=sin(al)*(c*(1+mu*tan(b))+a+w*tan(b))-cos(al)*(mu*(w*tan(b)+a+c)-...
7- -c*tan(b))+mu*rb*b0*(cos(al-psi))^(1/3.23)/(2*sin(b0/2))*tan(b);
```

У рядку 6 програми, наведеної у Лістингу 2.4, застосована команда «...», яка дозволяє продовжити текст поточного рядка в наступному рядку.

2.4.3. Рішення рівняння (2.20) з використанням команди на знаходження мінімального значення функції

Перепишемо рівняння (2.20) у вигляді:

$$\begin{aligned}
 & (\sin \alpha [c(1 + \mu \cdot \tan \beta) + a + W \cdot \tan \beta] - \\
 & - \cos \alpha [\mu(W \cdot \tan \beta + a + c) - c \cdot \tan \beta] + \mu \cdot \rho_y \cdot \tan \beta)^2 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

В такому випадку, це рівняння можна чисельно вирішувати з використанням команди:

$fminbnd(@fun, x_1, x_2)$ – повертає значення x , яке є локальним мінімумом функції $fun(x)$ на інтервалі $x_1 < x < x_2$. Приклад програми для вирішення рівняння (2.24) наведено у Лістингу 2.5.

Лістинг 2.5 – Програма для побудови графіку за рівнянням (2.24)

```

1 % Рішення рівняння з використанням команди fminbnd
2- clc, clear
3- b0=110*pi/180;b=12*pi/180;psi=0*pi/180;mu=0.4;
4- a=0.15;c=0.15;w=0.07;rb=0.2;
5- i=0;
6- for mu=0.25:0.01:0.45
7-   i=i+1;
8-   mu1(i)=mu;
9- fun2=@(al)(sin(al)*(c*(1+mu*tan(b))+a+w*tan(b))-cos(al)*(mu*(w*tan(b)+...
10- a+c)-c*tan(b))+mu*rb*b0*(cos(al-psi))^(1/3.23)/(2*sin(b0/2))*tan(b))^2;
11- al1(i)=(fminbnd(fun2,0,0.5))*180/pi;
12- end
13- plot(mu1,al1),grid
14- title('Залежність \alpha=f(\mu)');
15- xlabel('\mu');
16- ylabel('\alpha, град');
```

На відміну від попереднього випадку (див. Лістинг 2.3), тут функція $fun2$ задається безпосередньо в програмі, що дає можливість легко організувати обчислення не просто конкретного значення α , а й вже і як в даному випадку $\alpha = f(\mu)$.

Результати розрахунків програми наведеної у Лістингу 2.5 представлені на рисунку 2.6.

З рисунку 2.6 видно, що при $\mu = 0,4$, значення $\alpha = 12.69^\circ$, що повністю відповідає попереднім розрахункам у програмах, що представлені у Лістингу 2.2 та Лістингу 2.3.

Аналогічний результат може бути отриманий, якщо в рядку 9 ... 11 програми, що представлена у Лістингу 2.5 замість квадрата функції $fun2=@(al)(f(al))^2$ в правій частині використовувати команду abs , а саме $fun2=@(al)abs(f(al))$.

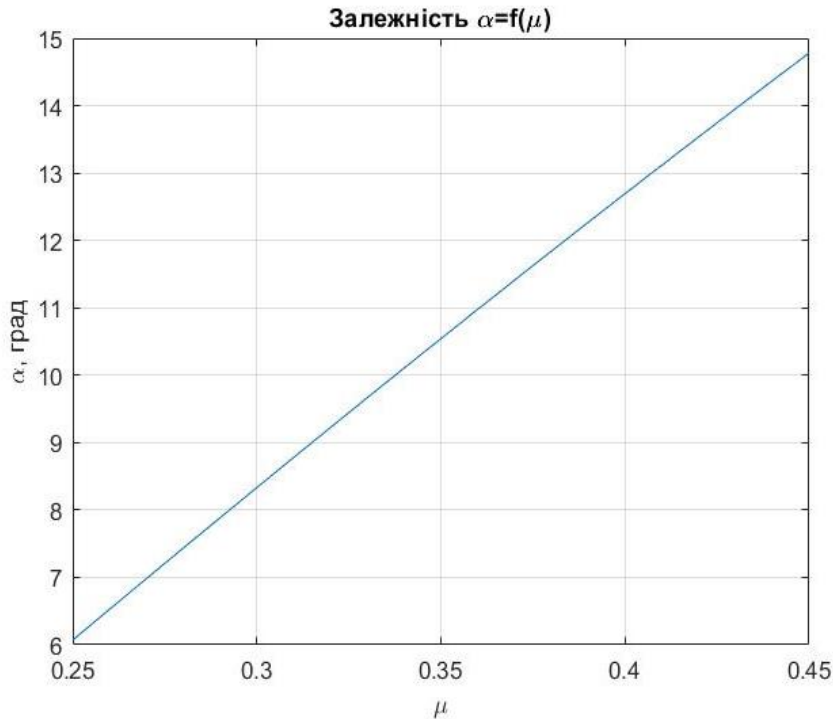


Рис. 2.6. Результати розрахунків $\alpha = f(\mu)$, із застосуванням команди `fminbnd`

2.4.4. Спрощення математичної моделі за допомогою методу апроксимації

Спробуємо спростити математичну модель, що описано рівнянням (2.20), замінивши її на наближену, але більш просту. З аналізу рівняння (2.20) можна зробити два висновки:

- при $\tan \beta = 0$, $\tan \alpha = \mu$;
- при збільшенні $\tan \beta$ кут α зменшується.

Тому спробуємо апроксимувати рішення нелінійного рівняння (2.20) виразом:

$$\tan \alpha = \frac{K_2(K_1 \cdot \mu - \tan \beta)}{1 + \mu \cdot \tan \beta} \quad (2.25)$$

де K_1 , K_2 – коефіцієнти, які будемо підбирати за допомогою методу найменших квадратів.

В якості початкового рішення, за яким буде проходити апроксимація, прийемо рішення з використанням команди `fminbnd` (див. програму у Лістингу 2.5).

Програма з оптимізації коефіцієнта K_1 наведена у Лістингу 2.6.

Лістинг 2.6 – Програма з оптимізації коефіцієнта K_1

```
1 % Рішення рівняння з використанням апроксимації
2- clc, clear
3- b0=110*pi/180;b=10*pi/180;psi=15*pi/180;
4- a=0.15;c=0.15;w=0.07;rb=0.2;
5- j=0;
6- for k1=0.5:0.01:1.7;
7-     j=j+1;
8-     k1(j)=k1;
9-     i=0;
10- for mu=0.25:0.01:0.45
11-     i=i+1;
12-     mu1(i)=mu;
13-     fun2=@(al)(sin(al)*(c*(1+mu1(i)*tan(b))+a+w*...
14-     tan(b))-cos(al)*(mu1(i)*(w*tan(b)+a+c)-c*tan(b))+...
15-     mu1(i)*rb*b0*(cos(al-psi))^(1/3.23)/(2*sin(b0/2))*tan(b))^2;
16-     al1(i)=(fminbnd(fun2,0,0.5))*180/pi;
17-     alt(i)=(atan(0.58*(k1(j)*mu1(i)-tan(b))/(1+mu1(i)*tan(b))))*180/pi;
18-     nk(i)=(al1(i)-alt(i))^2;
19- end
20- sk(j)=sum(nk);
21- end
22- plot(k1,sk),grid
23- title('Залежність Сума квадратів різниць=f(k1)');
24- xlabel('k1');
25- ylabel('Сума квадратів різниць');
```

Програма з оптимізації коефіцієнтом K_2 виглядає аналогічно.

Розрахунки за Лістингом 2.6 показали, що для найбільш характерних трибо-геометричних співвідношень плаваючих колодок, в барабанних гальмах вантажних автомобілів, найбільш доцільно прийняти: $K_1 = 1,56$; $K_2 = 0,58$. При цьому похибка в розрахунках не перевищує 5 ... 7 %. Для інженерних приблизних розрахунків це може бути цілком прийнятно.

2.4.5. Чисельне рішення рівняння (2.20) методом ітерацій

Метод ітерацій – це чисельний метод з послідовним наближенням до вирішення, що задається у вигляді максимально допустимої похибки.

Перетворимо рівняння (2.20) до виду:

$$\tan \alpha = \frac{[\mu(W \cdot \tan \beta + a + c) - c \cdot \tan \beta] - \frac{\mu \cdot \rho_y \cdot \tan \beta}{\cos \alpha}}{c(1 + \mu \cdot \tan \beta) + a + W \cdot \tan \beta}. \quad (2.26)$$

Покрокове наближення до вирішення полягатиме в наступному:

- на першому кроці вважаємо, що α відповідає значенню (2.25), підставляємо його в праву частину рівняння (2.26) і визначаємо нове значення α ;

- на другому етапі в праву частину рівняння (2.26) підставляємо вже нове значення α та знову розраховуємо α за рівнянням (2.26);

- на наступних кроках повторюємо попередню операцію;

- на кожному кроці робимо перевірку:

$$\frac{|\alpha_i - \alpha_{i-1}|}{|\alpha_i|} \cdot 100\% \leq n_p; \quad (2.27)$$

- обчислення припиняються, як тільки виконується умова наведена в нерівності (2.27).

Для організації циклів ітерацій дуже зручно використовувати цикл типу *while*, який виконується до тих пір, поки виконується умова:

```
while
    Інструкції
end
```

Програма обчислень за рівнянням (2.26) наведена у Лістингу 2.7.

Лістинг 2.7 – Програма для рішення рівняння (2.26) методом ітерацій

```
1 % Рішення рівняння методом ітерацій
2- clc, clear
3- b0=110*pi/180;b=12*pi/180;psi=0*pi/180;mu=0.4;
4- a=0.15;c=0.15;w=0.07;rb=0.2;npr=0.1;
5- i=1;
6- pog(1)=100;
7- al(1)=atan(0.58*(1.56*mu-tan(b))/(1+mu*tan(b)));
8- while pog(i)>npr
9-     i=i+1;
10- ch1=mu*(w*tan(b)+a+c)-c*tan(b);
```

```

11- ch2=(mu*rb*b0*(cos(al(i-1)-psi))^(1/3.23)/(2*...
12- sin(b0/2))*tan(b))/cos(al(i-1));
13- zn=c*(1+mu*tan(b))+a+w*tan(b);
14- al(i)=atan((ch1-ch2)/zn);
15- pog(i)=abs(al(i)-al(i-1))/abs(al(i))*100;
16- end
17- al(i)*180/pi

```

Розрахунок за програмою у Лістингу 2.7 показав: $\alpha = 12.69^\circ$, що відповідає розрахункам, що представлені у Лістингу 2.2, Лістингу 2.3 та Лістингу 2.5.

2.4.6. Спрощення початкового рівняння і отримання аналітичного виразу для розрахунків

Рівняння (2.23) є суттєво нелінійним, через залежність $\rho_y = \rho_{yn} = f(\alpha)$, див. рівняння (2.15).

Приймемо, що в рівняння (2.23) ρ_y відповідає (2.11).

Тоді рівняння (2.23) можна привести до виду:

$$A_1 \sin \alpha + D_1 = B_1 \cos \alpha. \quad (2.28)$$

Зведемо ліву та праву частину в квадрат і з огляду на те, що $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, одержимо:

$$\alpha = \arcsin \left[\frac{-2A_1 D_1 + \sqrt{4A_1^2 D_1^2 - 4(A_1^2 + B_1^2)(D_1^2 - B_1^2)}}{2(A_1^2 + B_1^2)} \right]. \quad (2.29)$$

Порівняння розрахунків за рівнянням (2.29) та рівнянням (2.23) дає похибку не більше, ніж $\Delta = 0,2\%$. Що цілком прийнятно для інженерних розрахунків.

Кожен із запропонованих вище методів вирішення нелінійних рівнянь має свої переваги і недоліки. Який з них безпосередньо застосувати залежить від:

- характеру поставленого завдання;
- необхідної точності рішення;
- переваг розраховувача, тощо.

Але існує ще один клас рівнянь, які дуже широко зустрічаються в інженерних розрахунках. Це так звані ступеневі многочлени або поліноми про які докладніше наведено в наступному розділі.

2.5. Робота з поліномами

Поліноми (часто їх називають також ступеневими многочленами) – широко відомий об'єкт математичних обчислень і обробки даних. Зазвичай поліном записується у вигляді:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \quad (2.30)$$

Як правило загального аналітичного рішення для поліномів вище 3-го та 4-го ступеня отримати не вдається. Тому, при роботі з ними дуже важливо вміти користуватися відповідними чисельними методами.

Розглянемо наступну задачу.

Для закону зміни швидкостей автомобіля, заданого у табличній формі (Табл. 2.1) необхідно визначити:

- корені багаточлена, тобто час, при якому швидкість транспортного засобу буде дорівнювати 0;
- відстань, на яку від'їхав автомобіль від початкової точки руху;
- загальний шлях, який проїхав автомобіль від початкової точки.

Таблиця 2.1 - Таблиця даних швидкостей автомобіля

<i>t</i> , с	0	5	15	35	60	65	75	85
<i>V</i> , м/с	0	12	5	17	-3	-2	2	11

Для апроксимації цих даних скористаємося командами:

- *polyfit(x,y,n)* - повертає вектор коефіцієнтів полінома $p(x)$ ступеня n , який з найменшою похибкою апроксимує функцію $y(x)$. Результатом є вектор-рядок довжиною $n+1$, що містить коефіцієнти полінома в порядку зменшення ступеня при x . Якщо кількість x -ів та y -ів дорівнюють по $n+1$, то реалізується звичайна поліноміальна апроксимація, при якій графік полінома точно проходить через вузлові точки з координатами (x,y) , що зберігаються у векторах x та y . В іншому випадку точного збігу графіка з вузловими точками не спостерігається;

- $polyval(p,x)$ - повертає значення полінома p , обчислені в точках, заданих в масиві x . Поліном p – вектор, елементи якого є коефіцієнтами полінома у порядку зменшення ступенів при x , а x може бути матрицею або вектором.

Програма для побудови такого полінома приведена у вигляді Лістингу 2.8.

Лістинг 2.8 – Програма для побудови полінома

```
1 % Побудова апроксимуючого полінома
2- clear, clc
3- format long e
4- t=[0 5 15 35 60 65 75 85];
5- v=[0 12 5 17 -3 -2 2 11];
6- p=polyfit(t,v,7)
7- t1=0:85;
8- vt=polyval(p,t1);
9- plot(t,v,'r*',t1,vt,'b-'),grid
10- title('Побудова апроксимуючого полінома');
11- xlabel('t, сек');
12- ylabel('v, м/сек');
```

Результати розрахунків за програмою, що наведена у Лістингу 2.8 наведені на рисунку 2.7. Коефіцієнти полінома наведені на рисунку 2.8.

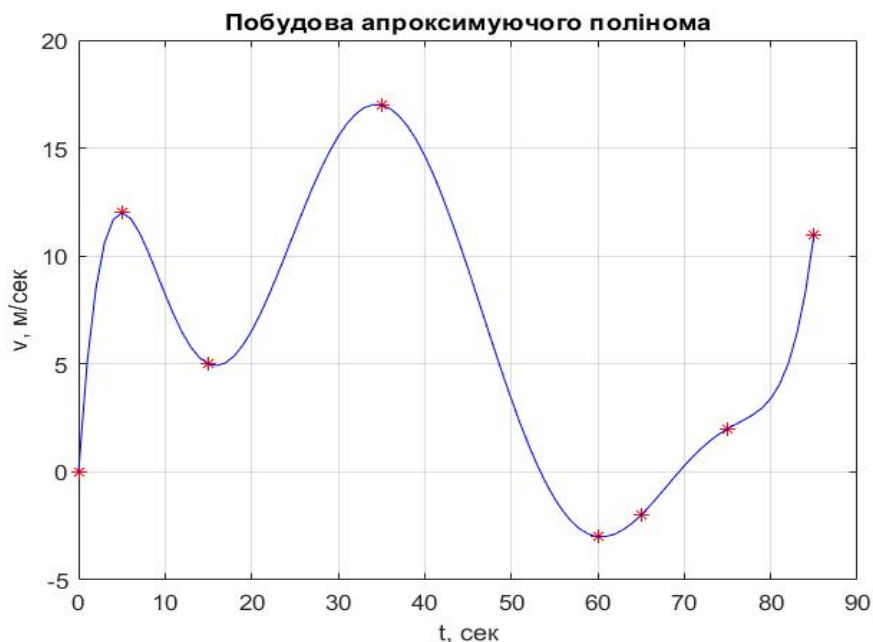


Рис. 2.7. Побудова апроксимуючого полінома

Columns 1 through 4

8.719290876152477e-10 -2.744910028242731e-07 3.408476588769499e-05
-2.101475073037702e-03

Columns 5 through 8

6.640010262381386e-02 -1.002346587092282e+00 5.99395593580067e+00
3.741473909753655e-11

Рис. 2.8. Коефіцієнти полінома 7-го ступеню

Програма для визначення коренів полінома з використанням команди *fzero* представлена у вигляді Лістингу 2.9.

Лістинг 2.9 – Програма для визначення коренів полінома з використанням команди *fzero*

```
1 % Програма для обчислення коренів полінома
2- clear, clc
3- f=@(t) 1.26616e-09 *t.^7 -4.02461e-07*t.^6 +5.05384e-05*t.^5-...
4- 3.15379e-03*t.^4 +1.004528e-01*t.^3 -1.48748e+00*t.^2+...
5- 7.689e+00*t+0;
6- t0=fzero(f,[50,60])
```

У програмі, що представлена у Лістингу 2.9:

- в рядках 3 ... 5 - задається функція полінома;
- в рядку 6 в команді *fzero*, в квадратних дужках вказано діапазон, в якому шукається нульове значення функції. Діапазон визначається з графіка за програмою програми, що представлена у Лістингу 2.8 (див. рис. 2.7).

В результаті розрахунків отримуємо значення часів, при яких функція полінома дорівнює нулю:

- в діапазоні $t = 50 \dots 60$ с, $t_0 = 54,3$ с;
- в діапазоні $t = 60 \dots 70$ с, $t_0 = 59$ с.

Для визначення відстані та шляху, які проїхав автомобіль, необхідно проінтегрувати за часом розглянутий поліном.

У MatLAB чисельне інтегрування можна виконати:

- методом трапецій, командою:

$trapz(X,Y)$ – повертає інтеграл від функції Y по змінній X , використовуючи метод трапецій (межі інтегрування в цьому випадку задаються початковим і кінцевим елементами вектора X);

- методом квадратур (чисельним методом знаходження площі під графіком функції $f(x)$), за допомогою команди:

$quad(@fun,a,b)$ – повертає числове значення повного інтеграла від заданої функції $@fun$ на відрізку $[a,b]$.

Програма для необхідних обчислень наведена у Лістингу 2.10.

Лістинг 2.10 – Програма для обчислень методом трапецій

```
1 % Програма для обчислення інтеграла по поліному
2- clear, clc
3- t=0:85;
4 % Розрахунок відстані l на яке від'їхав автомобіль від
5 % початкової точки
6- v=1.26616e-09 *t.^7 -4.02461e-07*t.^6 +5.05384e-05*t.^5-...
7- 3.15379e-03*t.^4 +1.004528e-01*t.^3 -1.48748e+00*t.^2+...
8- 7.689e+00*t+0;
9- l=trapz(t,v)
10 % Розрахунок загального шляху lp, який проїхав автомобіль від...
11 % початкової точки
12- f=@(t) (1.26616e-09 *t.^7 -4.02461e-07*t.^6 +5.05384e-05*t.^5-...
13- 3.15379e-03*t.^4 +1.004528e-01*t.^3 -1.48748e+00*t.^2+...
14- 7.689e+00*t+0);
15- l1=quad(f,0,54.3);
16- l2=abs(quad(f,54.3,69));
17- l3=quad(f,69,85);
18- lp=l1+l2+l3
```

Розрахунки показали, що при заданих параметрах руху, відстань, на яку від'їхав автомобіль $l = 381,2\text{м}$, загальний шлях дорівнює $l_0 = 438,9\text{м}$.

Рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь

3.1. Метод (правило) Крамера

3.2. Метод послідовного виключення невідомих x_j (метод Гауса)

3.3. Рішення системи лінійних рівнянь в середовищі *MatLAB*

Рішення систем лінійних рівнянь (СЛР) відноситься до однієї з наймасовіших областей технічного додатка матричних методів.

Як відомо, звичайна СЛР має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (3.1)$$

Користуючись правилом множення матриць, система (3.1) може бути записана в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Матричну рівність (3.2) коротко записують так:

$$AX = B. \quad (3.3)$$

Тут $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{mn}$ – коефіцієнти, що утворюють матрицю A , які можуть мати дійсні або комплексні значення; x_1, x_2, \dots, x_n – невідомі, що утворюють вектор X та b_1, b_2, \dots, b_m – вільні члени (дійсні або комплексні), що утворюють вектор B .

В даний час розроблено велику кількість аналітичних методів для вирішення системи лінійних рівнянь (знаходження вектора значень x_1, x_2, \dots, x_n , які відповідають рівнянню (3.1)).

Розглянемо лише два з них:

- метод (правило) Крамера;
- метод послідовного виключення невідомих x_j із системи рівнянь (3.1) (метод Гаусса).

3.1. Метод (правило) Крамера

Якщо визначник системи рівнянь (3.1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad (3.4)$$

не дорівнює нулю, то система рівнянь (3.1) має єдине рішення:

$$X_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.5)$$

де Δ_k – визначник, що виходить з Δ при заміні елементів $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk}$, k -го стовпця відповідними вільними членами b_1, b_2, \dots, b_m .

Наприклад, для Δ_1 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{2n} \\ b_n & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (3.6)$$

У *MatLAB* визначник розраховується по команді:

`det(x)` – повертає визначник квадратної матриці.

3.2. Метод послідовного виключення невідомих x_j (метод Гаусса)

Визначимо з останнього рівняння (3.1) x_n :

$$x_n = \frac{b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn-1}x_{n-1})}{a_{mn}}, \quad (3.7)$$

та підставимо рівняння (3.7) в усі $(n-1)$ попередні рівняння.

Проробивши відповідні перетворення ми вже отримуємо не n , а $(n-1)$ рівнянь з $(n-1)$ невідомими, оскільки в них x_n вже виключено. Потім, з $(n-1)$ рівняння виразимо, наприклад, x_{n-1} , за аналогією з рівнянням (3.7), і підставимо його в усі $(n-2)$ попередні рівняння. Після відповідних перетворень отримаємо вже $(n-2)$ рівнянь з $(n-2)$ невідомими. Так послідовно ми прийдемо до одного рівняння з одним невідомим.

Після цього процес повторюється в зворотному порядку для знаходження другого невідомого і т.д. Таким чином, система лінійних рівнянь розкривається та всі невідомі визначаються. Одне з основних умов такого процесу - необхідно стежити за тим, щоб в знаменниках, на зразок рівняння (3.7), не допускалось ділення на нуль.

3.3. Рішення системи лінійних рівнянь в середовищі MatLAB

Якщо A - матриця розміром $m \times n$, а B – вектор-стовпець з m компонентами або матриця з декількома подібними стовпчиками, тоді рішенням рівняння (3.3) буде команда у *MatLAB*:

$$X = A \setminus B, \quad (3.8)$$

де \setminus – знак лівого ділення;

X – вектор значень знайдених невідомих.

Розглянемо кілька прикладів, використовуючи відомий принцип «від простого до складного».

3.3.1. Розподіл нормальних реакцій по вісям двовісного транспортного засобу, що гальмується

З теорії автомобіля відомо, що для всіх колісних транспортних засобів (КТЗ) в процесі їх проектування та серійного доведення, повинна бути забезпечена необхідна ефективність гальмування в різних умовах їх експлуатації. Для контролю оцінки цієї ефективності в міжнародній практиці розроблені стандарти і регламенти, в яких передбачена перевірка розташування кривих

реалізованого зчеплення осей КТЗ в заданих, так званих, «коридорах», що забезпечують безпеку дорожнього руху.

У нормативних документах, які оцінюють ефективність гальмування КТЗ, крива реалізованого зчеплення i -ої осі (f_i) колісного транспортного засобу визначається як:

$$f_i = \frac{T_i}{N_i}, \quad (3.9)$$

де T_i – гальмова сила на відповідній i -ій осі КТЗ,;

N_i – нормальна (вертикальна) реакція поверхні дорожнього покриття, яка визначається в процесі гальмування КТЗ, на i -й його вісі;

Сила T_i в таких розрахунках – величина, що задається розраховувачем і тому вона відома. А величину N_i необхідно визначати. Будемо знаходити її у вигляді:

$$N_i = P_i + \Delta N_i, \quad (3.10)$$

де ΔN_i – динамічна складова нормальної реакції поверхні дорожнього покриття на відповідну i -у вісь КТЗ, викликана появою сумарної гальмової сили, яка дорівнює силі інерції автомобіля (у Ньютонах);

P_i – нормальна реакція поверхні дорожнього покриття на відповідну i -у вісь КТЗ в статичних умовах, (у Ньютонах).

Основною перевагою такого уявлення величини N_i є можливість застосування так званого принципу суперпозиції сил, що діють на КТЗ. При цьому величина P_i в рівнянні (3.10) є довідковою та залежить від розподілу ваги автомобіля по його осям в статиці. Таким чином, при визначенні ΔN_i , математична і фізична модель КТЗ значно спрощуються, через відсутність в них величин P_i і ваги автомобіля G .

Для початку розглянемо найбільш просту модель двовісного автомобіля, представлену на рисунку 3.1.

Очевидно, що можна прийняти:

$$P_j = j \frac{G}{g} = z \cdot G = \sum_{i=1}^n T_i, \quad (3.11)$$

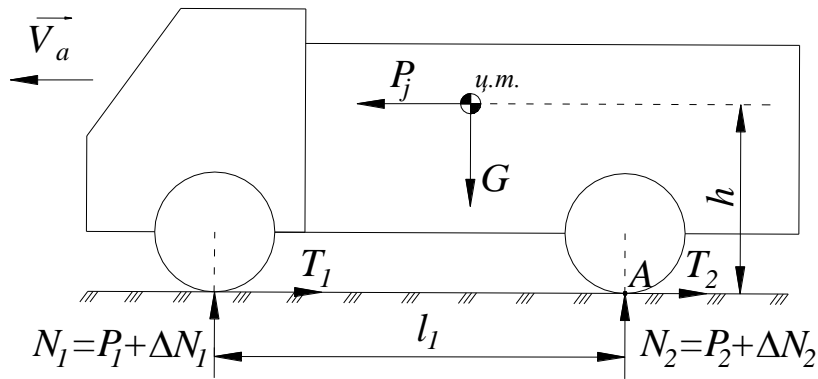


Рис. 3.1. Схема сил, що діють на гальмуючий двовісний автомобіль:
 h – висота центру мас; $P_j = T_1 + T_2$ – сила інерції

В рівнянні (3.11) позначено: j – уповільнення транспортного засобу при гальмуванні; $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння; n - кількість осей у транспортного засобу, в даному випадку $n = 2$; $z = j/g$ – коефіцієнт гальмування транспортного засобу.

З математики загальновідомо, що для того, щоб знайти n невідомих величин за рівнянням (3.10), необхідно отримати систему з n рівнянь та n невідомими.

Таким чином, для випадку, що зображено на рисунку 3.1 при $n = 2$ необхідно записати два рівняння.

Оскільки при гальмуванні КТЗ його вага не змінюється, то можна записати перше рівняння у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n \Delta N_i = 0. \quad (3.12)$$

З рівняння рівноваги суми моментів відносно точки А (рис. 3.1), отримуємо друге рівняння у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0, \quad (3.13)$$

де M_{iA} – моменти всіх сил щодо точки А, крім сили P_i та G .
 Звідки для двовісного автомобіля записуємо:

$$\Delta N_1 \cdot l_1 = z \cdot G \cdot h. \quad (3.14)$$

Таким чином, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \Delta N_1 + \Delta N_2 = 0; \\ \Delta N_1 \cdot l_1 + \Delta N_2 \cdot 0 = z \cdot G \cdot h. \end{cases} \quad (3.15)$$

До вирішення системи (3.15) можна застосувати метод Гаусса.
З другого рівняння (3.15):

$$\Delta N_1 = z \cdot G \cdot \frac{h}{l_1}. \quad (3.16)$$

Підставляємо рівняння (3.16) в перше рівняння (3.15) та після відповідних перетворень отримаємо:

$$\Delta N_2 = -z \cdot G \cdot \frac{h}{l_1}. \quad (3.17)$$

Зворотний знак у ΔN_2 вказує на те, що у цієї сили на рисунку 3.1 має бути змінено напрям на зворотний.

Тоді, з урахуванням (3.10):

$$N_1 = P_1 + z \cdot G \cdot \frac{h}{l_1} \quad \text{òà} \quad N_2 = P_1 - z \cdot G \cdot \frac{h}{l_1}. \quad (3.18)$$

Для порівняння, для цієї ж системи рівнянь (3.15) можна застосувати метод Крамера:

$$\Delta N_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad \text{та} \quad \Delta N_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (3.19)$$

де з рівняння (3.15) отримаємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ z \cdot G \cdot h & 0 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l_1 & z \cdot G \cdot h \end{vmatrix}; \quad \text{та} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ l_1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.20)$$

тому розкривая визначники рівняння (3.20) запишемо:

$$\Delta N_1 = \frac{G \cdot z \cdot h - 0}{l_1 - 0} = G \cdot z \cdot \frac{h}{l_1} \quad \text{та} \quad \Delta N_2 = \frac{0 - G \cdot z \cdot h}{l_1 - 0} = -G \cdot z \cdot \frac{h}{l_1}. \quad (3.21)$$

що повністю відповідає рівнянням (3.16) та (3.17) відповідно.

Тепер розглянемо, як це рішення буде виглядати в середовищі *MatLAB*.

З рівняння (3.15) запишемо:

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ l_1 & 0 \end{Bmatrix}; \quad X = \begin{Bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \end{Bmatrix} \quad \text{та} \quad B = \begin{Bmatrix} 0 \\ z \cdot G \cdot h \end{Bmatrix}. \quad (3.22)$$

Команда для знаходження невідомих ΔN_1 та ΔN_2 матиме вигляд рівняння (3.8).

3.3.2. Розподіл нормальних реакцій по вісям тривісного транспортного засобу, що гальмується

Розглянемо модель тривісного транспортного засобу, схема якого представлено на рисунку 3.2.

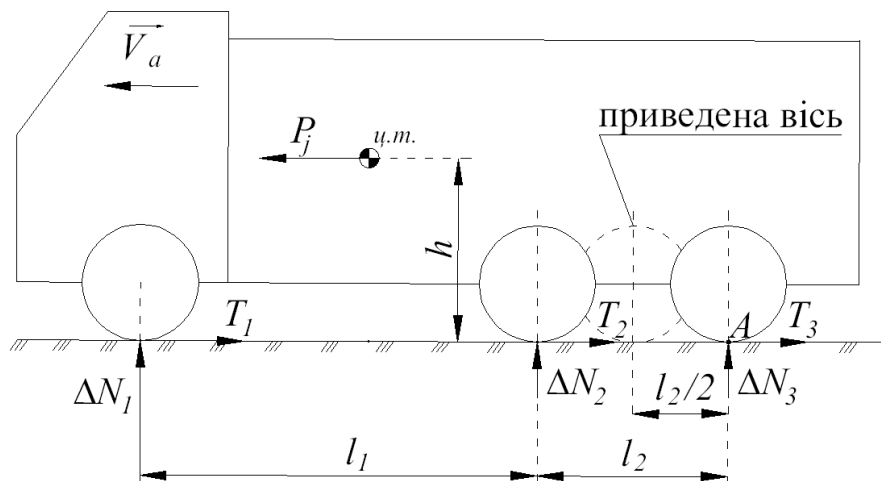


Рис. 3.2. Розрахункова схема сил, що діють на тривісний автомобіль, що гальмується (сили G , P_1 , P_2 - не показані)

Для схеми, що зображена на рисунку 3.2 необхідно скласти три рівняння. Перше рівняння отримаємо з рівняння (3.12):

$$\Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_3 = 0. \quad (3.23)$$

З рівняння рівноваги та рівняння суми моментів відносно точки A (див. рис. 3.2) отримаємо друге рівняння:

$$\sum M_{iA} = 0; \quad \Delta N_1 \cdot (l_1 + l_2) + \Delta N_2 \cdot l_2 - z \cdot G \cdot h = 0. \quad (3.24)$$

звідки отримуємо лінійне рівняння:

$$\Delta N_1 \cdot (l_1 + l_2) + \Delta N_2 \cdot l_2 = z \cdot G \cdot h. \quad (3.25)$$

де, як і раніше, G – вага автомобіля.

З науково-технічної літератури відомо, що якщо, наприклад, деякі дві осі j та $j+1$ пов'язані в балансирний візок, то для завантаженого автомобіля можна допустити рівність:

$$\Delta N_j - \Delta N_{j+1} = 0. \quad (3.26)$$

І таких рівнянь в системі, можна записати стільки, скільки балансирних візків є в конструкції КТЗ.

Паралельно відзначимо, що практика розрахунків показує, що при прийнятому допущенні запису рівняння (3.26) часто мости, пов'язані в балансирних візок, можна умовно замінити приведеною віссю з навантаженнями:

$$\begin{aligned} N_{j(j+1)} &= N_j + N_{j+1}; \\ P_{j(j+1)} &= P_j + P_{j+1}; \\ \Delta N_{j(j+1)} &= \Delta N_j + \Delta N_{j+1}; \\ T_{j(j+1)} &= T_j + T_{j+1}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ця наведена вісь розташована на відстані $0,5 \cdot l_j$ від відповідної j -тої осі (див. рис. 3.2), в даному випадку це $0,5 \cdot l_2$. І таким чином проблема зводиться до аналізу вже розглянутої моделі двовісного транспортного засобу. З подальшим розподілом навантажень по осях балансирного візка, відповідно до рівняння (3.26) та (3.27).

Але повернемося до нашої задачі. Якщо вважати, що на рисунку 3.2 2-а та 3-я осі об'єднані в балансирний візок, то в результаті, лінійне рівняння для випадку, що розглядається, має вигляд:

$$\begin{cases} \Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_3 = 0; \\ \Delta N_1 \cdot (l_1 + l_2) + \Delta N_2 \cdot l_2 = z \cdot G \cdot h; \\ \Delta N_2 - \Delta N_3 = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Для розв'язання системи рівнянь (3.27) застосуємо метод Гаусса. З третього рівняння (3.28) отримаємо:

$$\Delta N_3 = \Delta N_2. \quad (3.29)$$

З другого рівняння (3.28) запишемо:

$$\Delta N_2 = z \cdot G \cdot \frac{h}{l_2} - \Delta N_1 \cdot \frac{l_1 + l_2}{l_2}. \quad (3.30)$$

Підставимо рівняння (3.30) в перше рівняння (3.28) та після відповідних перетворень отримаємо:

$$\Delta N_1 = z \cdot G \cdot \frac{h}{l_1 + 0,5 \cdot l_2}. \quad (3.31)$$

Підставимо рівняння (3.31) в рівняння (3.30) та отримаємо:

$$\Delta N_2 = z \cdot G \cdot \frac{h}{2 \cdot (l_1 + 0,5 \cdot l_2)}. \quad (3.32)$$

З рівняння (3.29) запишемо:

$$\Delta N_3 = -z \cdot G \cdot \frac{h}{2 \cdot (l_1 + 0,5 \cdot l_2)}. \quad (3.33)$$

Негативний знак у ΔN_2 та ΔN_3 вказує на те, що ці сили діють в зворотному напрямку, по відношенню до показаних на рисунку 3.2.

Програма для розрахунків по рівнянням (3.31) – (3.33) та (3.10) представлена у Лістингу 3.1.

Для реалізації програми, що наведена у Лістингу 3.1 застосуємо метод Крамера, у відповідності до якого:

$$\Delta N_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \Delta N_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \text{та} \quad \Delta N_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (3.34)$$

де у відповідності до рівняння (3.28):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l_1 + l_2 & l_2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ z \cdot G \cdot h & l_2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ l_1 + l_2 & z \cdot G \cdot h & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ l_1 + l_2 & l_2 & z \cdot G \cdot h \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.35)$$

Лістинг 3.1 – Програма для обчислень рівнянням (3.31) – (3.33) та (3.10)

```

1  clc, clear
2  % Розрахунок навантажень по мостам трьохвісного
3  % автомобіля
4  % Навантажений автомобіль з співвідношенням
5  % deltaN2=deltaN3
6- l1=3.2;l2=1.4;h=1.55;P1=74500;P2=127400;P3=127400;
7- G=P1+P2+P3;
8- z=0:0.01:0.6;
9  % Розрахунок навантажень з використанням
10 % метода Гаусса
11- N1=P1+G*h*z/(l1+l2/2);
12- N2=P2-G*h*z/(2*(l1+l2/2));
13- N3=P3-G*h*z/(2*(l1+l2/2));
14- subplot(2,3,1),plot(z,N1,z,N2),grid
15- xlabel('z');
16- ylabel('N1, N2, N3, H');
17- legend('N1','N2, N3');
18- title('Навантажений, alfa=0, метод Гаусса')
19 % Розрахунок навантажень з використанням
20 % метода Крамера
21- i=0;
```

```

22- for z1=0:0.01:0.6;
23-   i=i+1;
24-   delta=[1 1 1;(l1+l2) l2 0;0 1 -1];
25-   delta1=[0 1 1;(G*z1*h) l2 0;0 1 -1];
26-   delta2=[1 0 1;l1+l2 G*z1*h 0;0 0 -1];
27-   del=det(delta);
28-   del1=det(delta1);
29-   del2=det(delta2);
30-   dN1(i)=del1/del;
31-   dN2(i)=del2/del;
32-
33- end
34- N1=P1+dN1;
35- N2=P2+dN2;
36- subplot(2,3,2),plot(z,N1,z,N2),grid
37- xlabel('z');
38- ylabel('N1, N2, N3, H');
39- legend('N1','N2, N3');
40- title(' Навантажений, alfa=0, метод Крамера')
41  % Розрахунок навантажень з використанням
42  % можливостей MATLAB
43- for z1=0:0.01:0.6;
44-   i=i+1;
45-   z2(i)=z1;
46-   A=[1 1 1; l1+l2 l2 0;0 1 -1];
47-   B=[0;G*z2(i)*h;0];
48-   dN=A\B;
49-   N1(i)=P1+dN(1);
50-   N2(i)=P2+dN(2);
51- end
52- subplot(2,3,3),plot(z2,N1,z2,N2),grid
53- xlabel('z');
54- ylabel('N1, N2, N3, H');
55- legend('N1','N2, N3');
56- title(' Навантажений, alfa=0, X=A\B')
57  % Споряджений автомобіль з співвідношенням
58  % deltaN2=deltaN3
59- l1=3.2;l2=1.4;h=1.05;P1=45000;P2=38300;P3=38300;
60- G=P1+P2+P3;
61- z=0:0.01:0.6;
62  % Розрахунок навантажень з використанням
63  % метода Гаусса
64- N1=P1+G*h*z/(l1+l2/2);
65- N2=P2-G*h*z/(2*(l1+l2/2));

```

```

66- N3=P3-G*h*z/(2*(l1+l2/2));
67- subplot(2,3,4),plot(z,N1,z,N2),grid
68- xlabel('z');
69- ylabel('N1, N2, N3, H');
70- legend('N1','N2,N3');
71- axis([0 0.6 2.5e4 6.5e4]);
72- title('Споряджений, alfa=0, метод Гаусса')
73 % Розрахунок навантажень з використанням
74 % можливостей MATLAB
75- for z1=0:0.01:0.6;
76-     i=i+1;
77-     z3(i)=z1;
78-     A=[1 1 1; l1+l2 l2 0;0 1 -1];
79-     B=[0;G*z3(i)*h;0];
80-     dN=A\B;
81-     N1(i)=P1+dN(1);
82-     N2(i)=P2+dN(2);
83- end
84- subplot(2,3,5),plot(z3,N1,z3,N2),grid
85- xlabel('z');
86- ylabel('N1, N2, N3, H');
87- legend('N1','N2,N3');
88- axis([0 0.6 2.5e4 6.5e4]);
89- title('Споряджений, alfa=0, X=A\B')
90 % Споряджений автомобіль з співвідношенням
91 % deltaN2-deltaN3=tan(alfa)*(T2+T3)
92- al=10*pi/180;
93- for z1=0:0.01:0.6;
94-     i=i+1;
95-     z4(i)=z1;
96-     A=[1 1 1; l1+l2 l2 0;0 1 -1];
97-     B=[0;G*z4(i)*h;0.5*G*z4(i)*tan(al)];
98-     dN=A\B;
99-     N1(i)=P1+dN(1);
100-     N2(i)=P2+dN(2);
101-     N3(i)=P3+dN(3);
102- end
103- G1=N1+N2+N3
104- subplot(2,3,6),plot(z4,N1,z4,N2,z4,N3),grid
105- xlabel('z');
106- ylabel('N1, N2, N3, H');
107- legend('N1','N2','N3');
108- axis([0 0.6 2.5e4 6.5e4]);
109- title('Споряджений, alfa=10, X=A\B')

```

В Лістингу 3.1 для обчислення рівняння (3.8) та (3.28) використано матриці у вигляді:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l_1 + l_2 & l_2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad X = \begin{vmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \Delta N_3 \end{vmatrix}; \quad \text{та} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ z \cdot G \cdot h \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (3.36)$$

Дослідження, проведені в Харківському національному автомобільно-дорожньому університеті, показали, що вираз рівняння (3.26) в більшості випадків є справедливим лише для завантаженого стану КТЗ.

У порожньому ж стані КТЗ вже необхідно враховувати кут нахилу $\alpha_{1,2}$ реактивних тяг у балансірному візку (рис. 3.3).

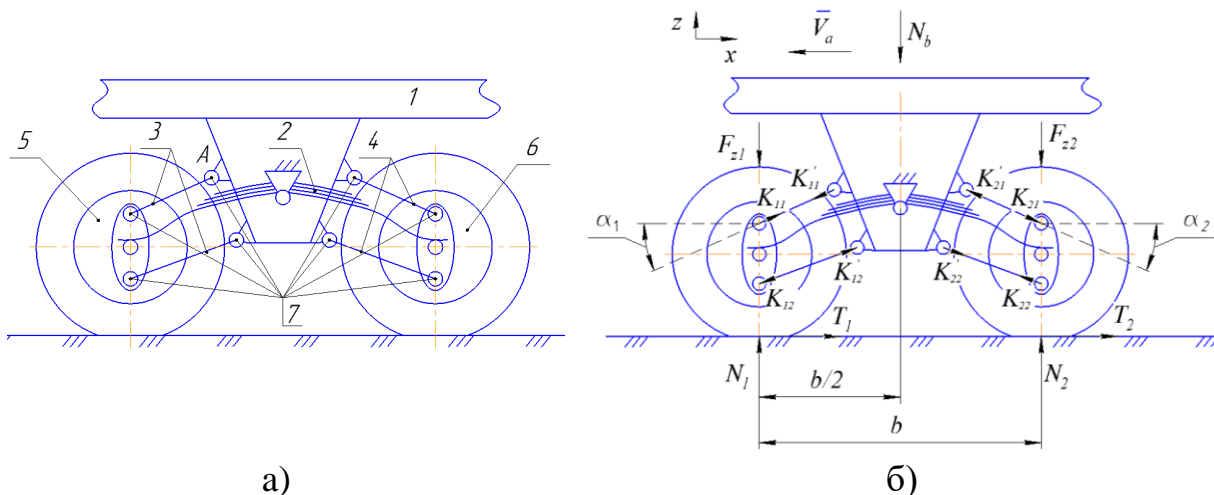


Рис. 3.3. Принципова схема (а) та схема сил (б), що діють у балансірному візку при гальмуванні багатовісного колісного транспортного засобу:

\bar{V}_a – вектор швидкості руху КТЗ; N_1 та N_2 – нормальні реакції на відповідних мостах балансірного візка; T_1 та T_2 – відповідні гальмові сили між шинами коліс моста балансірного візка та поверхнею дорожнього покриття; F_{z1} та F_{z2} – відповідні зусилля, що передаються на мости балансірного візка через ресору 2; N_b – сумарне вертикальне зусилля, що діє на балансірний візок з боку кузова КТЗ; α_1 та α_2 – відповідно кути нахилу передніх і задніх направляючих важелів балансірного візка, вважаємо, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$;
 K_{11} та K_{12} – реакції направляючих важелів 3 на передній міст візка;
 K_{21} та K_{22} – реакції направляючих важелів 4 на задній міст візка;
 K'_{11} , K'_{12} , K'_{21} та K'_{22} – реакції, що впливають на раму автомобіля з боку направляючих важелів; 1 – рама автомобіля; 2 – ресора; 3 та 4 – відповідно направляючі важелі переднього і заднього мостів візка; 5 та 6 – відповідно передній і задній мости візка; 7 – шарніри кріплення направляючих важелів

В цьому випадку для балансного візка вираз (3.26) змінюється на:

$$N_j - \Delta N_{j+1} = \tan \alpha (T_j + T_{j+1}) \quad (3.37)$$

І система приводиться до виду:

$$\begin{cases} \Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_3 = 0; \\ \Delta N_1 \cdot (l_1 + l_2) + \Delta N_2 \cdot l_2 = z \cdot G \cdot h; \\ \Delta N_2 - \Delta N_3 = \tan \alpha (T_2 + T_3), \end{cases} \quad (3.38)$$

де α – кут нахилу реактивних тяг (див. рис. 3.3);

T_2, T_3 – гальмові сили відповідно на 2-й та 3-й осях балансного візка.

Слід зауважити, що в такому вигляді (див. рівняння (3.38)) для застосування методу Гаусса, при знаходженні загального аналітичного рішення, буде потрібна вже велика кількість проміжних обчислень. Тому в подальшому можна рекомендувати при вирішенні системи лінійних рівнянь з трьома та більше невідомими віддавати перевагу чисельним методам, з яких матричне рішення рівняння (3.8) можна вважати кращим. Вектор-стовпець в рівнянні (3.36), в даному випадку, приймає вид:

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ z \cdot G \cdot h \\ \tan \alpha (T_2 + T_3) \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Приклад розрахунку по (3.38) в матричному вигляді (див. рівняння (3.8)) також наведено в програмі, що представлена у Лістингу 3.1.

Прокоментуємо окремі положення програми, що наведена у Лістингу 3.1:

- в рядках 27 ... 31 застосована команда:

det(x) – повертає визначник квадратної матриці;

- в рядках 71, 88, 108 застосована команда:

axis([xmin xmax ymin ymax]) – установка діапазонів координат по осях x та y для поточного двовимірного графіка;

- в рядках 48, 80, 98 застосована команда $X=A\backslash B$ – чисельне рішення рівняння у матрицях виду $AX=B$.

Як приклад розглянемо розподіл навантажень по мостам трьохвісного вантажного автомобіля з трібогеометричними параметрами, представленими в таблиці 3.1.

Таблиця - 3.1 - Вагогеометричні параметри 3-х вісного вантажного автомобіля

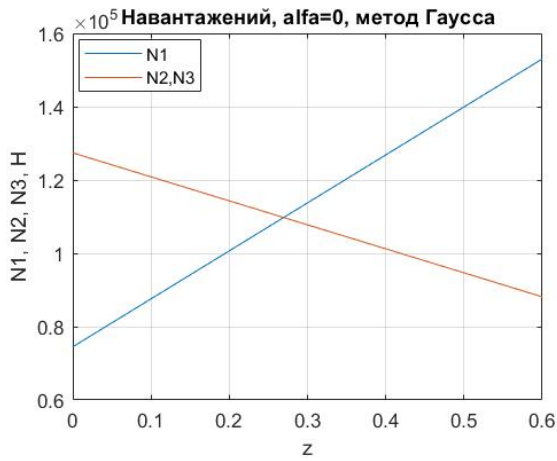
Параметр	Завантажений	Споряджений
Відстань між переднім та середнім мостами КТЗ (l_1), м	3,2	3,2
Відстань між середнім та заднім мостами (l_2), м	1,4	1,4
Висота розташування центру тяжіння (h), м	1,55	1,05
Кут нахилу реактивних тяг у балансірному візку (α), град	0°	15°
Навантаження (в статиці) на передній міст КТЗ (P_1), Н	74500	45000
Навантаження (в статиці) на середній міст КТЗ (P_2), Н	127400	38300
Навантаження (в статиці) на задній міст КТЗ (P_3), Н	127400	38300
Вага автомобіля (G), Н	329300	121600

Результати розрахунку за програмою, що представлена у Лістингу 3.1 наведені в графічному вигляді на рисунку 3.4.

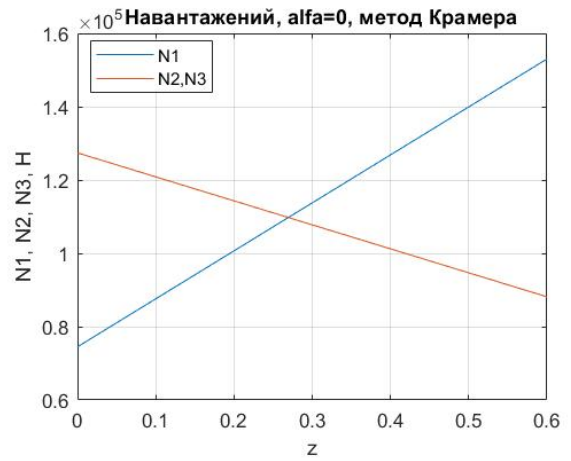
Прокоментуємо деякі графіки, що зображені на рисунку 3.4:

- з рисунку 3.4а-3.4д видно, що всі три розглянутих способа розв'язання системи лінійних рівнянь дають абсолютно однакові результати;

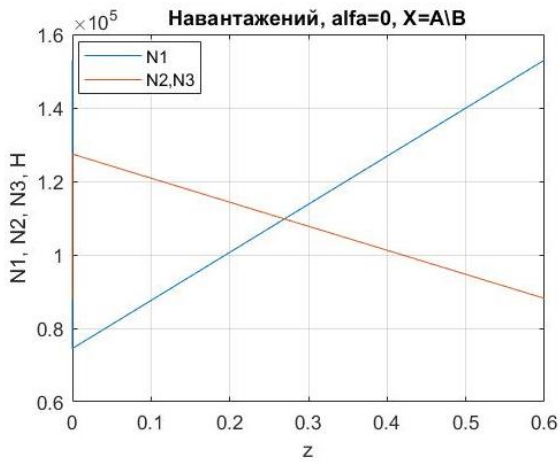
- рисунок 3.4є показує, що кут нахилу реактивних тяг балансірного візка істотно впливає на перерозподіл нормальних реакцій між осями цього візка;



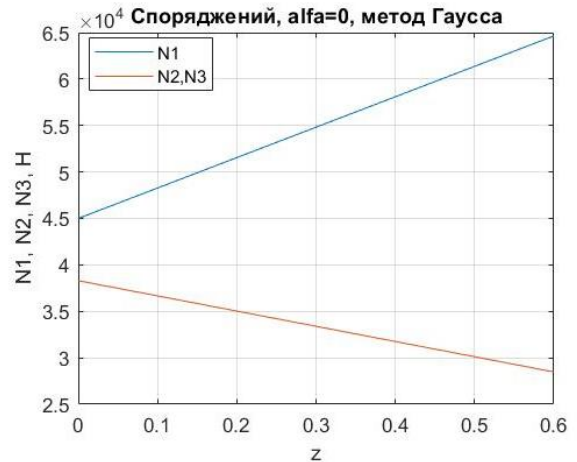
а)



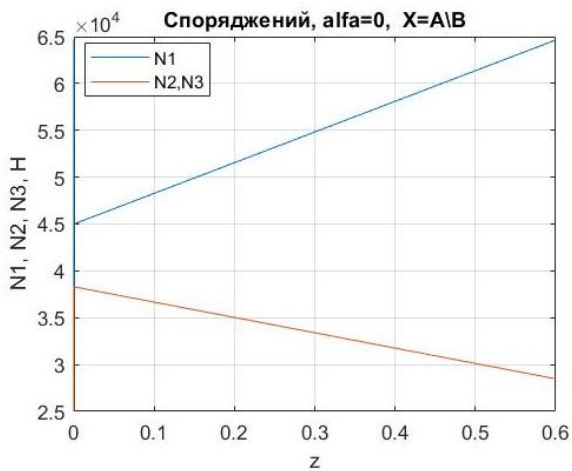
б)



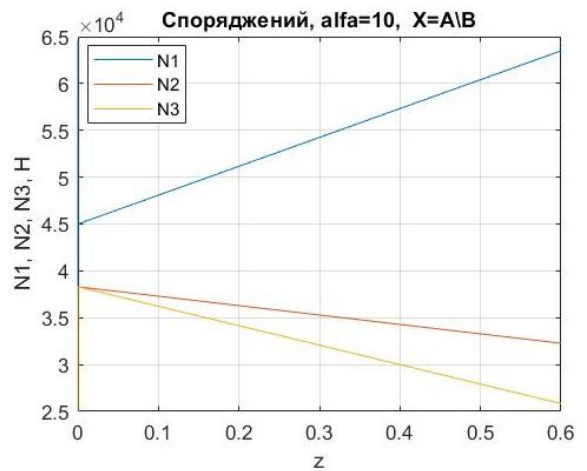
в)



г)



д)



е)

Рис. 3.4. Результати розрахунків за програмою, що представлена в Лістингу 3.1

Розглянемо ще один приклад - чотирьохвісна вантажівка, дві задні осі якої об'єднані в балансирний візок, схема якої представлена на рисунку 3.5.

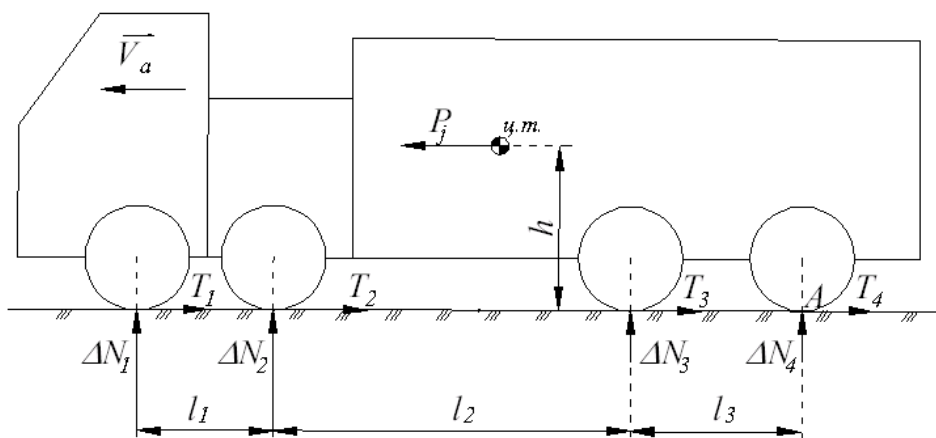


Рис. 3.5. Розрахункова схема сил, що діють на чотирьохвісну вантажівку при її гальмуванні

Для такого автомобіля потрібно мати вже систему лінійних рівнянь з чотирма невідомими.

Відповідно до рівняння (3.12) запишемо перше з них:

$$\Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_3 + \Delta N_4 = 0. \quad (3.40)$$

Відповідно до рівняння (3.13) отримуємо друге рівняння:

$$\sum M_{iA} = 0; \quad \Delta N_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3) + \Delta N_2 \cdot (l_2 + l_3) + \Delta N_3 \cdot l_3 - z \cdot G \cdot h = 0, \quad (3.41)$$

або

$$\sum_{j=1}^{n-1} \Delta N_j \cdot \sum_{i=j}^{n-1} l_i - z \cdot G \cdot h = 0, \quad (3.42)$$

тут і далі вважаємо, що, наприклад:

$$\sum_{i=n-1}^{n-1} l_i = l_i, \quad (3.43)$$

тобто сума з однаковими верхнім та нижнім індексами - це сума, яка містить одну складову саме з цим індексом.

В якості третього рівняння відповідно до (3.26) для навантаженого автомобіля:

$$\Delta N_3 - \Delta N_4 = 0. \quad (3.44)$$

Для спорядженого чотиривісного транспортного засобу:

$$\Delta N_3 - \Delta N_4 = \tan \alpha (T_3 + T_4). \quad (3.45)$$

де α – показано на рисунку 3.3;

T_3, T_4 – показані на рисунку 3.5.

Для отримання четвертого рівняння розглянемо умовну схему n -вісного автомобіля, зображену на рисунку 3.6.

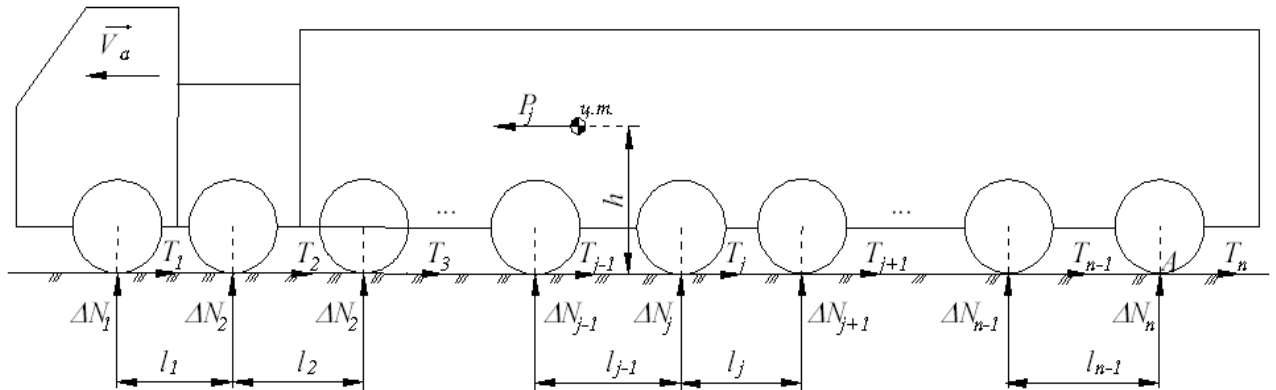


Рис. 3.6. Схема структурної фізичної моделі n -вісного КТЗ, що загальмовується: $T_1, T_2, T_3, T_{j-1}, T_j, T_{j+1}, T_{n-1}, T_n$ – гальмові сили на відповідних осях n -вісного КТЗ; $l_1, l_2, l_{j-1}, l_j, l_{n-1}$ – відстані між відповідними осями n -вісного КТЗ; h – висота розташування центру тяжіння (ц.т.) КТЗ; P_j – сила інерції n -вісного КТЗ, що загальмовується

При гальмуванні кузов автомобіля за рахунок сили інерції P_j і гальмових сил $\sum_{i=1}^n \dot{O}_i$ декілька повертається навколо деякої точки, часто званої центром повороту (ц.п.). Схематично таке переміщення (поворот) кузова зображено на рисунку 3.7.

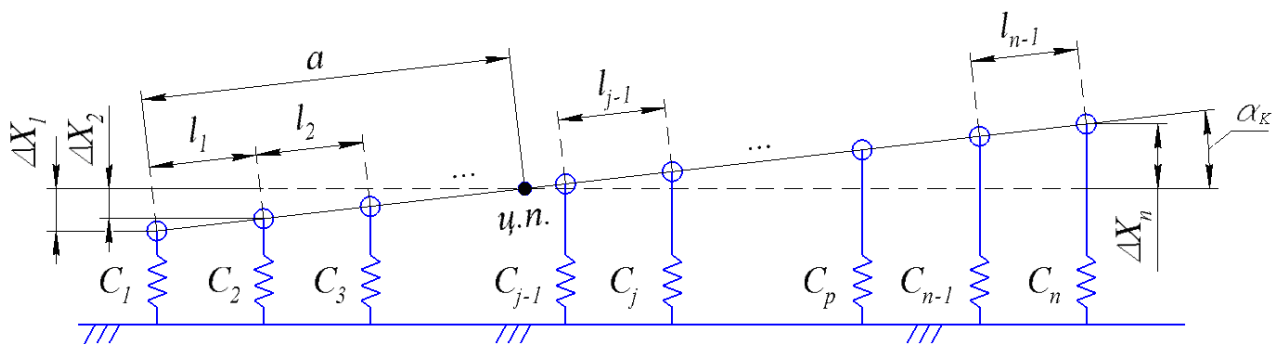


Рис. 3.7. Схема повороту кузова КТЗ при гальмуванні

На рисунку 3.7 позначено: a – відстань від центру повороту (ц.п.) до першого моста; $C_1 \dots C_n$ – жорсткості підвісок відповідних мостів КТЗ; $\Delta X_1 \dots \Delta X_n$ – деформації підвісок відповідних мостів; α_K – кут нахилу кузова щодо його початкового положення, до початку гальмування КТЗ.

Зі схеми, зображеної на рисунку 3.7 очевидно, що вираз (3.12) можна переписати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n \Delta X_i \cdot C_i = 0. \quad (3.46)$$

З рисунка 3.7 очевидно:

$$\Delta X_i = \left(a - \sum_{k=1}^i l_{k-1} \right) \sin \alpha_K. \quad (3.47)$$

де при користуванні виразом (3.47) слід враховувати, що $l_0 = 0$.

Після підстановки виразу (3.47) в рівняння (3.46) та проведення нескладних алгебраїчних перетворень отримаємо:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n \left(C_i \cdot \sum_{k=1}^i l_{k-1} \right)}{\sum_{i=1}^n C_i}. \quad (3.48)$$

Розділивши чисельник і знаменник рівняння (3.48) на жорсткість переднього моста (C_1) та з огляду на те, що при $i = 1$ відстань $l_0 = 0$, отримаємо:

$$a = \frac{\sum_{i=2}^n \left(\frac{C_i}{C_1} \cdot \sum_{k=1}^i l_{k-1} \right)}{1 + \sum_{i=2}^n \frac{C_i}{C_1}}. \quad (3.49)$$

Припустимо, що при переході автомобіля з спорядженого стану в завантажений, його кузов переміщується паралельно самому собі. Тоді буде мати місце рівність (3.50).

$$\Delta X_i^n = \text{const}. \quad (3.50)$$

де ΔX_i^n – деформація в i -й підвісці при переміщенні кузова з спорядженого в завантажений стан КТЗ, а значить:

$$\frac{C_i}{\Delta P_i} = \text{const}. \quad (3.51)$$

де ΔP_i – різниця між навантаженням на i -у вісь у завантаженому та спорядженому станах КТЗ.

Таким чином можна вважати, що:

$$\frac{C_i}{C_1} = \frac{\Delta P_i}{\Delta P_1}. \quad (3.52)$$

Після підстановки рівняння (3.52) в рівняння (3.49) остаточно отримаємо:

$$a = \frac{\sum_{i=2}^n \left(\frac{\Delta P_i}{\Delta P_1} \cdot \sum_{k=1}^i l_{k-1} \right)}{1 + \sum_{i=2}^n \frac{\Delta P_i}{\Delta P_1}}. \quad (3.53)$$

У рівнянні (3.53) всі складові є відомими довідковими даними, що в подальшому значно спрощує обчислення відстані від центру повороту до першого моста по цій залежності.

У зв'язку з цим недостаючі рівняння до шуканої системи рівнянь можуть бути визначені за наступною методикою:

1) після знаходження відстані від центру повороту до першого моста по залежності (3.53), визначаємо положення центру пружності щодо всіх мостів КТЗ.

Якщо виявляється, що для якогось j -го моста виконується рівність:

$$a = \sum_{i=1}^{j-1} l_i \text{ то для нього } \Delta N_j = 0, \quad (3.54)$$

що може служити в якості четвертого рівняння;

2) для осей, що знаходяться лівіше від центру повороту, з геометричних співвідношень, для будь-якого $m > 1$ моста, виходячи з рівняння (3.47) справедливо співвідношення:

$$\frac{\Delta X_m}{a - \sum_{i=1}^{m-1} l_i} = \frac{\Delta X_1}{a}, \text{ де } m > 1,$$

звідки:

$$a \cdot \Delta X_m = \left(a - \sum_{i=1}^{m-1} l_i \right) \cdot \Delta X_1. \quad (3.55)$$

З урахуванням рівняння (3.12) та (3.46), а також рівняння (3.52) після відповідних перетворень для m -го моста отримаємо рівняння:

$$\left(1 - a^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{m-1} l_i \right) \cdot \frac{\Delta P_m}{\Delta P_1} \cdot \Delta N_1 - \Delta N_m = 0; \quad (3.56)$$

3) для осей, що знаходяться правіше від центру повороту, з геометричних співвідношень, для будь-якого p -го моста, виходячи з рівняння (3.47) справедливо:

$$\Delta X_p \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} l_i - a \right) = \Delta X_n \cdot \left(\sum_{i=1}^{p-1} l_i - a \right); \quad (3.57)$$

Після перетворень, які аналогічні проведеним раніше для вираження (3.55) отримаємо рівняння:

$$\Delta N_p - \frac{\Delta P_p}{\Delta P_n} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{p-1} l_i - a}{\sum_{i=1}^{n-1} l_i - a} \right) \cdot \Delta N_n = 0; \quad (3.58)$$

Таким чином, з рівняння (3.56) та (3.58) для шуканої системи рівнянь можна отримати їх недостатню кількість.

Як приклад розглянемо побудову кривих реалізованого зчеплення для чотирьохвісного вантажного автомобіля, схематично показаного на рисунку 3.5, з параметрами:

- відстані між мостами складають: $l_1 = 2,03$ м, $l_2 = 2,62$ м, $l_3 = 1,4$ м;
- два задніх мости об'єднані балансирним візком;
- кут нахилу кузова: $\alpha_r = 0^\circ$, $\alpha_{\pi} = 15^\circ$;
- навантаження на осі в спорядженому стані КТЗ: $P_{\pi 1} = 25000$ Н, $P_{\pi 2} = 25000$ Н, $P_{\pi 3} = 49000$ Н, $P_{\pi 4} = 49000$ Н;
- навантаження на осі в завантаженому стані КТЗ: $P_{r 1} = 73500$ Н, $P_{r 2} = 73500$ Н, $P_{r 3} = 131320$ Н, $P_{r 4} = 13320$ Н;
- положення координати центру тяжіння від поверхні дорожнього покриття в спорядженому стані КТЗ: $h_{\pi} = 1,05$ м;
- положення координати центру тяжіння від поверхні дорожнього покриття в завантаженому стані КТЗ: $h_r = 1,55$ м.

Таким чином: $\Delta P_1 = P_{r 1} - P_{\pi 1} = 23500$ Н, $\Delta P_2 = P_{r 2} - P_{\pi 2} = 23500$ Н, $\Delta P_3 = \Delta P_4 = 51320$ Н.

Прийmemo, що гальмові сили на всіх мостах КТЗ реалізуються однаковими, тобто :

$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0,25 \cdot \sum_{i=1}^4 T_i; \quad (3.59)$$

У такому випадку система рівнянь, наприклад, для спорядженого стану КТЗ, матиме вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 \Delta N_i = 0; \\ \sum_{j=1}^3 (\Delta N_j \cdot \sum_{i=j}^3 l_i) = z \cdot h_{\pi} \cdot \sum_{i=1}^4 P_{\pi i}; \\ \Delta N_3 - \Delta N_4 = \tan \alpha_{\pi} \cdot (T_3 + T_4); \\ \left(1 - \frac{l_i}{a}\right) \cdot \frac{\Delta P_{\pi 2}}{\Delta P_{\pi 1}} \cdot \Delta N_1 - \Delta N_2 = 0, \end{array} \right. ; \quad (3.60)$$

де друге рівняння отримано з (3.42), а 4-е з (3.56) при $m = 2$.

Для завантаженого автомобіля система (3.60) виглядає аналогічно, за винятком лише того, що в другому рівнянні замість $h_{\pi} \cdot \sum_{i=1}^4 P_{\pi i}$, необхідно підставити $h_r \cdot \sum_{i=1}^4 P_{r i}$, а в третьому рівнянні в правій частині замість $\tan \alpha_{\pi} (T_3 + T_4)$ ставимо нуль, оскільки $\alpha_r = 0^\circ$.

Після рішення системи лінійних рівнянь (3.60) та визначення збільшень вертикальних навантажень на кожному мосту КТЗ при його гальмуванні, з рівняння (3.10) знаходимо всі значення вертикальних навантажень N_i , і за допомогою рівняння (3.9) будемо криві реалізованого зчеплення.

Програма для проведення необхідних розрахунків представлена у Лістингу 3.2.

Лістинг 3.2 – Програма для обчислень рівняння (3.59)

```

1  clc,
2  clear
3  % Розрахунок кривих реалізованого зчеплення
4  % по мостам чотирьохвісного
5  % автомобіля з балансирним візком
6  % Навантажений автомобіль з співвідношенням
7  %  $\Delta N_3 = \Delta N_4$ 
8-  l1=2.03;l2=2.62;l3=1.4;
9-  Pg1=73500;Pg2=73500;Pg3=131320;Pg4=131320;hg=1.55;
10- Pp1=25000;Pp2=25000;Pp3=49000;Pp4=49000;hp=1.05;
11- dP1=Pg1-Pp1;dP2=Pg2-Pp2;dP3=Pg3-Pp3;dP4=Pg4-Pp4;
12- Gg=Pg1+Pg2+Pg3+Pg4;
13  % Побудова граничних прямих
14- z1=[0 0.8];
15- k1=z1;
16- z2=[0.15 0.3];
17- k2=z2+0.08;
18- k3=z2-0.08;
19- z4=[0.3 0.3+0.74*(0.8-0.38)];
20- k4=(z4-0.3)/0.74+0.38;
21  % Розрахунок кривих реалізованого зчеплення
22  % з використанням можливостей MATLAB  $X=A \setminus B$ 
23- ch=(dP2*l1+dP3*(l1+l2)+dP4*(l1+l2+l3))/dP1;
24- zn=1+(dP2+dP3+dP4)/dP1;
25- a=ch/zn
26- a21=l1+l2+l3;a22=l1+l2;a41=(1-l1/a)*dP2/dP1;
27- i=0;
28- for z5=0:0.01:0.6;
29-  i=i+1;
30-  z(i)=z5;
31-  Tg(i)=Gg*z(i);
32-  T1g(i)=Tg(i)*0.25;
33-  T2g(i)=Tg(i)*0.25;

```

```

34- T3g(i)=Tg(i)*0.25;
35- T4g(i)=Tg(i)*0.25;
36- A=[1 1 1 1;a21 a22 l3 0;0 0 1 -1;a41 -1 0 0];
37- B=[0;Gg*z(i)*hg;0;0];
38- dNg=A\B;
39- N1g(i)=Pg1+dNg(1);
40- N2g(i)=Pg2+dNg(2);
41- N3g(i)=Pg3+dNg(3);
42- N4g(i)=Pg4+dNg(4);
43- f1g(i)=T1g(i)/N1g(i);
44- f2g(i)=T2g(i)/N2g(i);
45- f3g(i)=T3g(i)/N3g(i);
47- f4g(i)=T4g(i)/N4g(i);
48- end
49- subplot(1,2,1),plot(z1,k1,'-r',z2,k2,'-r',...
50- z,f1g,'-b',z,f2g,'-g',z,f3g,'-k',z,f4g,'-k',...
51- z2,k3,'-r',z4,k4,'-r'),grid
52- xlabel('z');
53- ylabel('k1, k2, k3, k4, f1, f2, f3, f4');
54- legend('середня лінія','гранична лінія',...
55- 'f1','f2','f3, f4');
56- title(' Навантажений, alfa=0, X=A\B')
57 % Споряджений автомобіль з співвідношенням
58 % deltaN3+deltaN4= tan(alfa)*(T3+T4)
59- Gp=Pp1+Pp2+Pp3+Pp4;al=15*pi/180;
60 % Розрахунок кривих реалізуємого зчеплення
61 % з використанням можливостей MATLAB X=A\B
62- i=0;
63- for z6=0:0.01:0.6;
64- i=i+1;
65- z7(i)=z6;
66- Tp(i)=Gp*z7(i);
67- T1p(i)=Tp(i)*0.25;
68- T2p(i)=Tp(i)*0.25;
69- T3p(i)=Tp(i)*0.25;
70- T4p(i)=Tp(i)*0.25;
71- A=[1 1 1 1;a21 a22 l3 0;0 0 1 -1;a41 -1 0 0];
72- B=[0;Gp*z7(i)*hp;tan(al)*(T3p(i)+T4p(i));0];
73- dNp=A\B;
74- N1p(i)=Pp1+dNp(1);
75- N2p(i)=Pp2+dNp(2);
76- N3p(i)=Pp3+dNp(3);
77- N4p(i)=Pp4+dNp(4);
78- f1p(i)=T1p(i)/N1p(i);

```

```

79- f2p(i)=T2p(i)/N2p(i);
80- f3p(i)=T3p(i)/N3p(i);
81- f4p(i)=T4p(i)/N4p(i);
82- end
83- subplot(1,2,2),plot(z1,k1,'-r',z2,k2,'-r',...
84- z7,f1p,'-b',z7,f2p,'-g',z7,f3p,'-m',z7,f4p,'-k',...
85- z2,k3,'-r',z4,k4,'-r'),grid
86- xlabel('z');
87- ylabel('k1, k2, k3, k4, f1, f2, f3, f4');
88- legend('середня лінія','гранична лінія',...
89- 'f1','f2','f3','f4');
90- title('Споряджений, alfa=15, X=A\B')

```

Результати розрахунків за програмою, що наведена у Лістингу 3.2 приведені на рисунку 3.8.

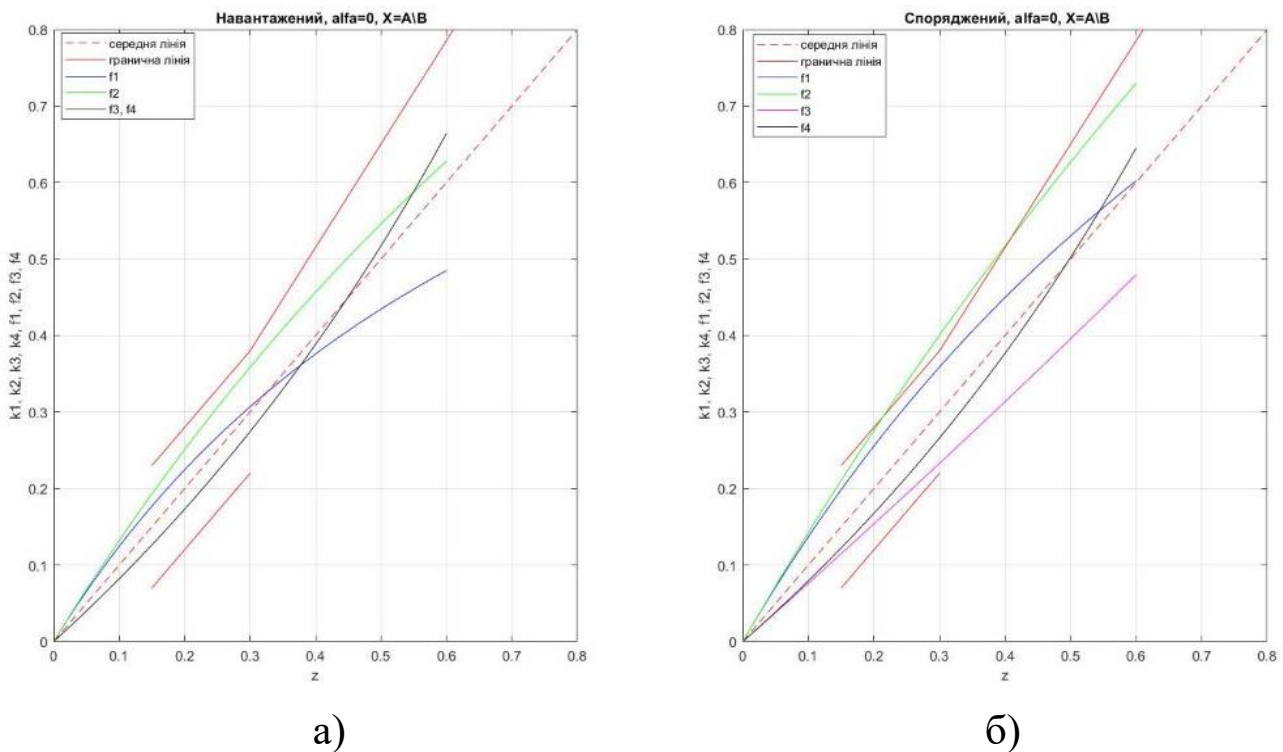


Рис. 3.8. Результати розрахунків за програмою, що наведена у Лістингу 3.2: а) – навантажений КТЗ; б) – споряджений КТЗ

Як бачимо з рисунку 3.8 б в спорядженому стані автомобіль не виконує поставлених вимог. Тому робимо висновок про те, що в пневматичному приводі розглянутого автомобіля необхідно встановлювати регулятор гальмових сил, що забезпечує в спорядженому стані співвідношення:

$$T_1 = T_2 = 0,22 \cdot \sum_{i=1}^n T_i \text{ та } T_3 = T_4 = 0,28 \cdot \sum_{i=1}^n T_i \quad (3.61)$$

Результати розрахунків для такого випадку, за програмою, що аналогічна наведеній в Лістингу 3.2, представлені на рисунку 3.9.

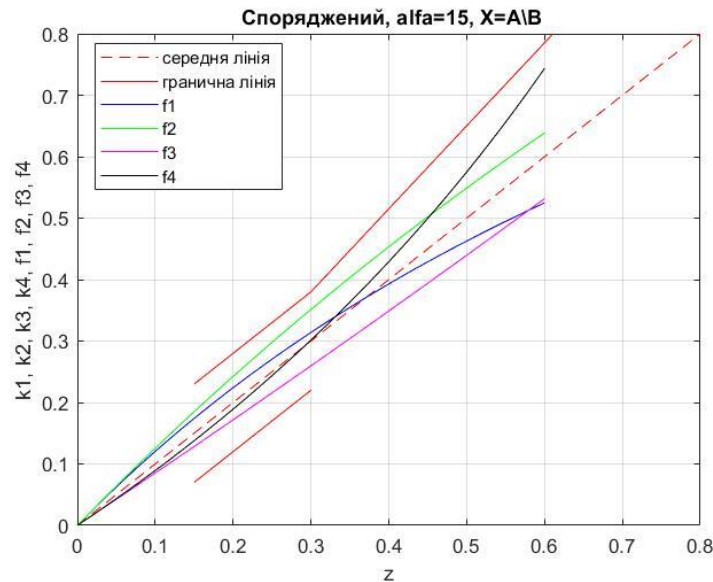


Рис. 3.9. Криві реалізованого зчеплення, спорядженого чотиривісного КТЗ з урахуванням співвідношення (3.60)

Розглянемо також випадок, при якому у чотиривісного КТЗ балансірного візка немає та всі мости незалежні один від одного.

Система рівнянь для спорядженого автомобіля буде мати вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 \Delta N_i = 0; \\ \sum_{j=1}^3 (\Delta N_j \cdot \sum_{i=j}^3 l_i) = z \cdot h_{\text{п}} \cdot \sum_{i=1}^4 P_{\text{п}i}; \\ \Delta N_3 - \frac{\Delta P_{\text{п}3}}{\Delta P_{\text{п}4}} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^2 l_i - a}{\sum_{i=1}^3 l_i - a} \right) \cdot \Delta N_4 = 0; \\ \left(1 - \frac{l_1}{a} \right) \cdot \frac{\Delta P_{\text{п}2}}{\Delta P_{\text{п}1}} \cdot \Delta N_1 - \Delta N_2 = 0, \end{array} \right. \quad ; \quad (3.62)$$

В рівнянні (3.62) друге рівняння отримано з рівняння (3.42), третє з рівняння (3.58), при $n = 4$ та $p = 3$, а четверте з рівняння (3.56) отримане при $m = 2$.

Для завантаженого чотиривісного КТЗ система рівнянь (3.62) буде відрізнятися тим, що в другому рівнянні замість $h_i \cdot \sum_{i=1}^4 P_{ii}$ необхідно підставити відповідні значення h_T та P_{Gi} ;

Результати розрахунків при співвідношенні (3.59) в завантаженому стані та співвідношенні (3.61) в спорядженому, представлені на рисунку 3.10.

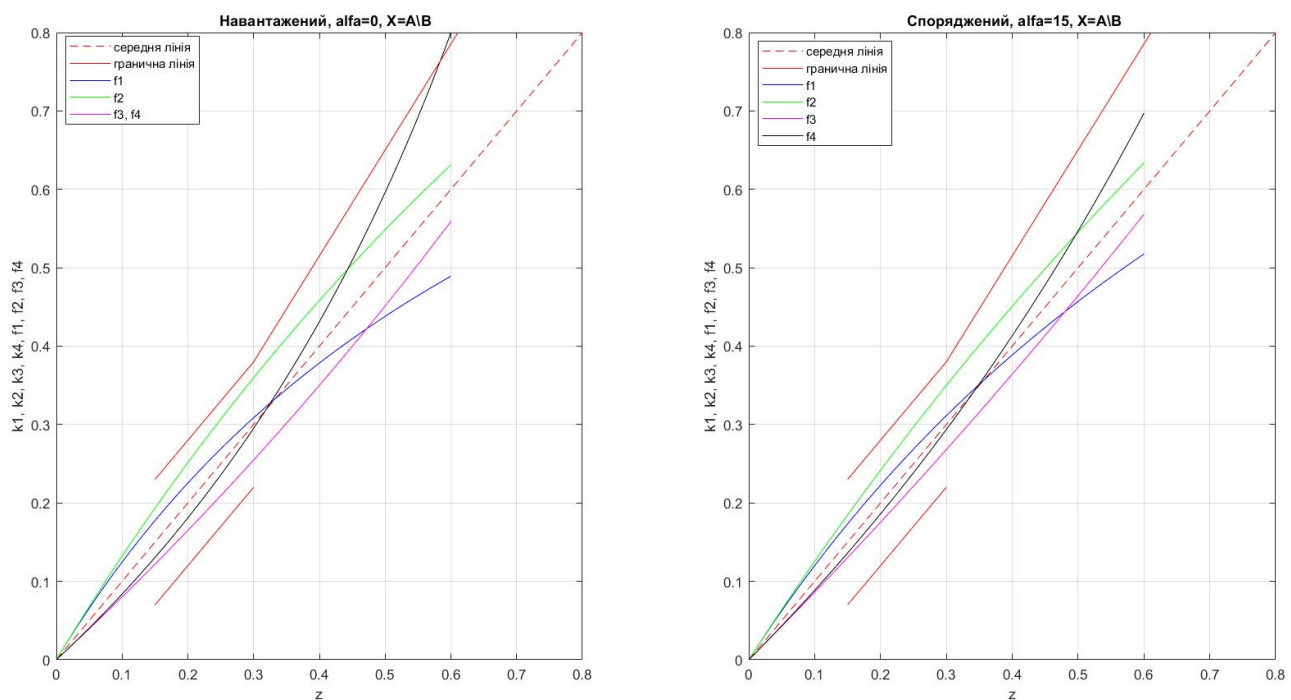


Рис. 3.10. Криві реалізованого зчеплення чотиривісного КТЗ з незалежними мостами, без балансирного візка

Програма розрахунків для побудови графіків, що зображено на рисунку 3.10, ідентична програмі, що зображена у Лістингу 3.2.

Чисельні та аналітичні методи рішення систем нелінійних алгебраїчних рівнянь

- 4.1. Чисельне рішення систем нелінійних алгебраїчних рівнянь у системі MatLAB
- 4.2. Аналітичне рішення систем нелінійних рівнянь
- 4.3. Поетапний аналіз нелінійних моделей
- 4.4. Умовний розподіл фізичної моделі на більш проті ланки

Широке поширення в інженерних розрахунках отримали нелінійні рівняння та системи нелінійних рівнянь (СНР).

Найбільш поширені нелінійності в них це:

- добуток (ділення) один на одного невідомих;
- ступенева або показникова залежність невідомих;
- невідомі знаходяться під знаком тригонометричної функції.

4.1. Чисельне рішення систем нелінійних алгебраїчних рівнянь у системі MatLAB

Дуже часто у таких СНР загальне аналітичне рішення знайти неможливо і тому доводиться шукати чисельне рішення.

Для цього в *MatLAB* існує командна процедура:

1) створюється функція у *m*-файлі, наприклад *uchpr.m*, де розміщується наступний код:

```
function F=uchpr(x)
F(1)=f1(x(1),x(2), ..., x(n));
F(2)=f2(x(1),x(2), ..., x(n));
F(n)=fn(x(1),x(2), ..., x(n));
```

При цьому кількість функцій $F(n)$ повинна дорівнювати кількості невідомих x .

Всі невідомі у функціях $F(n)$ повинні мати вигляд: $x(1), x(2), \dots, x(n)$. Це необхідно для роботи з командою *fsolve*;

2) формуємо функцію *fsolve* в основній програмі:

```
fun=@uchpr,
```

```
x0=[x10,x20,...,xn0]
```

```
x=fsolve(fun,x0)
```

Тут:

x_0 – вектор початкових значень для всіх невідомих;

x – вектор знайдених рішень;

fsolve – функція з пакету *OptimizationToolbox*, що вирішує систему нелінійних рівнянь виду $f(x)=0$ методом найменших квадратів;

3) для отримання більш розширеної інформації функція *fsolve* може бути записана у вигляді:

```
[x,fr,ex]=fsolve(fun,x0,optimset('tolx',1e-4)),
```

де x – вектор знайдених рішень;

fr – значення функцій $F(1), F(2), \dots, F(n)$ при знайдених значеннях $x(1), x(2), \dots, x(n)$;

ex – параметр збіжності, якщо він дорівнює 1, то все зійшлося;

optimset – функція, що встановлює параметри (точність) оптимізації.

Таким чином, у нас утворюється два m - файли. Один викликає функцію *fsolve*, а другий необхідний для розрахунку самих значень функцій.

Дуже важливо при вирішенні СНР задати досить близьке початкове наближення, (вектор x_0), тобто такий набір змінних, які близькі до вирішення.

Як приклад повернемося до вже раніше розглянутої моделі притискної плаваючої колодки барабанного гальма, представленої на рисунку 4.1.

На рисунку 4.1 зображено: $q(\alpha)$ – закон розподілу контактних тисків на гальмівну накладку (через дискретність контакту «барабан - накладка» в загальному випадку цей закон є випадковим); u_1 – бісектриса кута охоплення гальмівної накладки; β_0 – кут охоплення гальмівної накладки; P_k – привідне зусилля з боку механізму розтиску; ψ_c – кут зміщення бісектриси кута охоплення накладки відносно осі y .

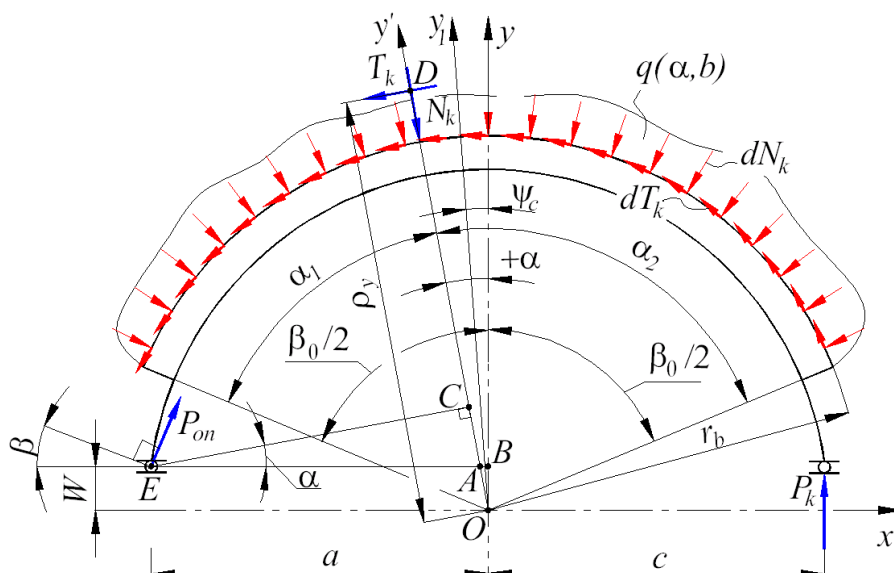


Рис. 4.1. Модель притисної плаваючої колодки з двома ступенями свободи

Відразу обмовимося, що цей приклад обраний навмисно перш за все тому, що він має і аналітичне рішення з точністю, придатною для інженерних розрахунків. Це дозволить проконтролювати отримане чисельне рішення з використанням функції *fsolve*.

З умов статичної рівноваги колодки на рисунку 4.1 можна записати:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0; & \quad -N_k \cdot \cos \alpha - T_k \cdot \sin \alpha + P_{on} \cdot \cos \beta + P_k = 0; \\ \sum F_x = 0; & \quad N_k \cdot \sin \alpha - T_k \cdot \cos \alpha + P_{on} \cdot \sin \beta = 0; \quad ; \quad (4.1) \\ \sum M_E = 0; & \quad P_k \cdot (a + c) + CD \cdot T_k - EC \cdot N_k = 0. \end{aligned}$$

До цього слід додати, що з геометричних співвідношень з рисунку 4.1 слідує:

$$CD = \rho_y \cdot \left[\frac{W}{\cos \alpha} + (a - W \cdot \tan \alpha) \sin \alpha \right]; \quad (4.2)$$

$$EC = (a - W \cdot \tan \alpha) \cdot \cos \alpha. \quad (4.3)$$

У системи нелінійних рівнянь (4.1) п'ять невідомих величин: N_k , T_k , α , P_{on} , ρ_y .

І таким чином, як ми бачимо, СНР (4.1) є істотно нелінійною. До того ж в (4.1) рівнянь 3, а невідомих 5. Тому необхідно знайти ще два додаткових рівняння.

Як вже було розглянуто раніше (в попередніх темах):

- застосовуючи закон Амонтона до поверхонь, що труться, в результаті можна прийняти:

$$T_k \perp N_k, \quad (4.4)$$

та

$$T_k = \mu \cdot N_k, \quad (4.5)$$

де μ – коефіцієнт тертя в контакті «гальмівна накладка - гальмівний барабан»;

- зробивши припущення про рівномірний розподіл нормального тиску в цьому ж контакті, можна вважати:

$$\rho_y = \frac{\beta_0}{2 \cdot \sin(\beta_0 / 2)} \cdot \sqrt[3.23]{\cos(\alpha - \psi_c)}, \quad (4.6)$$

де всі складові визначені на рисунку 4.1.

З прийнятими припущеннями (4.4) – (4.6) запишемо програму, що представлена у Лістингу 4.1 для визначення невідомих N_k , P_{on} , α .

Лістинг 4.1 – Програма для визначення невідомих N_k , P_{on} , α

```

1- clc,
2- clear
3- format long e
4  %Рішення з використанням команди fsolve
5- fun = @uchpr;
6- m=0.4;b=15*pi/180;Pk=10000;a=0.15;c=0.15;r=0.2;
7- ru=1.12*r;w=0.07;
8- b0=110*pi/180;psi=0*pi/180;
9- al0=10*pi/180;
10- N0=Pk*(a+c)/(a-m*(ru-w));
11- Pop0=(N0-Pk)/cos(b);
12- x0 = [N0,Pop0,al0];

```

```

13- [x,fr,ex] = fsolve(fun,x0,optimset('tolx',1e-4))
14 % Вивід результатів розрахунку
15- aln=x(3);
16- Nkn=x(1);
17- Popn=x(2);
18 % Точне рішення
19- fun2=@(al)(sin(al)*(c*(1+m*tan(b))+a+w*tan(b))-cos(al)*...
20- (m*(w*tan(b)+a+c)-c*tan(b))+ m*r*b0*...
21- (cos(al-psi)^(1/3.23)/(2*sin(b0/2))*tan(b))^2;
22- alt=(fminbnd(fun2,0,0.5));
23- Nkt=Pk*(a+c)/(cos(alt)*(a+m*w)-sin(alt)*(w-m*a)-m*r*b0*...
24- (cos(alt-psi)^(1/3.23)/(2*sin(b0/2))));
25- Popt=(Nkt*(cos(alt)+m*sin(alt))-Pk)/cos(b);
26 % Вивід результатів розрахунку
27- al=[aln alt];
28- Nk=[Nkn Nkt];
29- Pop=[Popn Popt];
30 % Розрахунок похибок
31- al=abs(aln - alt)/alt*100;
32- Nk=abs(Nkn - Nkt)/Nkt*100;
33- Pop=abs(Popn - Popt)/Popt*100;

```

Другий m - файл, необхідний для розрахунку самих значень функцій СНР (4.1) ... (4.3) представлений у вигляді програми, що наведена у Лістингу 4.2.

Лістинг 4.2 – Програма для визначення значень функцій систем нелінійних рівнянь (4.1) – (4.3)

```

function F = uchpr(x)
m=0.4;b=15*pi/180;Pk=10000;a=0.15;c=0.15;r=0.2;
b0=110*pi/180;run=b0/(2*sin(b0/2))*r;w=0.07;
F(1) = -x(1)*cos(x(3))-m*x(1)*sin(x(3))+x(2)*cos(b)+Pk;
F(2) = x(1)*sin(x(3))-m*x(1)*cos(x(3))+x(2)*sin(b);
F(3) = Pk*(a+c)+m*x(1)*(run*(cos(x(3)))^(1/3.23)-...
(w/cos(x(3))+(a-w*tan(x(3)))*sin(x(3))))-x(1)*...
(a-w*tan(x(3)))*cos(x(3));

```

Прокоментуємо розроблені програми.

У рядках 5...10 програми, що наведена у Лістингу 4.1 задаються початкові значення невідомих: $\alpha_0 = al0$, $N_{k0} = N0$, $P_{on0} = Pop0$.

Розглянемо з яких передумов вони призначені.

З раніше отриманого (в попередніх темах) наближеного рівняння:

$$\alpha = \arctan \frac{0,58 \cdot (1,56 \cdot \mu - \tan \beta)}{1 + \mu \cdot \tan \beta}. \quad (4.7)$$

Розрахунки показали, що в середньому для різних значень μ та β можна прийняти $\alpha_0 \cong 10^\circ$.

З спрощеної моделі гальмової колодки (рис. 4.2), можна записати рівняння статичної рівноваги:

$$\sum M_A = P_k(a+c) - N_k \cdot a + T_k \cdot (\rho_y - W); \quad (4.8)$$

$$\sum F_y = P_k - N_k + P_{on} \cdot \cos \beta. \quad (4.9)$$

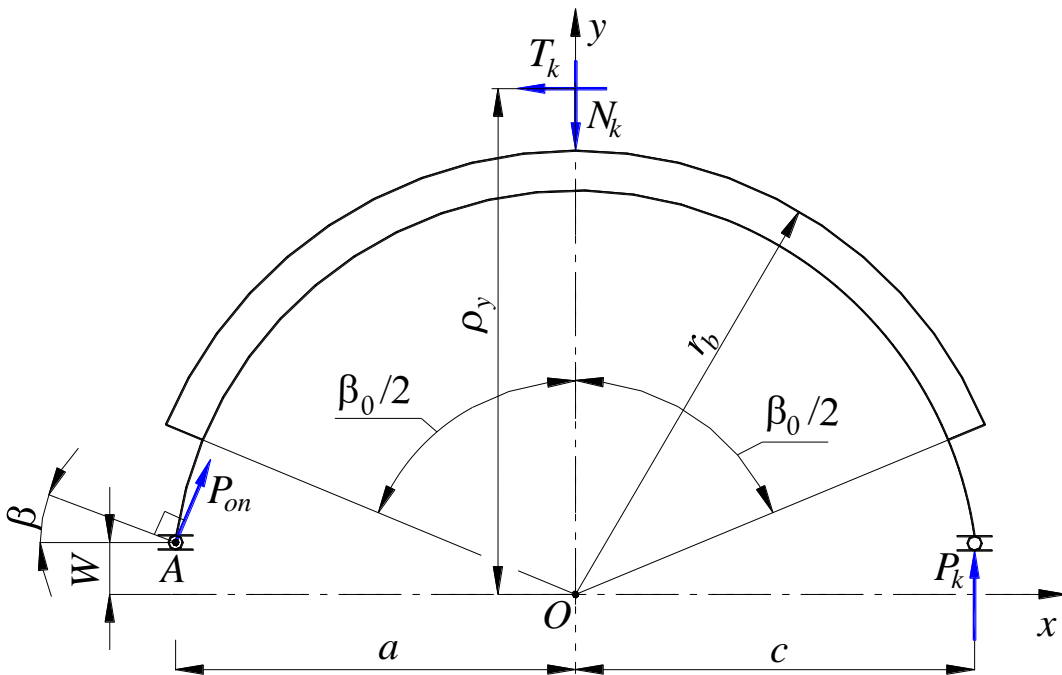


Рис. 4.2. Спрощена схема навантаження притисної плаваючої колодки

З рівняння (4.8), з урахуванням рівняння (4.5) запишемо:

$$N_k = N_{k0} = \frac{P_k \cdot (a+c)}{a - \mu \cdot (\rho_y - W)}. \quad (4.10)$$

З рівняння (4.9) запишемо:

$$P_{on} = P_{on0} = \frac{N_k - P_k}{\cos \beta}. \quad (4.11)$$

В рівнянні (4.10) в якості ρ_y прийнято спрощений, раніше отриманий (в попередніх темах), вираз для умовного радіуса тертя:

$$\rho_y = r \frac{\beta_0}{2 \cdot \sin(\beta_0 / 2)}. \quad (4.12)$$

Рівняння (4.8), (4.10), та (4.11) прийняті в якості початкових параметрів.

Якщо в кінці оператора рядка 13 прибрати знак «;», то в командному вікні *MatLAB* отримаємо результат розрахунку складових у вигляді:

```
x =
    3.752147847474904e+04      3.066964492860768e+04
    1.827961581066029e-01
```

```
fr =
    7.275957614183426e-12    9.094947017729282e-13      0
```

```
ex =
    1
```

- вектора x : $x(1)-N_k$; $x(2)-P_{on}$; $x(3)-\alpha$;

- вектора fr - результати розрахунків функцій $F(1)$, $F(2)$ та $F(3)$ в програмі, що наведена у Лістингу 4.2 після підстановки в них знайденого рішення вектора x ;

- ex – параметр збіжності, якщо він дорівнює 1, то все зійшлося.

Якщо в кінці операторів рядків 31 ... 33 програми, що наведена в Лістингу 4.1 прибрати «;», то отримаємо результати розрахунків векторів значень: $al = \alpha$; $N_k = Nk$; $P_{on} = Pop$.

```
al =
    1.827961581066029e-01    1.828114561131524e-01
```

$$N_k = 3.752147847474904e+04 \quad 3.752174305513417e+04$$

$$P_{op} = 3.066964492860768e+04 \quad 3.067005990924701e+04$$

Перша складова цих векторів - розрахунок по функції *fsolve*, друга - за аналітичними залежностями.

Розрахунок похибок показав, що різниця між цими значеннями менш 0,01%, що цілком прийнятно для інженерних розрахунків.

4.2. Аналітичне вирішення системи нелінійних рівнянь

Що стосується аналітичного рішення системи нелінійних рівнянь, то тут в кожному випадку необхідний індивідуальний підхід і нажаль, далеко не завжди рішення може бути знайдено.

Як позитивний приклад наведемо вже розглянутий (див. Тема 2) розрахунок для рівняння (4.1), де докладно отримані рішення для N_k (див. рівняння (2.19)) та α (див. рівняння (2.20) та (2.29)). Для повноти рішення додамо лише те, що при відомих N_k та α з першого рівняння (4.1) можна записати:

$$P_{on} = \frac{N_k (\cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha) - P_k}{\cos \beta}. \quad (4.13)$$

Рівняння (2.19), (2.20), (4.13) використані в програмі, що наведена в Лістингу 4.1 для точних розрахунків.

4.3. Поетапний аналіз нелінійних моделей

Розглянемо роботу двоступеневого регулятора рівня підлоги (РРП) в пневмопідвісці транспортного засобу (див. рис. 4.3).

РРП призначений для підтримки постійної висоти рівня підлоги колісного транспортного засобу (КТЗ) над поверхнею дорожнього одягу, незалежно від ступеня завантаження транспортного засобу.

При збільшенні завантаження автомобіля корпус 1 разом з кузовом транспортного засобу опускається вниз, важелі 7 і 8 повертаються проти годинникової стрілки, піднімаючи плунжер 3 вгору.

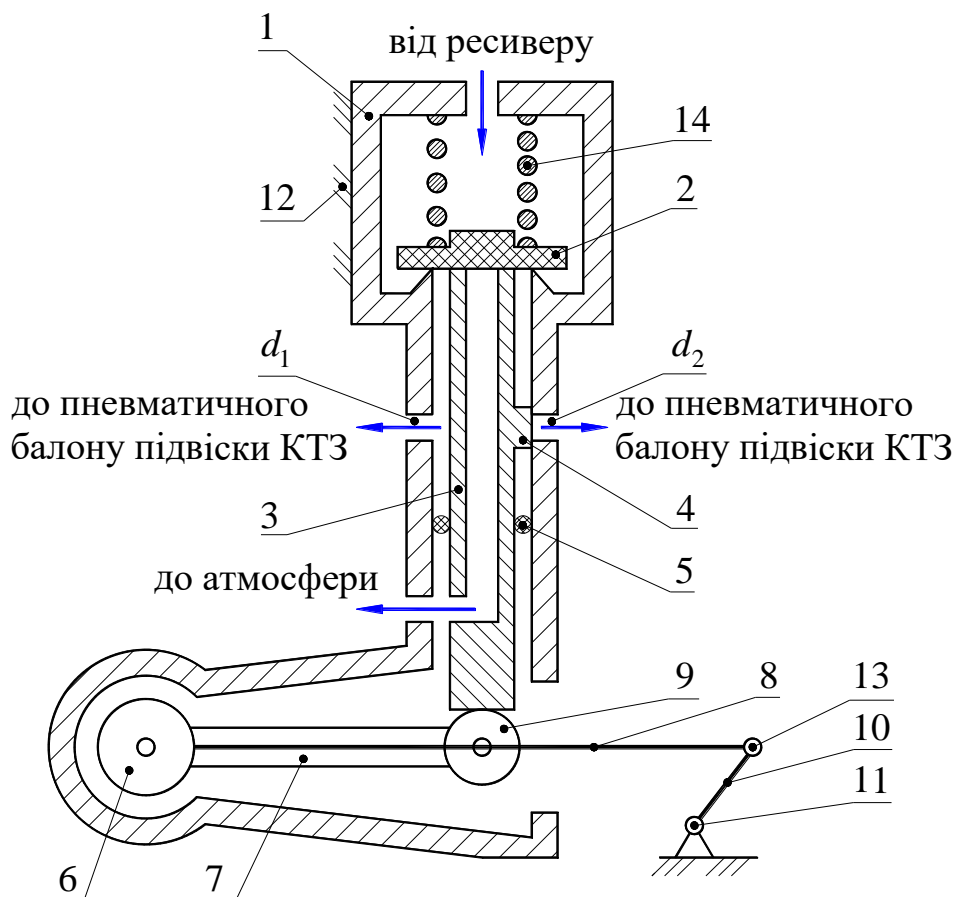


Рис. 4.3. Принципова схема двоступеневого регулятора рівня підлоги пневмопідвіски автомобіля: 1 - корпус; 2 - двохсідельний клапан; 3 - плунжер; 4 - поясок другого ступеня РРП; 5 - ущільнення плунжера в корпусі; 6 - поворотна вісь важелів; 7 - важіль штовхача плунжера; 8 - привідний важіль; 9 - сферична опора-штовхач плунжера; 10 - тяга; 11 - шарнірне кріплення тяги до мосту автомобіля; 12 - кріплення корпусу до кузова автомобіля; 13 - шарнірне з'єднання приводного важеля 8 та тяги 10; 14 - пружина двохсідельного клапану

Плунжер 3 відриває клапан 2 від сідла в корпусі 1 і стиснене повітря з ресивера надходить до пневмобаллону пневмопідвіски. За рахунок підвищення тиску в пневмобаллонах кузов автомобіля піднімається, і початкове положення плунжера 3 відновлюється.

При зменшенні завантаження автомобіля, корпус 1 разом з кузовом транспортного засобу піднімаються вгору, важелі 7 і 8 повертаються за годинниковою стрілкою, опускаючи поршень 3 вниз. Плунжер 3 відривається від двохсідельного клапана 2 і стисле повітря з пневмобаллонів пневмопідвіски через осьовий отвір в плунжері 3 виходить в атмосферу.

За рахунок зниження тиску в пневмобаллонах кузов автомобіля опускається і початкове положення плунжера 3 відновлюється.

Основний недолік РРП: при коливаннях кузова КТЗ відбувається непродуктивна витрата стислого повітря, оскільки в цьому процесі плунжер 3 постійно то відриває клапан 2 від сідла в корпусі 1, то сам відривається від клапана 2.

Для зниження цих витрат РРП виконують двоступінчастим. При малих коливаннях кузова поясок 4 плунжера 3 не відчиняє другий отвір з d_2 , що з'єднує РРП з пневмобаллонами підвіски. І тому витрата стисненого повітря в процесі коливань кузова транспортного засобу, під час його руху, незначна.

При суттєвому збільшенні або зниженні завантаження транспортного засобу, плунжер 3 переміщується настільки, що його поясок 4 відкриває другий отвір з d_2 . При цьому наповнення або спорожнення пневматичних баллонів підвіски помітно прискорюється, оскільки ці процеси відбуваються одночасно крізь два отвори: d_1 та d_2 .

Практика проектування двоступеневих РРП показує, що для того, щоб ефективно управляти раніше описаним процесом, необхідно, перш за все, вміти моделювати величину умовного діаметра d_y вихідних отворів до пневмобаллонів, в залежності від величини ходу плунжера 3 - h_n .

Відомо що:

$$d_y = \sqrt{\frac{4 \cdot F_{\text{вих}}}{3,14}}, \quad (4.14)$$

де $F_{\text{вих}}$ – сумарна площа вихідних отворів з РРП до пневмобаллонів пневмопідвіски.

Експериментальні дослідження показують, що залежність $d_y = f(h_n)$ у конструкції, що зображена на рисунку 4.3 має вигляд, представлений на рисунку 4.4.

З рисунку 4.4 видно, що залежність $d_y = f(h_n)$ істотно нелінійна. Однак, в залежності від величини аргументу h_n на графіку умовно можна виділити V характерних ділянок:

- I - деформація клапана 2 без його відриву від сідла в корпусі 1 (див. рис. 4.3);

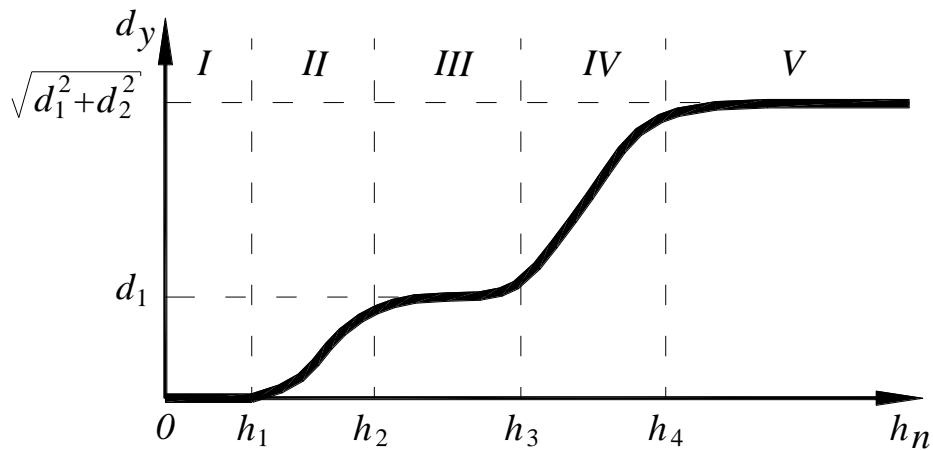


Рис. 4.4. Типова характеристика $d_y = f(h_n)$ у двоступеневого РРП конструкції, що зображена на рисунку 4.3, при наповненні пневматичних балонів підвіски КТЗ

- II - підйом клапана 2 з збільшенням d_y до величини, що дорівнює d_1 (див. рис. 4.3);
- III - підйом клапана 2 без відкриття пояском 4 отвору d_2 , за умови, що $d_y = d_1$ (див. рис. 4.3);
- IV - підйом клапана 2 з відкриттям пояском 4 отвору d_2 (див. рис. 4.3);
- V - підйом клапана 2 при $d_y = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$, з повністю відкритим отвором d_2 (див. рис. 4.3).

Описуючи кожен з цих ділянок послідовно, в результаті можна описати характеристику $d_y = f(h_n)$ поетапно (по ділянках I ... V), за рахунок чого шукана математична модель може бути спрощена.

Для вирішення цього завдання перш за все необхідно визначитися з залежністю:

$$h_n = f(l_n). \quad (4.15)$$

де h_n – переміщення плунжера 3 (див. рис. 4.3);

l_n – переміщення кузова транспортного засобу.

Для цього розглянемо схему, що приведена на рисунку 4.5, в якій застосуємо принцип інверсії, тобто переміщується не корпус 1 (див. рис. 4.3), а шарнір поз. 11 відносно корпусу 1.

На рисунку 4.5 відомими значеннями є: x_0 , y_0 , l_T , $l_{пр}$, l_n , початкове положення важеля $BC = l_{пр}$ – горизонтальне.

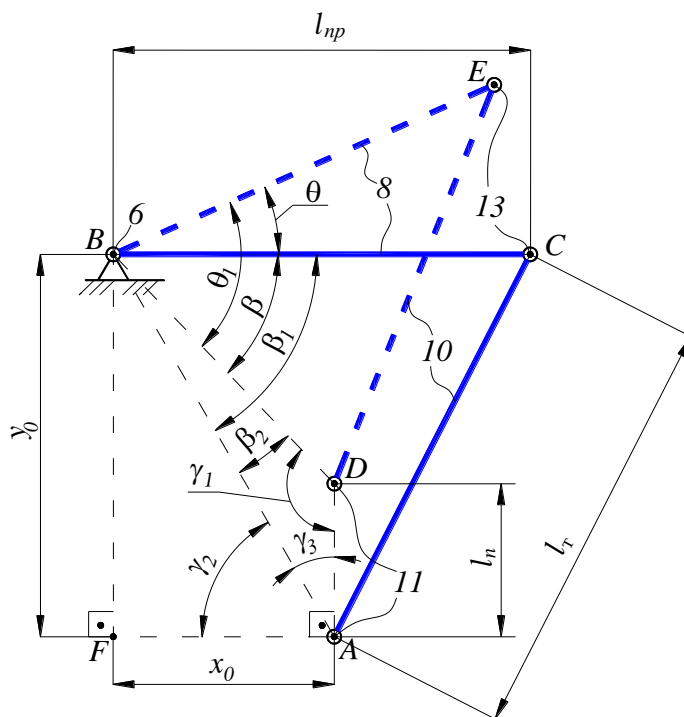


Рис. 4.5. Принципова схема переміщень важеля механізму привода РРП для визначення залежності $\theta = f(l_n)$: θ - кут повороту важеля 8 (див. рис. 4.3); l_n – як і раніше переміщення кузова автомобіля; поз. 6, 8, 10, 11, 13 – відповідають тим же позиціям, що позначені на рисунку 4.3; точки A, D – переміщення шарніра 11 з точки A до точки D ; точки C, E – переміщення шарніра 13 з точки C до точки E

Виходячи з геометричних співвідношень, що зображені на рисунку 4.5 можна записати:

$$BC = BE = l_{np};$$

$$DE = AC = l_r;$$

тобто:

$$l_r = \sqrt{y_0^2 + (l_{np} - x_0)^2}. \quad (4.16)$$

Кути θ та β можна визначити з рівнянь:

$$\theta = \theta_1 - \beta; \quad (4.17)$$

$$\beta = \beta_1 - \beta_2. \quad (4.18)$$

З трикутника $\triangle ABC$ та теореми про косинус запишемо:

$$\beta_1 = \arccos\left(\frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC \cdot AB}\right). \quad (4.19)$$

З трикутника $\triangle ABD$ та теореми синусів:

$$\frac{AD}{\sin \beta_2} = \frac{AB}{\sin \gamma_1} = \frac{BD}{\sin \gamma_3};$$

$$\beta_2 = \arcsin\left(\frac{AD}{BD} \cdot \sin \gamma_3\right); \quad (4.20)$$

$$\gamma_3 = \frac{\pi}{2} - \gamma_2. \quad (4.21)$$

Значення кута γ_2 не складно визначити з трикутника $\triangle AFB$:

$$\gamma_2 = \arcsin\left(\frac{y_0}{AB}\right). \quad (4.22)$$

З трикутника $\triangle ABD$ та теореми косинусів запишемо:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \gamma_3}. \quad (4.23)$$

З трикутника $\triangle BED$ та теореми косинусів:

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{BE^2 + BD^2 - DE^2}{2 \cdot BE \cdot BD}\right). \quad (4.24)$$

При відомому θ (див. рівняння (4.17)) можна визначити переміщення плунжера h_n відповідно за схемою, що зображена на рисунку 4.6.

З трикутника $\triangle OAB$ (див. рис. 4.6) можна записати:

$$h_n = l_{pt} \cdot \sin \theta. \quad (4.25)$$

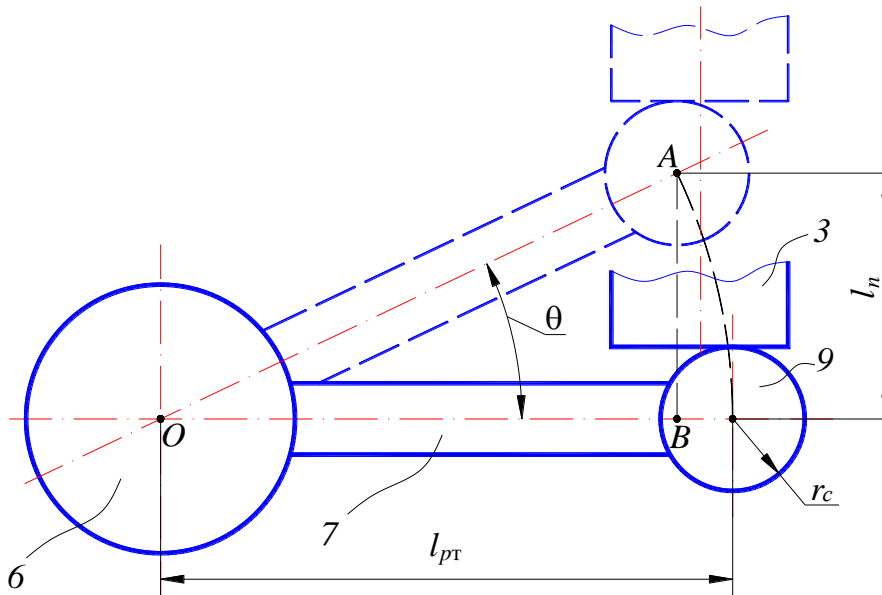


Рис. 4.6. Схема переміщення плунжера:

поз. 3, 6, 7, 9 - відповідають позиціям, що зображені на рисунку 4.3

Розпишемо математичну модель по ділянках (етапах) $I \dots V$, що наведні на рисунку 4.4:

- етап I , в діапазоні $0 \leq h_n \leq h_1$

$$d_y = 0; \quad (4.26)$$

- етап II , в діапазоні $h_1 < h_n \leq h_2$ значення d_y знаходиться в діапазоні

$$0 \leq d_y \leq 2 \cdot \pi \cdot r_{cd} \cdot (h_2 - h_1); \quad (4.27)$$

де

$$h_2 = \frac{d_1^2}{8 \cdot r_{cd}} + h_1; \quad (4.28)$$

В рівнянні (4.27) та (4.28) величину r_{cd} можна визначити з кресленика, що зображено на рисунку 4.7;

У такому разі величина d_y буде змінюватися за рівнянням (4.29), як можна побачити з рисунку 4.3 та рисунку 4.7:

$$d_y = \sqrt{8 \cdot r_{cd} \cdot (h_n - h_1)}; \quad (4.29)$$

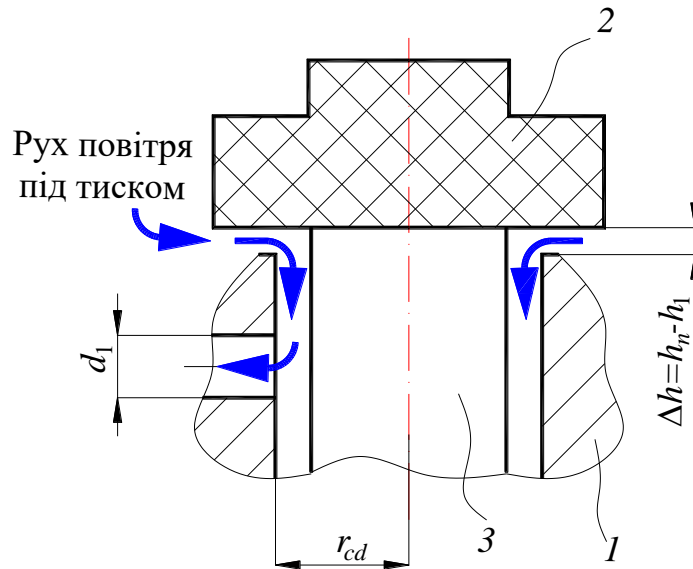


Рис. 4.7. Схема для визначення умовного діаметра прохідного перетину d_y на етапі II: поз. 1, 2, 3 - відповідають позначенням, що зображені на рисунку 4.3

- етап III, в діапазоні $h_2 < h_n \leq h_3$

$$d_y = d_1, \quad (4.30)$$

h_3 – відповідає моменту початку відкриття отвору d_2 , який зображено на рисунку 4.3 та рисунку 4.8;

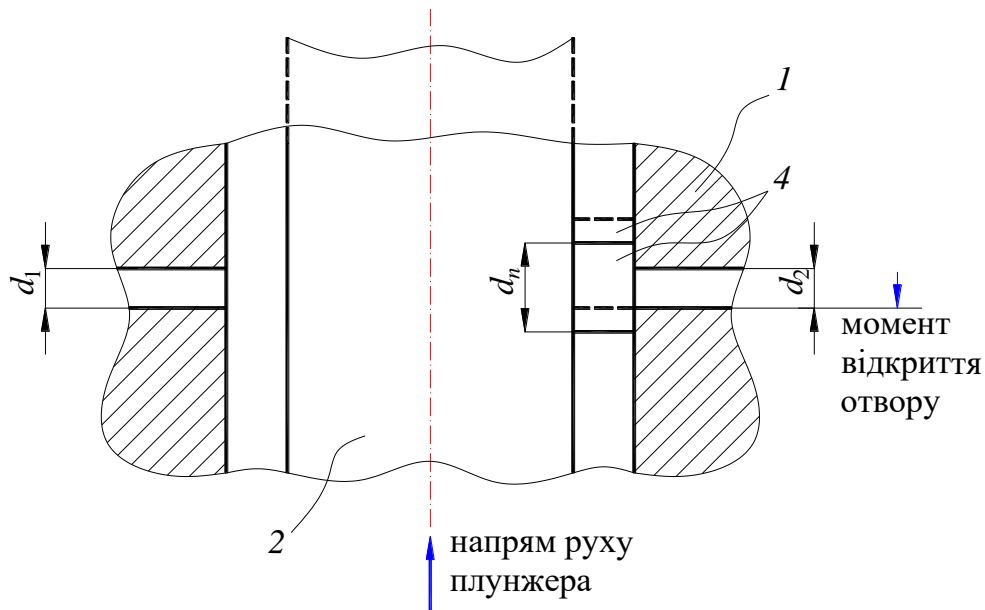


Рис. 4.8. Схема переміщення плунжера на етапі III: поз. 1, 2, 4 - відповідають позначенням, що зображені на рисунку 4.3

З рисунка 4.8:

$$h_3 = \frac{d_n - d_2}{2}, \quad (4.31)$$

де d_n – позначено на рисунку 4.8;

- етап IV, в діапазоні $h_3 < h_n \leq h_4$, де h_4 показано на рисунку 4.9

$$h_4 = h_3 + d_2, \quad (4.32)$$

$$d_1 < d_y \leq \sqrt{d_1^2 + d_2^2}, \quad (4.33)$$

$$d_y = \sqrt{d_1^2 + \frac{4 \cdot S_{\text{сегм}d_2}}{\pi}}, \quad (4.34)$$

$$S_{\text{сегм}d_2} = \arccos\left(1 - \frac{\Delta h}{r}\right) \cdot r^2 - (r - \Delta h) \cdot \sqrt{2 \cdot r \cdot \Delta h - \Delta h^2}, \quad (4.35)$$

де

$$\Delta h = h_n - h_3, \quad (4.36)$$

Величину $S_{\text{сегм}d_2}$ позначено на рисунку 4.9, а величину r можна визначити з залежності:

$$r = \frac{d_2}{2}, \quad (4.37)$$

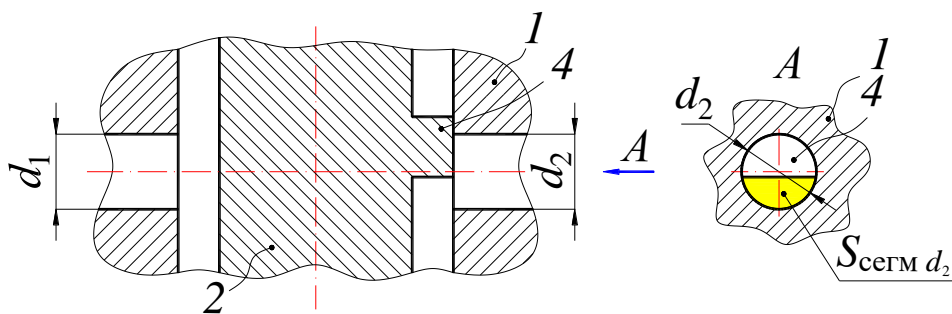


Рис. 4.9. Схема переміщення плунжера на IV етапі:
 поз. 1, 2, 4 - відповідають позначенням, що зображені на рисунку 4.3

- етап V, в діапазоні $h_n > h_4$

$$d_y = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}, \quad (4.38)$$

Програма для розрахунку 5-ти етапів роботи РРП представлена у вигляді Лістингу 4.3.

Лістинг 4.3 – Програма для розрахунку етапів роботи РРП (див. рис. 4.4)

```
clc, clear
% Розрахунок 5-ти етапів переміщення
% плунжера РРП
d1=1.5;d3=8;d2=2.5;a=3.2;
% d3/2=гсд рис. 4.7; a=ап рис. 4.7
% 1-й етап
h1=[0 0.4];
f1=[0 0];
du1=sqrt(4*f1/pi);

% 2-й етап
h2m=d1^2/(d3*4);
f2m=pi*(d1^2)/4;
h2=[0.4 h2m+0.4];
f2=[0 f2m];
du2=sqrt(4*f2/pi);

% 3-й етап
h3=[h2m+0.4 (h2m+0.4)+(a-d2)/2];
f3=[f2m f2m];
du3=sqrt(4*f3/pi);

% 4-й етап
h4min=(h2m+0.4)+(a-d2)/2;
h4max=h4min+d2;
f4min=f2m;
i=2;
f4(1)=f2m;
h4(1)=(h2m+0.4)+(a-d2)/2;
r=d2/2;
for dh=0:d2/100:d2
    s(i)=acos(1-dh/r)*(r)^2-(r-dh)*sqrt(dh*d2-dh^2);
    f4(i)=f4min+s(i);
```

```

    h4(i)=h4min+dh;
    i=i+1;
end
du4=sqrt(4.*f4/pi);

% 5-й етап
f5=[max(f4) max(f4)];
du5=sqrt(4*f5/pi);
h5min=max(h4);
h5max=h5min+1.5;
h5=[h5min h5max];

plot(h1,du1,'r',h2,du2,'r',h3,du3,'r',h4,du4,'r',h5,du5,'r'),grid;
xlabel('Переміщення плунжера h_п, мм.')
ylabel('Умовний діаметр d_y, мм.')

```

У програмі, що представлена у Лістингу 4.3, застосовано цикл типу *for ... end*. Конструкція такого циклу має вигляд:

for var = Вираз, Інструкція, ..., Інструкція end

Вираз частіше за все записується у вигляді *s:d:e*, де позначено *s* – початкове значення перемінної цикла *var*, *d* – приріст цієї змінної та *e* – кінцеве значення керуючої змінної, при досягненні якої цикл завершується. Список Інструкцій, що виконуються у циклі завершується оперетором *end*.

Крім того у програмі, що представлена у Лістингу 4.3, використано функцію *max(A)* – вона повертає найбільший елемент вектора *A*.

Результати розрахунків за програмою, що представлена у Лістингу 4.3, представлені на рисунку 4.10.

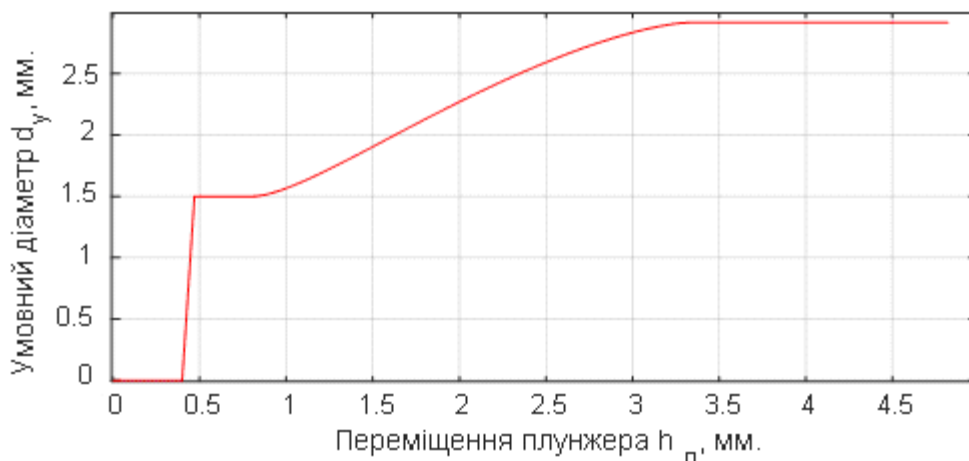


Рис. 4.10. Розрахунок умовного діаметру d_y в залежності від h_n

4.4. Умовний розподіл фізичної моделі на більш прості ланки

Часто фізичну модель досліджуваного об'єкта можна представити у вигляді більш простих ланок, пов'язаних між собою: послідовно; паралельно; змішано.

Найбільш загальний випадок - змішане з'єднання ланок.

Таке уявлення аналізуємих лінійних і нелінійних систем та механізмів широко поширене в технічній літературі та дозволяє значно спростити і узагальнити їх математичний аналіз.

Як приклад розглянемо математичну модель розрахунку коефіцієнта корисної дії (ККД) кулачкового механізму розтиску колодок барабанного гальма з кулачком евольвентного профілю (рис. 4.11).

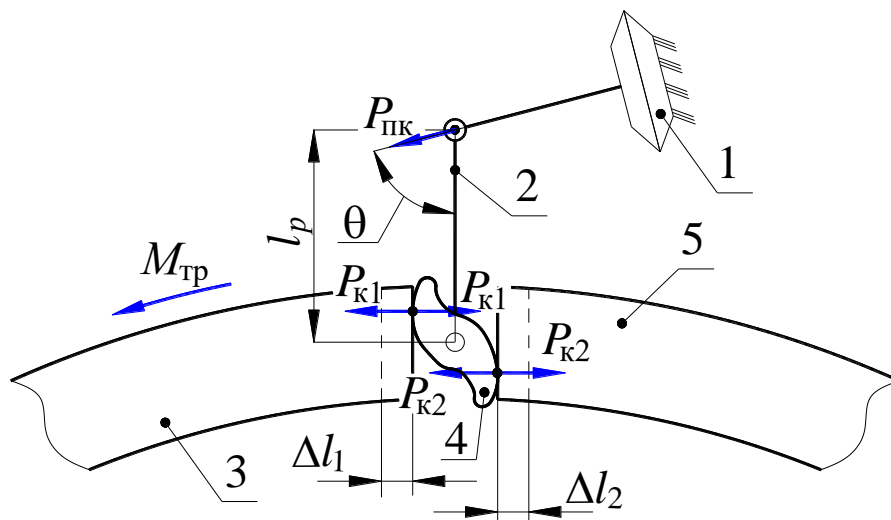


Рис. 4.11. Розрахункова схема кулачкового механізму розтиску:

1-пневмокамера; 2- натискний важіль поворотного кулака;

4 - кулак; 3, 5 - притискна і відтискна колодки відповідно;

$P_{пк}$ – зусилля від пневмокамери; $P_{к1}$, $P_{к2}$, – привідні зусилля на колодки; $M_{тр}$ – гальмовий момент; Δl_1 , та Δl_2 – переміщення привідних торців колодок при повороті кулака 4

Як відомо ККД механізму або його ланки в загальному вигляді дорівнює:

$$\eta = \frac{A_k}{A_3} = \frac{A_3 - A_{тр}}{A_3} = 1 - \frac{A_{тр}}{A_3}, \quad (4.38)$$

де A_k – корисна робота механізму або його ланки;

A_3 – витрачена робота, виконана на вході в механізм або в його ланку;

$A_{тр}$ – робота тертя в механізмі або в його ланці.

Виходячи з цього, а також з рисунку 4.11, розрахункова схема для визначення ККД механізму розтиску умовно може бути представлена у вигляді набору ланок зі змішаним з'єднанням, як це показано на рисунку 4.12.

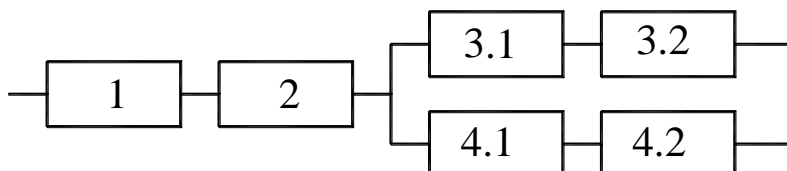


Рис. 4.12. Ланкова схема для визначення ККД механізму розтиску:

1 - ланка, що описує втрати на тертя в шарнірному з'єднанні штока пневмокамери 1 і натискного важеля 2 рис. 4.11; 2 - ланка, що описує втрати на тертя на осі розтискного кулака 4 рис. 4.11; 3.1, 4.1 - ланки, що описують втрати на тертя в контакті «розтискний кулак 4 - колодки 3, 5» у притискної 3 та відтискної 5 колодок відповідно; 3.2, 4.2 - ланки, що описують втрати на тертя в опорах відповідно притискної 3 та відтискної 5 колодок

Розглянемо ланки 1 і 2 та об'єднуючу їх ланку 1-2.

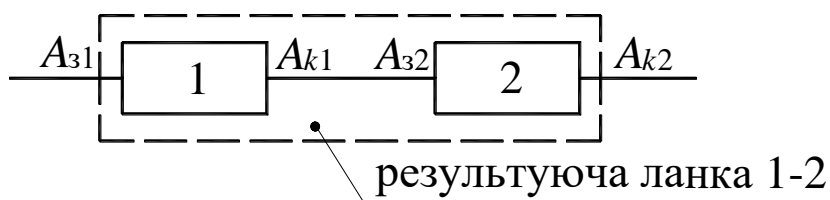


Рис. 4.13. Ланки 1, 2 та об'єднуюча їх (результуюча) ланка 1-2

Для ланки 1 запишемо:

$$\eta_1 = \frac{A_{k1}}{A_{31}}, \quad (4.39)$$

Для ланки 2 запишемо:

$$\eta_2 = \frac{A_{k2}}{A_{32}} = \frac{A_{k2}}{A_{k1}}, \quad (4.40)$$

Для ланки 1-2 запишемо:

$$\eta_{1-2} = \frac{A_{k2}}{A_{31}}, \quad (4.41)$$

Візьмемо добуток рівняння (4.39) та рівняння (4.40) і таким чином ми бачимо, що:

$$\eta_{1-2} = \eta_1 \cdot \eta_2, \quad (4.42)$$

Тобто у послідовно з'єднаних ланок, для отримання сумарного ККД, ККД простих ланок перемножуються.

Розглянемо паралельно з'єднані ланки (рис. 4.14).

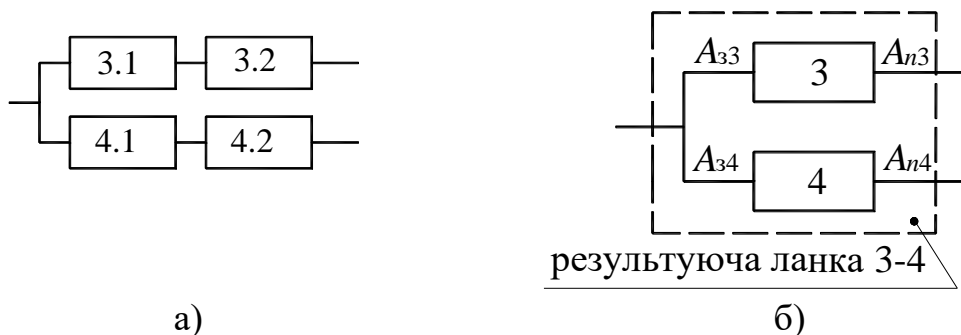


Рис. 4.14. Паралельні ланки:

а) – ланкова схема; б) – схема, що має об'єднувальну ланку

На рисунку 4.14, відповідно до рівняння (4.42) запишемо:

$$\eta_3 = \eta_{3.1} \cdot \eta_{3.2}; \quad \eta_4 = \eta_{4.1} \cdot \eta_{4.2}; \quad \eta_3 = \frac{A_{n3}}{A_{33}}; \quad \eta_4 = \frac{A_{n4}}{A_{34}}, \quad (4.43)$$

Для результуючої (що об'єднує ланки 3 і 4) ланка 3-4 матиме вигляд:

$$\eta_{3-4} = \frac{A_{n3} + A_{n4}}{A_{33} + A_{34}}, \quad (4.44)$$

Перепишемо рівняння (4.44) наступним чином:

$$\eta_{3-4} = \frac{A_{n3}}{A_{n3}} \cdot \frac{1 + \frac{A_{n4}}{A_{n3}}}{\frac{A_{33}}{A_{n3}} + \frac{A_{34}}{A_{n3}} \cdot \frac{A_{n4}}{A_{n4}}} = \frac{1 + K_A}{\frac{1}{\eta_3} + \frac{1}{\eta_4} \cdot K_A} = \frac{\eta_3 \cdot \eta_4 (1 + K_A)}{\eta_3 \cdot K_A + \eta_4}, \quad (4.45)$$

де K_A – константа, що визначається з залежності:

$$K_A = \frac{A_{n4}}{A_{n3}} = \frac{\Delta l_2 P_{к2}}{\Delta l_1 P_{к1}}, \quad (4.46)$$

$P_{к1}, P_{к2}$ – позначені на рисунку 4.11;

$\Delta l_1, \Delta l_2$ – також позначено на рисунку 4.11

Барабанне гальмо з розтискним кулаком є гальмом «рівних переміщень», тобто:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2, \quad (4.47)$$

або «рівних гальмових моментів», тобто :

$$M_1 = M_2, \quad (4.48)$$

де M_1, M_2 – гальмові моменти на притискній та відтискній колодках відповідно.

З рівняння (4.5) та рівняння (2.19) (див. Тема 2), з урахуванням рівняння (4.47) та рівняння (4.48) можна прийняти:

$$K_A = \frac{K_{e1}}{K_{e2}} = \frac{\cos \alpha_0 (a - \mu \cdot W) - \sin \alpha_0 (W + \mu \cdot a) + \mu \cdot \rho_y}{\cos \alpha_n (a + \mu \cdot W) - \sin \alpha_n (W - \mu \cdot a) - \mu \cdot \rho_y}, \quad (4.49)$$

де всі складові визначені на рисунку 4.1, а індекси «0» та «n» при α позначають належність до відтискної та притискної колодкам відповідно. Таким чином, приходимо до остаточного виду величини ККД розглянутого кулачкового розтискного механізму:

$$\eta_{к.р.} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \frac{\eta_{3.1} \cdot \eta_{3.2} \cdot \eta_{4.1} \cdot \eta_{4.2} (1 + K_A)}{\eta_{3.1} \cdot \eta_{3.2} \cdot K_A + \eta_{4.1} \cdot \eta_{4.2}}, \quad (4.50)$$

Залишається визначитися з усіма складовими рівняння (4.50).

Наприклад, для η_1 (див. рис. 4.15):

$$A_{тр} = M_{тр} \cdot \Delta \varphi, \quad (4.51)$$

$$A_3 = P_{пк} \cdot \sin \theta \cdot l_p \cdot \Delta \varphi, \quad (4.52)$$

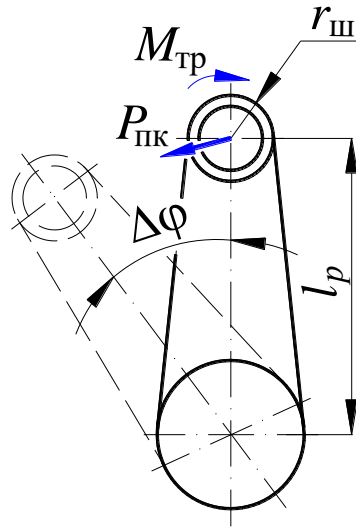


Рис. 4.15. Розрахункова схема для оцінки η_1

у першому наближенні можна вважати:

$$A_{\text{тр}} = r_{\text{ш}} \cdot K_r \cdot P_{\text{пк}} \cdot f_1 \cdot \Delta\varphi, \quad (4.53)$$

де $r_{\text{ш}}$, $P_{\text{пк}}$, $\Delta\varphi$, l_p – позначені на рисунку 4.15, θ – позначено на рисунку 4.11; K_r – коефіцієнт, що враховує закон розподілу тисків в парі тертя «втулка-палець», в розрахунках можна приймати $K_r = 1.1 \dots 1.2$; f_1 – коефіцієнт тертя в парі тертя «втулка-палець».

Таким чином, при $\theta = \pi / 2$ з урахуванням рівняння (4.52) та рівняння (4.53) вираз (4.38) у даному випадку приймає вигляд:

$$\eta_1 = 1 - K_r \cdot f_1 \cdot \frac{r_{\text{ш}}}{l_p}, \quad (4.54)$$

Розглянемо також величину $\eta_{3.1}$, схема для визначення якої представлена на рисунку 4.16.

При повороті осі розтискного кулака на нескінченно малий кут $d\varphi$ сила P_k переміститься на:

$$dl = r_e \cdot d\varphi, \quad (4.55)$$

Тоді:

$$A_3 = P_k \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_e d\varphi = P_k \cdot r_e \cdot (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (4.56)$$

де $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$ – кут повороту осі розтискного кулака при загальмовуванні КТЗ.

то:

$$\cup AB = r_e \frac{\varphi_2^2 - \varphi_1^2}{2}. \quad (4.64)$$

З урахуванням рівнянь (4.57), (4.58), (4.64) отримаємо:

$$A_{\text{тр}} = P_{\text{к}} \cdot f_3 \cdot r_e \cdot \frac{(\varphi_2^2 - \varphi_1^2)}{2}. \quad (4.65)$$

Маючи вирази (4.56), (4.65) отримуємо:

$$\eta_{3.1} = 1 - f_3 \cdot \frac{(\varphi_2 + \varphi_1)}{2}. \quad (4.66)$$

З рівняння (4.66) можна зробити дуже важливий висновок. Зі збільшенням: зносу гальмової накладки; зазору «гальмова накладка-барабан», в тому числі й при нагріванні барабана; деформацій гальмового барабана, збільшується сума $(\varphi_2 + \varphi_1)$, а значить ККД механізму розтиску знижується.

Таким чином, можна розшифрувати всі інші складові рівняння (4.50).

Рішення систем нерівностей

5.1. Критерій самозаклинювання притискної колодки

5.2. Аналітичне рішення нерівності

5.3. Графічне рішення систем нерівностей

5.4. Графічне представлення 3-D нерівностей

5.5. Системи рівнянь з обмеженнями у вигляді нерівностей

Нерівність – це запис, в якій числа, змінні або вирази з'єднані знаком $<$, $>$, \leq або \geq . Тобто нерівністю можна назвати порівняння чисел, змінних або виразів. Знаки $<$, $>$, \leq і \geq називаються знаками нерівності.

Нерівності отримали дуже широке поширення в математичних моделях технічних систем завдяки своїй простоті і інформативності.

Дуже часто вони виступають у вигляді і якісного, і кількісного критерію того чи іншого процесу, тієї чи іншої величини, функціональної залежності.

5.1. Критерій самозаклинювання притискної колодки

Наведемо простий приклад: повернемося ще раз до притискної колодки барабанного гальма (див. Рис. 5.1). Раніше було отримано, що гальмівний момент на такій колодці дорівнює:

$$M_k = \frac{P_k(a+c) \cdot \mu \cdot \rho_y}{\cos \alpha(a + \mu \cdot W) - \sin \alpha(W - \mu \cdot a) - \mu \cdot \rho_y}. \quad (5.1)$$

Ще в 80-ті роки минулого століття на кафедрі автомобілів проф. Федосов О.С. висловив гіпотезу, що первісною причиною так званого «вереску» або «скрипу» барабанного гальма може виступати так зване підклинювання притискної колодки з подальшими її автоколиваннями.

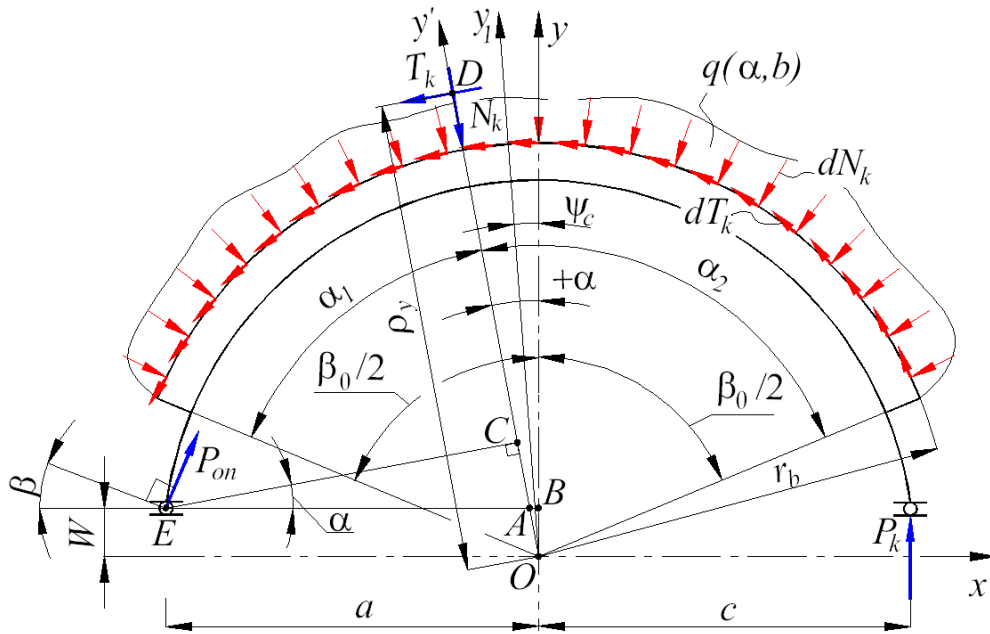


Рис. 5.1. Модель притискної плаваючою колодки з двома ступенями вільності:

- $q(\alpha, b)$ – закон розподілу контактних тисків на гальмову накладку;
- y_1 – бісектриса кута охоплення гальмової накладки; β_0 – кут охоплення гальмової накладки; P_k – привідне зусилля з боку механізму розтиску;
- ψ_c – кут зміщення бісектриси кута охоплення накладки щодо осі y ;
- y' – вісь, вздовж якої діє результуюча N_k

Підклинювання – це різкий сплеск величини гальмового моменту за рахунок, наприклад:

- стрибка величини коефіцієнта тертя μ ;
- несприятливого перерозподілу контактних тисків в парі тертя «гальмова накладка-барaban», тощо.

Що таке різкий сплеск M_k з математичної точки зору в (5.1) – це, наприклад, рівність нулю знаменника (5.1).

Звідси можна отримати критерій:

$$\cos \alpha(a + \mu \cdot W) - \sin \alpha(W - \mu \cdot a) - \mu \cdot \rho_y > 0. \quad (5.2)$$

по якому вже на стадії проектування барабанного гальма можна перевіряти його на схильність до «вереску» або «скрипу».

Як бачимо, рівняння (5.2) і є нерівність.

Розглянемо ще кілька прикладів складання та аналізу нерівностей.

5.2. Аналітичне рішення нерівності

Розглянемо плаваючу колодку барабанного гальма, що знаходиться в транспортному положенні:

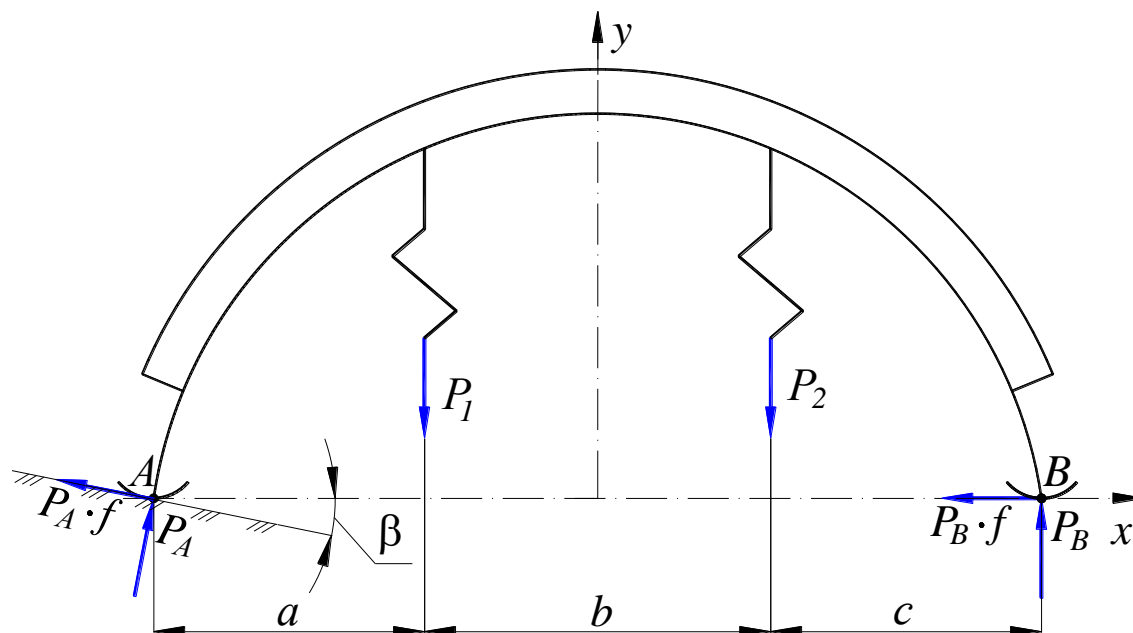


Рис. 5.2. Схема сил, що діють на колодку з двома ступенями свободи, що знаходиться в транспортному положенні: P_1, P_2 – зусилля стяжних пружин; f – коефіцієнт тертя між колодкою та її опорами

Для того, щоб колодка (рис. 5.2) під дією реакцій опор не "сповзала», в даному випадку вправо (що може призвести до підгальмовування гальмових механізмів при русі автомобіля, а значить і до підвищеного зносу гальмової накладки, перегріву деталей гальмового механізму та до непродуктивної додаткової витрати палива), необхідно, щоб з рівняння статичної рівноваги $\sum F_x = 0$ виконувалась нерівність:

$$P_A \cdot \sin \beta < P_A \cdot f \cdot \cos \beta + P_B \cdot f . \quad (5.3)$$

З рівняння статичної рівноваги $\sum F_y = 0$ отримаємо рівність:

$$P_A \cdot \cos \beta + P_B = P_1 + P_2 . \quad (5.4)$$

Підставляючи рівність (5.4) в нерівність (5.3) отримаємо:

$$P_A \cdot \sin \beta < (P_1 + P_2) \cdot f . \quad (5.5)$$

З рівняння статичної рівноваги $\sum M_B = 0$, маємо:

$$P_A = \frac{P_1 \cdot (b + c) + P_2 \cdot c}{(a + b + c) \cdot (\cos \beta + f \cdot \sin \beta)}. \quad (5.6)$$

Підставимо рівняння (5.6) в нерівність (5.5) та після нескладних перетворень отримуємо нерівність:

$$\tan \beta < \frac{(P_1 + P_2) \cdot f \cdot (a + b + c)}{P_1 \cdot (b + c) + P_2 \cdot c - (P_1 + P_2) \cdot f^2 \cdot (a + b + c)}. \quad (5.7)$$

Виконання цієї нерівності гарантує «несповзання» і, як наслідок, непритискання колодки, у її транспортному положенні, до гальмівного барабану.

Розглянемо дуже типовий для конструкції барабанного гальма випадок, коли:

$$P_1 = P_2 \text{ та } a = c. \quad (5.8)$$

Підставивши рівності (5.8) в нерівність (5.7) можна записати:

$$\beta < \arctan \left(\frac{2 \cdot f}{1 - 2 \cdot f^2} \right). \quad (5.9)$$

З нерівності (5.9) витікає, що, наприклад при $f = 0.2$, $\beta < 23.5^\circ$, а при $f = 0.05$, $\beta < 5.7^\circ$. Тобто в даному випадку зниження коефіцієнта тертя між колодкою та її опорами навіть шкідливо для конструкції гальма.

5.3. Графічне рішення систем нерівностей

Розглянемо плаваючу або з розрізною опорою гальмову колодку, що знаходиться у транспортному положенні.

При визначенні приводного зусилля на колодках гальма, необхідно знати нечутливість гальмового механізму до приводного тиску. При цьому потрібно прагнути до того, щоб ця нечутливість була мінімальною.

Ця величина, перш за все, залежить від зусилля стяжних пружин колодок, тому дуже важливо вміти ці пружини правильно підбирати.

Розрахункова схема для визначення зусилля стяжних пружин колодки з одним ступенем вільності та розрізною опорою A показана на рисунку 5.3.

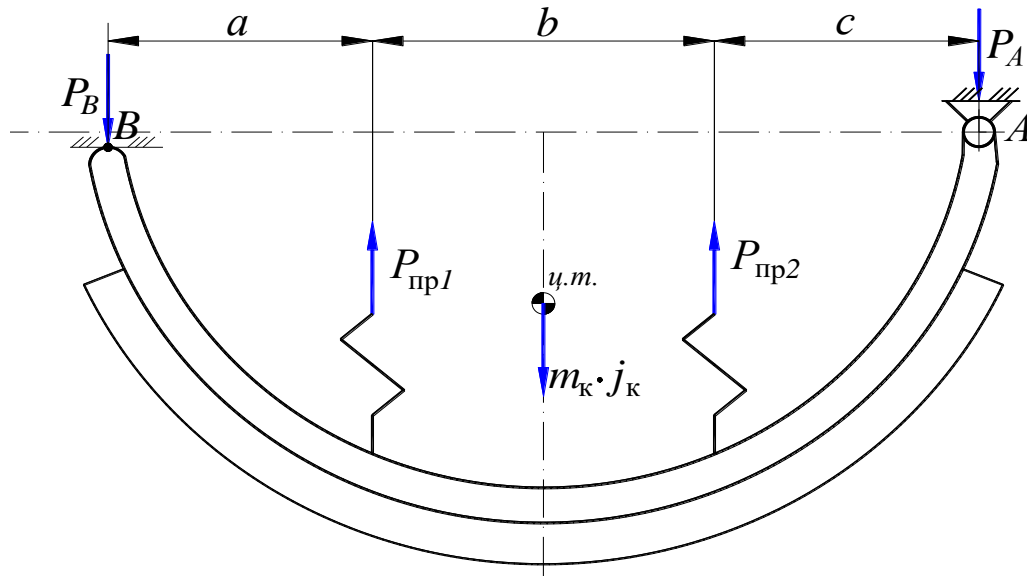


Рис. 5.3. Схема сил, що діють на гальмівну колодку з розрізною опорою A , в транспортному положенні: $ц.т.$ – центр тяжіння колодки

Якщо зусилля стяжних пружин недостатньо, то в процесі коливань колеса, що наїжджає на нерівності дороги, на колодку діє сила інерції $m_k \cdot j_k$ і вона може відриватися від опор A і B (див. рис. 5.3). При цьому переміщаючись на величину зазору «барабан-гальмова накладка», який порівняно невеликий (0,2...1,2 мм), колодка може битися об гальмовий барабан. І це, як і в попередньому випадку (див. рис. 5.2), може призвести до підвищеного зносу гальмової накладки, перегріву деталей гальмового механізму та додаткової витрати палива.

Щоб позбутися цих явищ, необхідно, щоб у цих умовах:

$$P_B > 0 \text{ та } P_A > 0. \quad (5.10)$$

З рівняння рівноваги $\sum M_B = 0$, з урахуванням умов (5.10) отримуємо нерівність:

$$P_{\text{пр1}} \cdot a + P_{\text{пр2}} \cdot (a + b) - m_k \cdot j_k \cdot (a + 0,5 \cdot b) > 0. \quad (5.11)$$

З рівняння рівноваги $\sum M_A = 0$, отримаємо:

$$P_{\text{пр1}} \cdot (b + c) + P_{\text{пр2}} \cdot c - m_{\text{к}} \cdot j_{\text{к}} \cdot (c + 0,5 \cdot b) > 0. \quad (5.12)$$

Приведемо нерівність (5.11) та нерівність (5.12) до виду:

$$P_{\text{пр2}} > m_{\text{к}} \cdot j_{\text{к}} \cdot \frac{a + 0,5 \cdot b}{a + b} - P_{\text{пр1}} \cdot \frac{a}{a + b}. \quad (5.13)$$

$$P_{\text{пр2}} > m_{\text{к}} \cdot j_{\text{к}} \cdot \frac{c + 0,5 \cdot b}{c} - P_{\text{пр1}} \cdot \frac{b + c}{c}. \quad (5.14)$$

У якості прикладу для колодки з параметрами $b = 0.12$ м, $a = c = 0.1$ м, $m_{\text{к}} = 3.6$ кг, $j_{\text{к}} = 8$ г, $g = 9.81$ м/с², наведемо графічне рішення системи нерівностей (5.13), (5.14).

Програма для необхідних розрахунків по рівнянням (5.13), (5.14) представлена у вигляді Лістингу 5.1 для програми *MatLAB*.

Лістинг 5.1 – Програма для розрахунку рівняння (5.13) та рівняння (5.14)

```
1  % Розрахунок стяжних пружин у колодки
2  % в транспортному положенні
3  clc, clear;
4  b=0.12;a=0.1;c=0.1;m=3.6;jk=8*9.8;
5  P1=[100 200];
6  % Умова 1
7  y1=m*jk*(a+b/2)/(a+b)-P1*a/(a+b);
8  % Умова 2
9  y2=m*jk*(c+b/2)/c-P1*(b+c)/c;
10 plot(P1,y1,'r',P1,y2,'m'),grid
11 title('Транспортне положення колодки');
12 xlabel('P_п_р_1, Н');
13 ylabel('P_п_р_2, Н');
14 legend('Умова 1','Умова 2');
```

Результати розрахунків по програмі, що наведена у Лістингу 5.1 представлені на рисунку 5.4.

З рисунку 5.4 видно, що рішенням для системи нерівностей (5.13), (5.14) є область допустимих значень $P_{\text{пр1}}$ та $P_{\text{пр2}}$, що знаходиться вище ламаної лінії *ABC* (див. рис. 5.4).

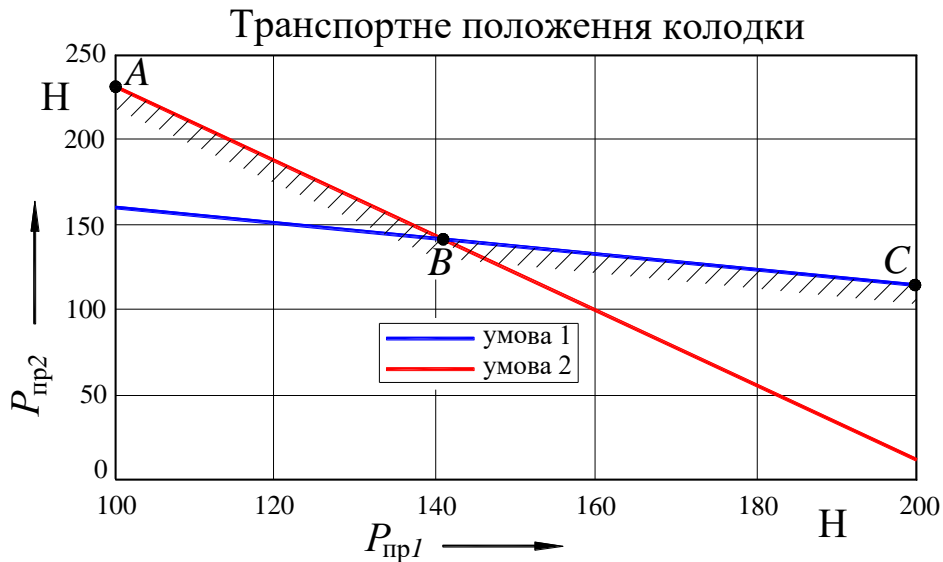


Рис. 5.4. Розрахунок стяжних пружин по нерівностям (5.13), (5.14)

Припустимо, що в процесі проектування гальмівного механізму вводиться додаткова вимога про уніфікацію пружин $P_{\text{пр1}}$ та $P_{\text{пр2}}$ (див. рис. 5.3), це призводить до третьої умови, на додаток до системи нерівностей (5.13), (5.14), яку можна записати у вигляді:

$$P_{\text{пр2}} = P_{\text{пр1}} \quad (5.15)$$

Результати розрахунків по системі рівнянь (5.13), (5.14), (5.15) представлені на рисунку 5.5. Програма для таких розрахунків аналогічна програмі, що представлена у Лістинку 5.1 і тому не наводиться.

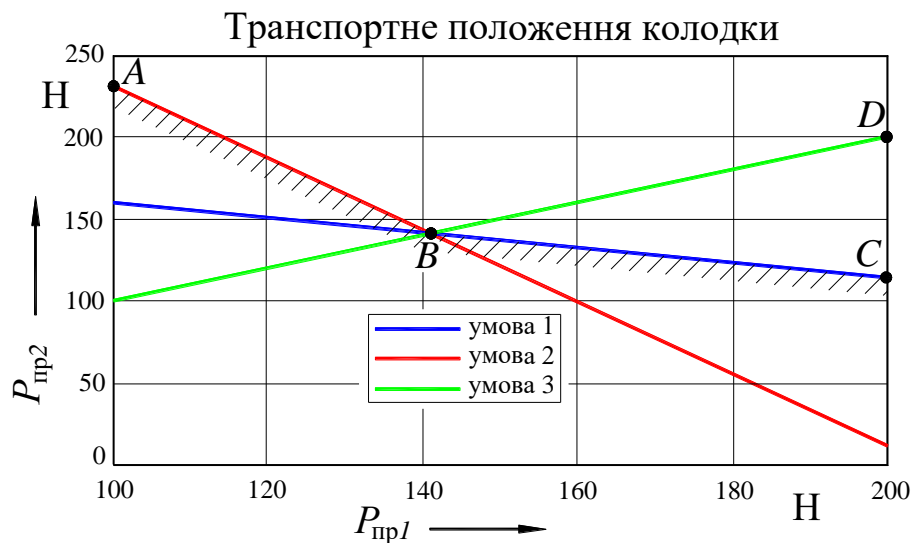


Рис. 5.5. Розрахунок стяжних пружин за рівняннями (5.13), (5.14) та (5.15)

З рисунку 5.5 видно, що рішенням для системи нерівностей (5.13), (5.14) та (5.15) є відрізок BD .

Далі припустимо також, що в процесі створення гальмового механізму вводиться ще одна додаткова вимога. А саме, виходячи із забезпечення мінімальної початкової нечутливості гальма до приводного тиску необхідно, щоб (див. рис. 5.2):

$$P_B \leq 150\text{Н}. \quad (5.16)$$

З умови статичної рівноваги колодки $\sum M_A = 0$, отримуємо:

$$P_B = \frac{P_{\text{пр1}} \cdot (b + c) + P_{\text{пр2}} \cdot c}{a + b + c}. \quad (5.17)$$

Підставляючи рівняння (5.17) в рівняння (5.16), після нескладних перетворень одержуємо четверту умову – нерівність до рівняння (5.13), рівняння (5.14) та рівняння (5.15):

$$P_{\text{пр2}} \leq 150 \cdot \frac{a + b + c}{c} - P_{\text{пр1}} \cdot \frac{b + c}{c}. \quad (5.18)$$

Результати розрахунків по рівнянням (5.13) – (5.15) та рівнянню (5.18) представлені на рисунку 5.6.

Як і в попередньому випадку (див. рис. 5.5) програма для таких розрахунків аналогічна програмі, що наведена в Лістингу 5.1.

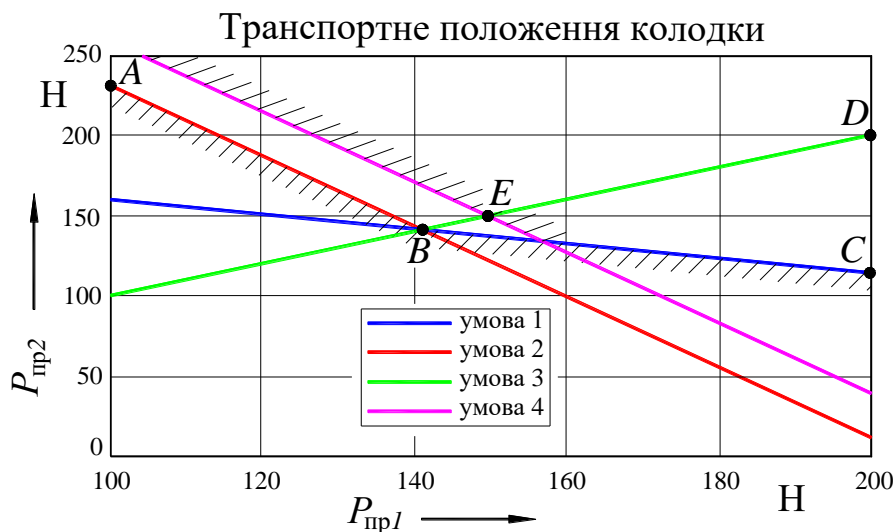


Рис. 5.6. Розрахунок стяжних пружин по рівнянням (5.13) – (5.15) та (5.18)

З рисунку 5.6 видно, що рішенням рівнянь (5.13) – (5.15), (5.18) є відрізок BE .

5.4. Графічне представлення 3-D нерівностей

В теорії міцності матеріалів існує критерій міцності Писаренко-Лебедева, який представлений у вигляді нерівності:

$$\chi \cdot \sigma_i + (1 - \chi) \cdot \sigma_1 \cdot A^{1-J} \leq [\sigma_+], \quad (5.19)$$

де σ_i – інтенсивність напружень

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (5.20)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні напруження;

$$\chi = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}, \quad (5.21)$$

$$J = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_i}, \quad (5.22)$$

$$A = \frac{\varphi - \sqrt{3} \cdot \chi}{1 - \chi}, \quad (5.23)$$

$$\varphi = \frac{[\sigma_+]}{[\tau]}, \quad (5.24)$$

де $[\sigma_+]$, $[\sigma_-]$, $[\tau]$ – допустимі граничні напруги при одноосьовому розтягу, стисненні та чистому зсуві (крученні) відповідно.

З теорії пружності відомо, що при одноосьовому розтягу, головні напруження в точці дорівнюють:

$$\sigma_1 = \sigma_+; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = 0. \quad (5.25)$$

При одноосьовому стиску:

$$\sigma_1 = 0; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \sigma_-. \quad (5.26)$$

При чистому зсуві:

$$\sigma_1 = \tau; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\tau. \quad (5.27)$$

У рівнянні (5.19) праву частину перенесемо вліво і зведемо ліву та праву частини в квадрат. Після цих перетворень для вирішення отриманого виразу можна використовувати команду `fminbnd`.

Для асфальтобетону з параметрами міцності:

$$[\sigma_+] = 0,25 \text{ МПа}, [\sigma_-] = 0,55 \text{ МПа}, [\tau] = 0,3 \text{ МПа},$$

використовуючи рівняння (5.19) побудуємо граничну поверхню міцності за програмою, що наведена в Лістингу 5.2. Результати розрахунків наведені на рисунку 5.7.

Лістинг 5.2 – Програма для розрахунку по рівнянню (5.19)

```
1 % Критерий Писаренко-Лебедева
2- clear, clc
3- sr=0.25e6;ss=0.55e6;t=0.3e6;
4- s2_ = -0.3e6:0.005e6:0.02e6;
5- s3_ = -1e6:0.005e6:0.05e6;
6- for i = 1:length(s2_)
7-     for j = 1:length(s3_)
8-         s2 = s2_(i);
9-         s3 = s3_(j);
10 % Блок определения S1_2
11-     if s2 < s3
12-         s1_2(j, i) = NaN;
13-     else
14 % Критерий Лебедева-Писаренко
15- f2 = @(s1) (sr.*((s1 - s2).^2 + (s2 - s3).^2 + (s3 -...
16- s1).^2).^0.5 ./ (ss.*sqrt(2)) + (1-sr/ss).*s1.* ...
17- ((sr/t-sqrt(3)*sr/ss)/(1-sr/ss)).^(1-...
18- (s1+s2+s3).*sqrt(2)./(((s1 - s2).^2 +...
19- (s2 - s3).^2 +(s3 - s1).^2).^0.5)) - sr).^2;
```

```

20-     s1_2(j, i) = fminbnd(f2, s2, 2e6);
21-     if (s1_2(j, i) < s2) | (f2(s1_2(j, i)) > 1e-1)
22-         s1_2(j, i) = NaN;
23-     end
24- end
25- end
26- end
27- hold on; grid on;
28- surf(s2_, s3_, s1_2,'EdgeColor', [0.3 0.99 0.3],...
29- 'FaceColor','none');
30- xlabel('S_2, Па'), ylabel('S_3, Па'),...
31- zlabel('S_1, Па');
32- title('Критерій Писаренко-Лебедєва');
33- text(0.02e6,-0.3e6,0.28e6,'\tau');
34- text(0,0.02e6,0.28e6,'\sigma_+');
35- text(0,-0.52e6,-0.04e6,'\sigma_-');
36 % 3 точки
37- plot3([0 0 0], [0 -ss -t ], [sr 0 t], 'ok');
38- plot3([0 0], [-t*1.1 -t*0.9], [1.35*t 0.6*t], '+r');
39- text(0,-t*1.28,1.35*t,'A');
40- text(0,-t*0.8,0.6*t,'B');

```

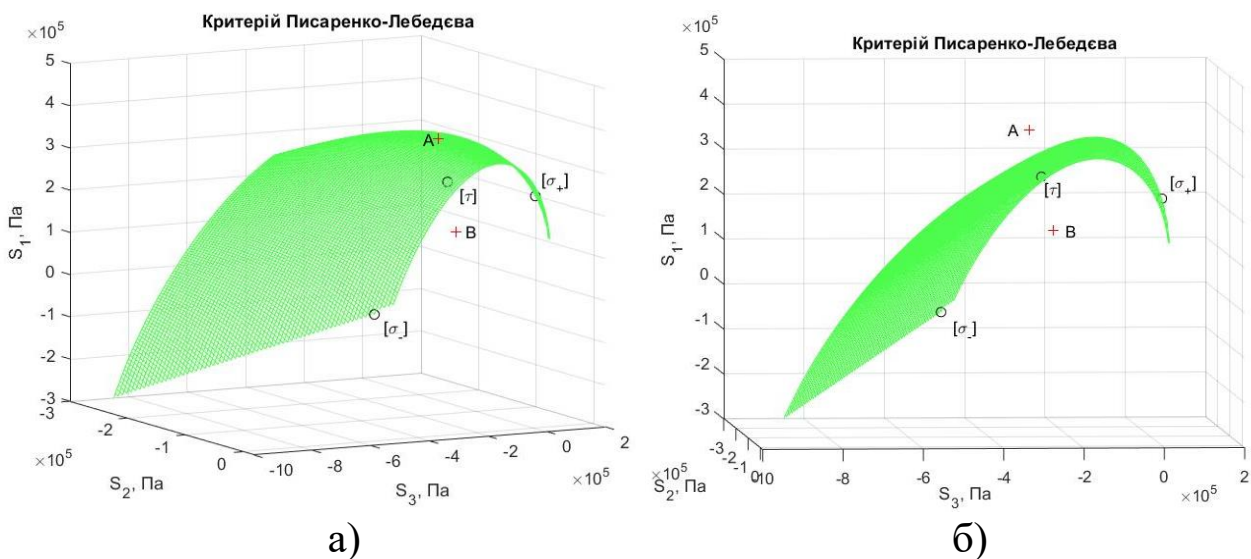


Рис. 5.7. Гранична поверхня по критерію міцності Писаренко-Лебедєва

У програмі, що наведена у Лістингу 5.2 використані:

- функція *length(x)* – знаходить розмір вектора *x*;
- *NaN* - повертає подання для нечислових величин;
- в рядку 21 застосовано "|" – позначення функції "or" (логічне АБО);
- в рядках 33 ... 35, 39, 40 використана команда:

text(X,Y,Z,'string') – додає у тривимірний графік текст, заданий

строковою константою 'string', так що початок тексту розташовано в позиції, що задана координатами X, Y, Z .

З рівняння (5.19) легко пояснюється фізичний сенс граничної поверхні, що зображена на рисунку 5.7. Всі точки, що лежать нижче неї або на поверхні – відповідають критерію рівняння (5.19), вище – не задовільняють. Так, наприклад, на рисунку 5.7 б точка B задовольняє рівнянню (5.19), а точка A – не відповідає.

5.5. Системи рівнянь з обмеженнями у вигляді нерівностей

Дуже широке поширення в математичних моделях, що описують технічні системи, отримали лінійні і нелінійні системи рівнянь з обмеженнями у вигляді нерівностей.

Подібні математичні моделі ми вже частково вивчали раніше, але розглянемо ще одну технічну задачу.

Визначимо ефективний діаметр мембранної пневмокамери.

Під ефективним діаметром розуміється розмір, що забезпечує:

$$P_{sht} = \frac{\pi d_{ef}^2}{4} \cdot P_{pr}. \quad (5.28)$$

де P_{sht} – зусилля на штоку пневмокамери;

P_{pr} – привідний тиск у пневмокамері.

Зробимо припущення:

- уявимо мембрану у вигляді тонких ниток, один кінець яких закріплений в корпусі пневмокамери, інший на її опорній п'яті зі штоком, на які діє нормально розподілене навантаження, відповідне тиску стисненого повітря в пневмокамері;

- під дією тиску стисненого повітря нитки приймають форму дуги кола.

Розрахункова схема для визначення d_{ef} з прийнятими припущеннями представлена на рисунку 5.8.

З рисунку 5.8 очевидно, що величину P_{sht} формують:

- розподілений на площі опорної п'яти 2 тиск q ;

- навантаження R'_{Dy} від тонких ниток 3, розподілені по периметру опорної п'яти 2. Оскільки $\cup CEBD$ – частина окружності, центр якої знаходиться в точці O , то точка E (рис. 5.8) є самою нижньою на тонкій нитці 3.

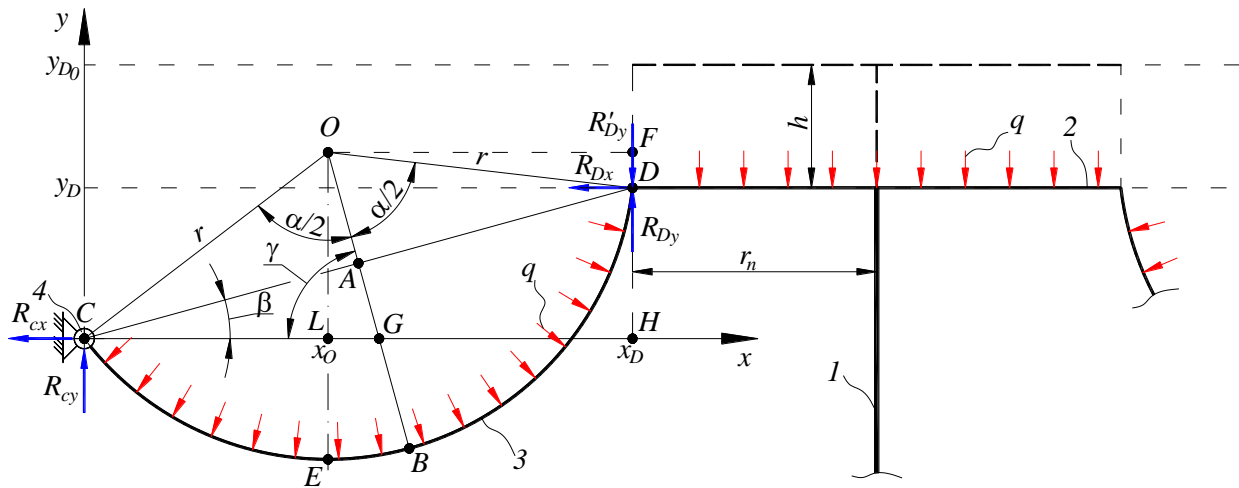


Рис. 5.8. Розрахункова схема для визначення d_{ef} у мембранній пневмокамері: 1 – шток пневмокамери; 2 – опорна п'ята діафрагми (жорстко з'єднана зі штоком 1); 3 – тонка нитка, що імітує мембрану; 4 – корпус пневмокамери; q – нормально розподілене навантаження по тонкій нитці від тиску стисненого повітря; R_{cx} , R_{cy} , R_{Dx} , R_{Dy} – реакції опор, що діють на тонку нитку з боку корпусу (точка C) та опорної п'яти 2 (точка D); R'_{Dy} – вертикальне зусилля, що діє на опорну п'яту зі штоком 1 з боку нитки 3; h – хід штока

Умовно розріжемо тонку нитку 3 в точці E , приклавши зусилля так, щоб нитка була в рівновазі (див. рис. 5.9).

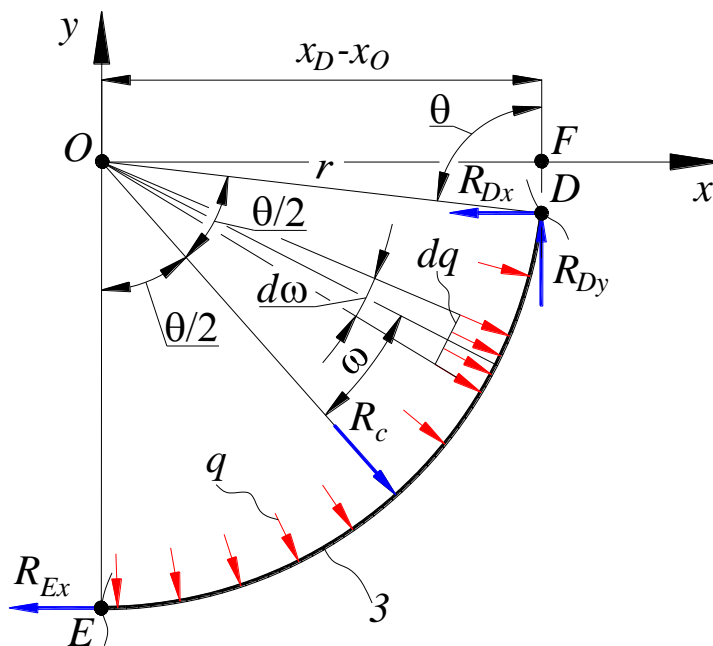


Рис. 5.9. Ділянка умовно розрізаної нитки: R_c – результуюча від q , діюча на $\cup ED$ тонкої нитки, інші позначення відповідають рисунку 5.8

З рисунка 5.9 можна визначити величину R_c за залежністю:

$$R_c = 2 \int_0^{\theta/2} q \cdot r \cdot d\omega \cdot \cos \omega = 2 \cdot q \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (5.29)$$

З рівняння статичної рівноваги $\sum F_y = 0$:

$$R_{Dy} = R_c \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (5.30)$$

Підставляючи рівняння (5.29) у (5.30), отримуємо:

$$R_{Dy} = 2 \cdot q \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = q \cdot r \cdot \sin \theta. \quad (5.31)$$

З рисунку 5.9 можна побачити, що:

$$OF = OD \cdot \sin \theta = r \cdot \sin \theta. \quad (5.32)$$

Порівнюючи рівняння (5.31) та рівняння (5.32) можна зробити висновок, що на рисунку 5.8:

$$d_{ef} = 2 \cdot (r_n + OF); \quad (5.33)$$

$$OF = x_D - x_O; \quad (5.34)$$

$$x_O = CA \cdot \cos \beta - AO \cdot \cos \gamma; \quad (5.35)$$

$$CA = CD / 2; \quad (5.36)$$

$$CD = \sqrt{y_D^2 + x_D^2}; \quad (5.37)$$

$$y_D = y_{D_0} - h; \quad (5.38)$$

де y_{D_0} - відомий геометричний параметр пневмокамери;

h - хід штока пневмокамери;

$$AO = \sqrt{OC^2 - CA^2} = \sqrt{r^2 - CA^2}; \quad (5.39)$$

З трикутника ΔCDH :

$$\beta = \arctan \frac{y_D}{x_D}; \quad (5.40)$$

З трикутника ΔCAG :

$$\gamma = 90^\circ - \beta; \quad (5.41)$$

З трикутника ΔCOA :

$$r = \frac{CD}{2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (5.42)$$

З рисунка 5.8:

$$l_{\cup CEBD} = r \cdot \alpha, \quad (5.43)$$

де $l_{\cup CEBD} = l$ – довжина дуги $\cup CEBD$, є відомою величиною.

Підставимо рівняння (5.43) в рівняння (5.42):

$$r = \frac{CD}{2 \cdot \sin\left(\frac{l}{2 \cdot r}\right)}. \quad (5.44)$$

Рівняння (5.44) може бути вирішено чисельно, наприклад методом ітерацій, при цьому розрахунки показують, що якщо для першого кроку ітерацій прийняти за початкову умову в рівнянні (5.44) вираз $r = r_0 = 0.8 \cdot CD$, то ітераційний процес надійно сходиться. Таким чином, вся система рівнянь (5.33) ... (5.44) отримує своє рішення.

Однак, в процесі розрахунків на початкових ходах штока може виявитися, що в рівнянні (5.35):

$$x_0 < 0, \quad (5.45)$$

у цьому випадку необхідно вважати:

$$x_0 = 0. \quad (5.46)$$

Саме рівняння (5.45), (5.46) і є обмеженням у вигляді нерівності, на систему рівнянь (5.33) – (5.44).

Крім того, розглянемо розрахункову схему, що зображена на рисунку 5.10 при великих ходах штока.

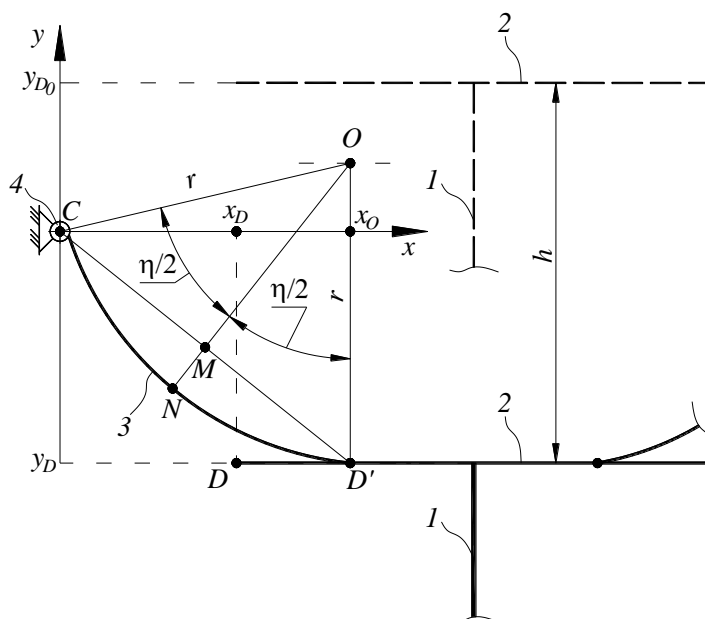


Рис. 5.10. Розрахункова схема для визначення d_{ef} при великих ходах штока:
1 - шток пневмокамери; 2 - опорна п'ята діафрагми; 3 - тонка нитка

З рисунку 5.10 можна побачити, що якщо в результаті розрахунків виявляється, що:

$$x_0 > x_D, \quad (5.47)$$

то:

$$r = \frac{CD'}{2 \cdot \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)}, \quad (5.48)$$

$$l' = r \cdot \eta, \quad (5.49)$$

звідки:

$$\eta = \frac{l'}{r}, \quad (5.50)$$

Підставимо рівняння (5.50) у рівняння (5.48), в наслідок чого отримаємо:

$$r = \frac{CD'}{2 \cdot \sin\left(\frac{l}{2 \cdot r}\right)}, \quad (5.51)$$

$$CD' = \sqrt{y_D^2 + x_D^2}, \quad (5.52)$$

$$l' = l + (x_0 - x_D), \quad (5.53)$$

Таким чином, рівняння (5.51), як і (5.44) може бути вирішено шляхом ітерацій, а рівняння (5.47) є другим обмеженням, у вигляді нерівності, на систему (5.33) – (5.44), (5.51) – (5.53).

Програма для проведення необхідних розрахунків приведена у вигляді Лістингу 5.3.

Лістинг 5.3 – Програма для розрахунку системи рівнянь (5.33) – (5.44), та системи рівнянь (5.51) – (5.53)

```

1  % Силова характеристика
2  % мембранної пневмокамери
3  clc, clear
4  format long e
5  yd0=0.03;xd=0.02;n=1.05;
6  l=n*sqrt(yd0^2+xd^2);rp=0.035;
7  j=1;
8  x0(1)=0.95*xd;
9  for h1=0:0.001:0.069;
10  j=j+1;
11  h(j)=h1;

```

```

12 yd=yd0-h(j);
13 if x0(j-1)<=xd;
14 CD=sqrt(yd^2+xd^2);
15 else
16 CD=sqrt(yd^2+x0(j-1)^2);
17 end
18 p=1;
19 i=1;
20 r(1)=0.8*CD;
21 while p>=1e-3;
22 i=i+1;
23 if x0(j-1)<=xd;
24 z(i)=sin(l/(2*r(i-1)));
25 else
26 l_=l+x0(j-1)-xd;
27 z(i)=sin(l_/(2*r(i-1)));
28 end
29 r(i)=CD/(2*z(i));
30 p=abs(r(i)-r(i-1))/r(i-1)*100;
31 end
32 rr(j)=r(i);
33 CA=CD/2;
34 AO=sqrt(rr(j)^2-CA^2);
35 b=atan(yd/xd);
36 ga=pi/2-b;
37 x0(j)=CA*cos(b)-AO*cos(ga);
38 if x0(j)<0;
39 x0(j)=0;
40 end
41 de(j)=2*(rp+xd-x0(j));
42 end
43 plot(h,de),grid
44 title('Ефективний діаметр...
45 мембранної пневмокамери');
46 xlabel('Хід штока, м. ');
47 ylabel('Ефективний діаметр, м. ');

```

У програмі, що представлена у Лістингу 5.3 умовний оператор *if* виконаний в конструкції: *if* – Умова Інструкції_1 *else* Інструкції_2 *end*.

Тут Інструкції_1 виконуються, якщо виконується Умова, або в іншому випадку Інструкції_2.

Результати розрахунків по програмі, що зображена у Лістингу 5.3 наведені на рисунку 5.11.

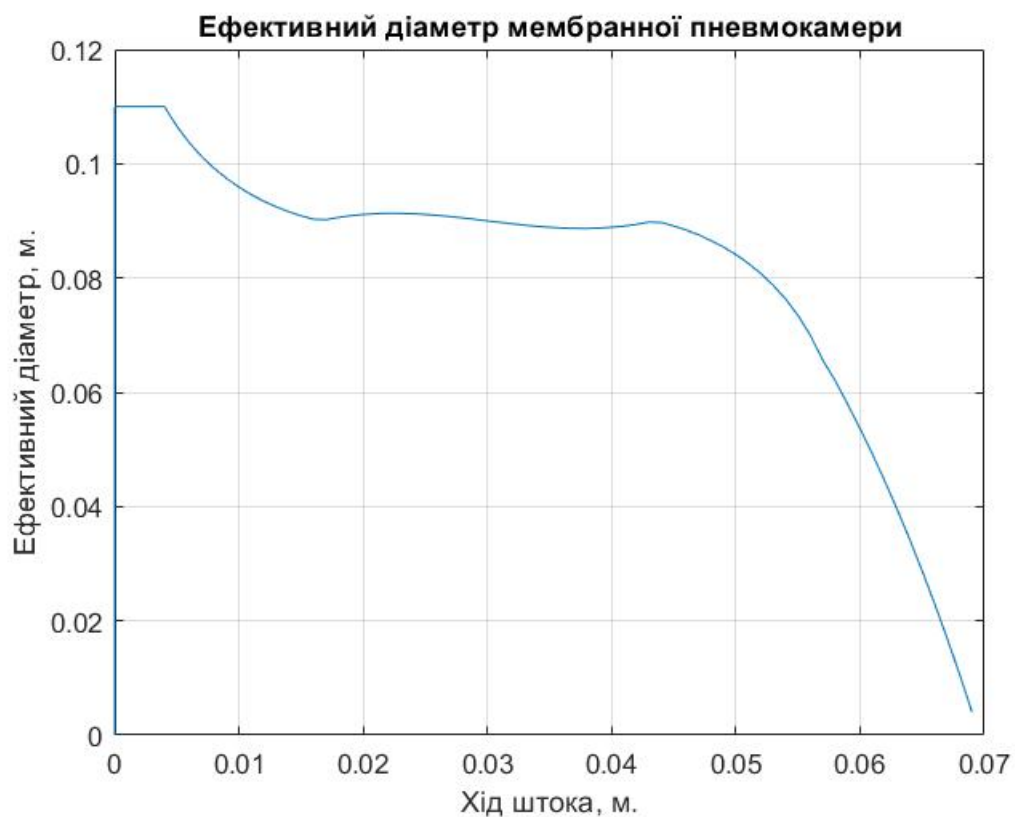


Рис. 5.11. Ефективний діаметр мембранної пневмокамери

Диференціальні рівняння та аналіз динамічних моделей механічних систем з використанням 2-го закону Ньютона, принципу Д'Аламбера та інших законів фізики. Динамічна модель пневмопривіду

- 6.1. Звичайні диференціальні рівняння та рівняння у вигляді часткових похідних**
- 6.2. Використання 2-го закону Ньютона для складання диференціального рівняння руху матеріальної точки**
- 6.3. Використання принципу Д'Аламбера для складання диференціального рівняння руху**
- 6.4. Побудова звичайного диференціального рівняння з використанням математичного апарату нескінченно малих величин і закону Амонтона**
- 6.5. Використання відомих, класичних диференціальних рівнянь**

6.1. Звичайні диференціальні рівняння та рівняння у вигляді часткових похідних

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що зв'язує незалежну змінну x , шукану функцію $y = f(x)$ та її похідні y' , y'' , ..., $y^{(n)}$. Символічно диференціальне рівняння можна написати так:

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (6.1)$$

або:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{(n)}y}{dx^n}\right) = 0, \quad (6.2)$$

Якщо шукана функція $y = f(x)$ є функцією однієї незалежної змінної, то диференціальне рівняння називається звичайним.

Поряд зі звичайними диференціальними рівняннями в математичному аналізі вивчаються також рівняння в часткових похідних. Диференціальним рівнянням в часткових похідних називається співвідношення між невідомою функцією z , що залежить від двох або декількох змінних x, y, \dots , цими змінними x, y, \dots і частковими похідними від z :

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots, \text{ та інші.}$$

Диференціальним рівнянням в часткових похідних з невідомою функцією $z(x,y)$ є, наприклад, рівняння:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної, що входить в рівняння.

Так, наприклад, рівняння:

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0, \tag{6.3}$$

є рівняння першого порядку.

Рівняння:

$$y'' + ky' - by - \sin x = 0, \tag{6.4}$$

є рівняння другого порядку і т.ін.

Рівняння:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \text{ при } (a < x < b), \tag{6.5}$$

де $p(x)$ та $f(x)$ – безперервні функції від x на інтервалі (a, b) , називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Невідома функція і її похідна входять в це рівняння у першому ступеню - лінійно.

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad (6.6)$$

називається лінійним однорідним, тому рівняння (6.5) називають лінійним неоднорідним.

У цій темі ми будемо займатися тільки звичайними диференціальними рівняннями. Лінійними і нелінійними, однорідними і неоднорідними.

Рішенням або інтегралом диференціального рівняння називається всяка функція, яка будучи підставлена в рівняння, перетворює його в тотожність. При цьому рішення може бути, як аналітичним, так і чисельним.

Оскільки ми будемо розглядати і нелінійні диференціальні рівняння, то нас будуть в першу чергу цікавити чисельні рішення.

Але, перш, ніж вирішити диференціальне рівняння, його потрібно сформулювати (скласти).

У механіці, одним із способів отримання диференціального рівняння руху матеріального тіла служить 2-й закон Ньютона.

6.2. Використання 2-го закону Ньютона для складання диференціального рівняння руху матеріальної точки

Другий закон Ньютона можна сформулювати як: прискорення матеріальної точки прямо пропорційно діючій на неї силі (результуючій силі), обернено пропорційно масі точки і збігається за напрямком з силою (результуючою силою).

Як приклад розглянемо коливання вантажу вагою W , підвішеного на циліндричній пружині (див. рис. 6.1).

Прийmemo, що вантаж може переміщатися лише вертикально, та масою пружини можна знехтувати.

Як тільки вантаж буде прикріплений до пружини, він набуває статичне переміщення:

$$\delta_{cm} = \frac{W}{c}, \quad (6.7)$$

де c – жорсткість пружини.

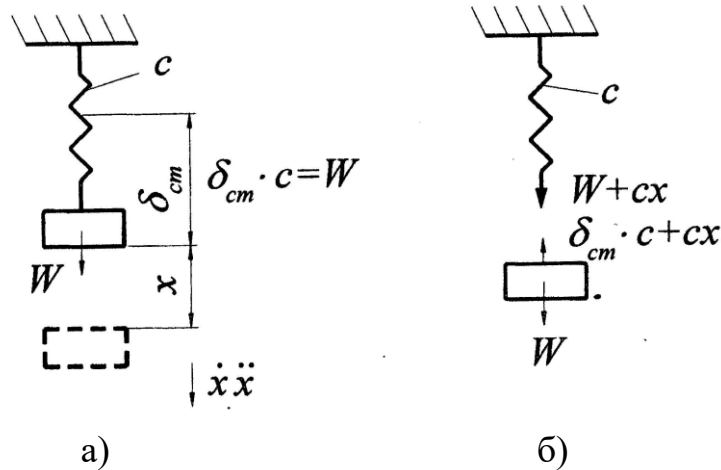


Рис. 6.1. Розрахункова схема коливальної системи з одним ступенем свободи: а – в статиці; б – в динаміці

Нехай тепер вантаж виведений з положення рівноваги і відпущений, в результаті чого виникають вільні або власні коливання.

Якщо за позитивне прийняти переміщення, спрямоване вниз, то сила, що виникає при цьому в пружині, для довільного положення вантажу буде дорівнювати (рис. 6.1 б):

$$F = \delta_{cm} \cdot c + c \cdot x, \quad (6.8)$$

Знаючи масу вантажу $m = W / g$ та позначаючи прискорення через d^2x / dt^2 , у відповідності до другого закону Ньютона отримаємо:

$$\frac{W}{g} \cdot \ddot{x} = W - (W + c \cdot x), \quad (6.9)$$

Провівши відповідні перетворення в рівнянні (6.9) отримаємо:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0, \quad (6.10)$$

Диференціальне рівняння (6.10) є звичайним, лінійним і однорідним.

Вирішимо його чисельно.

Для вирішення систем диференціальних рівнянь в *MatLAB* передбачені функції:

- $[T, Y] = \text{solver}(@ F.tspan.y0)$ – де замість *solver* підставляємо ім'я конкретного вирішувача, який інтегрує систему диференціальних рівнянь виду $y' = F(t, y)$ на інтервалі *tspan* з початковими умовами y_0 . $@F$ – дескриптор *ODE*-функції. Кожен рядок у масиві рішень Y відповідає значенню часу, що повертається у векторі-стовпці T ;

- $[T, Y] = \text{solver}(@ F.tspan.y0.options)$ – дає рішення, подібне описаному вище, але з параметрами, визначеними значеннями аргументу *options*, створеного функцією *odeset*. Зазвичай параметри, що використовуються включають допустиме значення відносної похибки *RelTol* (за замовчуванням рівній $1e-3$) і вектор допустимих значень абсолютної похибки *AbsTol* (всі компоненти за замовчуванням рівні $1e-6$) та ін.

Де в якості вирішувачів можуть бути використані:

ode45 – однокрокові явні методи Рунге-Кутта 2-го і 4-го порядку. Це класичний метод, рекомендований для початкової проби рішення. У багатьох випадках він дає хороші результати;

ode23 – однокрокові явні методи Рунге-Кутта 4-го і 5-го порядку. При помірній жорсткості системи звичайних диференціальних рівнянь і низьких вимогах до точності цей метод може дати вигоду в швидкості рішення;

ode113 – багатокроковий метод Адамса-Башворта-Мултона змінного порядку. Це адаптивний метод, який може забезпечити високу точність рішення та ін.

Наведемо рівняння (6.10) до необхідного виду системи диференціальних рівнянь 1-го порядку:

$$\dot{x}_1 = x_2 \text{ та } \dot{x}_2 = -\frac{c \cdot x_1}{m}, \quad (6.11)$$

де x_1 – переміщення маси W на відстань x (див. рис. 6.1);

$x_2 = \dot{x}_1$ – швидкість переміщення маси W на відстань x (див. рис. 6.1).

Нижче наведена програма, у вигляді Лістингу 6.1 для проведення необхідних обчислень. Як бачимо, в програмі використовується вирішувач *ode45*. У програмі, що представлена у Лістингу 6.1 використовується *ODE* -функція *fgr1*, визначення якої представлено у Лістингу 6.2. У програмі, яка представлена у вигляді Лістингу 6.2 використовується команда: $dxdt = \text{zeros}(2,1)$ – яка повертає нульову матрицю розміром 2×1 .

Лістинг 6.1 – Програма для обчислення рівняння (6.11)

```
1 % Рішення звичайного, лінійного,  
2 % однорідного рівняння  
3- clc, clear  
4- [T,X]=ode45(@fgr1,[0 15],[0.02 0]);  
5- plot(T,X);grid  
6- title('Рішення звичайного, лінійного,...  
7- однорідного рівняння');  
8- xlabel('t, сек');  
9- ylabel('x, м; v, м/сек');  
10- legend('x','v');
```

Лістинг 6.2 – Програма для обчислення ODE -функція fgr1

```
1- function dxdt=fgr1(t,x)  
2- m=5;c=18;  
3- dxdt=zeros(2,1);  
4- dxdt(1)=x(2);  
5- dxdt(2)=-c*x(1)/m;
```

Результати розрахунків, за програмою, що представлена у Лістингу 6.1 та Лістингу 6.2, наведені на рисунку 6.2.

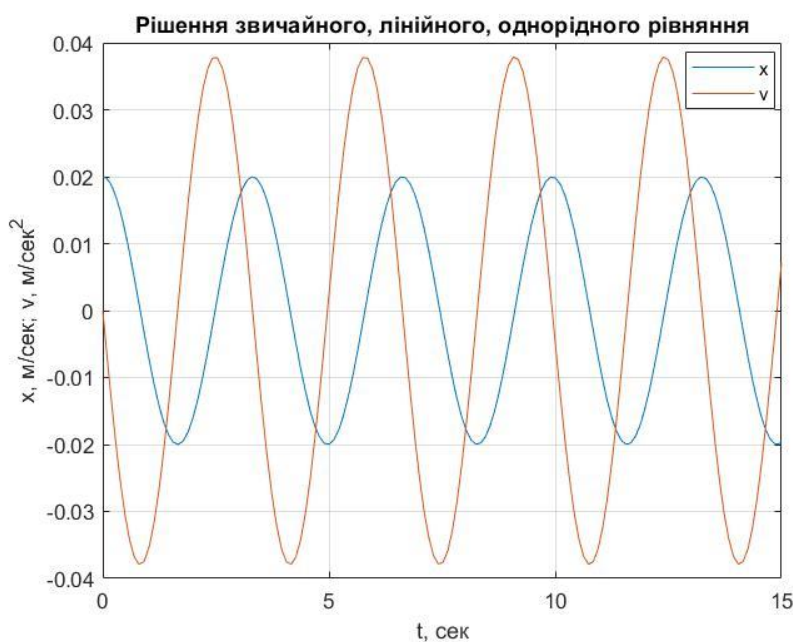


Рис. 6.2. Рішення однорідного лінійного диференціального рівняння за програмами, які наведені у Лістингу 6.1 та Лістингу 6.2

Розглянемо також приклад складання та рішення неоднорідного диференціального рівняння на прикладі так званої одновісної, плоскої, спрощеної моделі колісного транспортного засобу, тобто на прикладі підресорної маси автомобіля та його жорсткого колеса, що котиться по нерівній дорозі (див. рис. 6.3).

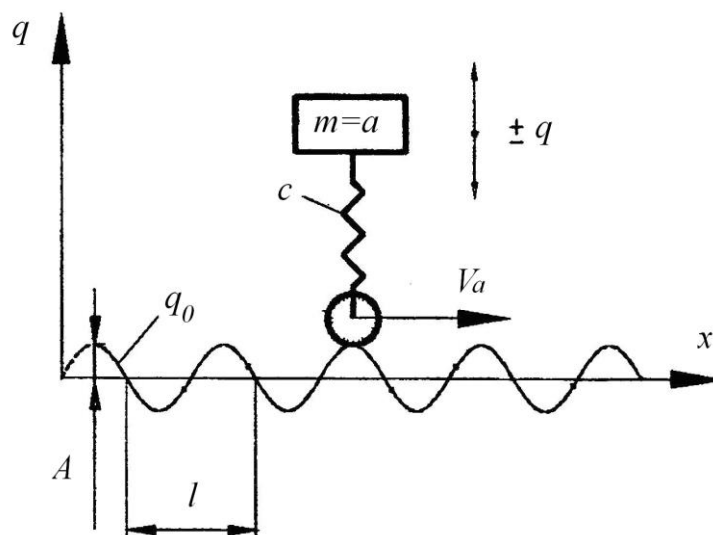


Рис. 6.3. Схема гармонійного кінематичного збудження:
 q_0 – поточна висота профілю дороги

Позначимо через q абсолютне вертикальне переміщення вантажу, що відраховується від рівноважного стану. Використовуючи другий закон Ньютона, за аналогією з рівнянням (6.9) та рівнянням (6.10), отримуємо диференціальне рівняння:

$$-c \cdot (q - q_0) = a \cdot \ddot{q}, \quad (6.12)$$

де q_0 – позначено на рисунку 6.3 або:

$$a \cdot \ddot{q} + c \cdot q = c \cdot q_0, \quad (6.13)$$

де c - жорсткість підвіски.

Цей приклад демонструє так зване кінематичне збудження коливань, яке звелось до силового, де в якості сили збудження виступає $Q(t) = c \cdot q_0$. Якщо величина q_0 має синусоїдальний характер, наприклад:

$$q_0 = A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right), \quad (6.14)$$

то, при швидкості автомобіля $V_a = \text{const}$ рівняння (6.13) приймає вид:

$$a \cdot \ddot{q} + c \cdot q = c \cdot A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot V_a \cdot t}{l}\right). \quad (6.15)$$

Перетворимо рівняння (6.15) до виду:

$$\ddot{q} = \frac{c}{a} \cdot A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot V_a \cdot t}{l}\right) - \frac{c}{a} \cdot q. \quad (6.16)$$

і наведемо до системи диференціальних рівнянь 1-го порядку:

$$\dot{q}_1 = q_2 \quad \text{та} \quad \dot{q}_2 = \frac{c}{a} \cdot A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot V_a \cdot t}{l}\right) - \frac{c}{a} \cdot q, \quad (6.17)$$

де q_1 – переміщення підресореної маси;

$q_2 = \dot{q}_1$ – швидкість переміщення маси m .

Нижче наведена програма, у вигляді Лістингу 6.3, для вирішення системи рівнянь (6.17). І відповідна *ODE*-функція *fgr2*, представлена у вигляді Лістингу 6.4.

Лістинг 6.3 – Програма для обчислення рівняння (6.17)

```
1 % Рішення звичайного, лінійного,  
2 % неоднорідного рівняння  
3- clc, clear  
4- [T,Q]=ode45(@fgr2,[0 10],[0 0]);  
5- plot(T,Q);grid  
6- title('Рішення звичайного, лінійного,...  
7- неоднорідного рівняння');  
8- xlabel('t, сек');  
9- ylabel('q, м; dq/dt, м/сек');  
10-legend('q','dq/dt');
```

Лістинг 6.4 – Програма для обчислення *ODE* -функція *fgr2*

```
1- function dqdt=fgr2(t,q)  
2- a=20000;c=350000;A1=0.04;va=15;l=7;  
3- dqdt=zeros(2,1);  
4- dqdt(1)=q(2);  
5- dqdt(2)=-c*q(1)/a+c*A1*sin(pi*va*t/l)/a;
```

Результати розрахунків за програмами, що представлені у Лістингу 6.3 та Лістинг 6.4, наведені на рисунку 6.4.

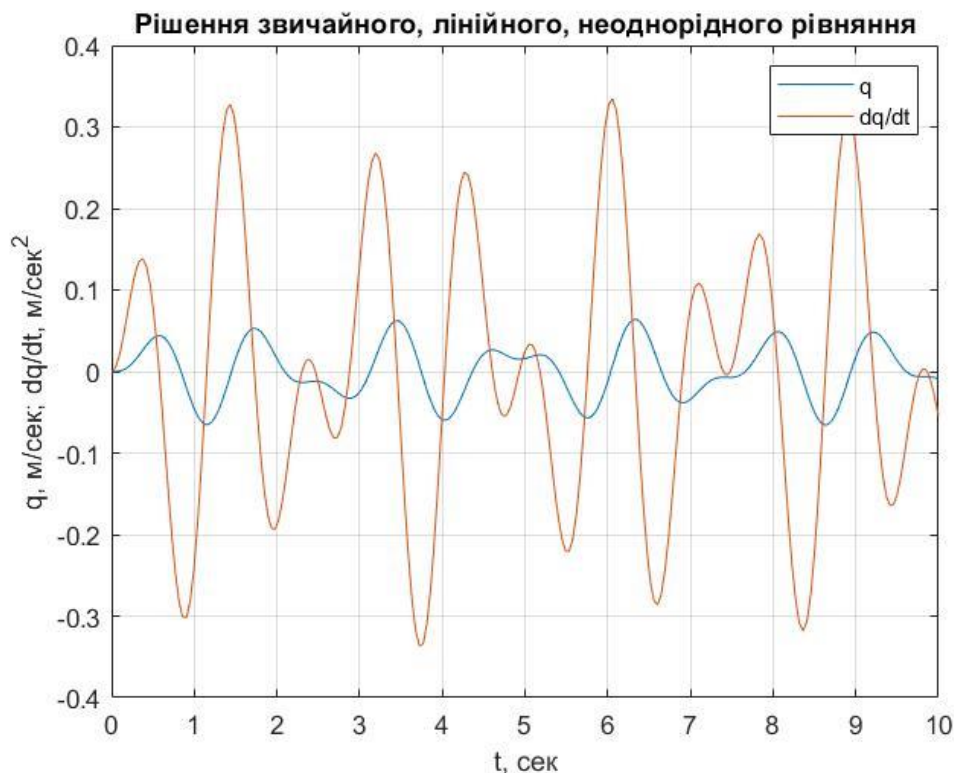


Рис. 6.4. Рішення неоднорідного лінійного диференціального рівняння за програмами, що представлені у Лістингу 6.3 та Лістинг 6.4

Як бачимо, характер коливальних процесів, що зображені на рисунку 6.2 та рисунку 6.4 істотно відрізняється як якісно, так і кількісно.

6.3. Використання принципу Д'Аламбера для складання диференціального рівняння руху

Дуже часто при складанні диференціального рівняння руху використовується так званий принцип Д'Аламбера, який формулюється таким чином: якщо до діючої на тіло активної сили і реакції зв'язку докласти додаткову силу інерції, то тіло буде знаходитися в рівновазі (сума всіх сил, що діють в системі, доповнена головним вектором інерції, дорівнює нулю).

Принцип Д'Аламбера дозволяє застосувати до вирішення завдань динаміки простіші методи статички, тому ними широко користуються в інженерній практиці.

При користуванні цим законом корисно пам'ятати, що: головний вектор сил інерції механічної системи (зокрема твердого тіла) дорівнює добутку маси системи (тіла) на прискорення центру мас і він спрямований протилежно цьому прискоренню.

Фактично принцип Д'Аламбера – це інтерпретація 2-го закону Ньютона.

Як приклад складання та рішення нелінійного диференціального рівняння розглянемо схему дії сил на гальмуючий автомобіль (див. рис. 6.5).

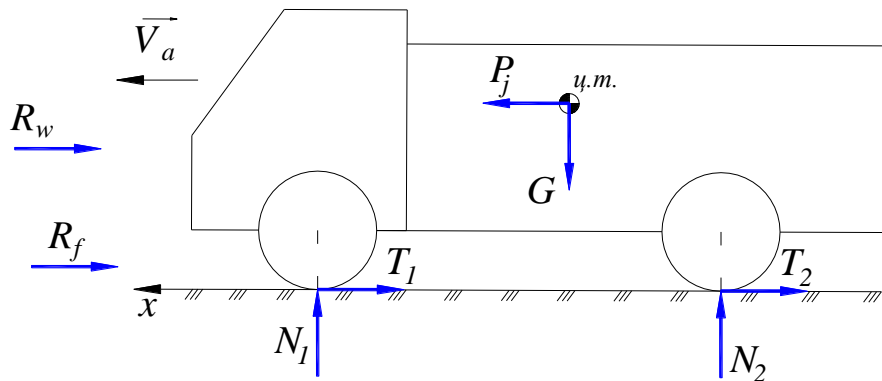


Рис. 6.5. Схема сил, що діють на гальмуючий вантажний автомобіль: T_1, T_2, N_1, N_2 – гальмові сили та реакції дороги на передній та задній осях автомобіля; P_w – сила опору повітря; P_f – сила опору коченню колес автомобіля; V_a – швидкість автомобіля; P_j – сила інерції; G – вага автомобіля

Відповідно до принципу Д'Аламбера:

$$P_j - \sum_{i=1}^2 T_i - P_w - P_f = 0. \quad (6.18)$$

З теорії автомобіля відомо, що:

$$P_w = k_B \cdot F \cdot V_a^2, \quad (6.19)$$

де $k_B = 0.7 \text{ Н} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^4$ – коефіцієнт обтічності автомобіля;

F – площа лобового опору автомобіля.

Для вантажного автомобіля:

$$F = B \cdot H_{\bar{A}}, \quad (6.20)$$

де B – колія автомобіля;

$H_{\bar{A}}$ – габаритна висота.

$$P_f = m_a \cdot g \cdot f_0, \quad (6.21)$$

де m_a – маса автомобіля.

f_0 – коефіцієнт опору коченню колеса.

Після приведення рівняння (6.18) до системи диференціальних рівнянь 1-го порядку та з урахуванням рівнянь (6.19) – (6.21), маємо:

$$\dot{x}_1 = x_2 \text{ та } \dot{x}_2 = -\frac{P_T}{m_a} - \frac{k_B \cdot F \cdot x_2^2}{m_a} - f_0 \cdot 9,8, \quad (6.22)$$

де $P_T = \sum_{i=1}^2 T_i$ – сумарна гальмова сила.

Програма для проведення необхідних розрахунків, за залежностями (6.22) приведена у вигляді Лістингу 6.5. Відповідна *ODE*- функція *fgr3* наведена у вигляді Лістингу 6.6.

Лістинг 6.5 – Програма для обчислення рівняння (6.22)

```

1  % Рішення звичайного, нелінійного,
2  % неоднорідного рівняння
3-  clc, clear
4-  [T,X]=ode45(@fgr3,[0 3.25],[0 60/3.6]);
5-  plot(T,X);grid
   6-  title('Рішення звичайного, нелінійного,...
7-  неоднорідного рівняння');
8-  xlabel('t, сек');
9-  ylabel('x, м/сек; V_a, м/сек^2');
10- legend('x','V_a');
```

Лістинг 6.6 – Програма для обчислення *ODE* -функція *fgr3*

```

1- function dxdt=fgr3(t,x)
2- m=11700;Pt=5*m;F=2.6*1.9;k=0.7;f=0.02;
3- dxdt=zeros(2,1);
4- dxdt(1)=x(2);
5- dxdt(2)=-Pt/m-k*F*(x(2))^2/m-9.8*0.02;
6  %dxdt(2)=-Pt/m;
```

Результати розрахунків, за програмами, що наведені у Лістингу 6.5 та Лістингу 6.6, представлені на рисунку 6.6.

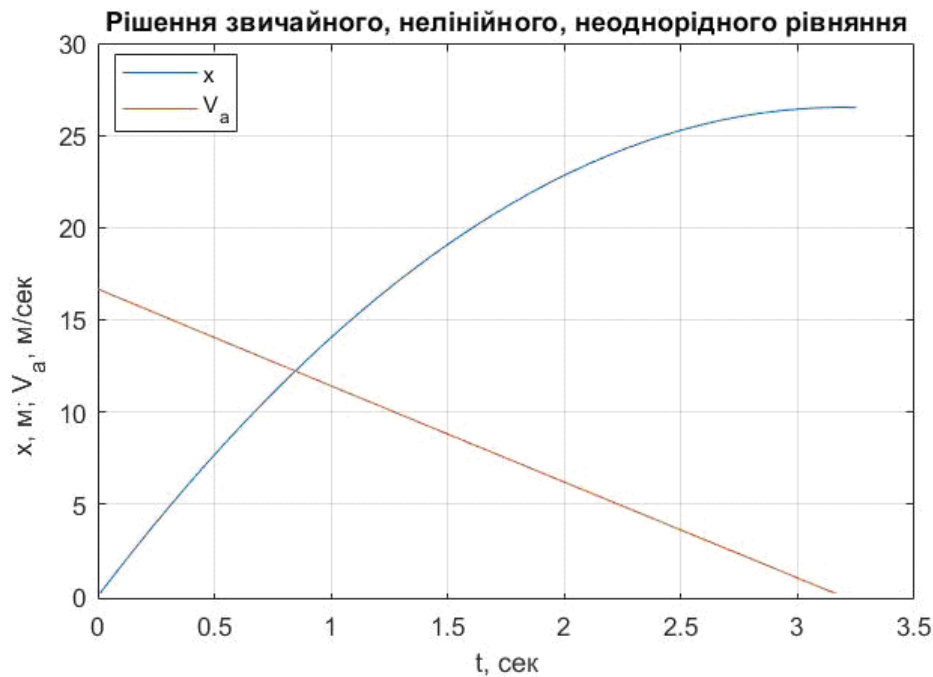


Рис. 6.6. Рішення неоднорідного нелінійного диференціального рівняння за програмами, що представлені у Лістингу 6.5 та Лістинг 6.6

Як видно з рисунку 6.6 гальмовий шлях автомобіля (коли $V_a = 0$) дорівнює $x = l_T = 26.52$ м.

Розрахунки показують, що якщо допустити, що:

$$P_w = 0 \text{ та } P_f = 0, \quad (6.23)$$

то $l_T = 27.77$ м. Як бачимо, різниця не така вже й велика. Тому, в технічних розрахунках дуже часто має місце припущення (6.23).

Звичайне диференціальне рівняння в технічних задачах може описувати не тільки $f(t)$, це може бути функція: від довжини, площі, кута, тощо. Наведемо приклад побудови та рішення диференційного рівняння, що описує функцію від кута.

6.4. Побудова звичайного диференціального рівняння з використанням математичного апарату нескінченно малих величин і закону Амонтона

Раніше ми розглядали побудову математичної моделі для оцінки ефективного діаметра діафрагмової пневмокамери. Діафрагма в цій моделі представлялася у вигляді набору тонких гнучких ниток,

розташованих по периметру опорної п'яти, жорстко пов'язаної зі штоком пневмокамери. На рисунку 6.7 показані сили, що діють на ділянці CD такої нитки.

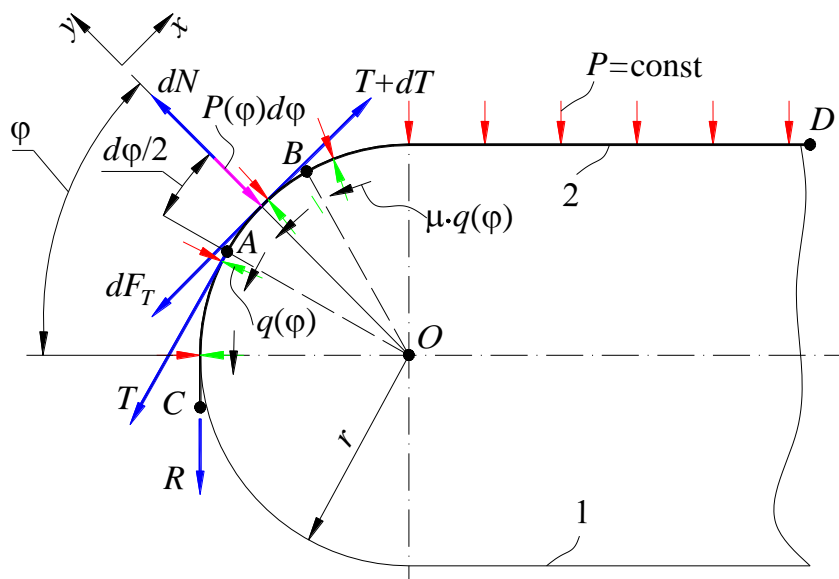


Рис. 6.7. Сили, що діють на ділянку діафрагми CD : 1 – опорна п'ята діафрагми; 2 – тонка нитка; $\cup AB$ - нескінченно мала ділянка тонкої нитки; $q(\varphi)$ – закон нормальних тисків на діафрагму з боку п'яти 1; $\mu \cdot q(\varphi)$ – закон розподілу елементарних сил тертя між діафрагмою 2 і п'ятою 1; dN та dF_T – результуючі сили на ділянці $\cup AB$, від нормальних і дотичних сил; $P = \text{const}$ – нормально розподілена сила по нитці з боку приводного тиску у пневмокамері; T – сила розтягу нитки в її перетині; dT – нескінченно малий приріст до сили T

Як видно з рисунку 6.7 розподілена сила P та сила R , яка визначає величину ефективного діаметра пневмокамери згинають п'яту 1 вниз, а сили тертя $\mu \cdot q(\varphi)$ (на рисунку 6.7 вони показані діючими на нитку. На п'яту 1 вони будуть діяти в протилежному напрямку) прагнуть відновити початкове положення п'яти 1. Тому, при здійсненні міцнісного розрахунку п'яти 1 облік цих сил тертя (як показали дослідження, проведені в ХНАДУ), може помітно знизити матеріалоємність п'яти 1. Оскільки результуючий момент від цих сил щодо точки O (рис. 6.7), може розцінюватися, як зміцнюючий п'яту 1 фактор.

Величина цього моменту дорівнює:

$$M = \int_0^{\pi/2} q(\varphi) \cdot \mu \cdot d\varphi \cdot r, \quad (6.24)$$

де r – позначено на рисунку 6.7.

Як бачимо з рівняння (6.24), необхідно визначитися з законом $q(\varphi)$.

З рівнянь статичної рівноваги нескінченно малої дуги $\cup AB$ слідує з умови $\Sigma F_y = 0$:

$$dN - P \cdot d\varphi - T \cdot \sin(d\varphi / 2) - (T + dT) \cdot \sin(d\varphi / 2) = 0, \quad (6.25)$$

розкриваючи дужки в рівнянні (6.25) та вважаючи $dT \cdot d\varphi / 2$ величиною більш меншого порядку, а $\sin(d\varphi / 2) = d\varphi / 2$, оскільки величина $d\varphi$ – нескінченно мала величина, отримуємо:

$$dN - d\varphi \cdot (P + T) = 0. \quad (6.26)$$

Аналогічно з умови $\Sigma F_x = 0$:

$$-dF_T - T \cdot \cos(d\varphi / 2) + (T + dT) \cdot \cos(d\varphi / 2) = 0. \quad (6.27)$$

Розкриємо дужки в рівнянні (6.27) та вважаючи $\cos(d\varphi / 2) = 1$, оскільки $d\varphi$ – нескінченно мала величина, запишемо:

$$dT - dF_T = 0 \text{ або } dF_T = dT. \quad (6.28)$$

З закону Амонтона:

$$dF_T = \mu \cdot dN \text{ або } dN = \frac{dF_T}{\mu}. \quad (6.29)$$

де μ – коефіцієнт тертя між ниткою 2 і п'ятою 1 (див. рис. 6.7).

Підставимо рівняння (6.29) в рівняння (6.26):

$$\frac{dF_T}{\mu} - d\varphi \cdot (P + T) = 0. \quad (6.30)$$

Підставимо рівняння (6.28) в рівняння (6.30):

$$\frac{dT}{\mu} - d\varphi \cdot (P + T) = 0, \quad (6.31)$$

звідки отримуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dT}{d\varphi} = \mu \cdot (P + T). \quad (6.32)$$

З рисунку 6.7:

$$dN = q(\varphi) \cdot d\varphi, \quad (6.33)$$

підставимо рівняння (6.33) в рівняння (6.26), після відповідних перетворень маємо:

$$q(\varphi) = P + T(\varphi), \quad (6.34)$$

звідкіля:

$$dq = dT. \quad (6.35)$$

Підставимо рівняння (6.34) та рівняння (6.35) у рівняння (6.32) й отримуємо:

$$\frac{dq}{d\varphi} = \mu \cdot q. \quad (6.36)$$

Таким чином, вирішуючи спільно рівняння (6.36) та рівняння (6.24), отримуємо величину моменту M .

Програма для необхідних розрахунків представлена у вигляді Лістингу 6.7. Відповідну ODE - функцію $fgr4$, записано у вигляді Лістингу 6.8.

Лістинг 6.7 – Програма для обчислення моменту M

```
1 % Рішення звичайного,  
2 % лінійного рівняння  
3- clc, clear  
4- [F,Q]=ode45(@fgr4,[0 pi/2],[10]);  
5- plot(F,Q);grid  
6- title('Рішення звичайного, ...
```

- 7- лінійного рівняння');
- 8- xlabel('\phi, рад');
- 9- ylabel('q, Н/рад');
- 10- legend('q');
- 11- mu=0.3;r=0.0025;
- 12- M=trapz(F,Q)*mu*r

Лістинг 6.8 – Програма для обчислення ODE -функція fgr4

- 1- function dqdt=fgr4(f,q)
- 2- m=0.3;
- 3- dqdt=zeros(1,1);
- 4- dqdt(1)=m*q(1);

У командному вікні за рахунок того, що в кінці рядка 12 програми, що представлена у вигляді Лістингу 6.7 не поставлена ";", з'являється величина знайденого відновлюючого моменту (система одиниць *SI*):

$$M = 0.0150$$

На рисунку 6.8 показаний розрахований графік функції $q(\alpha)$.

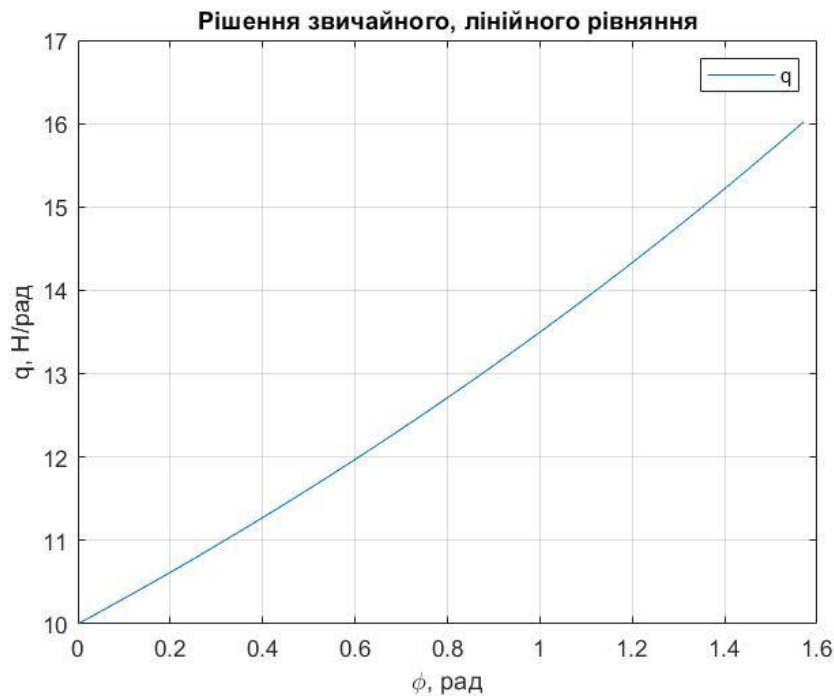


Рис. 6.8. Графік функції $q(\alpha)$

6.5. Використання відомих, класичних диференціальних рівнянь

Дуже часто при математичному описі технічних об'єктів немає необхідності створювати якісь свої, оригінальні диференціальні рівняння. Цілком достатнім виявляється використовувати вже широко відомі і перевірені залежності.

Наприклад, при описі пневматичного приводу (гальм, зчеплення, тощо) широко використовуються математичні моделі так званих ланок «дросель-ємність» (ДЄ-ланки), (див. рис. 6.9), розроблені академіком Герц О.В. та проф. Метлюк М.Ф.

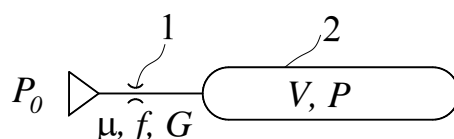


Рис. 6.9. Принципова схема ДЄ- ланки:

- 1 – дросель, в якості якого може виступати як отвір, так і трубопровід, у якого довжина буде визначати коефіцієнт опору дроселя;
- 2 – ємність об'єму V ; P_0 – тиск на вході в дросель; P – тиск в ємності

Диференціальне рівняння, що описує модель по рисунку 6.9 виглядає наступним чином:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{k \cdot \mu_p \cdot f \cdot v_{kr} \cdot P_0}{V} \cdot A \cdot \frac{P_0 - P}{B \cdot P_0 - P}. \quad (6.37)$$

де $k = 1.4$ – показник адіабати;

μ_p – коефіцієнт опору дроселя, довідкова величина;

f – площа прохідного перетину дроселя;

$v_{kr} = \sqrt{k \cdot R \cdot T}$ – критична швидкість струменя повітря;

$A = 0.654$, $B = 1.13$ – постійні коефіцієнти;

V – об'єм ємності, що наповнюється;

P – тиск в ємності;

P_0 – позначено на рисунку 6.9;

R – газова постійна сухого повітря;

T – температура повітря.

Програма для проведення необхідних розрахунків представлена у Лістингу 6.9. Відповідну *ODE* - функцію *fgr5*, записано у вигляді Лістингу 6.10. Результати розрахунків наведені на рисунку 6.10.

Лістинг 6.9 – Програма для обчислення зміни тиску P у часі

```
1 % Рішення ДЄ-ланки
2- clc,clear
3- [T,P]=ode45(@fgr5,[0 0.3],[100000]);
4- plot(T,P);grid
5- title('Рішення ДЄ-ланки');
6- xlabel('t, сек');
7- ylabel('P, Па');
8- legend('P');
```

Лістинг 6.10 – Програма для обчислення ODE -функція $fgr5$

```
1- function dpdt=fgr5(t,p)
2- mu=0.01;P0=900000;k=1.4;
3- f=pi*0.003^2/4;V=0.000003;
4- A=0.654;B=1.13;
5- dpdt=zeros(1,1);
6- dpdt(1)=(k*mu*f*345*P0/V)*A*...
7- (P0-p(1))/(B*P0-p(1));
```

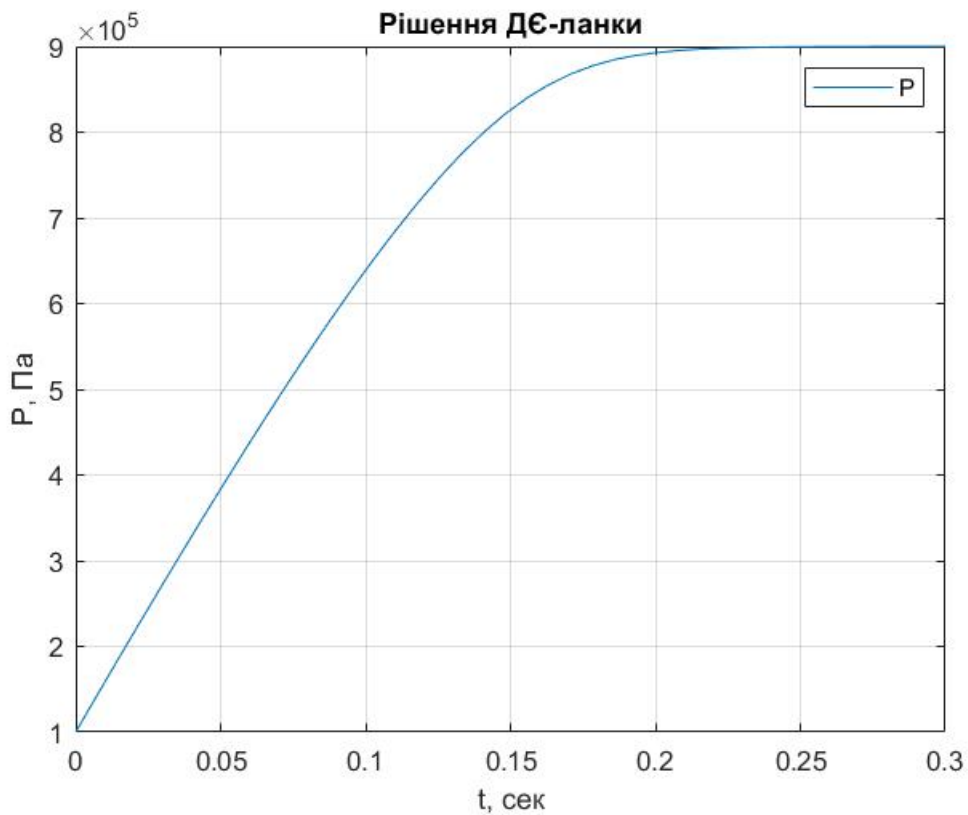


Рис. 6.10. Тиск в ємності ДЄ-ланки

Складання динамічних моделей з використанням рівнянь Лагранжа 2-го роду. Складання диференціальних рівнянь коливань з однією та двома ступенями вільності

- 7.1. Визначення рівнянь Лагранжа 2-го роду
- 7.2. Рівняння Лагранжа для систем з одним ступенем вільності без тертя
- 7.3. Рівняння Лагранжа для систем з одним ступенем вільності та лінійним в'язким тертям
- 7.4. Лінеаризація диференціального рівняння для системи з нелінійним сухим тертям
- 7.5. Коливальні системи з двома ступенями вільності та рівняння Лагранжа

7.1. Визначення рівнянь Лагранжа 2-го роду

Однією з труднощів при вирішенні задач динаміки матеріальних систем є вибір відповідної загальної теорії динаміки.

У випадках систем з декількома ступенями вільності рішення задач значно ускладнюється, тому що при цьому потрібно спільне застосування деяких загальних теорем і рівнянь динаміки.

У подібних випадках найбільш зручне використання рівнянь Лагранжа 2-го роду, що є універсальним методом складання диференціальних рівнянь руху матеріальних систем. Завдяки своїй спільності рівняння Лагранжа широко застосовуються для вирішення найрізноманітніших завдань техніки.

Рівняння Лагранжа 2-го роду записуються у вигляді системи рівнянь (7.1).

Узагальненими координатами механічної системи називають незалежні між собою параметри q_1, q_2, \dots, q_k , за допомогою яких можна висловити декартові координати всіх її точок.

Число k незалежних узагальнених координат дорівнює числу ступенів вільності даної системи.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2 \\ \vdots & \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= Q_k \end{aligned} \right\}, \quad (7.1)$$

де T – кінетична енергія системи;

Q_1, Q_2, \dots, Q_k – узагальнені сили (потенційні та не потенційні), що відповідають узагальненим координатам q_1, q_2, \dots, q_k ;

$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k$ – узагальнені швидкості, що відповідають узагальненим координатам q_1, q_2, \dots, q_k ;

Відповідно до кількості незалежних узагальнених координат аналізованої механічної системи, маємо для неї k рівнянь Лагранжа 2-го роду, відповідно до рівняння (7.1).

Як бачимо, рівняння Лагранжа 2-го роду (7.1) являють собою систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку щодо невідомих узагальнених координат q_1, q_2, \dots, q_k , що описують рух механічної системи, підпорядкованої ідеальним зв'язкам.

Рівняннями (7.1) Лагранжа можна користуватися при вивченні руху будь-якої механічної системи з геометричними зв'язками незалежно від того, скільки точок або тіл входять в систему, як рухаються ці тіла та який рух (абсолютний або відносний) розглядається.

При ідеальних зв'язках в праві частини рівняння (7.1) входять узагальнені активні сили і, отже, ці рівняння дозволяють заздалегідь виключити з розгляду всі наперед невідомі реакції зв'язків.

Для того, щоб скласти рівняння (7.1), необхідно, перш за все, висловити кінетичну енергію системи через узагальнені координати та узагальнені швидкості.

7.2. Рівняння Лагранжа для систем з одним ступенем вільності без тертя

Почнемо аналіз можливостей рівнянь (7.1) з систем, які мають один ступень вільності, тоді можна записати їх у вигляді рівняння (7.2).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \quad (7.2)$$

У цій темі 7 будемо приділяти основну увагу саме проблемі складання, отриманню диференціальних рівнянь, а в темі 8 будемо їх вирішувати за допомогою додатку *Simulink* – який є розширенням програмних можливостей *MatLAB*.

Якщо діючі на систему сили потенційні, то для консервативної механічної системи з одним ступенем вільності рівняння Лагранжа має відому з курсу теоретичної механіки рівняння (7.3).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0. \quad (7.3)$$

де Π – потенційна енергія.

Розглянемо спрощену схему коливань причепа відносно автомобіля-тягача (рис. 7.1).

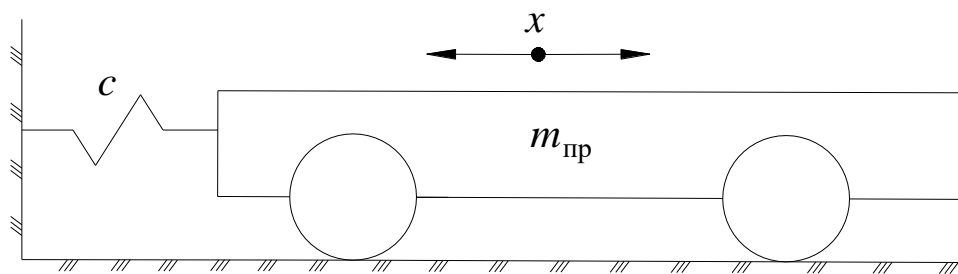


Рис. 7.1. Спрощена схема поздовжніх коливань причепа

У моделі рис. 7.1 прийняті наступні допущення:

- силами тертя нехтуємо;
- автомобіль-тягач не має поздовжніх коливань;
- кінетичною енергією обертання коліс причепа нехтуємо;
- жорсткість зв'язку причепа і тягача має лінійний характер.

За узагальнене переміщення приймаємо переміщення причепа вздовж осі x .

Кінетична енергія причепа:

$$T = \frac{m_{\text{пр}} \cdot \dot{x}^2}{2}. \quad (7.4)$$

Потенційна енергія:

$$\Pi = \frac{c \cdot x^2}{2}. \quad (7.5)$$

Підставимо рівняння (7.4) та рівняння (7.5) в рівняння (7.3), прийнявши, що:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_{\text{пр}} \cdot \dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m_{\text{пр}} \cdot \ddot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} = c \cdot x. \quad (7.6)$$

Таким чином, отримаємо диференціальне рівняння, що описує коливання маси $m_{\text{пр}}$ (див. рис. 7.1):

$$m_{\text{пр}} \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0. \quad (7.7)$$

Приберемо одне з раніше прийнятих обмежень, а саме врахуємо кінетичну енергію обертання коліс причепа.

Тоді:

$$T = T_1 + T_2, \quad (7.8)$$

де T_1 – кінетична енергія поздовжнього переміщення маси (включаючи поздовжнє переміщення коліс), відповідає рівнянню (7.4);

T_2 – кінетична енергія обертання коліс причепа:

$$T_2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot I_k \cdot \dot{\varphi}^2 = 2 \cdot I_k \cdot \dot{\varphi}^2, \quad (7.9)$$

де I_k – момент інерції колеса (довідкова величина);

$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ – кутова швидкість обертання колеса;

φ – кут повороту колеса під час обертання.

За узагальнену координату будемо, як і раніше, вважати переміщення вздовж осі x . Тоді кут повороту φ автомобільного колеса необхідно висловити через x (див. рис. 7.2).

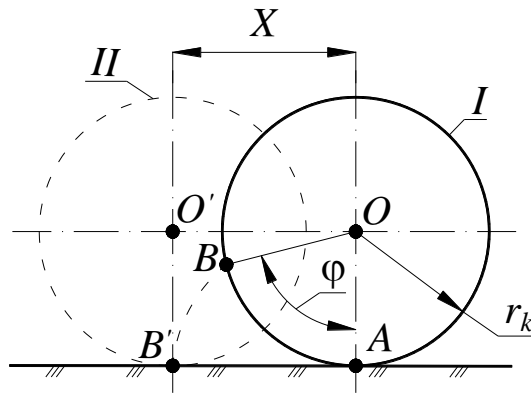


Рис. 7.2. Переміщення колеса з положення I в положення II

З рисунку 7.2 видно, що:

$$x = AB', \quad (7.10)$$

оскільки колесо переміщується без проковзування, то:

$$\cup AB = AB'. \quad (7.11)$$

Тоді:

$$\varphi = \frac{x}{r_k}; \quad (7.12)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{r_k}. \quad (7.13)$$

Підставляючи рівняння (7.13) та рівняння (7.12) в рівняння (7.9), з урахуванням рівняння (7.4) та рівняння (7.8) отримаємо:

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2} \cdot \left(m_{\text{пр}} + \frac{4 \cdot I_k}{r_k^2} \right). \quad (7.14)$$

Величина потенційної енергії відповідає рівнянню (7.5), тому підставляючи рівняння (7.5) та рівняння (7.14) в рівняння (7.3), отримаємо диференціальне рівняння (7.15).

$$\left(m_{\text{пр}} + \frac{4 \cdot I_k}{r_k^2} \right) \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0. \quad (7.15)$$

7.3. Рівняння Лагранжа для систем з одним ступенем вільності та лінійним в'язким тертям

Відмовимося ще від одного спрощення, прийнятого раніше, а саме будемо вважати, що між причепом і тягачем встановлено амортизуючий пристрій з лінійною залежністю сили тертя від швидкості переміщення x (див. рис. 7.3).

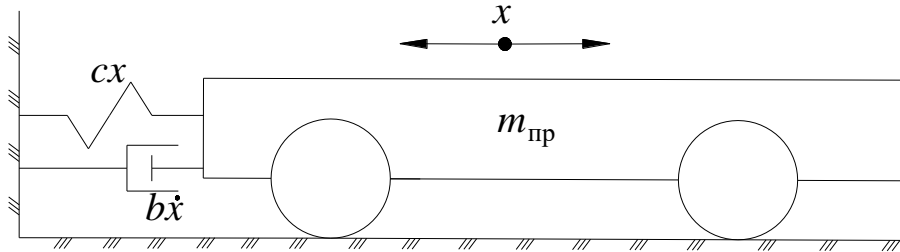


Рис. 7.3. Спрощена схема поздовжніх коливань причепа з в'язким демпфуванням

З теорії коливань відомо, що для схеми, в якій присутнє лінійно-в'язке тертя, рівняння Лагранжа 2-го роду має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (7.16)$$

де Φ – дисипативна функція Релея:

$$\Phi = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \dot{q}^2, \quad (7.17)$$

де b – узагальнений коефіцієнт в'язкості.

Для сил опору вколивальній системі, що діють на окремі точки та котрі пропорційні швидкостям v_i переміщення цих точок можна визначити як:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot v_i^2}{2}. \quad (7.18)$$

Підставляючи рівняння (7.5), (7.14) та (7.17) в рівняння (7.16), отримаємо:

$$\left(m_{\text{пр}} + \frac{4 \cdot I_k}{r_k^2} \right) \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0. \quad (7.19)$$

В рівнянні (7.20) величина Q це узагальнена сила, що обурює систему при її вимушених коливаннях.

За узагальнене переміщення приймемо переміщення штока $1 - x$.

Кінетична енергія механічної системи, що зображена на рисунку 7.4 дорівнює:

$$T = T_1 + T_{2-4} + 2 \cdot T_5, \quad (7.21)$$

де T_1 – кінетична енергія штока пневматичної камери;

T_{2-4} – кінетична енергія важеля 2, розтискного кулака 3 і осі розтискного кулака 4;

T_5 – кінетична енергія колодки.

Відповідні складові рівняння (7.21) визначимо за залежностями:

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot \dot{x}^2}{2}, \quad (7.22)$$

де m_1 – маса штоку 1;

$$T_{2-4} = \frac{I_{2-4} \cdot \dot{\phi}_p^2}{2}, \quad (7.23)$$

де $I_{2-4} = \sum_{i=2}^4 I_i$ – сумарний момент інерції важеля 2, розтискного кулака 3 та осі розтискного кулака 4;

ϕ_p – кут повороту важеля 2 (позначений на рисунку 7.4).

Якщо припустити, що:

$$\phi = \frac{x}{l_p} \text{ та } \dot{\phi} = \frac{\dot{x}}{l_p}, \quad (7.24)$$

де l_p – довжина натискного важеля 2.

То після перетворень рівняння (7.23), якщо в нього підставити рівняння (7.24) отримаємо:

$$T_{2-4} = \frac{I_{2-4} \cdot \dot{x}^2}{2 \cdot l_p^2}; \quad (7.25)$$

Величину T_5 не складно визначити з залежності:

$$T_5 = \frac{I_5 \cdot \dot{\varphi}_k^2}{2}, \quad (7.26)$$

де I_5 – момент інерції гальмової колодки.

З рисунку 7.4 можна прийняти:

$$\varphi_k \cong \frac{\cup AA_1}{OA} \cong \frac{\Delta l}{l_1 + l_2}; \quad OA = \sqrt{(r_b - W)^2 + l_1^2}, \quad (7.27)$$

де $\cup AA_1$, OA , Δl , l_1 , l_2 , W – позначено на рисунку 7.4.

З рисунку 7.4 можна побачити, що:

$$\cup AA_1 = \Delta l \cdot \frac{OA}{l_1 + l_2}; \quad \Delta l \cong \frac{x}{i_k}, \quad (7.28)$$

де i_k – передавальне відношення кулачкового розтиску.

З рівнянь (7.28) отримаємо:

$$\cup AA_1 = x \cdot \frac{OA}{(l_1 + l_2) \cdot i_k}, \quad (7.29)$$

підставляючи рівняння (7.29) у рівняння (7.27) остаточно отримаємо:

$$\varphi_k = \frac{x}{(l_1 + l_2) \cdot i_k} \quad \text{та} \quad \dot{\varphi}_k = \frac{\dot{x}}{(l_1 + l_2) \cdot i_k}. \quad (7.30)$$

А якщо підставити рівняння (7.30) в рівняння (7.26) запишемо кінетичну енергію T_5 у вигляді:

$$T_5 = \frac{I_5 \cdot \dot{x}^2}{2 \cdot (l_1 + l_2)^2 \cdot i_k^2}. \quad (7.31)$$

Потенційну енергію умовних пружних елементів визначимо за залежністю:

$$П = 2 \cdot \frac{c_k \cdot \Delta \omega}{2}. \quad (7.32)$$

де $\Delta \omega$ – переміщення, яке позначено на рисунку 7.4.

З рисунку 7.4 визначемо $\Delta\omega$ як:

$$\Delta\omega \cong \varphi_k \cdot OA \cdot \cos(\alpha). \quad (7.33)$$

де α – кут, який позначено на рисунку 7.4 та який, можна визначити з рівняння:

$$\cos(\alpha) \cong \frac{l_1}{OA}. \quad (7.34)$$

Підставимо рівняння (7.34) в рівняння (7.33) та отримуємо:

$$\Delta\omega \cong \varphi_k \cdot l_1. \quad (7.35)$$

Підставляючи рівняння (7.30) в рівняння (7.35) отримаємо:

$$\Delta\omega = x \cdot \frac{l_1}{(l_1 + l_2) \cdot i_k}. \quad (7.36)$$

Таким чином у кінцевому вигляді запишемо рівняння для визначення потенційної енергії, підставивши рівняння (7.36) в рівняння (7.32):

$$П = 2 \cdot \frac{c_k}{2} \cdot \left(\frac{l_1}{(l_1 + l_2) \cdot i_k} \right)^2 \cdot x^2. \quad (7.37)$$

Підставимо рівняння (7.22), (7.25), (7.31), (7.37) в рівняння (7.20) та з урахуванням рівняння (7.21), при $\frac{\partial T}{\partial q} = 0$ та $\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = 0$, запишемо:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 \cdot \left[m_1 + \frac{I_{2-4}}{l_p^2} + \frac{2 \cdot I_5}{(l_1 + l_2)^2 \cdot i_k^2} \right] + x \cdot 2 \cdot c_k \cdot \left[\frac{l_1}{(l_1 + l_2) \cdot i_k} \right]^2 = \\ = P_0 + P \cdot \sin(\omega \cdot t) - F_{Tp.x} \cdot \text{sign}(\dot{x}), \end{aligned} \quad (7.38)$$

де $F_{Tp.x}$ – моменти $M_{от}$, $M_{ок}$, $M_{ш}$, та сили тертя F_T , наведені на осі x .

Як бачимо з рівняння (7.38) істотно нелінійно через наявність функції знаку $\text{sign}(\dot{x})$, що згодом викличе певні труднощі при його вирішенні.

Але це рівняння можна лінеаризувати.
Перепишемо його у вигляді:

$$m_{\text{пт}} \cdot \ddot{x} + R(\dot{x}) + c_{kn} \cdot x = P_0 + P \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (7.39)$$

де $m_{\text{пт}}$ – приведена до узагальненої осі x маса гальма:

$$m_{\text{пт}} = m_1 + \frac{I_{2-4}}{l_p^2} + \frac{2 \cdot I_5}{(l_1 + l_2)^2 \cdot i_k^2}. \quad (7.40)$$

Приведена до осі x жорсткість гальмового барабана:

$$c_{kn} = 2 \cdot c_k \cdot \left[\frac{l_1}{(l_1 + l_2) \cdot i_k} \right]^2, \quad (7.41)$$

та у розглянутому випадку:

$$R(\dot{x}) = F_{\text{тр.}x} \cdot \text{sign}(\dot{x}). \quad (7.42)$$

Фактично, розглянута фізична модель звелась до схеми, що зображена на рисунку 7.5 а.

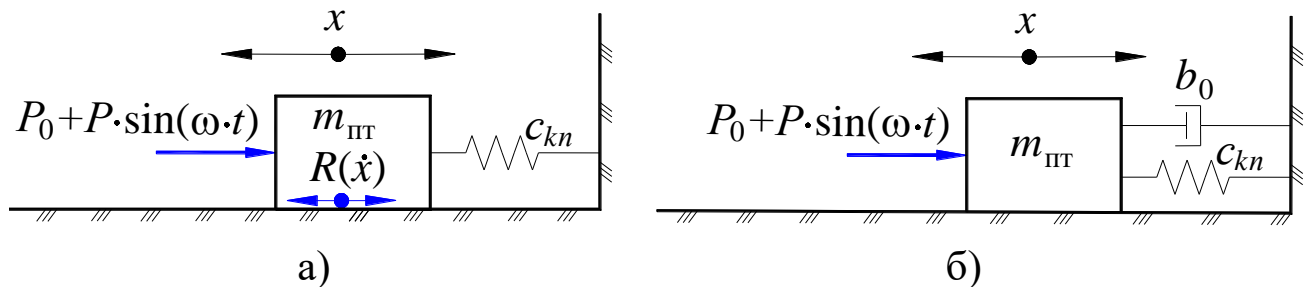


Рис. 7.5. Приведена динамічна модель барабанного гальма:

а) – з сухим нелінійним тертям; б) – лінеаризована модель з еквівалентним в'язким тертям

При наявності нелінійного в'язкого та іншого виду тертя, різні їх види можуть бути замінені деяким еквівалентним в'язким демпфуванням, що в результаті призводить до лінійного диференціального рівняння для гармонійного руху виду (в даному випадку):

$$m_{\text{пт}} \cdot \ddot{x} + b_0 \cdot \dot{x} + c_{kn} \cdot x = P_0 + P \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (7.43)$$

що відповідає моделі зображеній на рисунку 7.5 б, на відміну від рівняння (7.39) та рисунку 7.5 а, з відомим рішенням:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi),$$

де ψ – початкова фаза коливань.

Така заміна може здійснюватися з використанням так званого методу енергетичного балансу. Тобто задана нелінійна сила $R(\dot{x})$ в рівнянні (7.39) замінюється еквівалентною в енергетичному відношенні лінійною силою $b_0 \cdot \dot{x}$. Коефіцієнт b_0 , який зветься еквівалентним коефіцієнтом в'язкого демпфірування, будемо знаходити з рівності енергії, що розсіюється за один період коливань при роботі, яка здійснюється за один період еквівалентною силою лінійного тертя.

Енергія, що розсіюється за один період коливань, в даному випадку може бути представлена виразом:

$$U_{Tp} = 4 \int_0^{T/4} F_{Tp}(t) \cdot \dot{x}(t) \cdot dt. \quad (7.44)$$

З класичного визначення коефіцієнта корисної дії, представимо силу тертя, яке:

$$F_{Tp}(t) = (1 - \eta) \cdot (P_0 + P \cdot \sin(\omega \cdot t)), \quad (7.45)$$

де η – коефіцієнт корисної дії механізму приводу барабанного гальма.

Якщо вважати, що:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (7.46)$$

де A – амплітуда коливань сили відносно середнього її положення;

$$\dot{x}(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t). \quad (7.47)$$

Підставляючи рівняння (7.45), (7.47) в рівняння (7.44) отримаємо:

$$\begin{aligned}
 U_{Tp} &= 4 \int_0^{T/4} (1-\eta) \cdot P_0 \cdot A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) dt + \\
 &+ 4 \int_0^{T/4} (1-\eta) \cdot P \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) dt = \\
 &= 4 \cdot A \cdot (P_0 + 0.5 \cdot P) \cdot (1-\eta).
 \end{aligned}
 \tag{7.48}$$

Робота, що здійснюється за один період коливань еквівалентною силою лінійного тертя, з урахуванням рівняння (7.44):

$$U_{b_0} = 4 \int_0^T b_0 \cdot \dot{x} \cdot \dot{x} dt = b_0 \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \int_0^T \cos^2(\omega \cdot t - \psi) dt = \pi \cdot b_0 \cdot A^2 \cdot \omega. \tag{7.49}$$

Дорівнюючи рівняння (7.48) та рівняння (7.49), отримаємо:

$$b_0 = \frac{4 \cdot (P_0 + 0.5 \cdot P) \cdot (1-\eta)}{\pi \cdot A \cdot \omega}. \tag{7.50}$$

З класичної теорії коливань відомо спільне рішення для лінійного звичайного рівняння (7.43):

$$A = \frac{P}{c_{kn} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{b_0^2 \cdot \omega^2}{c_{kn}^2}}}, \tag{7.51}$$

де $\omega_0^2 = c_{kn} / m_{\text{пг}}$ – початкова частота коливань.

Підставимо рівняння (7.50) в рівняння (7.51):

$$A = \frac{P}{c_{kn} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot (P_0 + 0.5 \cdot P) \cdot (1-\eta)}{\pi \cdot A \cdot c_{kn}}\right)^2}}, \tag{7.52}$$

зведемо ліву та праву частину рівняння (7.52) в квадрат і після відповідних перетворень остаточно запишемо:

$$A = \pm \frac{P \cdot \omega_0^2}{\pi \cdot c_{kn}} \cdot \frac{\sqrt{\pi^2 - \left(4 \cdot \left(0.5 + \frac{P_0}{P}\right) \cdot (1 - \eta)\right)^2}}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (7.53)$$

саме цей вираз і можна використовувати при обчисленнях рівняння (7.50).

Таким чином, всі складові для обчислення рівняння (7.43) визначені.

7.5. Коливальні системи з двома ступенями вільності та рівняння Лагранжа

З рівняння (7.1) для коливальних систем з двома ступенями вільності рівняння Лагранжа другого роду матимуть наступний вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_1} = Q_1; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_2} = Q_2. \end{cases} \quad (7.54)$$

При наявності узагальнених потенційних і не потенційних сил, включаючи також в'язке тертя, в розгорнутому вигляді рівняння (7.54) можна записати у наступному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_1} = Q_1; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_2} = Q_2, \end{cases} \quad (7.55)$$

де всі складові розшифровуються за аналогією з рівняннями (7.1), (7.16) та (7.20).

Розглянемо розрахункову схему так званої «плоскої» моделі автомобіля, яка зображена на рисунку 7.6.

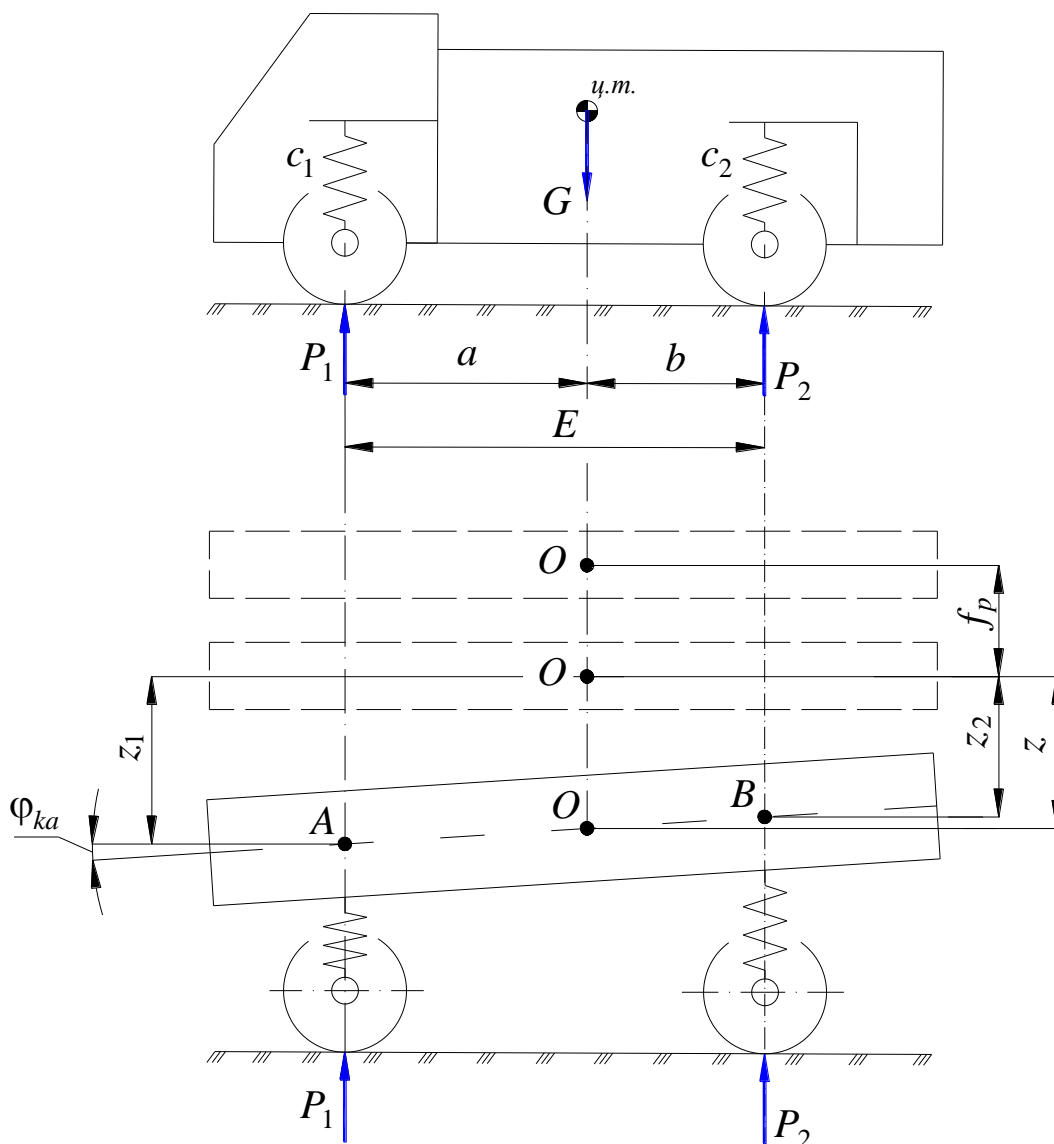


Рис. 7.6. Розрахункова схема плоскої моделі автомобіля:

f_p – статична деформація ресор; c_1 та c_2 – відповідно жорсткість передньої та задньої підвіски автомобіля; b та a – відповідно координати розташування центра тяжіння відносно задньої та передньої вісі автомобіля; E – колісна база автомобіля; P_1 та P_2 – відповідно реакції опори на передніх та задніх колесах автомобіля; G – вага автомобіля

Зробимо дослідження вільних коливань автомобіля у вертикальній площині. Припустимо, що вага підресореної частини G автомобіля дорівнює масі кузова автомобіля, а масами не підресорених частин знехтуємо. Бужемо також вважати, що радіус інерції відносно центральної поперечної вісі, що проходить через центр тяжіння ($ц.т.$ на рис. 7.6) дорівнює радіусу інерції (i_{C_y}), що

проходить через центр мас кузова автомобіля. А також зробимо припущення, що жорстковсті пружних елементів підвіски (ресор або пружин) c_1 та c_2 обрані таким чином, що:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b}{a}. \quad (7.56)$$

Величини c_1 , c_2 , b та a позначено на рисунку 7.6.

За узагальнені координати приймемо (див. рис. 7.6): вертикальні переміщення центру тяжіння автомобіля (z) та– кут повороту кузова автомобіля (φ_{ka}) щодо центру тяжіння автомобіля.

Тоді кінетичну енергію досліджуваної системи можна визначити з залежності:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} \cdot \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} \cdot i_{C_y}^2 \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot i_{C_y}^2 \cdot \dot{\varphi}^2. \quad (7.57)$$

За позитивний напрямок z будемо вважати переміщення центру тяжіння автомобіля вниз від статично-рівноважного стану кузова, за позитивний напрямок φ_{ka} – поворот проти годинникової стрілки.

Потенційну енергію системи визначаємо, як суму потенційної енергії автомобіля в полі сил тяжіння Π_1 та потенційної енергії деформованих ресор Π_2 :

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2, \quad (7.58)$$

де:

$$\Pi_1 = -G \cdot z; \quad (7.59)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot (f_p + z + a \cdot \varphi_{ka})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot f_p^2 + \\ & + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (z + f_p - b \cdot \varphi_{ka})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot f_p^2 = c_1 \cdot f_p^2 + \\ & + 2 \cdot c_1 \cdot f_p \cdot z + 2 \cdot c_1 \cdot f_p \cdot a \cdot \varphi_{ka} + c_1 \cdot z^2 + 2 \cdot c_1 \cdot z \cdot a \cdot \varphi_{ka} + \\ & + c_1 \cdot a^2 \cdot \varphi_{ka}^2 - c_1 \cdot f_p^2 + c_2 \cdot f_p^2 + 2 \cdot c_2 \cdot f_p \cdot z - 2 \cdot c_2 \cdot f_p \cdot b \cdot \varphi_{ka} + \\ & + c_2 \cdot z^2 - 2 \cdot c_2 \cdot z \cdot b \cdot \varphi_{ka} + c_2 \cdot b^2 \cdot \varphi_{ka}^2 - c_2 \cdot f_p^2. \end{aligned}$$

Провівши відповідні перетворення та з урахуванням рівняння (7.56) можна отримати:

$$c_1 \cdot f_p \cdot a \cdot \varphi - c_2 \cdot f_p \cdot b \cdot \varphi = 0,$$

$$c_1 \cdot z \cdot a \cdot \varphi - c_2 \cdot z \cdot b \cdot \varphi = 0.$$

Таким чином в кінцевому вигляді потенційну енергію Π_2 запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & 2 \cdot c_1 \cdot f_p \cdot z + c_1 \cdot z^2 + c_1 \cdot a^2 \cdot \varphi_{ka}^2 + \\ & + 2 \cdot c_2 \cdot f_p \cdot z + c_2 \cdot z^2 + c_2 \cdot b^2 \cdot \varphi_{ka}^2. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Підставляючи рівняння (7.59) та рівняння (7.60) в рівняння (7.58), отримаємо:

$$\Pi = -G \cdot z + 2 \cdot f_p \cdot z \cdot (c_1 + c_2) + z^2 \cdot (c_1 + c_2) + \varphi_{ka}^2 \cdot (c_1 \cdot a^2 + c_2 \cdot b^2).$$

З курсу теоретичної механіки відомо, що:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0,$$

тому:

$$-G + 2 \cdot f_p \cdot (c_1 + c_2) = 0,$$

отже остаточно отримаємо:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \left[z^2 \cdot (c_1 + c_2) \cdot 2 + \varphi_{ka}^2 \cdot (c_1 \cdot a^2 + c_2 \cdot b^2) \cdot 2 \right]. \quad (7.61)$$

Підставляючи рівняння (7.57), (7.61) в рівняння (7.55), з урахуванням того, що для розглянутого випадку в рівнянні (7.55) величини $\Phi = 0$ та $Q_1 = Q_2 = 0$, отримаємо диференціальні рівняння механічної системи, що аналізується, у вигляді:

$$\begin{cases} \ddot{z} + \frac{(c_1 + c_2)}{m} \cdot z = 0; \\ \ddot{\varphi}_{ka} + \frac{2 \cdot (c_1 \cdot a^2 + c_2 \cdot b^2)}{m \cdot i_{C_y}^2} \cdot \varphi_{ka} = 0. \end{cases} \quad (7.62)$$

Як бачимо, ми отримали досить прості диференціальні рівняння в тому сенсі, що в кожному з рівнянь присутня тільки одна невідома. Сталося це тому, що ми спочатку при виборі узагальнених координат вибрали так звані головні координати механічної системи.

Головними координатами механічної системи називають узагальнені координати, вибрані таким чином, щоб вирази кінетичної та потенціальної енергії містили лише квадрати узагальнених швидкостей та координат переміщення. Саме такими і є вирази (7.57) та (7.61).

Однак, це далеко не єдиний спосіб спростити необхідні диференціальні рівняння.

Як приклад запишемо тепер рівняння руху кузова автомобіля, використовуючи другий закон Ньютона.

З рисунку 7.6 можна записати:

$$\begin{cases} P_1 = G_1 + c_1 \cdot z_1; \\ P_2 = G_2 + c_2 \cdot z_2; \\ G_1 + G_2 = G; \\ G_1 \cdot a = G_2 \cdot b, \end{cases} \quad (7.63)$$

де G_1 та G_2 – реакції дороги на відповідних колесах автомобіля в статиці.

З другого закону Ньютона:

$$P_1 + P_2 - G = -m \cdot \ddot{z}, \quad (7.64)$$

після підстановки системи рівнянь (7.63) в рівняння (7.64) та приведення подібних членів, отримаємо:

$$m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + c_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot z_2 = 0. \quad (7.65)$$

Для моментів щодо поперечної вісі, що проходить через центр тяжіння автомобіля, запишемо:

$$m \cdot i_{C_y}^2 \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = P_2 \cdot b - P_1 \cdot a, \quad (7.66)$$

звідки, після підстановки рівняння (7.63) в рівняння (7.65), отримаємо:

$$m \cdot i_{C_y}^2 \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - c_2 \cdot z_2 \cdot b + c_1 \cdot z_1 \cdot a = 0. \quad (7.67)$$

З рисунка 7.6 також запишемо:

$$\begin{cases} z_1 = z + a \cdot \tan(\varphi) \approx z + a \cdot \varphi, \\ z_2 = z - b \cdot \tan(\varphi) \approx z - b \cdot \varphi. \end{cases} \quad (7.68)$$

Якщо двічі продиференціювати систему рівнянь (7.68) отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} + a \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \\ \frac{d^2 z_2}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} - b \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \end{cases} \quad (7.69)$$

З рівняння (7.65) виразимо $\frac{d^2 z}{dt^2}$, а з рівняння (7.67) – $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$, та підставивши їх у рівняння (7.69), після приведення подібних членів, отримаємо:

$$\begin{cases} m \cdot \frac{d^2 z_1}{dt^2} + c_1 \cdot z_1 \cdot \left(1 + \frac{a^2}{i_{C_y}^2}\right) + c_2 \cdot z_2 \cdot \left(1 - \frac{a \cdot b}{i_{C_y}^2}\right) = 0, \\ m \cdot \frac{d^2 z_2}{dt^2} + c_2 \cdot z_2 \cdot \left(1 + \frac{b^2}{i_{C_y}^2}\right) + c_1 \cdot z_1 \cdot \left(1 - \frac{a \cdot b}{i_{C_y}^2}\right) = 0. \end{cases} \quad (7.70)$$

З отриманих рівнянь слідує, що вертикальні коливання точок *A* та *B* (див. рис. 7.6) автомобіля залежать одна від іншої. При порушенні коливань однієї з точок одразу виникають коливання іншої (це явище виникає тому що в кожне з рівнянь (7.70) входять, як

значення z_1 так і значення z_2). Очевидно, що якщо коливання однієї точки не будуть відображатися на коливаннях іншої, то коливання в цілому будуть меншими.

Аналіз рівнянь показує, що незалежність коливань можлива лише в тому випадку, коли в кожне рівняння увійде лише одна змінна (z_1 або z_2), що можливо при $a \cdot b - i_{C_y}^2 = 0$, тобто:

$$a \cdot b = i_{C_y}^2. \quad (7.71)$$

Розглянемо схему (рис. 7.7) пружного колеса з підресореною масою автомобіля, у якого має місце вираз (7.71).

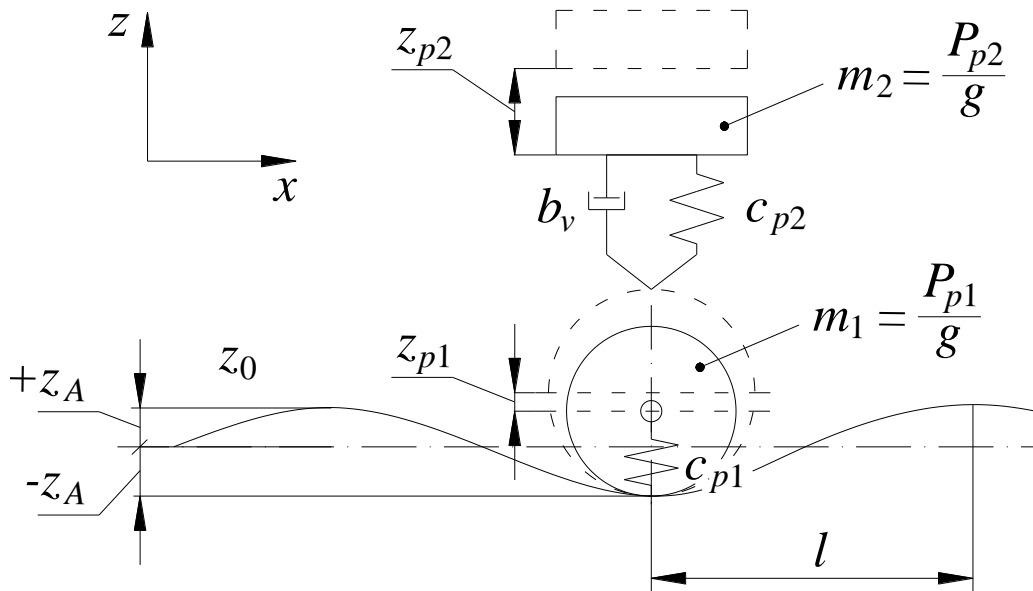


Рис. 7.7. Схема пружного колеса з підресореною масою:
 P_{p1}, P_{p2} – вага відповідних мас; c_{p1}, c_{p2} – жорсткість пружних елементів;
 b_v – коефіцієнт в'язкого лінійного тертя

Для схеми, яка зображена на рисунку 7.7, рівняння Лагранжа матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_{p1}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_{p1}} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_{p1}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_{p1}} = Q_{p1}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_{p2}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_{p2}} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_{p2}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_{p2}} = 0. \end{cases} \quad (7.72)$$

За узагальнені координати прийємо z_{p1} – переміщення центру тяжіння пружного колеса масою m_1 від положення рівноваги, а також z_{p2} – переміщення центру тяжіння пружного колеса масою m_2 від положення рівноваги.

В такому разі кінетична енергія системи може визначена як:

$$T = \frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot \dot{z}_{p1}^2 + m_2 \cdot \dot{z}_{p2}^2). \quad (7.73)$$

Потенційна енергія визначається як сума потенційних енергій деформованих пружин Π_1 та потенційних енергій P_{p1} та P_{p2} в полі тяжіння Π_2 :

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2;$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \cdot c_{p1} (f_1 + z_{p1})^2 - \frac{1}{2} \cdot c_{p1} \cdot f_1^2 + \frac{1}{2} \cdot c_{p2} (f_2 + z_{p2} - z_{p1})^2 - \frac{1}{2} \cdot c_{p2} \cdot f_2^2,$$

де f_1 та f_2 – статичні прогини пружин;

$$\Pi_2 = -P_{p1} \cdot z_{p1} - P_{p2} \cdot z_{p2};$$

звідки:

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & \frac{1}{2} \cdot c_{p1} \cdot (f_1 + z_{p1})^2 - \frac{1}{2} \cdot c_{p1} \cdot f_1^2 + \\ & + \frac{1}{2} \cdot c_{p2} (f_2 + z_{p2} - z_{p1})^2 - \frac{1}{2} \cdot c_{p2} \cdot f_2^2 - P_{p1} \cdot z_{p1} - P_{p2} \cdot z_{p2}. \end{aligned} \quad (7.74)$$

З курсу теоретичної механіки відомо, що для даної системи сил умовою рівноваги є:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z_{p1}} \right)_{z_{p1}=z_{p2}=0} = c_{p1} \cdot f_1 - c_{p2} \cdot f_2 - P_{p1} = 0, \quad (7.75)$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z_{p2}} \right)_{z_{p1}=z_{p2}=0} = c_{p2} \cdot f_2 - P_{p2} = 0, \quad (7.76)$$

Після підстановки рівняння (7.75) та рівняння (7.76) в рівняння (7.74) і приведення подібних членів, отримаємо:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \left[z_{p1}^2 \cdot (c_{p1} + c_{p2}) - 2 \cdot z_{p1} \cdot z_{p2} \cdot c_{p2} + z_{p2}^2 \cdot c_{p2} \right]. \quad (7.77)$$

Функції Релея для для тіла, яке має в'язке тертя (див. рис. 7.7) матиме вигляд:

$$\Phi = \frac{b_v \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2}{2}. \quad (7.78)$$

Функція зовнішнього кінематичного збудження (див. рис. 7.7) матиме вигляд:

$$Q_{p1} = c_{p1} \cdot (z_0 - z_{p1}) \quad (7.79)$$

де :

$$z_0 = z_A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) = z_A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot V_a \cdot t}{l}\right), \quad (7.80)$$

де z_A – позначено на рисунку 7.7;

$V_a = const$ – швидкість руху автомобіля.

Проведемо відповідні перетворення та обчислення:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_{p1}} \right) &= m_1 \cdot \ddot{z}_{p1} \quad \text{та} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_{p2}} \right) = m_2 \cdot \ddot{z}_{p2}; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial z_{p1}} &= z_{p1} \cdot (c_{p1} + c_{p2}) - z_{p2} \cdot c_{p2} = c_{p1} \cdot z_{p1} - c_{p2} \cdot (z_{p2} - z_{p1}); \\ \frac{\partial \Pi}{\partial z_{p2}} &= -z_{p1} \cdot c_{p2} + z_{p2} \cdot c_{p2} = c_{p2} \cdot (z_{p2} - z_{p1}); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_{p1}} &= -b_v \cdot (\dot{z}_{p2} - \dot{z}_{p1}) \quad \text{та} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_{p2}} = b_v \cdot (\dot{z}_{p2} - \dot{z}_{p1}). \end{aligned} \quad (7.81)$$

Підставляючи рівняння (7.79) – (7.81) в рівняння (7.72), отримуємо розшукану систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{z}_{p1} - b_v \cdot (\dot{z}_{p2} - \dot{z}_{p1}) + c_{p1} \cdot z_{p1} - c_{p2} \cdot (z_{p2} - z_{p1}) = c_{p1} \cdot (z_0 - z_{p1}); \\ m_2 \cdot \ddot{z}_{p2} + b_v \cdot (\dot{z}_{p2} - \dot{z}_{p1}) + c_{p2} \cdot (z_{p2} - z_{p1}) = 0. \end{cases} \quad (7.82)$$

**Можливості пакету *Simulink* для чисельного аналізу динамічних моделей механічних систем.
Чисельний аналіз механічних систем.
Чисельний аналіз механічних
коливальних систем**

- 8.1. Реалізація в *Simulink* рівняння Лагранжа для систем з одним ступенем вільності без в'язкого тертя**
- 8.2. Реалізація в *Simulink* рівняння Лагранжа для систем з одним ступенем вільності та лінійним в'язким тертям**
- 8.3. Реалізація в *Simulink* та рішення лінеаризованого диференціального рівняння для системи з нелінійним сухим тертям**
- 8.4. Реалізація в *Simulink* коливальної системи з двома ступенями вільності на основі рівняння Лагранжа**

Пакет розширення *Simulink* служить для імітаційного моделювання моделей, що складаються з графічних блоків із заданими властивостями (параметрами). Компоненти моделей, в свою чергу, є графічними блоками і моделями, які містяться в ряді бібліотек і за допомогою миші можуть переноситися в основне вікно і з'єднуватися один з одним необхідними зв'язками. До складу моделей можуть включатися джерела сигналів різного виду, віртуальні реєструючі прилади, графічні засоби анімації. Подвійне клацання мишею на блоці моделі виводить вікно зі списком його параметрів, які користувач може змінювати. Запуск імітації забезпечує математичне моделювання побудованої моделі з наочним візуальним представленням результатів.

Пакет заснований на побудові блокових схем шляхом перенесення блоків з бібліотеки компонентів у вікно редагування створеної користувачем моделі. Потім модель запускається на виконання.

Продемонструємо потенціал та можливості пакета *Simulink*, що є розширенням *MatLAB*, на прикладі рішення диференціальних рівнянь, що розглядалися в попередній темі 7.

8.1. Реалізація в *Simulink* рівняння Лагранжа для систем з одним ступенем вільності без тертя

Розглянемо спрощену схему поздовжніх коливань причепа без в'язкого тертя (див. рис. 7.1). Для такої схеми з диференціального рівняння (7.7) визначимо прискорення:

$$\ddot{x} = \frac{-c \cdot x}{m_{\text{пр}}} \quad (8.1)$$

Інтегруючи прискорення, можна отримати швидкість \dot{x} . Нарешті, інтегруючи і \ddot{x} , отримаємо закон зміни переміщення вантажу x в часі. Отримані дві послідовні величини можна тепер використовувати для формування правої частини рівняння (8.1).

Запустити пакет *Simulink* програми *MatLAB* можна, натиснувши кнопку *Simulink* на панелі інструментів вікна *MatLAB*. Після натискання з'явиться вікно «*Simulink Start Page*» в якому активізуємо кнопку «*Blank Model*», яка призведе до появи інтерфейсу нової моделі в *Simulink* (див. рис. 8.1 – 8.3).

При активізації кнопки *Library Browser* з'являється набір піктограм компонентів активного розділу бібліотеки *Simulink* (див. рис. 8.4).

За допомогою кнопок панелі інструментів можна відкрити вікно для створення нової моделі або завантажити вже існуючу, запам'ятати новостворену модель.

Меню «*Prepare*» дозволяє встановити загальні параметри моделювання (див. рис. 8.5): *Solver* (Вирішувач) – дозволяє встановити параметри вирішального пристрою системи моделювання *Simulink*; *Simulation time* – час моделювання. Воно задається початковим часом *Start time* (зазвичай 0) і кінцевим *Stop time*, тощо.

У віконці *Simulation stop time* – можна також за допомогою клавіатури встановити кінцевий час моделювання.

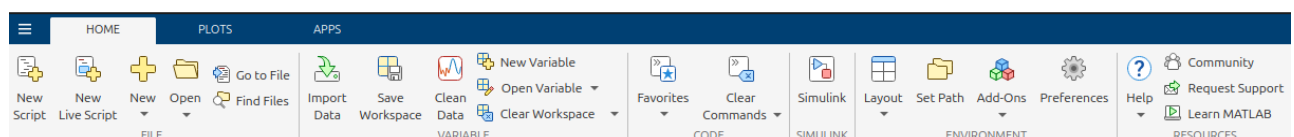


Рис. 8.1. Панель інструментів вікна *MatLAB* з кнопкою *Simulink*

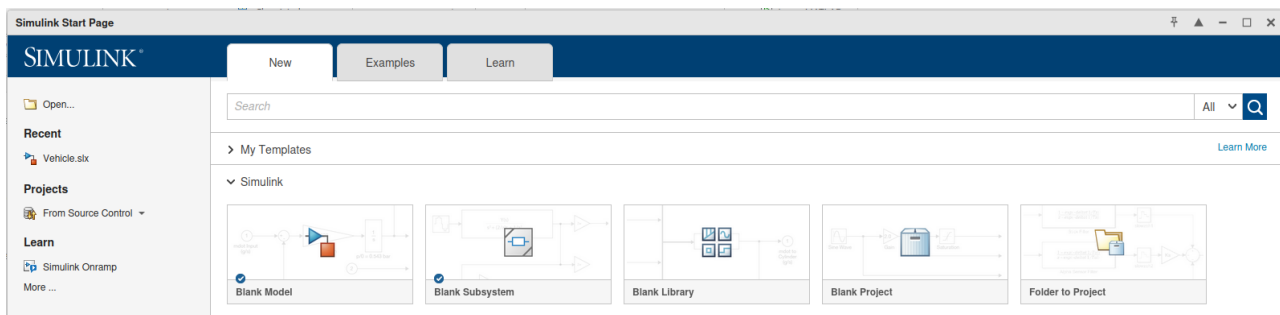


Рис. 8.2. Вікно «Simulink Start Page» в якому знаходиться кнопка «Blank Model»

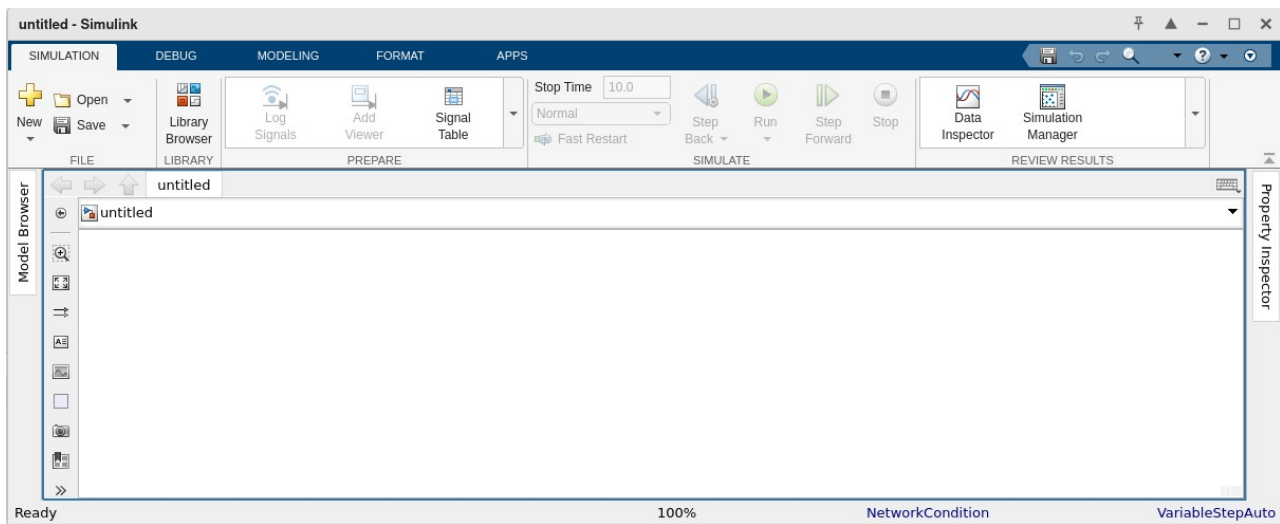


Рис. 8.3. Інтерфейс вікна моделі в *Simulink*

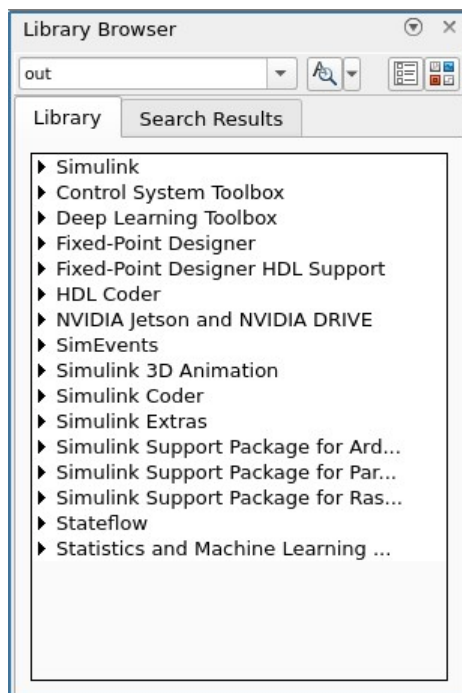


Рис. 8.4. Вікно «Library Browser» в якому розташовані розділи з відповідними блоками бібліотеки

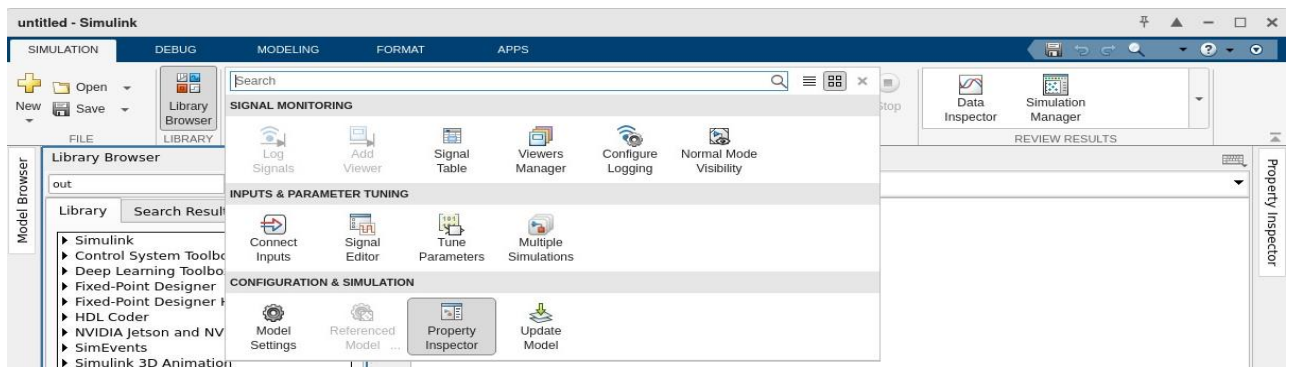


Рис. 8.5. Функції меню «*Prepare*» з кнопками налаштування

Для побудови тієї чи іншої моделі необхідно звернутися до бібліотеки *Library Browser* (див. рис. 8.4) та обрати необхідні компоненти з відповідного розділу, наприклад, як це показано для розділу «*Commonly Used Blocks*» (рис. 8.6), що дозволять створити імітаційну модель в просторі вікна моделі (див. рис. 8.3).

Для того, щоб скористатися необхідним блоком у програмі, необхідно підвести до нього курсор, натиснути ліву кнопку миші та, утримуючи її, перенести обраний блок в потрібне місце білого простору моделі (див. рис. 8.3).

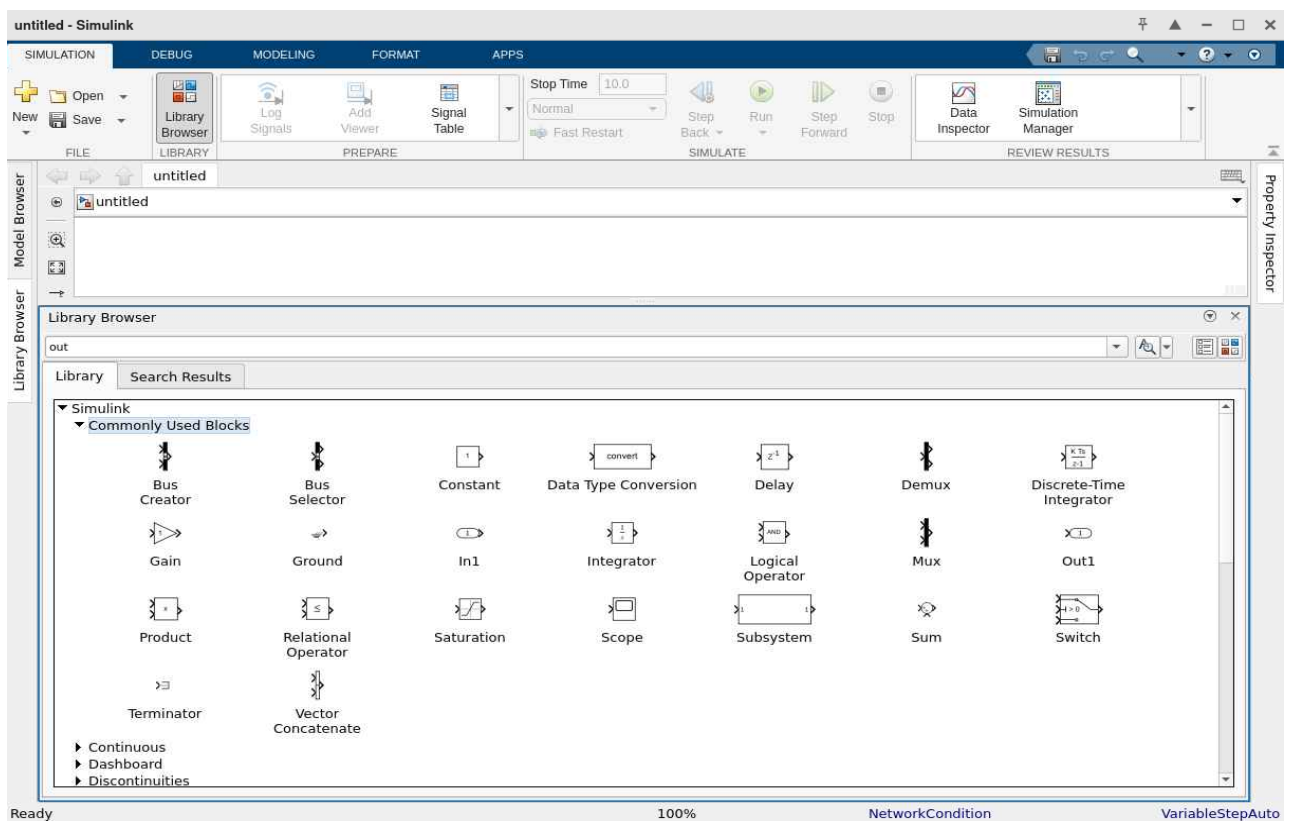


Рис. 8.6. Компоненти розділу «*Commonly Used Blocks*» бібліотеки «*Library Browser*»

Кнопка *Run* (див. рис. 8.3) дає команду на початок розрахунків за моделлю.

Таким чином можна сформулювати загальні принципи побудови моделей в *Simulink*:

1. Диференціальні рівняння потрібно перекомпонувати так, щоб в лівій їх частини залишилася тільки змінна з найвищим ступенем похідної, подібно до того, як це було зроблено в рівнянні (8.1).

2. Модель для вирішення цього рівняння необхідно починати з послідовно з'єднаних: блоку прийому даних і відповідної кількості інтеграторів (в залежності від заданого рівняння та поставленого завдання). Для задачі, що розглядається в даному розділі теми 8, це можна представити у вигляді, наприклад двох варіантів (рис. 8.7).

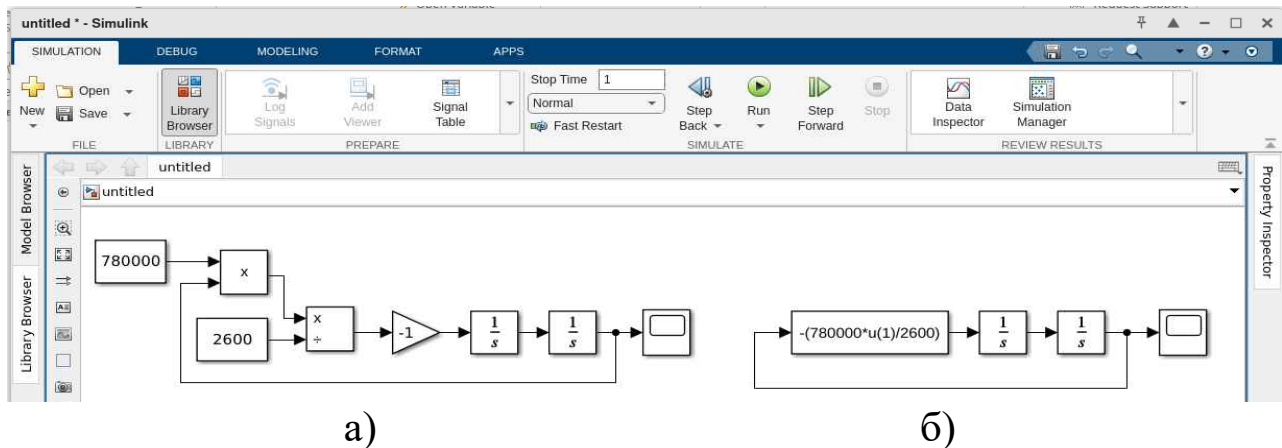
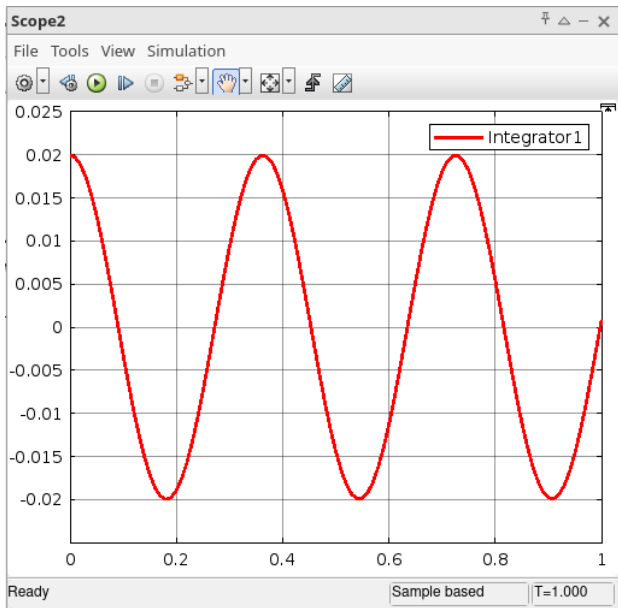


Рис. 8.7. Варіанти створення моделі поздовжніх коливань причепа без в'язкого тертя у просторі вікна моделі в *Simulink*:

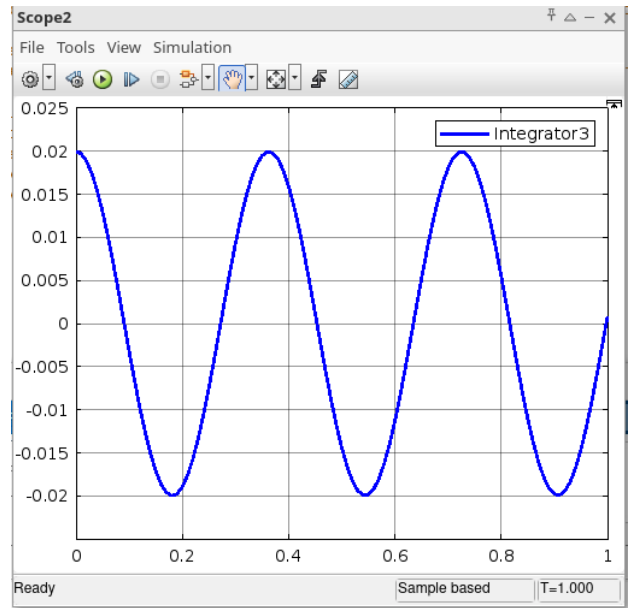
- а) – модель з використанням блоків константи та математичних блоків з розділу «*Math Operation*» бібліотеки «*Library Browser*»; б) – модель з використанням блоку функції *Fcn* з розділу «*User-Defined Functions*»

Після натискання кнопки *Run* (запуск на рахунок) на панелі інструментів і активізації блоку *Scope* (останній елемент в ланцюгу блоків першої або другої моделі на рисунку 8.7), шляхом підведення до нього курсора та подвійного натискання на ліву кнопку миші, відкривається вікно з результатами моделювання (див. рис. 8.8). В якості початкових умов в другому інтеграторі моделі задано значення переміщення 0.02 в графі *Initial condition*.

Як можна побачити з рисунку 8.8 результати моделювання ідентичні один одному та зовсім не відрізняються один від одного не дивлячись на різну логіку побудови моделі у просторі вікна моделі в *Simulink*.



а)



б)

Рис. 8.8. Результати моделювання величини x за моделями, що зображені на рисунку 8.7 та в яких використано рівняння (8.1):

а) – відповідає рисунку 8.7 а; б) – відповідає рисунку 8.7 б

Врахуємо в моделях, що зображені на рисунку 8.7, кінетичну енергію коліс, що обертаються. Для цього перепишемо диференціальне рівняння (7.15) у вигляді:

$$\ddot{x} = \frac{-c \cdot x}{\left(m_{\text{пр}} + \frac{4 \cdot I_k}{r_k^2} \right)} \quad (8.2)$$

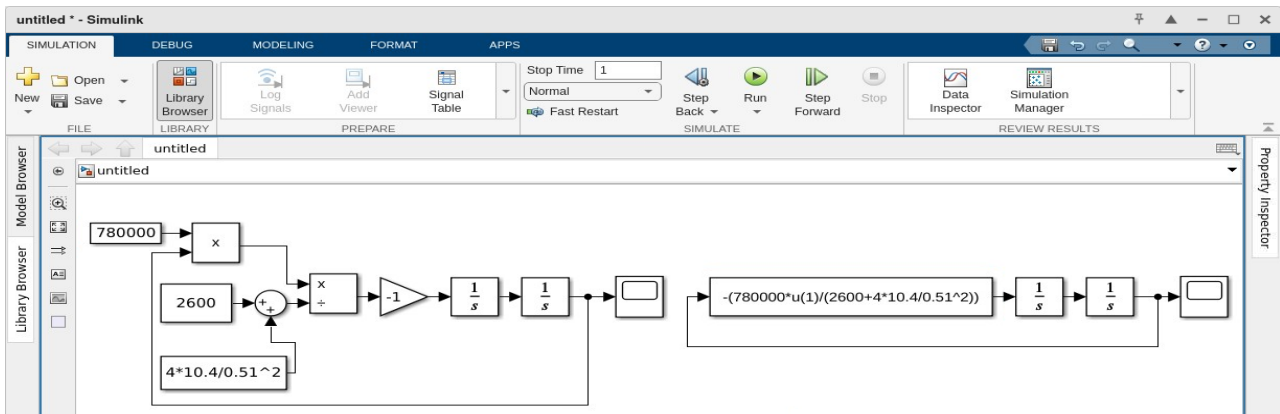
Змінемо моделі відповідно до прийнятої концепції їх побудови:

– в модель, що розташована на рисунку 8.7 а) додаються нові блоки, які сумують масу $m_{\text{пр}}$ та приведену масу, яка пов'язана з інерцією обертання автомобільного колеса;

– в моделі, що розташована на рисунку 8.7 б) модифікуємо блок функції додаючи до рівняння складову приведеної маси, яка пов'язана з інерцією обертання автомобільного колеса.

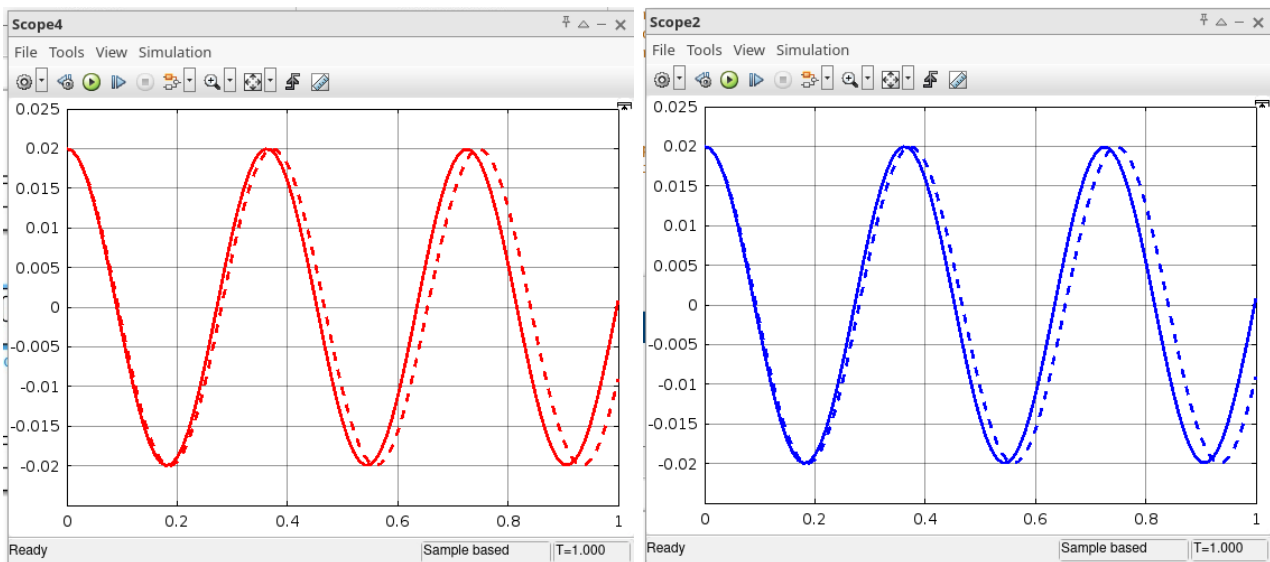
Результат перетворення моделі, що зображена на рисунку 8.7 представлена на рисунку 8.9, а результат розрахунків зображено на рисунку 8.10.

Слід відзначити, що обидві моделі мають ідентичні результати розрахунків і повністю співпадають один з одним, не дивлячись на те, що вони побудовані різними способами (див. рис. 8.7 та рис. 8.9).



а) б)

Рис. 8.9. Варіанти створення моделі поздовжніх коливань причепа без в'язкого тертя з урахуванням кінетичної енергії коліс, що обертаються: а) – модель з використанням блоку *sum* з розділу «*Math Operation*» бібліотеки «*Library Browser*»; б) – модель з використанням блоку функції *Fcn* з розділу «*User-Defined Functions*», в який додано складову приведенної маси, яка пов'язана з інерцією обертання автомобільного колеса



а) б)

Рис. 8.10. Результати моделювання величини x за моделями, що зображені на рисунку 8.9 та в яких використано рівняння (8.2): а) – відповідає рисунку 8.7 а та 8.9 а; б) – відповідає рисунку 8.7 б та 8.9 б

8.2. Реалізація в *Simulink* рівняння Лагранжа для систем з одним ступенем вільності та лінійним в'язким тертям

Розглянемо тепер коливальну систему з одним ступенем вільності та лінійним в'язким тертям. Для цього необхідно додати до моделей, що зображені на рисунку 8.9, компонент лінійного в'язкого тертя.

У математичному вигляді диференційне рівняння запишемо у вигляді (8.3) шляхом вираження величини \ddot{x} з рівняння (7.19).

$$\ddot{x} = \frac{-(b \cdot \dot{x} + c \cdot x)}{\left(m_{\text{пр}} + \frac{4 \cdot I_k}{r_k^2}\right)} \quad (8.3)$$

Використаємо для моделювання модель, що зображена на рисунку 8.9 б), оскільки вона має простіший вигляд і може бути легко модифікована (див. рис. 8.11) шляхом введення в блок функції *Fcn* скрадової рівняння (8.3) – $b \cdot \dot{x}$ та додавання блоку *tlx*, який поєднує два сигнали $u(1)$ та $u(2)$ (відповідно \dot{x} та x) в один вихід який є входом до блоку функції *Fcn*.

Результати моделювання накладені на результати моделювання зображені на рисунку 8.10 б) та представлені на рисунку 8.12.

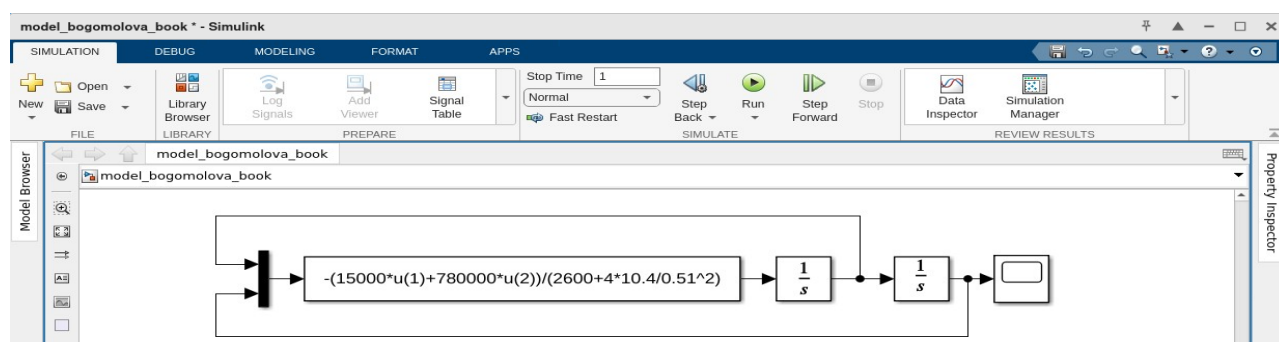


Рис. 8.11. Реалізація моделі поздовжніх коливань причепа з в'язким тертям та з урахуванням кінетичної енергії коліс, що обертаються

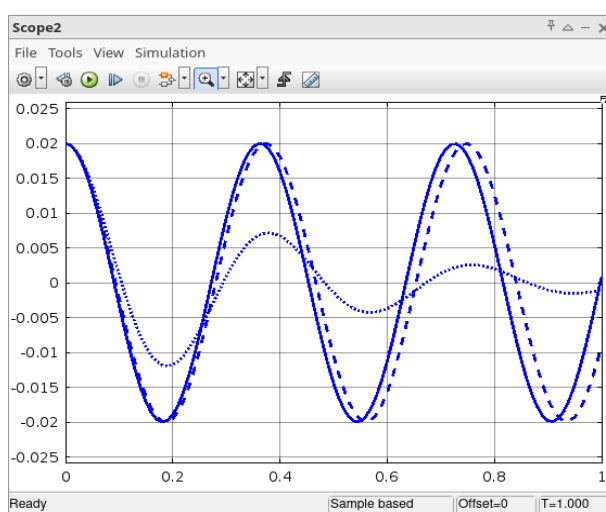


Рис. 8.12. Результати моделювання величини x за моделлю, що зображені на рисунку 8.11 накладені на результати моделювання що зображені на рисунку 8.10 б)

З рисунку 8.12 можна побачити, що рівняння (8.3), на відміну від рівняння (8.1) та рівняння (8.2), дозволяє описати вільні затухаючі коливання причепа з урахуванням в'язкого тертя та кінетичної енергії коліс, що обертаються.

8.3. Реалізація в *Simulink* та рішення лінеаризованого диференціального рівняння для системи з нелінійним сухим тертям

Як приклад вимушених коливань розглянемо динамічну модель барабанного гальма з кулачковим розтиском, що зображений на рисунку 7.4. Така модель, як уже відомо (див. розділ 7.4), зводиться до лінеаризованої моделі (див. рис. 7.5 б), яка описується рівнянням (7.43).

Для реалізації даної моделі в *Simulink* перепишемо рівняння (7.43) у вигляді:

$$\ddot{x} = \frac{P_0 + P \cdot \sin(\omega \cdot t) - (b_0 \cdot \dot{x} + c_{kn} \cdot x)}{m_{\text{ITT}}} \quad (8.4)$$

Побудуємо модель в середовище *Simulink* за аналогією з тим, як це було зроблено в розділі 8.2. Результат створення моделі зображено на рисунку 8.14. Всі константи моделі були обчислені за допомогою рівнянь наведених в розділі 7.4 та представлені у вигляді скриншоту Лістингу програми (рис. 8.13), розрахунок якого необхідно виконати в *m*-файлі *MatLAB* перед початком запуску програми в *Simulink*.

```

1      c; clear; % Очищення від попередніх даних перед початком обчислення нових даних
2
3      % Введення констант моделі
4      m1=0.2; % Маса штока пневмокамери
5      I2=0.000203; % Кінетична енергія важеля пневмокамери, розтискного кулака і осі розтискного кулака
6      I5=0.17; % Кінетична енергія колодки
7      l1=0.12; % Довжина натискного важеля
8      l1=0.15; % Відстань позначена на рисунку 7.4
9      l2=0.15; % Відстань позначена на рисунку 7.4
10     ik=8; % Передавальне відношення кулачкового розтиску
11     sk=11000000; % Жорсткість, обумовлена деформацією барабана (позначена на рис. 7.4)
12     P0=3000; % Початкове зусилля на штоку пневматичної камери
13     P=1000; % Амплітуда зовнішньої збудливої сили
14     kpd=0.85; % ККД механізму розтиска
15     omega=31.4; % Частота зовнішнього впливу
16     pi=3.14; % Число пи
17
18     % Константи моделі що розраховуються
19     mprt=m1+I2_4/l1^2+2*I5/((l1+l2)^2*ik^2); % Приведена до узагальненої осі x маса гальма
20     ckn=2*ck*(l1/(l1+l2))/ik^2; % Приведена до осі x жорсткість гальмового барабана
21     omega_0=sqrt(ckn/mp1); % Початкова частота коливань
22     A=P/ckn*(sqrt(1-(4*(0.5+P0/P)*(1-kpd)/pi)^2))/(1-omega^2/omega_0^2); % Амплітуда коливань сили відносно середнього її положення
23     b0=(4*(P0+0.5*P)*(1-kpd))/(pi*A*omega); % Коefіцієнт в'язкого тертя

```

Рис. 8.13. Скриншот Лістингу програми для обчислення констант для (8.4)

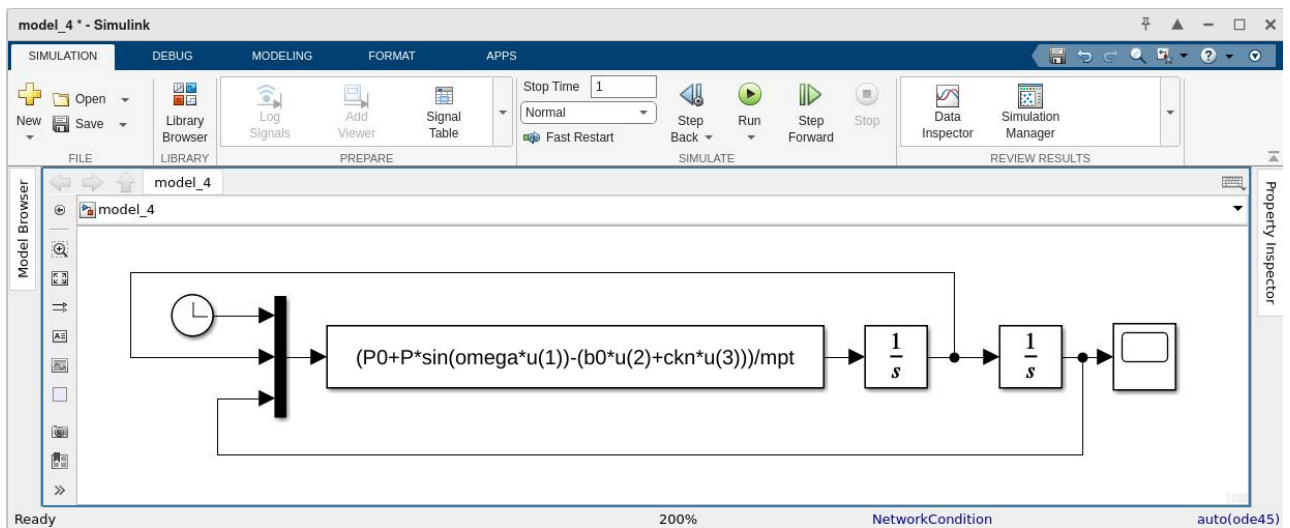


Рис. 8.14. Реалізація моделі коливаний для лінеаризованого диференціального рівняння з нелінійним сухим тертям

Результати моделювання величини x за моделлю, що наведена на рисунку 8.14 при використанні даних отриманих при запуску m -файлу (див. рис. 8.13), представлені на рисунку 8.15.

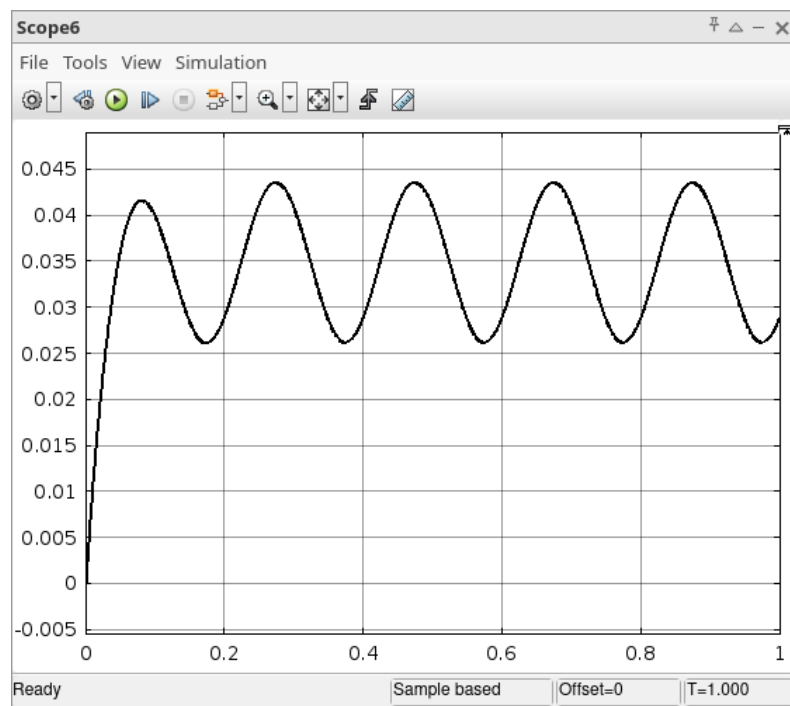


Рис. 8.15. Результати моделювання величини x за моделлю, що зображені на рисунку 8.14 в якій використано рівняння (8.4)

У програмі 8.14 використано Блок *Clock* – джерело поточного часу, який призначен для генерації чисел, які є значеннями поточного часу моделювання.

8.4. Реалізація в Simulink коливальної системи з двома ступенями вільності на основі рівняння Лагранжа

Як приклад системи з двома ступенями вільності реалізуємо в пакеті *Simulink* програми *MatLAB* схему пружного колеса з підресореною масою (див. рис. 7.7), яка, як відомо з розділу 7.5, описується системою рівнянь (7.82).

За аналогію з попередніми розділами даної теми, представимо рівняння (7.82) у вигляді системи:

$$\begin{cases} \ddot{z}_{p1} = \frac{c_{p1} \cdot (z_0 - z_{p1}) + b_v \cdot (\dot{z}_{p2} - \dot{z}_{p1}) - c_{p1} \cdot z_{p1} + c_{p2} \cdot (z_{p2} - z_{p1})}{m_1}; \\ \ddot{z}_{p2} = \frac{-(b_v \cdot (\dot{z}_{p2} - \dot{z}_{p1}) + c_{p2} \cdot (z_{p2} - z_{p1}))}{m_2}. \end{cases} \quad (8.5)$$

або, якщо підставити замість $b_v \cdot (\dot{z}_{p2} - \dot{z}_{p1}) + c_{p2} \cdot (z_{p2} - z_{p1})$ в перше рівняння системи (8.5) добуток $-\ddot{z}_{p2} \cdot m_2$ з другого рівняння тієї ж системи, отримаємо:

$$\begin{cases} \ddot{z}_{p1} = \frac{c_{p1} \cdot (z_0 - 2 \cdot z_{p1}) - \ddot{z}_{p2} \cdot m_2}{m_1}; \\ \ddot{z}_{p2} = \frac{-(b_v \cdot (\dot{z}_{p2} - \dot{z}_{p1}) + c_{p2} \cdot (z_{p2} - z_{p1}))}{m_2}. \end{cases} \quad (8.6)$$

Модель в середовищі *Simulink* матиме вигляд, той що зображено на рисунку 8.16. Як і в попередньому розділі для цієї моделі задамо всі константи в *m*-файлі програми *MatLAB*. Скриншот Лістингу програми, яка реалізована в *m*-файлі програми представлено на рисунку 8.17.

Результати моделювання величини переміщення підресореної (z_{p2}) та не підресореної маси (z_{p1}), що відповідають схемі (див. рис. 7.7), які отримані на основі системи рівнянь (8.6) представлені на рисунку 8.18.

Змінну величину z_0 в рівнянні (8.6) визначено за залежністю (7.80).

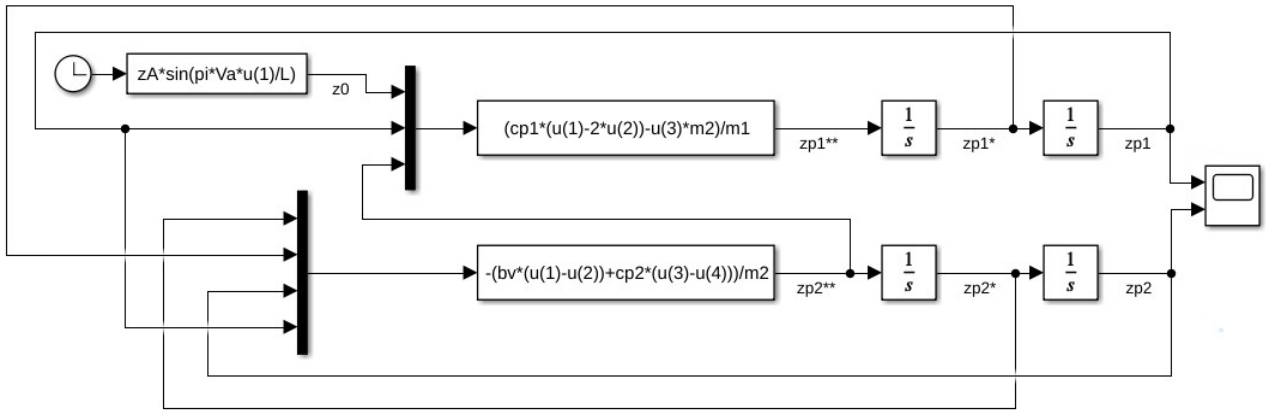


Рис. 8.16. Реалізація моделі коливань системи з двома ступенями вільності на основі рівняння Лагранжа

```

1  clc; clear; % Очищення від попередніх даних перед початком обчислення нових даних
2
3  % Введення констант моделі
4  pi=3.14; % Константа pi
5  Va=80/3.6; % Швидкість руху автомобіля
6  L=3; % Довжина перешкоди
7  zA=0.02; % Висота нерівності, що долається
8  cp1=4000000; % Жорсткості шини автомобільного колеса
9  cp2=4000000; % Жорсткості пружних елементів підвіски автомобіля
10 bv=25000; % Коефіцієнт в'язкого лінійного тертя
11 m1=80; % Маса автомобільного колеса
12 m2=3000; % Маса кузова
  
```

Рис. 8.17. Скриншот Лістингу програми для обчислення констант системи рівнянь (8.6) для моделі що зображена на рисунку 8.16

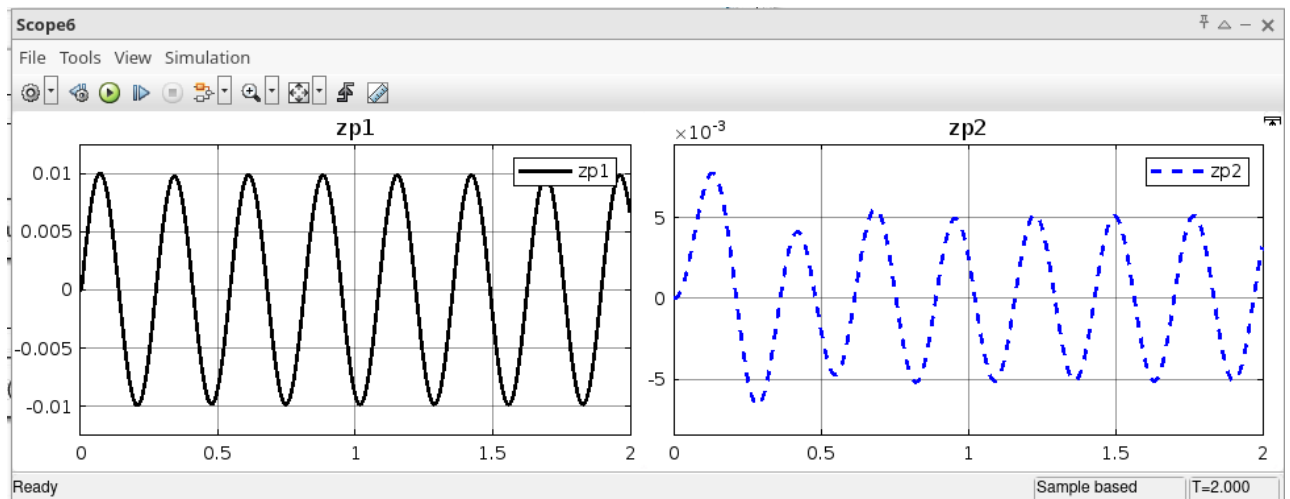


Рис. 8.18. Результати моделювання величини переміщення колеса (z_{p1}) та кузова (z_{p2}) за моделлю, що зображені на рисунку 8.16 в якій використано рівняння (8.6)

Література

1. UN/ECE (2016) Regulation No 13 of the Economic Commission for Europe of the United Nations – Uniform provisions concerning the approval of vehicles of categories M, N and O with regard to braking: on condition 18.02.2016 – Official Journal of the European Union – UN/ECE.
2. Туренко А.М., Богомоллов В.О., Клименко В.І. та інші. (2003) Функціональний розрахунок гальмівної системи автомобіля з барабанными гальмами та регулятором гальмівних сил.
3. Жданюк В.К. (2017) Провести дослідження та розробити методичні рекомендації з визначення осьових навантажень багатовісних транспортних засобів з урахуванням сил тертя в площі контакту шини з дорожнім покриттям: Звіт про НДР (заключний) Харківський національний автомобільно-дорожній університет. Харків, № ДР 0116U005525.
4. Леонтьєв Д. М. (2011) *Системний підхід до створення автоматизованого гальмівного керування транспортних засобів категорій M₃ та N₃*. (Автореферат дисертації, Харківський національний автомобільно-дорожній університет)
5. Shuklinov S. M., Klymenko V.I., Leontiev D. M., Aloksa M. M. (2023) Automobile. Theory and operational properties: study guide
6. Klymenko V., Voronkov O., Leontiev D., Yaryta O., Mykhalievych M., Ponikarovska S., Fandieieva A., Borzenko O. (2023) Construction and layout of automobiles and internal-combustion engines: study guide
7. Manfred Mitschke, Henning Wallentowitz (2014) *Dynamik der Kraftfahrzeuge*.
8. Massimo Guiggiani (2014) *The Science of Vehicles. Dynamics, Handling, Braking, and Ride of Road and Race Cars*.
9. Reza N. Jazar. (2017) *Vehicle Dynamics. Theory and Application. Third Edition*.
10. Леонтьєв Д. М. (2021) *Теоретичні основи гальмування багатовісних транспортних засобів з електропневматичною гальмовою системою* (Doctoral dissertation, Харківський національний автомобільно-дорожній університет)

З М І С Т

Тема 1. Основні задачі та поняття курсу «Математичне моделювання робочих процесів колісних та гусеничних транспортних засобів». Основні можливості програмного продукту <i>MatLAB</i>	5
Тема 2. Аналітичні, чисельні та графічні методи рішення рівнянь. Робота з поліномами	23
Тема 3. Рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь	44
Тема 4. Чисельні та аналітичні методи рішення систем нелінійних алгебраїчних рівнянь.....	71
Тема 5. Рішення систем нерівностей	96
Тема 6. Диференціальні рівняння та аналіз динамічних моделей механічних систем з використанням 2-го закону Ньютона, принципу Д'Аламбера та інших законів фізики. Динамічна модель пневмопривіду.....	115
Тема 7. Складання динамічних моделей з використанням рівнянь Лагранжа 2-го роду. Складання диференціальних рівнянь коливань з однією та двома ступенями вільності	133
Тема 8. Можливості пакету <i>Simulink</i> для чисельного аналізу динамічних моделей механічних систем. Чисельний аналіз механічних систем. Чисельний аналіз механічних коливальних систем	156

Навчальне видання

БОГОМОЛОВ Віктор Олександрович
ЛЕОНТЬЄВ Дмитро Миколайович

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
РОБОЧИХ ПРОЦЕСІВ КОЛІСНИХ ТА
ГУСЕНИЧНИХ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ**

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск *В.І. Клименко*

Редактор *Д.М. Леонтъєв*

Комп'ютерна верстка *Д.М. Леонтъєв*

Дизайн обкладинки *Д.М. Леонтъєв*