

Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Кафедра інформатики та прикладної математики

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з курсу «Спеціальні розділи математики»

Укладач доц. каф. ІПМ
Вербицький В.І.

Харків 2017

НЕЧІТКА ЛОГІКА

1. Поняття нечіткої множини. Функції належності. Операції над нечіткими множинами

Нагадаємо, що множина є фундаментальним поняттям математики, яке не має строгого визначення. Починаючи розв'язувати будь-яку задачу, насамперед визначають множину об'єктів, які розглядатимуться. Така множина називається універсальною множиною (для даної задачі). Для універсальної множини використовується, як правило, означення U .

Завдання множини A – це правило, яке дозволяє відносно будь-якого елемента універсальної множини однозначно визначити, чи належить він множині A , тобто яке висловлювання, $x \in A$ або $x \notin A$, є істинним, а яке – хибним.

Одним з способів завдання множин є характеристична функція.

Означення 1. *Характеристичною функцією множини A є функція $\mu_A(x)$, що задана на універсальній множині U та приймає такі значення*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin A; \\ 1, & \text{якщо } x \in A. \end{cases}$$

Наприклад, якщо $U = \{1; 2; 3; \dots; 10\}$; A – множина чисел, які більші за 5.

Тоді

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 5; \\ 1, & \text{якщо } x > 5. \end{cases}$$

Розглянемо множину B , що складається з чисел, трохи більших за 5. Записати характеристичну функцію для B так само, як для A , неможливо. Насправді, чи належить число 8 до множини B ? Це визначається суб'єктивно (залежно від того, що розуміють під словом «трохи»). Складаючи аналог характеристичної функції, експерт оцінює, в якій степені кожне з чисел множини U належить до множини B . Степінь належності можна визначити будь-яким числом відрізка $[0; 1]$. Якщо експерт впевнений в належності числа x до множини B , то він визначає $\mu_B(x) = 1$, якщо впевнений у протилежному, то $\mu_B(x) = 0$. Якщо $\mu_B(x) > 0,5$, то експерт схильний віднести x до B , якщо $\mu_B(x) < 0,5$, то не схильний. Якщо $\mu_B(x) = 0,5$, то експерту важко відповісти на питання. Наприклад, експерт може надати такі значення

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 5; \\ 1, & \text{якщо } x = 6; \\ 0,7, & \text{якщо } x = 7; \\ 0,5, & \text{якщо } x = 8; \\ 0,1, & \text{якщо } x = 9; \\ 0, & \text{якщо } x = 10. \end{cases}$$

Таку «характеристичну функцію», яка залежить від експертної оцінки, називають функцією належності, а саму множину для якої цю функцію визначають, – нечіткою множиною.

Означення 2. Нечіткою підмножиною універсальної множини U називається сукупність множини U та функції належності $\mu_B(x)$ ($x \in U$), такої, що $0 \leq \mu_B(x) \leq 1$ ($\forall x \in U$). Якщо множина U є скінченною або зліченною, то форма запису нечіткої підмножини має вигляд

$$B = \sum_i \mu_B(u_i) / u_i,$$

де під знаком суми розуміють об'єднання, яке розповсюджується на всі елементи u_i множини U . Як правило, до запису включають тільки ті елементи U , для яких $\mu_B(u_i) > 0$. Наприклад, нечітку множину B чисел трохи більших за 5, можна записати таким чином

$$B = 1/6 + 0,7/7 + 0,5/8 + 0,1/9.$$

Означення 3. Носієм V_B нечіткої множини U називається всіх елементів $\in U$, для яких $\mu_B(u) > 0$.

Наприклад, для вищезгаданої множини B носій складається з елементів $\{6; 7; 8; 9\}$.

Означення 4. Точкою переходу нечіткої множини B є елементи множини U , на якому $\mu_B(u) = 0,5$.

У вищезгаданому прикладі точкою переходу є $u = 8$. Думку експерта про цю точку можна висловити як «невідомо».

Означення 5. Нечітка множина B називається *нормальною*, якщо існує таке $u_0 \in U$, що $\mu_A(u_0) = 1$, і *субнормальною* у протилежному випадку.

У загальному випадку нечітку множину з неперервним носієм позначають символом

$$B = \int \mu_B(u) / u,$$

де знак інтегрування позначає об'єднання по всіх елементах носія.

Означення 6. *Діаграмою Заде* називається зображення нечіткої множини графіком функції належності в координатах $(U; \mu_B(U))$.

Приклад 1. Для вищерозглянутого приклада («число трохи більше 5») діаграма Заде має вигляд

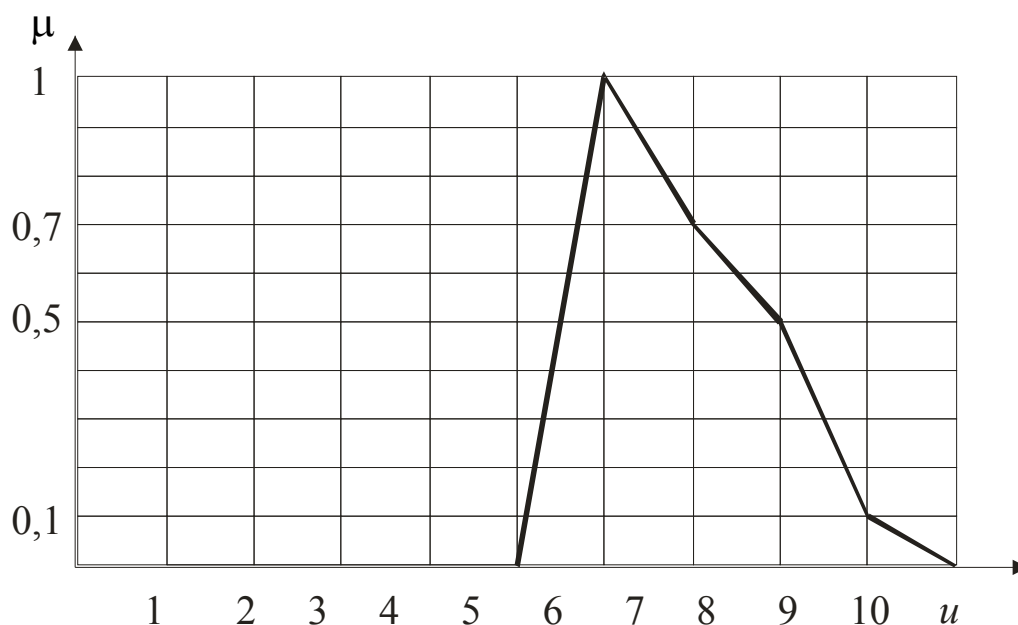


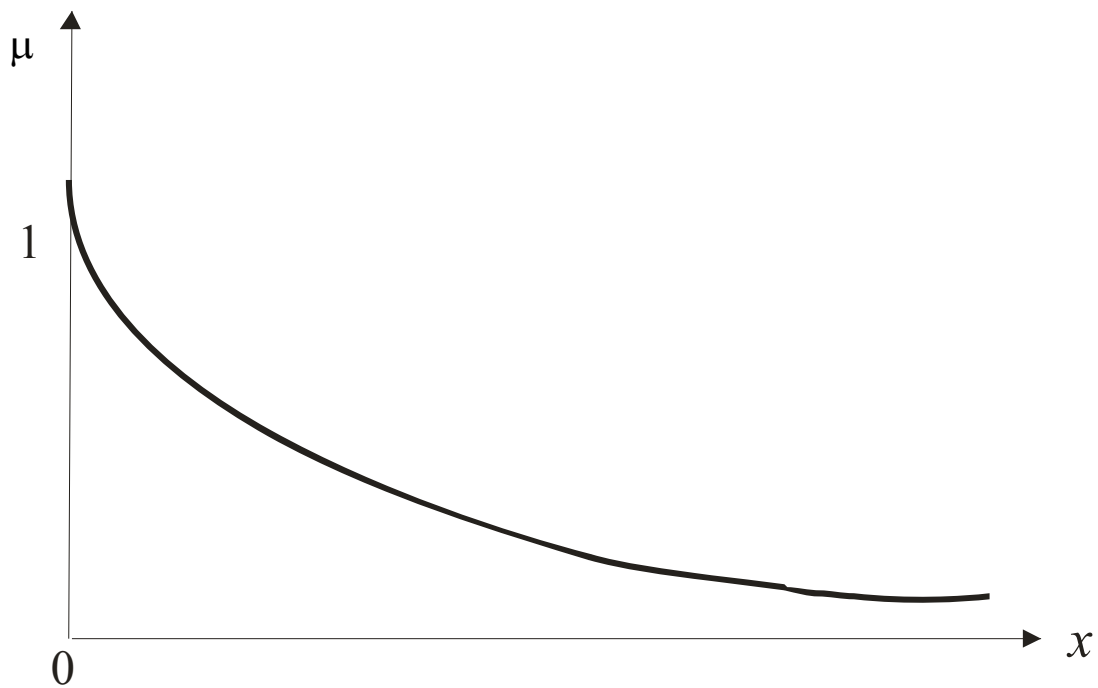
Рис. 13.1

Приклад 2. Нехай $U = [0; +\infty)$; множина B : « $x \in B$, якщо величина x мала». Функцію належності задамо формулою

$$\mu_B(x) = e^{-kx},$$

де $k > 0$ – параметр.

Діаграма Заде має вигляд



$$B = \int_{[0;+\infty)} e^{-kx} / x.$$

Рис. 13.2

Множина є нормальною, бо $\mu_B(0) = 1$.

Приклад 3. Нехай $U = [0; +\infty)$; множина B : « $x \in B$, якщо величина x велика». Функцію належності задамо формулою

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \leq x \leq a; \\ 1 - e^{-k(x-a)}, & \text{якщо } x \geq a, \end{cases}$$

де $a > 0$; $k > 0$ – параметри.

Діаграма Заде має вигляд

μ

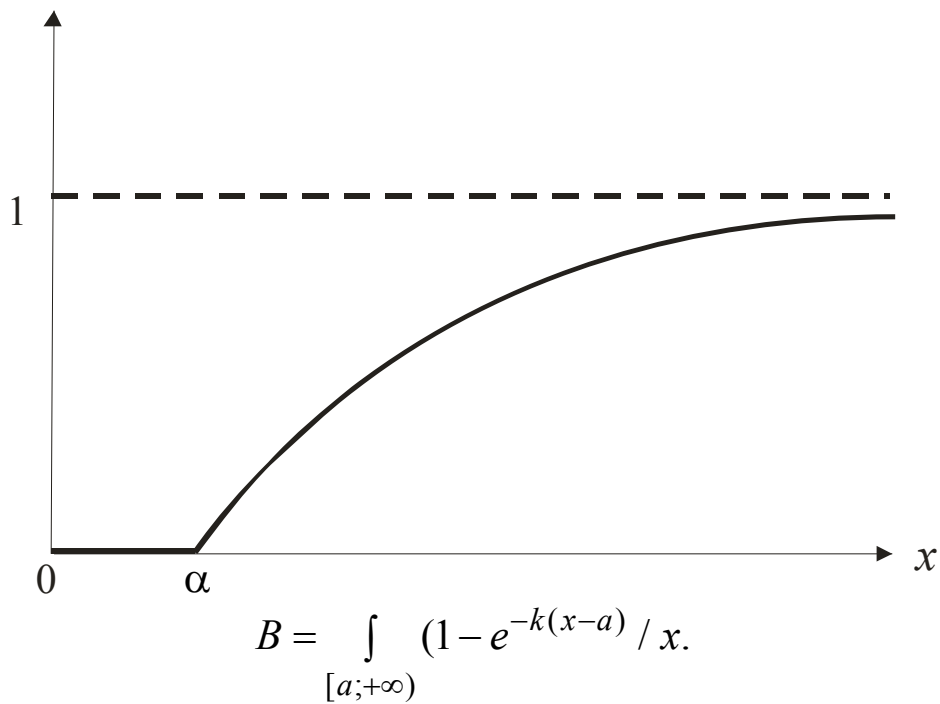


Рис. 13.3.

Множина є субнормальною.

Означення 7. Множиною α -рівня нечіткої множини B називається звичайна множина елементів $u \in U$, для яких $\mu_B(u) \geq \alpha$.

Множина α -рівня позначається B^α .

Приклад 4. Нехай $U = N$; нечітка множина B – числа, що приблизно дорівнюють 5

$$B = 0,1/2 + 0,7/3 + 0,9/8 + 1/5 + 0,9/6 + 0,5/7 + 0,2/8.$$

Очевидно, $U_B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, множина значень функції належності

$$\mu_A \in M = \{0,1; 0,2; 0,5; 0,7; 0,9; 1\}.$$

Складемо всі множини α -рівня для $\alpha \in M$

$$B^{0,1} = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\};$$

$$B^{0,2} = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\};$$

$$B^{0,5} = \{3; 4; 5; 6; 7\};$$

$$B^{0,7} = \{3;4;5;6\};$$

$$B^{0,9} = \{4;5;6\};$$

$$B^1 = \{5\}.$$

Побудуємо множини $\tilde{B}^\alpha$ за правилом

$$\tilde{B}^\alpha = \alpha \cdot B^\alpha,$$

де добуття $\alpha \cdot B^\alpha$ позначає присвоювання елементом звичайної множини B^α степені належності α , тобто перетворення цієї множини на нечітку.

$$\tilde{B}^{0,1} = 0,1/2 + 0,1/3 + 0,1/4 + 0,1/5 + 0,1/6 + 0,1/7 + 0,1/8;$$

$$\tilde{B}^{0,2} = 0,2/3 + 0,2/4 + 0,2/5 + 0,2/6 + 0,2/7 + 0,2/8;$$

$$\tilde{B}^{0,5} = 0,5/3 + 0,5/4 + 0,5/5 + 0,5/6 + 0,5/7;$$

$$\tilde{B}^{0,7} = 0,7/3 + 0,7/4 + 0,4/5 + 0,7/6;$$

$$\tilde{B}^{0,9} = 0,9/4 + 0,9/5 + 0,9/6 ;$$

$$\tilde{B}^1 = 1/5.$$

Об'єднаємо ці множини, присвоюючи кожному значенню $u \in U_B$ степені належності, що дорівнює найбільшій з степеней належності цього елемента в множинах B^α

$$\tilde{B} = \sum_{\alpha \in M} \tilde{B}^\alpha = 0,1/2 + 0,7/3 + 0,7/4 + 1/5 + 0,9/6 + 0,5/7 + 0,2/8.$$

Очевидно, $\tilde{B} = B$.

У загальному випадку, якщо носій U_B є дискретним, $\mu_B(x) \in M$, то вірна рівність

$$B = \sum_{\alpha \in M} \tilde{B}^\alpha = \sum_{\alpha \in M} \alpha \cdot B^\alpha, \quad (13.1)$$

де $\mu_B(x) \in M = \max_{\alpha \in M} \mu_{\tilde{B}^\alpha}(x)$.

Означення 8. Розкладання нечіткої множини за множинами рівня називається зображення нечіткої множини у вигляді (13.1).

Якщо U_B неперервний, то розкладання за множинами рівня має вигляд

$$B = \int_0^1 \alpha \cdot B_{0\alpha}.$$

Приклад 5. Нехай для нечіткої множини B : « $x \in B$, якщо $x \approx 2$ » носій $U_B = [1; 3]$; $\mu_B(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi x)$.

Діаграму Заде зображено на рис. 13.4.

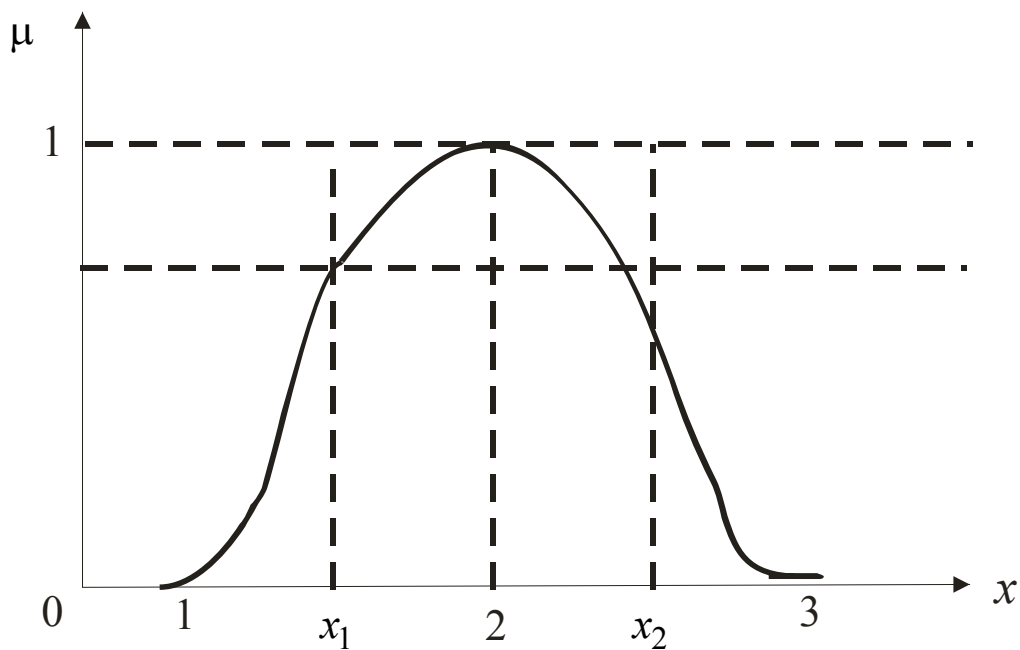


Рис. 13.4.

Множиною α -рівня є відрізок

$[x_1; x_2]$, кінці якого визначаються з рівняння

$$\mu_B(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi x) = \alpha; \quad x \notin [1; 3];$$

$$x_{1,2} = 2 \mp \frac{1}{\pi} \arccos(2\alpha - 1).$$

$$\text{Отже, } \tilde{B}^\alpha = \alpha \cdot \left[\left(2 - \frac{1}{\pi} \arccos(2\alpha - 1) \right); \left(2 + \frac{1}{\pi} \arccos(2\alpha - 1) \right) \right].$$

Розкладання множини В за множинами рівня має вигляд

$$B = \int_0^1 \alpha \cdot \left[\left(2 - \frac{1}{\pi} \arccos(2\alpha - 1) \right); \left(2 + \frac{1}{\pi} \arccos(2\alpha - 1) \right) \right].$$

Найбільш проблемним моментом теорії нечітких множин є питання про побудову функції належності. Як правило, для цього застосовуються експертні оцінки, і ця проблема є більше психологічною, ніж математичною. Методи побудови функцій належності, що ґрунтуються на математичній психології, детально розглянуто в (13.1).

Розглянемо поняття підмножини нечіткої множини. Очевидно, для звичайної множини співвідношення $A \subseteq B$ рівносильно виконанню умови $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ($\forall x \in U$).

Означення 9. Нечітка множина $A = \sum_{i=1}^n \mu_A(u_i) / u_i$ (або

$A = \int_U \mu_A(u) / u$) є підмножиною нечіткої множини $B = \sum_{i=1}^n \mu_B(u_i) / u_i$ (або $B = \int_U \mu_B(u) / u$), якщо $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$ ($\forall u \in U$).

Запис $A \subseteq B$ означає, що А є підмножиною В. Якщо $A \subseteq B$, але $A \neq B$, то А називається власною підмножиною В ($A \subset B$), а включення – строгим.

Розглянемо основні операції над нечіткими множинами.

Означення 10. Якщо A, B – нечіткі множини, то

- доповнення A називається така нечітка множина $\bar{A}$, що $\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u)$ ($\forall u \in U$);
- перерізom множин A і B називається така нечітка множина $A \cap B$, що $\mu_{A \cap B}(u) = \min\{\mu_A(u); \mu_B(u)\}$ ($\forall u \in U$);
- об'єднанням множин A і B називається така нечітка множина $A \cup B$, що $\mu_{A \cup B}(u) = \max\{\mu_A(u); \mu_B(u)\}$ ($\forall u \in U$).

Приклад 6. Нехай $U = \{1; 2; \dots; 10\}$;

$$A = 0,8/3 + 1/5 + 0,6/6; \quad B = 0,7/4 + 1/6 + 0,5/6.$$

Тоді

$$\bar{A} = 1/1 + 1/2 + 0,2/3 + 1/4 + 0,4/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10;$$

$$\bar{B} = 1/1 + 1/2 + 0,3/3 + 1/5 + 0,5/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10;$$

$$A \cap B = 0,7/3 + 0,5/6;$$

$$A \cup B = 0,8/3 + 1/4 + 1/5 + 0,6/6;$$

$$\bar{A} \cap A = 0,2/3 + 0,4/6 \neq 0;$$

$$\bar{B} \cup B = 1/1 + 1/2 + 0,7/3 + 1/4 + 1/5 + 0,5/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 \neq U;$$

Таким чином, на відміну від алгебри звичайних множин, може бути так, що $\bar{A} \cap A \neq 0$; $\bar{B} \cup B \neq U$.

Приклад 7. Нечітка множина A (« $x \in A$, якщо величина x велика»») та нечітка множина B (« $x \in B$, якщо величина x мала»») мають функції належності

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \leq x < 1; \\ \frac{x-1}{3}, & \text{якщо } 1 \leq x \leq 4; \\ 1, & \text{якщо } 4 \leq x \leq 6; \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq x < 1; \\ \frac{3-x}{2}, & \text{якщо } 1 \leq x \leq 3; \\ 0, & \text{якщо } 3 < x \leq 6. \end{cases}$$

Виконаємо деякі операції над А і В.

1. Доповнення

$$\bar{A} = \int_U (1 - \mu_A(u)) / u;$$

$$\bar{B} = \int_U (1 - \mu_B(u)) / u.$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq x < 1; \\ \frac{4-x}{3}, & \text{якщо } 1 \leq x \leq 4; \\ 0, & \text{якщо } 4 < x \leq 6, \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{B}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \leq x < 1; \\ \frac{x-1}{2}, & \text{якщо } 1 \leq x \leq 3; \\ 1, & \text{якщо } 3 < x \leq 6. \end{cases}$$

$$\bar{A} = \int_0^1 1/x + \int_1^4 \frac{4-x}{3} / x; \quad \bar{B} = \int_1^3 \frac{x-1}{2} / x + \int_3^6 1/x.$$

2. Об'єднання

$$A \cup B = \int_U \max\{\mu_A(u); \mu_B(u)\} / u.$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq x < 1; \\ \frac{3-x}{2}, & \text{якщо } 1 \leq x < 2, 2; \\ \frac{x-1}{3}, & \text{якщо } 2, 2 \leq x < 4; \\ 1, & \text{якщо } 4 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Точка $x = 2,2$ знаходиться з рівняння $\frac{3-x}{2} = \frac{x-1}{3}$.

$$A \cup B = \int_0^1 1/x + \int_1^{2,2} \frac{3-x}{2}/x + \int_{2,2}^4 \frac{x-1}{3}/x + \int_4^6 1/x.$$

3. Переріз

$$A \cap B = \int_U \min \{ \mu_A(u); \mu_B(u) \} / u.$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \leq x < 1; \\ \frac{x-1}{3}, & \text{якщо } 1 \leq x < 2,2; \\ \frac{3-x}{2}, & \text{якщо } 2,2 \leq x < 4; \\ 0, & \text{якщо } 4 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

$$A \cap B = \int_1^{2,2} \frac{x-1}{3}/x + \int_{2,2}^4 \frac{3-x}{2}/x.$$

Перелічимо основні властивості операцій над нечіткими множинами.

1. Комутативність

$$A \cap B = B \cap A; \quad A \cup B = B \cup A.$$

2. Асоціативність

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C; \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

3. Дистрибутивність

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4. Властивості нуля

$$A \cap \emptyset = \emptyset; \quad A \cup \emptyset = A.$$

5. Властивості одиниці

$$A \cap U = A; \quad A \cup U = U.$$

6. Ідемпотентність

$$A \cap A = A; \quad A \cup A = A.$$

7. Властивості поглинання

$$A \cap (A \cup B) = A; \quad A \cup (A \cap B) = A.$$

8. Інволютивність

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

9. Закони де Моргана

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

10. Властивості порядку

$$A \cap B \leq A; \quad A \cap B \leq B;$$

$$A \leq A \cup B; \quad B \leq A \cup B.$$

Усі ці властивості мають місце як для звичайних, так і для нечітких множин.

Відмітимо також, що для нечітких множин (як і для звичайних) мають місце висновки:

- якщо $A \leq B$, то $A \cap B = A$;
- якщо $B \leq A$, то $A \cup B = A$.

На відміну від цього, для нечітких множин не мають місця два закони, дуже важливих як у теорії множин, так і у логіці. Це закон виключеного третього ($A \cup \overline{A} = U$) та закон протиріччя ($A \cap \overline{A} = \emptyset$) (див. приклад 6). Само порушення цих законів визначає своєрідність теорії нечітких множин. У нечіткій логіці, як ми далі побачимо, висловлювання «А» і «не А» можуть співіснувати.

Крім основних теоретико-множинних операцій, над нечіткими множинами можна здійснювати і інші операції.

1. Множення

$$AB = \sum_{u_i \in U} \mu_{\bar{A}}(u_i) \cdot \mu_B(u_i) / u_i$$

або

$$A^\alpha = \int_U (\mu_A(u))^\alpha / u.$$

Зокрема, якщо $\alpha = 2$, то операція називається концентрацією

$$CON(A) = A^2. \quad (13.2)$$

Концентрація зменшує нечіткість множини. Якщо $\alpha = 0,5$, то операція називається дилатацією (розтягненням).

$$DIL(A) = A^{0,5}. \quad (13.3)$$

Дилатація збільшує нечіткість множини концентрації та дилатації можуть відповідати поняття «дуже», «не дуже».

На множині всіх нечітких підмножин універсальної множини U визначається також оператор нечіткості K , який перетворює звичайні множини на нечіткі та збільшує нечіткість нечітких множин.

Якщо множина U скінчення, $U = \{u_1; \dots; u_n\}$, оператор K заданий матрицею $K = (k_{ij})_{i,j=1}^n$, то результатом дії оператора K на нечітку множину A є нечітка множина

$$KA = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} \cdot \mu_A(u_j) / u_i, \quad (13.4)$$

об'єднання робиться за правилом об'єднання нечітких множин. Передбачається, що $0 \leq k_{ij} \leq 1$.

Приклад 9. Нехай $U = \{a; b; c\}$.

$$K = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 1 \\ 0,7 & 0,5 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0,5 \end{pmatrix}; \quad A = \{a; c\};$$

$$B = 0,3 / a + 0,7 / b + 0,9 / c;$$

$$C = 0,5 / a + 0,5 / b + 0,5 / c.$$

Використовуємо (13.4)

$$KA = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 1 \\ 0,7 & 0,5 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,7 \\ 0,8 \end{pmatrix} = 1 / a + 0,7 / b + 0,8 / c;$$

$$KB = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 1 \\ 0,7 & 0,5 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \\ 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,35 \\ 0,45 \end{pmatrix} = 0,9 / a + 0,35 / b + 0,45 / c;$$

$$KC = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 1 \\ 0,7 & 0,5 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,35 \\ 0,4 \end{pmatrix} = 0,5 / a + 0,35 / b + 0,4 / c.$$

Оператор нечіткості використовується при розгляданні лінгвістичних невизначеностей, таких як «більш–менш», «трохи» та ін.

Приклад 10. Нехай $U = \{2014; 2013; 2012; 2011; 2010; 2009\}$.

A – «нещодавно»: $A = 1/2014 + 0,9/2013 + 0,7/2012$;

$$K - \text{«більш–менш»} : K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо множину KA – «більш–менш» нещодавно:

$$KA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$KA = 1 / 2011 + 0,9 / 2010 + 0,72 / 2009.$$

2. Нечіткі числа

У цьому розділі ми розглядаємо нечіткі числові множини.

Означення 11. Нечітким числом називають нечітку підмножину множини дійсних чисел R .

Визначимо алгебраїчні операції над нечіткими числами.

Означення 12. Сумою (різницею) нечітких чисел a та b називається нечітке число

$$a \pm b = \int_{u=x \pm y} \min \{ \mu_a(x); \mu_b(y) \} / u.$$

Означення 13. Добутком нечітких чисел a та b називається нечітке число

$$a \cdot b = \int_{u=xy} \min \{ \mu_a(x); \mu_b(y) \} / u.$$

Означення 14. Часткою нечітких чисел a та b називається нечітке число

$$a : b = \int_{u=x:y(y \neq 0)} \min \{ \mu_a(x); \mu_b(y) \} / u.$$

Приклад 11. Нехай $A = 0,3/5 + 0,5/6 + 1/7 + 0,8/8$;
 $B = 0,2/3 + 0,1/4 + 0,9/5 + 1/6$;

$$A + B = 0,2 / 8 + \max \{0,1; 0,2\} / 9 + \max \{0,3; 0,1; 0,2\} / 10 + \\ + \max \{0,3; 0,5; 0,1; 0,2\} / 11 + \max \{0,5; 0,9; 0,1\} / 12 + \max \{1; 0,8\} / 13 + \\ + 0,8 / 14 = 0,2 / 8 + 0,2 / 9 + 0,3 / 10 + 0,5 / 11 + 0,9 / 12 + 1 / 13 + 0,8 / 14;$$

$$A \cdot B = 0,2 / 15 + 0,2 / 18 + 0,1 / 20 + 0,1 / 20 + 0,2 / 21 + \max \{0,1; 0,2\} / 9 + \\ + \max \{0,1; 0,2\} / 24 + 0,3 / 25 + 0,1 / 28 + \max \{0,3; 0,5\} / 30 + 0,1 / 32 + \\ + 0,9 / 35 + 0,5 / 36 + 0,8 / 40 + 1 / 42 + 0,8 / 48 = 0,2 / 15 + 0,2 / 18 + \\ + 0,1 / 20 + 0,1 / 21 + 0,2 / 24 + 0,3 / 25 + 0,1 / 28 + 0,5 / 30 + 0,1 / 32 + \\ + 0,9 / 35 + 0,5 / 36 + 0,8 / 40 + 1 / 42 + 0,8 / 48.$$

Для порівняння нечітких чисел використовуються поняття «нечіткий максимум» та «нечіткий мінімум».

Означення 15. Нечітке число c називається нечітким максимумом (мінімумом) нечітких чисел a та b , якщо функція належності цього числа задовольняє рівності

$$\mu_c(z) = \max_{z=\max\{x;y\}} \min\{\mu_a(x); \mu_b(y)\}$$

$$(\mu_c(z) = \max_{z=\min\{x;y\}} \min\{\mu_a(x); \mu_b(y)\}).$$

Означення 16. Нечітке число a не більше (не менше) нечіткого числа b ($a \leq b$ або $a \geq b$), якщо $a = \min\{a; b\}$ ($a = \max\{a; b\}$).

Приклад 12. Нехай $a = 0,3 / 5 + 1 / 7 + 0,7 / 8;$
 $b = 0,7 / 9 + 1 / 10 + 0,6 / 11 + 0,8 / 12.$

Обчислимо $c = \max\{a; b\}$:

$$\mu_c(9) = \max\{0,3; 0,7; 0,7\} = 0,7;$$

$$\mu_c(10) = \max\{0,3; 1; 0,7\} = 1;$$

$$\mu_c(11) = \max\{0,3; 0,6; 0,6\} = 0,6;$$

$$\mu_c(12) = \max\{0,3; 0,8; 0,7\} = 0,8.$$

$$c = \max\{a; b\} = 0,7 / 9 + 1 / 10 + 0,6 / 11 + 0,8 / 12 = b,$$

отже $b > a$.

Аналогічно $\min\{a; b\} = 0,3/5 + 1/7 + 0,7/8 = a$, отже $a < b$.

Відмітимо, що властивості операцій над нечіткими числами значно відрізняються від властивостей операцій над звичайними числами. Наприклад, існують такі нечіткі числа, для яких

$$a \cdot (b + c) \neq a \cdot b + a \cdot c;$$

$$a + (-a) \neq 0;$$

$$a \cdot \frac{1}{a} \neq 1;$$

$$a \geq b, \text{ але невірно, що } b \leq a.$$

Порушення звичайних властивостей операцій над числами суттєво ускладнює виконання таких операцій.

Наведемо один важливий принцип, який дозволяє поширити область визначення функції на нечіткі числа, а само принцип узагальнення.

Принцип узагальнення

Нехай f -відображення $U \rightarrow V$.

Якщо a – нечітке число з дискретним носієм

$$a = \mu_1 / u_1 + \dots \mu_n / u_n,$$

$$\text{то } f(a) = \mu_1 / f(u_1) + \dots \mu_n / f(u_n).$$

Якщо a – нечітке число з неперервним носієм

$$a = \int_U \mu_A(u) / u,$$

$$\text{то } f(a) = \int_U \mu_A(u) / f(u).$$

В багатьох випадках буває зручно застосовувати принцип узагальнення використовуючи розкладання нечіткого числа a за множинами рівня

$$A = \int_{\alpha \in [0;1]} \alpha A_\alpha \Rightarrow f(A) = \int_{\alpha \in [0;1]} \alpha \cdot f(A_\alpha);$$

$$A = \sum_{\alpha} \alpha A_{\alpha} \Rightarrow f(A) = \alpha \cdot f(A_{\alpha});$$

Приклад 13.

Нехай $U = [1; 10]$; $V = [0; 1]$; $v = f(u) = \lg u$; $A = \int_U \frac{u-1}{9} / u$.

Знайдемо $f(A)$.

Розкладемо множину A за α -рівнями

$$A = \int_{\alpha \in [0;1]} \alpha \cdot A_{\alpha},$$

де A_{α} – відрізки, для яких має місце нерівність

$$\mu(u) = \frac{u-1}{9} \geq \alpha.$$

$$u \geq 9\alpha + 1; \quad u \in [1; 10]$$

$$A_{\alpha} = [9\alpha + 1; 10]$$

$$\lg A = \int_{\alpha \in [0;1]} \alpha \cdot [\lg(9\alpha + 1); \lg 10] = \int_{\alpha \in [0;1]} \alpha \cdot [v; 1].$$

$$v = \lg(9\alpha + 1),$$

$$\alpha = \frac{10^v - 1}{9}; \quad v \in [0; 1].$$

Таким чином,

$$\lg A = \int_0^1 \frac{10^v - 1}{9} / v.$$

3. Нечіткі бінарні відношення та відповідності

Нехай U – універсальна множина, U^2 – декартів квадрат множини U .

Означення 17. Нечітким бінарним відношенням на множині U називається нечітка підмножина U^2

$$\Gamma = \sum_{U^2} \mu_{\Gamma}(u_i; u_j) / (u_i; u_j)$$

або

$$\Gamma = \sum_{U^2} \mu_{\Gamma}(x; y) / (x; y).$$

На скінченній множині відношення може бути задано графом або матрицею інцидентій.

Означення 18. Графом нечіткого бінарного відношення називається орієнтований зважений граф, кожне ребро якого $(x; y)$ має вагу, що дорівнює $\mu_{\Gamma}(x; y)$.

Означення 19. Матрицею інцидентій $I_{\Gamma}(x_{ij})_{i,j=1}$ бінарного відношення Γ на множині $U = \{u_1; \dots; u_n\}$ називається матриця, елементами якої є значення функції належності

$$x_{ij} = \mu_{\Gamma}(u_i; u_j).$$

Приклад 14. Нехай $U = \{1; 2; 3; 4\}$, бінарне відношення ρ : « arb , якщо a значно менше b »;

$$\Gamma = 0,3/(1;2) + 0,8/(1;3) + 1/(1;4) + 0,3/(2;3) + 0,8/(2;4) + 0,3/(3;4).$$

Зобразимо граф

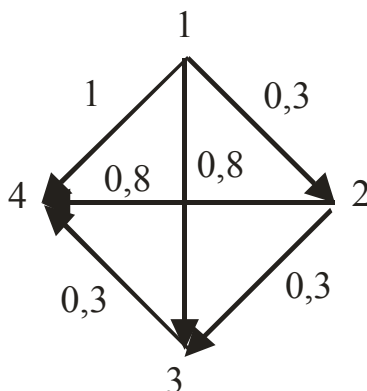


Рис. 13.5.

Матриця інцидентій

$$J_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,8 & 1 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наведемо приклад нечіткого бінарного відношення з неперервним носієм.

Приклад 15. Нехай $U = \mathbb{R}$; ρ : «хру, якщо $x \approx y$ »;

$$\Gamma = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{2}} / (x; y).$$

Здійснемо розкладання Γ за α -рівнями

$$\begin{aligned} e^{-\frac{|x-y|^2}{2}} &\geq \alpha; \quad \alpha > 0; \\ |x-y| &\leq \sqrt{-2 \ln \alpha}; \\ x + \sqrt{-2 \ln \alpha} &\leq y \leq x - \sqrt{-2 \ln \alpha}; \quad 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

$$\Gamma = \int_{(0;1]} \alpha \cdot D_{\alpha},$$

де $D_{\alpha} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x + \sqrt{-2 \ln \alpha} \leq y \leq x - \sqrt{-2 \ln \alpha}\}.$

Розглянемо поняття композиції та транзитивного замкнення нечітких бінарних відношень.

Нехай Γ_1, Γ_2 – нечіткі відношення на множині U ; $\mu_{\Gamma_1}(x; y); \mu_{\Gamma_2}(x; y)$ – відповідні функції належності.

Означення 20. Композицією нечітких бінарних відношень Γ_1, Γ_2 називається таке нечітке бінарне відношення $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$, що

$$\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(x; y) / (x; y) = \bigcup_{z \in U} ((\mu_{\Gamma_1}(x; z) / (x; z) \cap \mu_{\Gamma_2}(z; y) / (z; y))),$$

де $a \cap b = \min\{a; b\}$; $a \cup b = \max\{a; b\}$.

Цю умову можна записати у вигляді

$$\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(x; y) / (x; y) = \max_{x \in U} (\min\{\mu_{\Gamma_1}(x; z); \mu_{\Gamma_2}(z; y)\}) / (x; y).$$

Якщо U – скінченна множина, то матриця композиції

$$J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} = J_{\Gamma_1} J_{\Gamma_2} = \max_k (\min\{\mu_{\Gamma_1}(u_i; u_k); \mu_{\Gamma_2}(u_k; u_j)\}).$$

Приклад 16. Нехай $U = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $\rho_1: \langle a \approx b \rangle$; $\rho_2: \langle a \rho_2 b$, якщо a трохи більше, ніж $b \rangle$;

$$J_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0,7 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,7 & 1 & 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 1 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,7 & 1 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо $J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}$

$$\begin{aligned} \mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(1; 1) &= \max\{\min\{1; 0\}; \min\{0,7; 1\}; \\ &\min\{0,2; 0,4\}; \min\{0; 0,1\}; \min\{0; 0\}\} = 0,7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(1; 2) &= \max\{\min\{1; 0\}; \min\{0,7; 0\}; \\ &\min\{0,2; 1\}; \min\{0; 0,4\}; \min\{0; 0,1\}\} = 0,2; \end{aligned}$$

$$J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,7 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,7 & 1 & 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0,4 & 0,7 & 1 & 0,7 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо деякі непрямі впливи в композиції відношень $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$. Наприклад, $\mu_{\Gamma_1}(3;1) = 0,2 < 0,5$; $\mu_{\Gamma_2}(3;1) = 0,4 < 0,5$, тобто за оцінками експертів висловлювання « $3 \approx 1$ » та «3 трохи більше ніж 1» скоріше хибні, ніж істинні. Але $\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_1}(3;1) = 0,7 > 0,5$, тобто непрямий зв'язок між 3 та має місце. Оскільки $\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(3;1) = 0,7 = \min\{\mu_{\Gamma_1}(3;2); \mu_{\Gamma_2}(2;1)\}$, можна зробити висновок: непрямий вплив 3 на 1 здійснюється через 2 (« $3 \approx 2$ та 2 трохи більше, ніж 1»).

Будемо далі позначати

$$\Gamma^2 = \Gamma \circ \Gamma; \Gamma^3 = \Gamma^2 \circ \Gamma; \dots; \Gamma^n = \Gamma^{n-1} \circ \Gamma;$$

Означення 21. Транзитивним замкненням нечіткого відношення Γ називається об'єднання всіх ступенів Γ .

$$\bar{\Gamma} = \bigcup_n \Gamma^n.$$

Приклад 17. Нехай $U = \{a; b; c\}$;

$$\Gamma = 0,8 / (a; a) + 0,5 / (a; b) + 0,7 / (a; c) + 0,2 / (b; b) + 1 / (b; c) + 0,9 / (c; a) + 0,5 / (c; b)$$

$$J_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,7 \\ 0 & 0,2 & 1 \\ 0,9 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$J_{\Gamma^2} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,7 \\ 0 & 0,2 & 1 \\ 0,9 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,7 \\ 0 & 0,2 & 1 \\ 0,9 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,7 \\ 0,9 & 0,5 & 0 \\ 0,8 & 0,5 & 0,7 \end{pmatrix};$$

$$J_{\Gamma^3} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,7 \\ 0,9 & 0,5 & 0 \\ 0,8 & 0,5 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,7 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,9 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,7 \\ 0,8 & 0,5 & 0,7 \\ 0,8 & 0,5 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Як легко побачити, $J_{\Gamma^n} = J_{\Gamma^3}$ для будь-якого $n \geq 3$. Тому

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3 = & 0,8 / (a; a) + 0,5 / (a; b) + 0,7 / (a; c) + \\ & + 0,9 / (b; a) + 0,5 / (b; b) + 1 / (b; c) + 0,9 / (c; a) + 0,5 / (c; b) + 0,7 / (c; c). \end{aligned}$$

Очевидно, $\overline{\Gamma} \neq \Gamma$.

Означення 22. Нечітке бінарне відношення Γ називається транзитивним, якщо воно співпадає з своїм транзитивним замкненням $\overline{\Gamma} = \Gamma$.

Транзитивність рівносильна виконанню властивості: $J_{\Gamma^2} \leq J_{\Gamma}$ (тобто кожний елемент матриці J_{Γ^2} не перевищує елемента матриці J_{Γ} з тим самим номером).

Означення 23. Нечітке бінарне відношення Γ називається рефлексивним, якщо $\mu_{\Gamma}(x; x) = 1 (\forall x \in U)$, та антирефлексивним, якщо $\mu_{\Gamma}(x; x) = 0 (\forall x \in U)$.

Означення 24. Нечітке бінарне відношення Γ називається симетричним, якщо $\mu_{\Gamma}(x; y) = \mu_{\Gamma}(y; x) (\forall (x; y) \in U^2)$, та антисиметричним, якщо для будь-якої пари $(x; y) \in U_{\Gamma}$, такої, що $x \neq y$, вірно $\mu_{\Gamma}(x; y) \neq \mu_{\Gamma}(y; x)$.

Означення 25. Нечітке бінарне відношення називається відношенням толерантності, якщо воно є рефлексивним і симетричним.

Відношення толерантності має місце між елементами, які в деякому сенсі близькі один до одного.

Означення 26. Нечітке бінарне відношення називається відношенням еквівалентності, якщо воно є рефлексивним, транзитивним і симетричним.

Очевидно, транзитивне замкнення відношення толерантності є відношенням еквівалентності.

Приклад 18. Нехай $U = \{1; 2; 3; 4\}$

$$J_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,6 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 0,5 \\ 0,8 & 0,6 & 1 & 0,2 \\ 0,6 & 0,5 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, Γ – відношення толерантності.

Побудуємо транзитивне замкнення Γ .

$$J_{\Gamma^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,6 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 0,5 \\ 0,8 & 0,6 & 1 & 0,2 \\ 0,6 & 0,5 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & 0,8 & 0,6 \\ 0,3 & 1 & 0,6 & 0,5 \\ 0,8 & 0,6 & 1 & 0,2 \\ 0,6 & 0,5 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 1 & 0,6 & 0,5 \\ 0,8 & 0,6 & 1 & 0,6 \\ 0,6 & 0,5 & 0,6 & 1 \end{pmatrix};$$

$$J_{\Gamma^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 1 & 0,6 & 0,5 \\ 0,8 & 0,6 & 1 & 0,6 \\ 0,6 & 0,5 & 0,6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 1 & 0,6 & 0,5 \\ 0,8 & 0,6 & 1 & 0,6 \\ 0,6 & 0,5 & 0,6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 1 & 0,6 & 0,6 \\ 0,8 & 0,6 & 1 & 0,6 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Як легко побачити, $\Gamma^n = \Gamma^3$ ($n \geq 3$).

Тому $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Враховуючи те, що $J_{\Gamma^3} \geq J_{\Gamma^2} \geq J_{\Gamma}$, маємо $\bar{\Gamma} = \Gamma^3$.

$$J_{\bar{\Gamma}} = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 1 & 0,6 & 0,6 \\ 0,8 & 0,6 & 1 & 0,6 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, відношення $\bar{\Gamma}$ є відношенням еквівалентності. Розкладання за α -рівнями дає на будь-якому рівні розбиття множини U на класи, що не перетинаються. Насправді, при $\alpha = 0,6$ маємо один клас $\{1;2;3;4\}$, при $\alpha = 0,8$ – два класи: $\{1;2;3;4\}$; $\{4\}$; при $\alpha = 1$ – чотири класи: $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{4\}$.

Будь-яке нечітке відношення еквівалентності на будь-якому α -рівні розбиває універсальну множину на класи, що не перетинаються. Таке відношення має місце між елементами, в деякому сенсі подібними один до одного.

Означення 27. Нечітке бінарне відношення є відношенням нестроного порядку, якщо воно є рефлексивним, транзитивним та антисиметричним, та відношенням строгого порядку, якщо воно є антирефлексивним та транзитивним.

Відношенням порядку, як правило, надається зміст «переваження», «домінування», «підпорядкованості». У таких випадках транзитивність забезпечує можливість природного впорядковування об'єктів, вибору «найкращих», «недомінуємих» об'єктів та ін.

Узагальненням поняття бінарного відношення є поняття відповідності.

Означення 28. Нечіткою відповідністю на множення A , B називається нечітка підмножина їх декартова добутка $A \times B$

$$\Gamma = \sum_{A \times B} \mu_{\Gamma}(u_{ij}; v_j) / (u_{ij}; v_j);$$

$$\Gamma = \int_{A \times B} \mu_{\Gamma}(x; y) / (x; y).$$

Графом нечіткої бінарної відповідності на скінченних множинах є зважений двохдальний граф, стрілки якого орієнтовані від вершин, відповідаючих A , до вершин, відповідаючих B .

Якщо $A = \{u_1; \dots; u_m\}$; $B = \{v_1; \dots; v_n\}$, то матриця інцидентій має порядок $m \times n$.

Приклад 19. Нехай $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ – група з п'яти студентів (номери за списком); $B = \{2; 3; 4; 5\}$ – прогноз щодо оцінок за іспит. Викладач дає прогноз матрицею інцидентій

$$J_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,7 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Наприклад, навряд чи перший студент отримає «4» ($\mu = 0,1$), оцінка «5» для нього не передбачається ($\mu = 0$), найбільш ймовірний результат (за викладача) – «3» ($\mu = 0,7$).

Граф цієї відповідності має вигляд

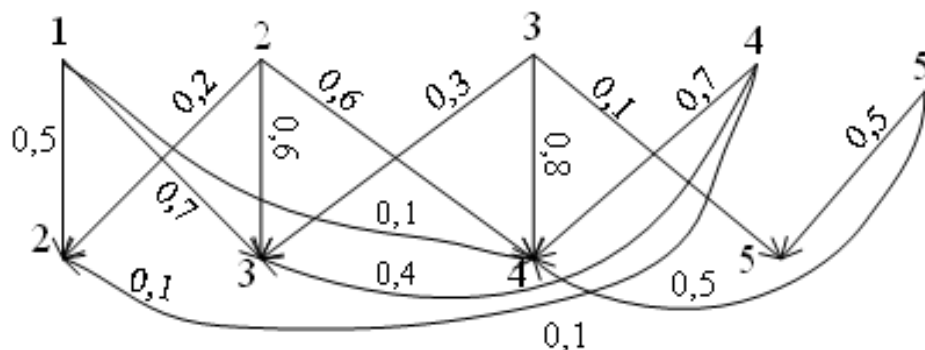


Рис. 6

Композиція бінарних відповідностей визначається так само, як і для бінарних відношень.

4. Поняття лінгвістичної змінної

Лінгвістична змінна принципово відрізняється від числової тим, що її значеннями є не числа, а слова (словосполучення, фрази) у природній або формальній мові. Лінгвістична змінна дозволяє

приблизно описувати складні явища, які не піддаються суто кількісному опису.

Розглянемо такий приклад. Нехай лінгвістична змінна має значення «вік». Будемо зв'язувати з нею універсальну множину $U = [0; +\infty)$, кожний елемент якої є вік людини (у роках). Не обов'язково обмежувати універсальну множину реальним носієм. Значеннями лінгвістичної змінної x є не числа з множини U , а слова та словосполучення: «молодий», «немолодий», «людина середнього віку», «старий», «дуже старий» та ін. Значення лінгвістичної змінної називаються *термами* та об'єднуються у *терм-множину* $T(x)$.

Терми можна розглядати як імена нечітких множин на універсальній множині U . Якщо X – елемент терм-множини лінгвістичної змінної x , то це є назва нечіткої множини $X = \sum_U \mu_x(u) / u$ або $X = \int_U \mu_x(u) / u$.

Наприклад, одним з можливих значень лінгвістичної змінної «вік» є терм «старий». Задамо функцію належності нечіткої множини $X_1 = \text{«старий»}$ таким чином

$$\mu_x(u) = \left(1 + \left(\frac{u - 60}{5} \right)^{-2} \right)^{-1}.$$

Розглянемо ще один можливий терм $X_2 = \text{«дуже старий»}$. Отримаємо його функцію належності, застосувавши до нечіткої множини X_1 операцію концентрації (2)

$$\mu_{x_2}(u) = \left(1 + \left(\frac{u - 60}{5} \right)^{-2} \right)^{-2}.$$

Можна записати

$$X_1 = \int_{60}^{+\infty} \left(1 + \left(\frac{u - 60}{5} \right)^{-2} \right)^{-1} / u;$$

$$X_2 = \int_{60}^{+\infty} \left(1 + \left(\frac{u-60}{5} \right)^{-2} \right)^{-2} / u.$$

Побудуємо відповідні діаграми Заде

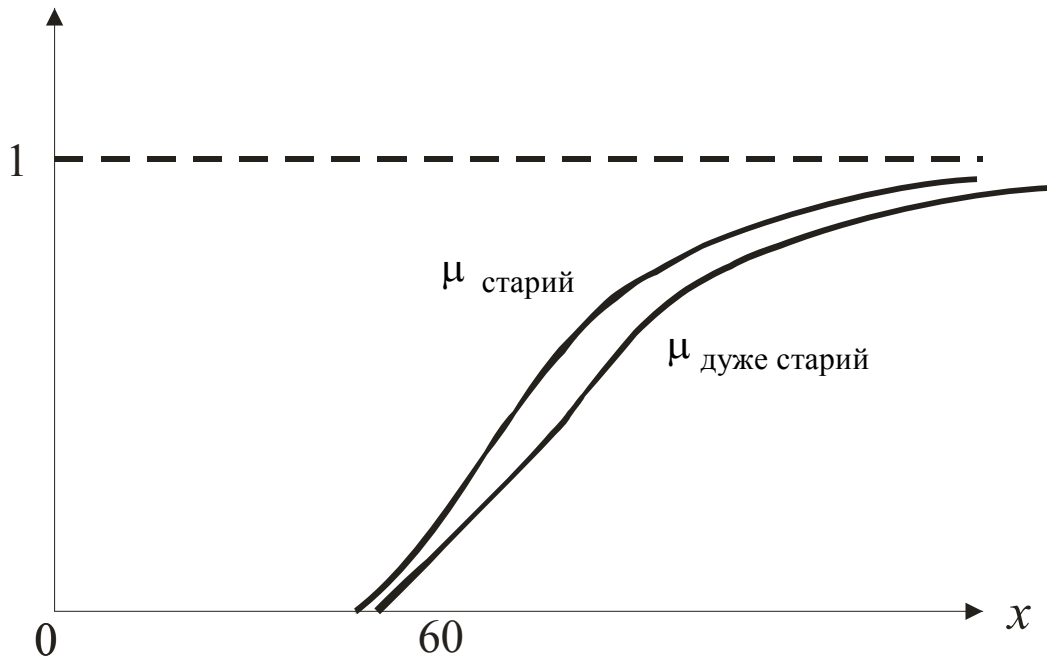


Рис. 7

Означення 29. Нехай x – назва лінгвістичної змінної. Слово або групу слів, що є значеннями змінної, називають *термом*. Кожний терм є іменем нечіткої підмножини універсальної множини U .

Якщо ототожнювати імена нечітких підмножин з самими підмножинами, то терм – множину можна зобразити як об'єднання всіх значень лінгвістичної змінної x

$$T = X_1 \cup X_2 \cup \dots = \sum_i X_i.$$

Приклад 20. Нехай $U = \{1; 2; 3; \dots; 10\}$. X – «кількість»; терм – множина: $T = \text{«трохи»} \cup \text{«декілька»} \cup \text{«багато»}$.

Елементами терм-множини є імена нечітких підмножин множини U , для яких задамо функції належності

$$\text{«трохи»} = 0,4/1 + 0,8/2 + 1/3 + 0,4/4;$$

$$\text{«декілька»} = 0,5/3 + 0,8/4 + 1/5 + 1/6 + 0,8/7 + 0,5/8;$$

$$\text{«багато»} = 0,4/6 + 0,6/7 + 0,8/8 + 0,9/9 + 1/10.$$

З практичної точки зору, важливо мати правило, яке б дозволяло з певного набору слів отримувати всі можливі значення лінгвістичної змінної. Таке правило називають *синтаксичним правилом*.

Синтаксичне правило можна розглядати як алгоритмічну процедуру утворення елементів терм-множини.

Наприклад, нехай задано лінгвістичну змінну $x = \text{«вік»}$, елементами терм-множини $T(x)$ є терми «старий», «дуже старий», «дуже, дуже старий» та ін. Синтаксичне правило утворення елементів множини $T(x)$ може бути задано таким чином

$$T = \text{«старий»} + \text{«дуже старий } T\text{»}, \quad (5)$$

тобто множина T складається з терма «старий» та термінів, що є конкатенацією (пристосуванням) терма «дуже» до деякого терма з T .

Розв'яжемо рівняння (13.5) за методом ітерацій, використовуючи рекурентне співвідношення

$$T^{i+1} = \text{«старий»} + \text{«дуже } T^i\text{»}; \\ i = 0; 1; 2 \dots$$

Прийнявши $T^0 = \emptyset$, отримаємо

$$T^0 = \emptyset; \\ T^1 = \text{«старий»}; \\ T^2 = \text{«старий»} + \text{«дуже старий»}; \\ T^3 = \text{«старий»} + \text{«дуже старий»} + \text{«дуже, дуже старий»}.$$

Синтаксичне правило в цьому разі полягає в рівнянні (13.5) та його розв'язуванні. Далі синтаксичне правило позначуємо символом « G », а відповідну терм-множину, – « $T(G)$ ».

Кожний терм з $T(G)$ є іменем нечіткої підмножини множини U . У зв'язку з цим, крім синтаксичного правила G , необхідно мати правило, яке б дозволяло для термів X , що отримані за допомогою G , отримувати функції належності цих нечітких підмножин. Таке правило називають *семантичним правилом*. Семантичне правило, як і синтаксичне, можна розглядати як алгоритмічну процедуру для

утворення функцій належності нечітких підмножин X множини U . Семантичне правило будемо позначати символом «М».

Розглянемо терми $X_1 = \text{«старий»}$ та $X_2 = \text{«дуже старий»}$. Терм X_1 є первинним термом, в цей самий час X_1 є нечіткою підмножиною універсальної множини $U = [0; +\infty)$ з функцією належності

$$\mu_{x_1}(u) = \left(1 + \left(\frac{u-60}{5} \right)^{-2} \right)^{-1} \quad (\text{див. рис. 7}). \quad \text{Терм } X_2 \text{ утворений з}$$

первинного терма X_1 за допомогою *модифікатора* «дуже». Модифікатор змінює функцію належності μ_{x_1} нечіткої множини X_1 на функцію належності μ_{x_2} нечіткої множини X_2 шляхом застосування операції концентрації (13.2)

$$X_2 = CON X_1 = X_1^2.$$

Отже,

$$\mu_{x_2}(u) = \mu_{x_1}^2(u) \left(1 + \left(\frac{u-60}{5} \right)^{-2} \right)^{-2}.$$

Якщо терм X_{n+1} отриманий з терма X_n застосуванням синтаксичного правила (13.5), а дія модифікатора «дуже» полягає в операції концентрації для будь-якого терма X_n з $T(G)$, то відповідне семантичне правило має вигляд

$$X_{n+1} = CON X_n$$

або

$$\mu_{x_{n+1}}(x) = \mu_{x_n}^2(x).$$

$$\text{Очевидно, } \mu_{x_{n+1}}(x) = \left(1 + \left(\frac{u-60}{5} \right)^{-2} \right)^{-2^n}.$$

Тепер дамо строге визначення лінгвістичної змінної.

Означення 30. Лінгвістичною змінною називається набір $(x; T(x); U; G; M)$, де x – назва змінної; $T(x)$ – терм-множина, тобто множина імен значень змінної x , де кожному з цих імен відповідає нечітка підмножина X універсальної множини U ; G – синтаксичне право, утворюючи імена X значень змінної x , M – семантичне правило, яке співвідносить до кожного елемента терм-множини нечітку підмножину X множини U .

Як модифікатори використовуються, як правило, слова та словосполучення «дуже», «більш–менш», «суттєво», «трохи» та ін. Семантичне правило визначається змістом терма і модифікатора, а також метою розв’язування задачі. Відповідний алгоритм задається фахівцем, що розв’язує задачу.

Завершуючи розділ, наведемо приклад, що ілюструє залежність результату дії модифікатора від вибору семантичного правила.

Приклад 21. Нехай $x =$ «іспит здано»; первинним термом множини $T(x)$ є слово «успішно». Задамо нечітку підмножину X універсальної множини

$$U = \{m \text{ (математика); } f \text{ (фізика); } i \text{ (інформатика)}\}$$

$$X = 0,5 / m + 0,3 / f + 0,9 / i$$

та модифікатор «більш–менш».

Задамо семантичне правило двома способами:

1) змінення нечіткої множини X оператором нечіткості (13.4)

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,8 & 1 & 0,3 \\ 0 & 0,7 & 0,9 \end{pmatrix};$$

2) застосування операції дилатації (13.3) до множини X .

Знайдемо нечітку множину $KX =$ «більш–менш успішно» за правилом (13.4)

$$KX = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,8 & 1 & 0,3 \\ 0 & 0,7 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,9 \end{pmatrix} = 0,5 / m + 0,4 / f + 0,81 / i.$$

Застосування операції дилатації до нечіткої множини X дає такий результат

$$DIL(X) = X^{0,5} = \sqrt{0,5} / m + \sqrt{0,3} / f + \sqrt{0,9} / i \approx \\ \approx 0,71 / m + 0,55 / f + 0,95 / i.$$

Результати застосування операції дилатації та оператора нечіткості значно відрізняються. надати перевагу конкретному способу побудови семантичного правила в даному разі неможливо (зокрема, в зв'язку з деякою невизначеністю поняття «більш–менше»).

5. Нечіткі булеві змінні. Аналіз функцій нечіткої логіки

У звичайній (бінарній) логіці розглядаються висловлювання, відносно яких однозначно можна сказати, чи вони істинні, чи хибні. Значення істинності такого висловлювання є або 0 (хибне), та 1 (істинне). У нечіткій логіці розглядаються висловлювання, істинність яких «під питанням».

Означення 31. Нечіткою булевою змінною називається змінна p , яка є іменем нечіткої підмножини множини $U = [0;1]$.

Запишемо правила виконання логічних операцій (заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція) над нечіткими булевими змінними.

- 1) заперечення
 $\bar{p} = 1 - p;$
- 2) кон'юнкція
 $p \wedge q = \min\{p; q\};$
- 3) диз'юнкція
 $p \vee q = \max\{p; q\}.$

Відмітимо, що множина нечітких булевих змінних з операціями 1)–3) та множина всіх нечітких підмножин універсальної множини U з операціями доповнення, перерізу та об'єднання є інтерпретаціями однієї математичної моделі. Тому закони нечіткої логіки (алгебри нечітких булевих змінних) ідентичні законам алгебри нечітких множин. Так само, як і в алгебрі нечітких множин, в нечіткій логіці

порушуються закон виключеного третього ($p \vee \bar{p} = 1$) та закон протиріччя ($p \wedge \bar{p} = 0$).

Для формул нечіткої логіки складаються *таблиці істинності* так само, як і для функцій бінарної логіки, але вони мають дещо інший вигляд. Розглянемо один такий приклад.

Приклад 22. Нехай $f(p; q) = (p \wedge \bar{p} = 1) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{q})$.

Треба скласти послідовність чотирьох символів $(\bar{p}; p; \bar{q}; q)$, між якими розставлено знаки нерівності « $\leq$ ». Найменший елемент можна вибрати чотирма способами. Тоді однозначно визначиться найбільший елемент (це буде заперечення найменшого). Тому існує 8 способів складання такої послідовності

$$p \leq q \leq \bar{q} \leq \bar{p}; \quad p \leq \bar{q} \leq q \leq \bar{p};$$

$$\bar{p} \leq q \leq \bar{q} \leq p; \quad \bar{p} \leq \bar{q} \leq q \leq p;$$

$$q \leq p \leq \bar{p} \leq \bar{q}; \quad q \leq \bar{p} \leq p \leq \bar{q};$$

$$\bar{q} \leq p \leq \bar{p} \leq q; \quad \bar{q} \leq \bar{p} \leq p \leq q.$$

Складемо таблицю істинності (табл. 1).

Таблиця 1

Нерівність	$p \wedge \bar{p}$	$\bar{p} \wedge q \wedge \bar{q}$	$f(p; q)$
$p \leq q \leq \bar{q} \leq \bar{p}$	p	q	q
$p \leq \bar{q} \leq q \leq \bar{p}$	p	$\bar{q}$	$\bar{q}$
$\bar{p} \leq q \leq \bar{q} \leq p$	$\bar{p}$	$\bar{p}$	$\bar{p}$
$\bar{p} \leq \bar{q} \leq q \leq p$	$\bar{p}$	$\bar{p}$	$\bar{p}$
$q \leq p \leq \bar{p} \leq \bar{q}$	p	q	p
$q \leq \bar{p} \leq p \leq \bar{q}$	$\bar{p}$	q	$\bar{p}$
$\bar{q} \leq p \leq \bar{p} \leq q$	p	$\bar{q}$	p
$\bar{q} \leq \bar{p} \leq p \leq q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p}$

Означення 32. Функції f_1 та f_2 називаються *рівносильними*, якщо їхні таблиці істинності співпадають.

Існують чотири різні функції від одної нечіткої змінної p (табл. 13.2).

Нерівність	Функція			
	f_1	f_2	f_3	f_4
$p \leq \bar{p}$	p	p	$\bar{p}$	$\bar{p}$
$\bar{p} \leq p$	p	$\bar{p}$	p	$\bar{p}$

Проте від двох змінних існує вже $4^8 = 65536$ функцій; функцій від n змінних існує $(2n)^{n! \cdot 2^n}$. Тільки незначна частина цих функцій може бути зображена за допомогою операцій заперечення, кон'юнкції та диз'юнкції над нечіткими змінними..

Означення 33. Функція f від нечітких булевих змінних називається *аналітичною*, якщо вона може бути зображена формулою, що містить операції кон'юнкції і диз'юнкції, які виконуються над аргументами функції та їхніми запереченнями.

Формули, що зображують аналітичні функції, можна спрощувати, але треба пам'ятати про порушення закону виключеного третього та закону протиріччя.

Наприклад, в бінарній логіці операцію імплікації

$$p \rightarrow q = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

можна спростити таким чином

$$\begin{aligned} p \rightarrow q &= (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge q) = \\ &= (\bar{p} \wedge (\bar{q} \vee q)) \vee ((\bar{p} \vee p) \wedge q) = (\bar{p} \wedge 1) \vee (1 \wedge q) = \bar{p} \vee q. \end{aligned}$$

У нечіткій логіці можливе тільки таке спрощення

$$p \rightarrow q = (\bar{p} \wedge (\bar{q} \vee q)) \vee ((\bar{p} \vee p) \wedge q),$$

бо в загальному випадку $\bar{p} \vee p \neq 1$.

З'ясуємо, за якими умовами аналітична функція $f(p; q)$ потрапляє до заданого проміжку $[\alpha; \beta]$ відрізка $[0; 1]$.

Нехай $p \in [a_1; a_2] \subseteq [0; 1]$; $q \in [b_1; b_2] \subseteq [0; 1]$.

Можливі шість варіантів взаємного розміщення точок $a_1; b_1; a_2; b_2$ на відрізку $[0; 1]$ і кожному з них відповідає певна множина значень аналітичних функцій

$$\bar{p} \wedge q; p \vee q (p \in [a_1; a_2]; q \in [b_1; b_2]).$$

Очевидно, в будь-якому випадку

$$p \wedge q \in [\min\{a_1; b_1\}; \min\{a_2; b_2\}];$$

$$p \vee q \in [\max\{a_1; b_1\}; \max\{a_2; b_2\}];$$

$$p \wedge \bar{q} \in [\min\{a_1; 1 - b_2\}; \min\{a_2; 1 - b_1\}];$$

$$p \wedge q \in [\min\{1 - a_1; b_1\}; \min\{1 - a_2; b_2\}];$$

$$\bar{p} \wedge \bar{q} \in [\min\{1 - a_1; 1 - b_1\}; \min\{1 - a_2; 1 - b_2\}];$$

$$p \vee \bar{q} \in [\max\{a_1; 1 - b_2\}; \min\{a_2; 1 - b_1\}];$$

$$\bar{p} \vee q \in [\max\{1 - a_2; b_1\}; \max\{1 - a_1; b_2\}];$$

$$\bar{p} \vee \bar{q} \in [\max\{1 - a_1; 1 - b_1\}; \max\{1 - a_2; 1 - b_2\}].$$

Отримаємо умови потрапляння функції $f(p; q) = p \wedge q$ до проміжку $[\alpha; \beta)$

$$p \wedge q \in [\min\{a_1; b_1\}; \min\{a_2; b_2\}].$$

Тому $p \wedge q \in [\alpha; \beta)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} \min\{a_1; b_1\} \geq \alpha; \\ \min\{a_2; b_2\} < \beta. \end{cases}$$

Але ця система еквівалентна системі, що складається з системи

$$\begin{cases} a_1 \geq \alpha; \\ b_1 \geq \alpha. \end{cases}$$

та сукупності

$$\begin{cases} a_2 < \beta; \\ b_2 < \beta. \end{cases}$$

Остаточнo

$$p \wedge q \in [\alpha; \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} p \geq \alpha; \\ q \geq \alpha; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} p < \beta; \\ q < \beta. \end{array} \right. \end{cases}$$

Аналогічно можна отримати такі умови для будь-якої найпростішої аналітичної функції від двох нечітких булевих змінних.

Системи та сукупності нерівностей визначають об'єднання та перерізи числових множин. Їх можна розглядати як множини істинності відповідних предикатів.

Складемо таблиці умов потрапляння для найпростіших аналітичних функцій у вигляді, зручному для розв'язування задач потрапляння до заданого проміжку для довільних аналітичних функцій двох нечітких змінних.

Таблиця 3

$f(p; q)$	$\alpha \leq f(p; q)$	$f(p; q) < \beta$
$p \wedge q$	$\begin{cases} p \geq \alpha; \\ q \geq \alpha \end{cases}$	$\begin{cases} p < \beta; \\ q < \beta \end{cases}$
$\bar{p} \wedge q$	$\begin{cases} p \leq 1 - \alpha; \\ q \geq \alpha \end{cases}$	$\begin{cases} p > 1 - \beta; \\ q < \beta \end{cases}$
$p \wedge \bar{q}$	$\begin{cases} p \geq \alpha; \\ q \leq 1 - \alpha \end{cases}$	$\begin{cases} p < \beta; \\ q > 1 - \beta \end{cases}$
$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\begin{cases} p \leq 1 - \alpha; \\ q \leq 1 - \alpha \end{cases}$	$\begin{cases} p > 1 - \beta; \\ q > 1 - \beta \end{cases}$
$p \vee q$	$\begin{cases} p \geq \alpha; \\ q \geq \alpha \end{cases}$	$\begin{cases} p < \beta; \\ q < \beta \end{cases}$
$\bar{p} \vee q$	$\begin{cases} p \leq 1 - \alpha; \\ q \geq \alpha \end{cases}$	$\begin{cases} p > 1 - \beta; \\ q < \beta \end{cases}$
$p \vee \bar{q}$	$\begin{cases} p \geq \alpha; \\ q \leq 1 - \alpha \end{cases}$	$\begin{cases} p < \beta; \\ q > 1 - \beta \end{cases}$
$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\begin{cases} p \leq 1 - \alpha; \\ q \leq 1 - \alpha \end{cases}$	$\begin{cases} p > 1 - \beta; \\ q > 1 - \beta \end{cases}$

Приклад 23. Визначимо, за якими умовами функція $f(x_1; x_2) = (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2)$ (так звана *сума за модулем 2*) потрапляє до проміжку $[0, 1; 0, 3]$.

Позначимо $\bar{x}_1 \wedge x_2 = p, x_1 \wedge \bar{x}_2 = q$.

За табл. 13.2

$$H(p; q) \wedge G(p; q) : p \vee q \in [0, 1; 0, 3] \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} p \geq 0, 1; \\ q \geq 0, 1; \end{cases} \\ \begin{cases} p < 0, 3; \\ q < 0, 3; \end{cases} \end{cases}$$

де $H(p; q) : \begin{cases} p \geq 0, 1; \\ q \geq 0, 1; \end{cases}$, $G(p; q) : \begin{cases} p < 0, 3; \\ q < 0, 3; \end{cases}$ – двомісцеві предикати бінарної логіки.

Множина істинності $H(p; q)$ забезпечує нижню границю проміжка $[0, 1; 0, 3]$, а $G(p; q)$ – верхню. Предикат $H(p; q)$ є диз'юнкцією одномісцевих предикатів $h_1(p) : (p \geq 0, 1)$ та $h_2(q) : (q \geq 0, 1)$, предикат $G(p; q)$ є кон'юнкцією предикатів $q_1(p) : (p < 0, 3)$ та $q_2(q) : (q < 0, 3)$.

Оскільки $p = \bar{x}_1 \wedge x_2$; $q = x_1 \wedge \bar{x}_2$, предикати h_1 , h_2 , q_1 , q_2 є предикатами від двох змінних

$$h_1(p) = h_1(x_1; x_2) : (0, 1 \leq \bar{x}_1 \wedge x_2);$$

$$h_2(q) = h_2(x_1; x_2) : (0, 1 \leq x_1 \wedge \bar{x}_2);$$

$$q_1(p) = q_1(x_1; x_2) : (\bar{x}_1 \wedge x_2 \leq 0, 3);$$

$$q_2(q) = q_2(x_1; x_2) : (x_1 \wedge \bar{x}_2 < 0, 3).$$

Відповідно табл. 2

$$(0,1 \leq \bar{x}_1 \wedge x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq 0,9; \\ x_2 \geq 0,1, \end{cases}$$

$$(0,1 \leq x_1 \wedge \bar{x}_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \geq 0,1; \\ x_2 \leq 0,9, \end{cases}$$

$$(\bar{x}_1 \wedge x_2 < 0,3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > 0,7; \\ x_2 < 0,3; \end{cases}$$

$$(x_1 \wedge \bar{x}_2 < 0,3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0,3; \\ x_2 > 0,7. \end{cases}$$

Таким чином, функція $f(x_1; x_2) = (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2)$ потрапляє до проміжку $[0,1;0,3)$, якщо виконується система нерівностей

$$\left[\begin{cases} x_1 \leq 0,9; \\ x_2 \geq 0,1; \end{cases} \wedge \begin{cases} x_1 > 0,7; \\ x_2 < 0,3; \end{cases} \right] \vee \left[\begin{cases} x_1 \geq 0,1; \\ x_2 \leq 0,9; \end{cases} \wedge \begin{cases} x_1 < 0,3; \\ x_2 > 0,7. \end{cases} \right]$$

Таким чином, аналіз аналітичних функцій нечітких булевих змінних може бути зведений до оперування предикати звичайної (бінарної) логіки.

6. Нечіткі моделі в технічних задачах

Розглянемо одну задачу, що зустрічається у різноманітних технічних задачах, а саме *задачу синтезу нечіткої функції*. Треба задати послідовність дій перетворення довільного набору вхідних сигналів $x_i \in [a_{1i}; a_{2i}] \subseteq [0;1]$ ($i = 1;2;\dots$) у наперед заданий вихідний сигнал. Розглянемо цю задачу на прикладі.

Нехай треба побудувати схему реалізації $f(x_1; x_2) = x_1 \wedge x_2 \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$, що забезпечує виконання умови $f(x_1; x_2) \in [0,4;0,7)$, якщо $x_1 \in [0,2;0,6]$; $x_2 \in [0,4;0,8]$.

За допомогою табл. 2 знайдемо умови, за яких на виході буде виконаним включення $x_1 \wedge x_2 \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \in [0,4;0,7]$. введемо позначення $p = x_1 \wedge x_2$; $q = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$. Отримаємо таку таблицю.

Таблиця 4

Умови для нижньої границі f	Умови для верхньої границі f
$\begin{cases} p \geq 0,4; \\ q \geq 0,4; \end{cases}$	$\begin{cases} p < 0,7; \\ q < 0,7; \end{cases}$
$\begin{cases} x_1 \wedge x_2 \geq 0,4; \\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \geq 0,4; \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \wedge x_2 < 0,7; \\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 < 0,7; \end{cases}$
$\begin{cases} \begin{cases} x_1 \wedge x_2 \geq 0,4; \\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \geq 0,4; \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 \leq 0,6; \\ x_2 \leq 0,6 \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} \begin{cases} x_1 \leq 0,7; \\ x_2 \leq 0,7; \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 > 0,3; \\ x_2 > 0,3 \end{cases} \end{cases}$

Сигнали $x_1 \in [0,2;0,6]$; $x_2 \in [0,4;0,8]$ на вході не забезпечують потрібного сигналу на виході. Дійсно

$$\bar{x}_1 \in [0,4;0,8]; x_2 \in [0,2;0,6];$$

$$x_1 \wedge x_2 \in [0,2;0,6]; \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \in [0,4;0,8];$$

$$x_1 \wedge x_2 \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \in [0,2;0,6] \neq [0,4;0,7].$$

Для забезпечення потрібних параметрів вихідного сигналу треба ввести так звані *параметри узгодження*, тобто множники вхідних сигналів, що забезпечують нижню та верхню границі вихідного сигналу

$$\left\{ \begin{cases} x_1 \cdot k_2 \geq 0,4; \\ x_2 \cdot k_2 \geq 0,4; \end{cases} \right. \wedge \left\{ \begin{cases} x_1 \cdot m_1 < 0,7; \\ x_2 \cdot m_2 < 0,7; \end{cases} \right. \wedge \left\{ \begin{cases} x_1 \cdot k_3 \leq 0,6; \\ x_2 \cdot k_4 \leq 0,6 \end{cases} \right. \wedge \left\{ \begin{cases} x_1 \cdot m_3 > 0,3; \\ x_2 \cdot m_4 > 0,3. \end{cases} \right.$$

Оскільки $x_1 \geq 0,2$; $x_2 \geq 0,4$; $x_1 \leq 0,6$; $x_2 \leq 0,8$, параметри узгодження отримаємо з рівностей

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,2 \cdot k_1 = 0,4; \\ 0,4 \cdot k_2 = 0,4; \\ 0,6 \cdot k_3 = 0,6; \\ 0,8 \cdot k_4 = 0,6 \end{array} \right\} \wedge \left[\begin{array}{l} 0,6 \cdot m_1 = 0,7; \\ 0,8 \cdot m_2 = 0,7; \\ 0,2 \cdot m_3 = 0,3; \\ 0,4 \cdot m_4 = 0,3. \end{array} \right.$$

Звідки можна задати $k_1=2$; $k_2 = 1$; $k_3 = 1$; $k_4 = 3/4$; $m_1 = 7/6$; $m_2 = 7/8$; $m_3 = 3/2$; $m_4 = 3/4$.

Для побудови схем реалізації застосовуються такі елементи:

- $\bigcirc k, m$ – пристрій параметричного узгодження; множить вхідний сигнал на параметр узгодження;
- $\boxed{\text{АБО}}$ – логічний елемент; реалізує об'єднання інтервалів;
- $\boxed{\text{ТА}}$ – логічний елемент; реалізує переріз інтервалів;
- $\boxed{\text{НЕ}}$ – логічний елемент; реалізує операцію $1 - x$;
- $\bigcirc \alpha$ – пристрій, що задає нижню границю, пропускає сигнали $p \geq \alpha$;
- $\bigcirc \beta$ – пристрій, що задає верхню границю, пропускає сигнали $p < \beta$.

Використовуючи ці елементи, побудуємо схему, що реалізує потрапляння функції $f(x_1; x_2) = x_1 \wedge x_2 \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$ до проміжку $[0,4; 0,7)$.

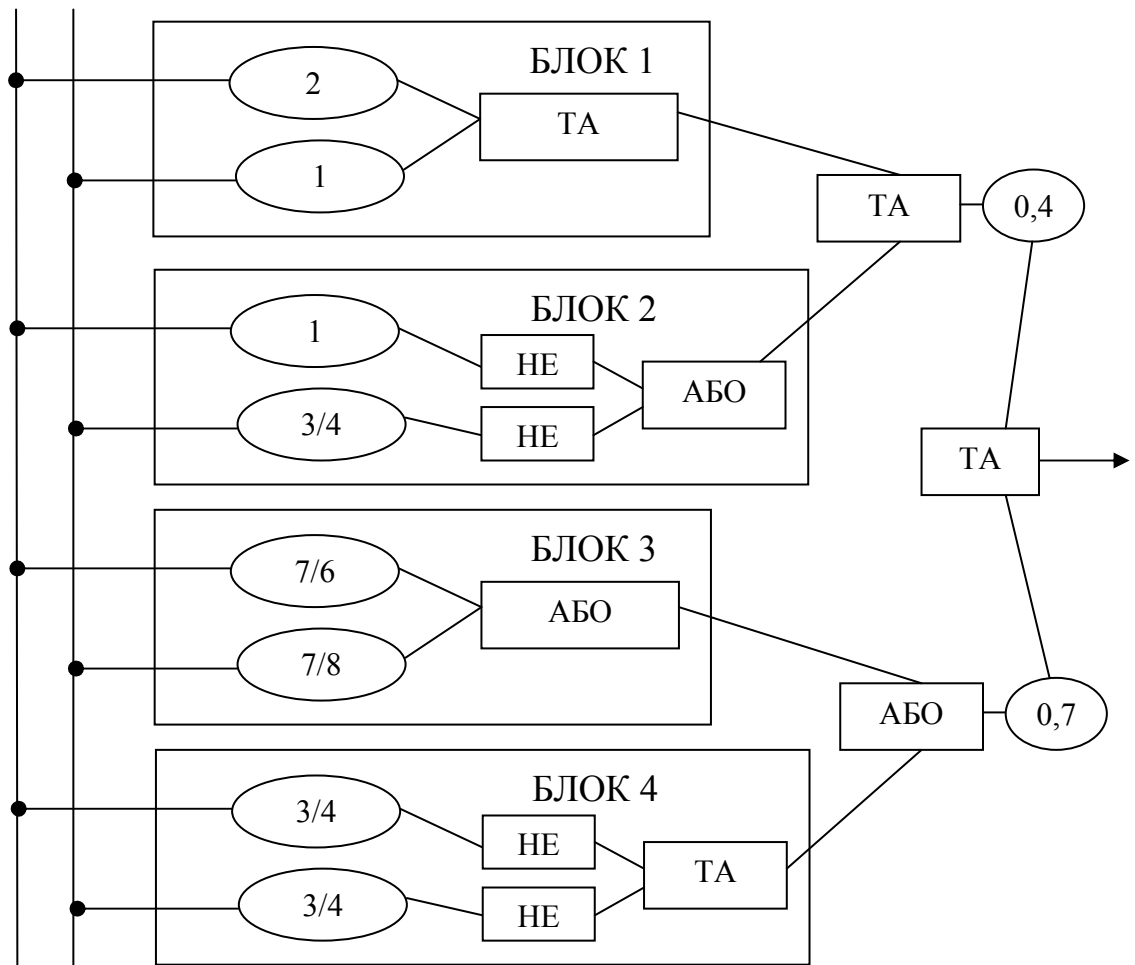


Рис. 8.

Блок 1. На вхід надходять сигнали $x_1 \in [0, 2; 0, 6]$; $x_2 \in [0, 4; 0, 8]$, проходять через пристрої параметричного узгодження вони множаться на числа $k_1=2$; $k_2 = 1$; $k_1x_1 \in [0, 4; 1, 2]$; $k_2x_2 \in [0, 4; 0, 8]$. Пристрій ТА виконує операцію перерізу

$$p = k_1x_1 \wedge k_2x_2 \in [0, 4; 0, 8].$$

Блок 2. Сигнали $x_1 \in [0, 2; 0, 6]$; $x_2 \in [0, 4; 0, 8]$, проходять через пристрої параметричного узгодження, множаться на числа $k_3=1$; $k_4 = 3/4$; $k_3x_1 \in [0, 2; 0, 6]$; $k_4x_2 \in [0, 3; 0, 6]$. Далі сигнали перетворюються пристроєм НЕ: $\bar{k}_3x_1 \in [0, 4; 0, 8]$; $\bar{k}_4x_2 \in [0, 4; 0, 7]$. Пристрій АБО виконує операцію об'єднання

$$q = \overline{k_3 x_1} \vee \overline{k_4 x_2} \in [0, 4; 0, 8].$$

Сигнали $p \in [0, 4; 0, 8]$; $q \in [0, 4; 0, 8]$ надходять на пристрій ТА, що виконує операцію перерізу $H = p \wedge q \in [0, 4; 0, 8]$.

Блок 3. Сигнали $x_1 \in [0, 2; 0, 6]$; $x_2 \in [0, 4; 0, 8]$, проходять через пристрої параметричного узгодження, множаться на числа $m_1 = 7/6$; $m_2 = 3/4$; $m_1 x_1 \in [0, 23; 0, 7]$; $m_2 x_2 \in [0, 35; 0, 7]$. Пристрій АБО виконує операцію об'єднання

$$p = m_1 x_1 \vee m_2 x_2 \in [0, 23; 0, 7].$$

Блок 4. Пристрій параметричного узгодження множать сигнали $x_1 \in [0, 2; 0, 6]$; $x_2 \in [0, 4; 0, 8]$, на числа $m_3 = 3/2$; $m_4 = 3/4$; $m_3 x_1 \in [0, 3; 0, 9]$; $m_4 x_2 \in [0, 3; 0, 6]$. Далі пристрій НЕ перетворення їх $\overline{m_3 x_1} \in [0, 1; 0, 7]$; $\overline{m_4 x_2} \in [0, 4; 0, 7]$. Пристрій ТА виконує операцію перерізу

$$q = \overline{m_3 x_1} \wedge \overline{m_4 x_2} \in [0, 4; 0, 7].$$

Сигнали $p \in [0, 23; 0, 7]$; $q \in [0, 4; 0, 7]$ з блоків 3 та 4 проходять пристрій АБО, який виконує операцію об'єднання

$$p \vee q \in [0, 23; 0, 7].$$

Сигнал $H \in [0, 4; 0, 8]$ проходить пристрій, який задає нижню границю та пропускає тільки сигнали, не менші за 0,4. Сигнал $G \in [0, 23; 0, 7]$ проходить через пристрій, який задає верхню границю та пропускає лише сигнали, менші за 0,7. Сигнал H пройде свій пристрій повністю, а сигнал G вийде у вигляді $G \in [0, 23; 0, 7)$. Пристрій ТА на виході схеми виконає операцію перерізу. Таким чином, на виході схеми буде створено сигнал $f = H \wedge G \in [0, 4; 0, 7)$.

Різноманітні технічні застосування теорії нечітких множин обговорюються в (1), (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / Под ред. Р.Р. Ягера. – М.: Радио и связь, 1986.
2. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986.
3. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.Заде. – М.: Мир, 1976.
4. Кофман А. введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М.: Радио и связь, 1982.
5. Конышева Л.К. Основы теории нечетких множеств / Л.К. Конышева, Д.М. Назаров. – СПб: Питер, 2011.