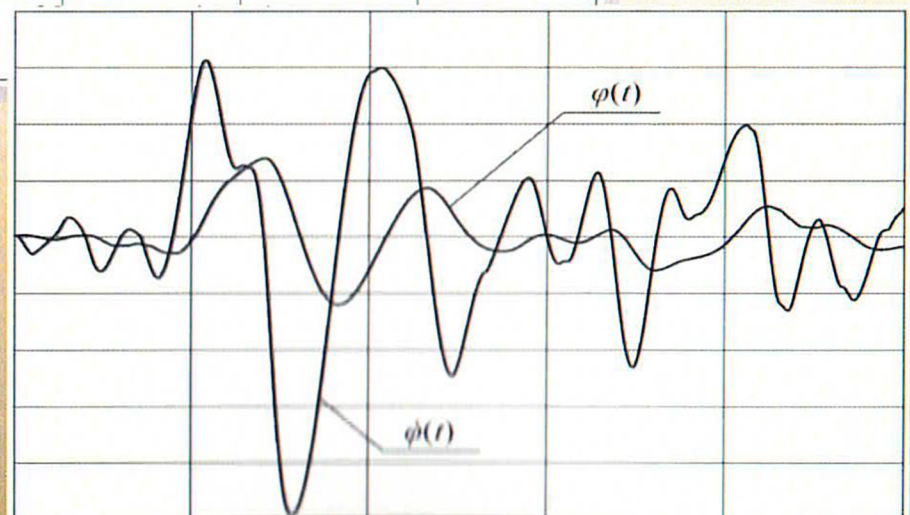
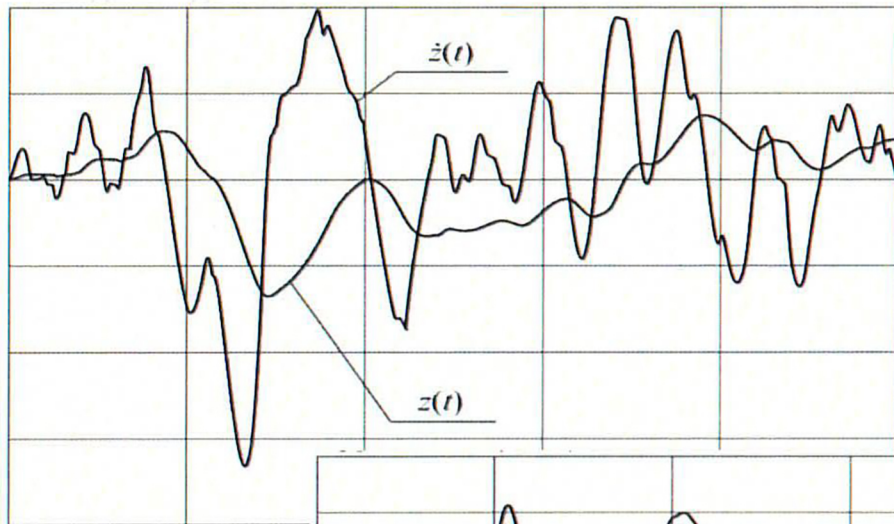
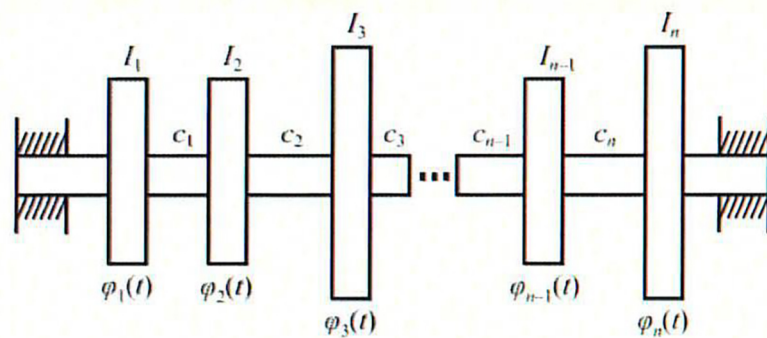


Є.Є. Александров, В.О. Богомолов,  
В.І. Клименко, Д.М. Леонтьєв

## ПРИКЛАДНА ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ для студентів автомобільних спеціальностей вищів

*Навчальний посібник*



Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

**Є. Є. Александров, В. О. Богомолів,  
В. І. Клименко, Д. М. Леонтєв**

**ПРИКЛАДНА ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ  
для студентів автомобільних  
спеціальностей вишів**

*Навчальний посібник*

Харків  
ХНАДУ  
2025

УДК 629.3

ББК 30

А 46

Рекомендовано вченою радою (дозвіл №70/24/6.5 «08» листопада 2024 року)  
як навчальний посібник для здобувачів закладів вищої освіти

Рецензенти:

**О.О. Ларін** – член-кореспондент Національної академії наук України,  
д.т.н., професор, директор навчально-наукового інституту комп'ютерного  
моделювання, прикладної фізики та математики,

Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”

**К.В. Аврамов** – член-кореспондент Національної академії наук України,  
д.т.н., професор, завідувач відділом нелінійної механіки та математичного  
моделювання Інституту енергетичних машин і систем,

Національна академія наук України

**Р.О. Кайдалов** – д.т.н., професор, заступник з наукової роботи начальника

Академії Національної Гвардії України, Академія Національної Гвардії України

**М.А. Подригало** – д.т.н., професор, завідувач кафедри Технології машинобудування  
та ремонту машин, Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Автори:

Є.Є. Александров, д.т.н., професор, В.О. Богомолов, д.т.н., професор,

В.І. Клименко, д.т.н., професор, Д.М. Леонтєв, д.т.н., професор, ХНАДУ.

**Є.Є. Александров**

**А 46** Прикладна теорія коливань для студентів автомобільних спеціальностей  
вищів / Є.Є. Александров, В. О. Богомолов, В.І. Клименко, Д. М. Леонтєв –  
Харків : ФОП Бровін О.В., 2025. – 162 с.

ISBN 978-617-8238-75-9

В навчальному посібнику розглянуто вільні, вимушені та випадкові коливання підресореної частини кузова автомобіля, а також автоколивання підресореної частини автомобіля з фрикційними амортизаторами та автоколивання температури охолоджуючої рідини автомобільного двигуна з застосуванням методу гармонійної лінеаризації нелінійностей. Розглянуті вільні та вимушені пружні коливання стволу гармати, розташованої на шасі армійського автомобіля, а також вплив коливань вільної поверхні рідини, що транспортується на курсову стійкість автомобіля-паливозаправника.

Навчальний посібник призначений для здобувачів автомобільних спеціальностей вищів III та IV рівнів акредитації, а також у якості посібника для самоосвіти інженерів в галузі «механічна інженерія» та «транспорт».

Іл. 56. Табл. 5. Ліст. 4 Бібліогр. 15 назви

УДК 629.3

ББК 30

ISBN 978-617-8238-75-9

© Є.Є. Александров, В.О. Богомолов,

В.І. Клименко, Д.М. Леонтєв, 2025

© ХНАДУ, 2025

# ЗМІСТ

Передмова .....	5
<b>Розділ 1. Коливання лінійних динамічних систем з одним ступенем свободи .....</b>	<b>8</b>
1.1 Вільні коливання лінійних систем з одним ступенем свободи .....	8
1.2 Вимушені коливання лінійних систем з одним ступенем свободи .....	17
1.3 Випадкові коливання лінійних систем з одним ступенем свободи .....	20
1.4 Програмний пакет MATLAB для дослідження випадкових коливань динамічних систем .....	33
Контрольні запитання до розділу 1 .....	43
<b>Розділ 2. Коливання лінійних динамічних систем з двома ступенями свободи .....</b>	<b>44</b>
2.1 Вільні коливання лінійних систем з двома ступенями свободи .....	44
2.2 Вимушені коливання лінійних систем з двома ступенями свободи .....	48
2.3 Випадкові коливання лінійних систем з двома ступенями свободи .....	52
Контрольні запитання до розділу 2 .....	59
<b>Розділ 3. Коливання нелінійних і нестационарних динамічних систем .....</b>	<b>60</b>
3.1 Основні нелінійності динамічних систем .....	60
3.2 Метод гармонічної лінеаризації нелінійностей .....	66
3.3 Коливання корпусу автомобіля з фрикційними амортизаторами .....	72
3.4 Коливання температури охолоджуючої рідини автомобільного двигуна .....	78
3.5 Коливання нестационарних динамічних систем .....	86
Контрольні запитання до розділу 3 .....	89
<b>Розділ 4. Крутильні коливання валів автомобільного двигуна і трансмісії .....</b>	<b>90</b>
4.1 Рівняння вільних крутильних коливань валів .....	90
4.2 Частотне рівняння вільних крутильних коливань валів .....	92

4.3	Нормальні форми крутильних коливань валів .....	94
4.4	Вимушені крутильні коливання валів .....	96
	Контрольні запитання до розділу 4.....	100
<b>Розділ 5. Коливання дискретно-континуальних динамічних систем .....</b>		<b>101</b>
5.1	Вільні коливання пружної гармати на шасі армійського автомобіля .....	101
5.2	Вимушені коливання пружної гармати на шасі армійського автомобіля .....	112
5.3	Автомобіль-паливозаправник як дискретно-континуальна система. Вимушені коливання вільної поверхні транспортуємої рідини та їх вплив на курсову стійкість автомобіля .....	114
	Контрольні запитання до розділу 5.....	122
<b>Розділ 6. Стійкість лінійних динамічних систем .....</b>		<b>123</b>
6.1	Визначення стійкості динамічної системи за Ляпуновим .....	123
6.2	Стійкість лінійних динамічних систем .....	126
6.3	Алгебраїчні критерії стійкості.....	130
6.4	Частотні критерії стійкості .....	134
6.5	Побудова областей стійкості лінійних динамічних систем в просторі варійованих параметрів .....	136
	Контрольні запитання до розділу 6.....	138
<b>Розділ 7. Стійкість нелінійних динамічних систем .....</b>		<b>139</b>
7.1	Теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням .....	139
7.2	Теореми другого, або прямого методу Ляпунова ....	142
7.3	Теорема Ляпунова про нестійкість руху динамічних систем .....	146
	Контрольні запитання до розділу 7.....	147
<b>Додаток 1. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи №1.....</b>		<b>149</b>
<b>Додаток 2. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи №2.....</b>		<b>155</b>
<b>Додаток 3. Моделювання коливальної системи «автомобіль» при його переїзді через штучну нерівність (Відеозапис на DVD-R прикріплений на обкладинці)</b>		
<b>Список літературних джерел .....</b>		<b>161</b>

## Передмова

*«Мабуть не буде перебільшенням сказати, що серед процесів, які використовуються в техніці, коливання займають у багатьох відношеннях видатне, часто головне, місце.»*

*Академік М.Д. Папалексі*

Можна привести багато прикладів, які ілюструють важливість коливальних процесів в механічних системах. В одних випадках коливання шкідливі, в інших вони являються корисними і цілеспрямовано використовуються в сучасній техніці.

Колівання часто здатні порушити умови експлуатації машин. Так, вібрації верстатів заважають досягненню потрібної чистоти обробки деталей, або коливання приладів, що встановлені на рухомому об'єкті (автомобілі, літаку, ракеті, судні), приводять до порушення необхідної точності вимірювання поточних параметрів руху. Іноді коливання здійснюють шкідливий фізіологічний вплив на осіб, організм яких знаходиться під дією інтенсивних високочастотних вібрацій, або приводять до «морської хвороби» членів екіпажів у умовах низькочастотних коливань рухомих об'єктів.

З іншого боку, все ширше запроваджуються різні технологічні процеси, в основі яких знаходяться штучно створені коливання, або автоколивання. За допомогою теорії коливань вдається не тільки пояснити складну природу відповідних технічних явищ, але й встановити оптимальні значення параметрів коливань, при яких досягається найбільша ефективність технологічного процесу.

Більшість динамічних процесів, що відбуваються в різних агрегатах автомобілів, носять коливальний характер. Дійсно, будь яка поверхня руху автомобіля містить нерівності, які викликають вимушені коливання підресорної частини корпусу автомобіля. В процесі цих коливань динамічна вага автомобіля безперервно змінюється у відповідності із законом

$$G_d(t) = G + M_{\text{п}}\ddot{z}(t),$$

де  $G$  – повна вага автомобіля;  $G_d(t)$  – динамічна вага;  $M_{\text{п}}$  – маса підресорної частини корпусу;  $\ddot{z}(t)$  – вертикальне прискорення підресорної частини корпусу.

Безперервна зміна динамічної ваги автомобіля приводить до безперервної зміни моменту навантаження двигуна і викликає його вимушені пружні коливання, які, в свою чергу, передаються до валів трансмісії, а також до вимірювача кутової швидкості колінчастого вала, що являється чутливим елементом всережимного регулятора паливоподавання автомобільного двигуна. Вимушені коливання муфти відцентрового чутливого елемента всережимного регулятора паливоподавання приводять до високочастотних коливань рейки паливного насоса автомобільного дизеля, і до нерівномірної подачі палива в циліндри дизеля, що проводить до його підвищених вібрацій, підвищених витрат палива і підвищеної димності відпрацьованих газів.

Коливання динамічної системи та її окремих агрегатів можуть здійснюватись навколо стану динамічної рівноваги. Стан динамічної рівноваги автомобіля може мати місце при русі по ідеально горизонтальній поверхні без будь яких нерівностей при постійній швидкості руху, постійному паливоподаванні, постійній кутовій швидкості обертання колінчастого валу двигуна. В стані динамічної рівноваги динамічна вага автомобіля дорівнює його статичній вазі, а момент навантаження, що передається до колінчастого валу від ведучих коліс автомобіля дорівнює активному моменту, що розвивається автомобільним двигуном.

Коливання агрегатів динамічної системи в районі стану динамічної рівноваги можливі лише у випадку стійкої рівноваги. Тому обов'язковою складовою курсу «Прикладна теорія коливань» являються елементи теорії стійкості руху динамічних систем.

Україна, з її потужною промисловістю, являється країною, де виникли і успішно розвиваються дві наукові школи в галузі прикладної теорії коливань, а саме, наукова школа Київського політехнічного інституту під керівництвом професора С.П. Тимошенко (1878 – 1972) і наукова школа Харківського політехнічного інституту під керівництвом професора І.М. Бабакова (1890 – 1974), знаменитих вчених-механіків. До цих наукових шкіл належали і належать багато відомих і видатних українських вчених, але їх основоположники і фундатори були не тільки великими українськими вченими, але й професійними викладачами, які створили найкращі підручники з теорії коливань для студентів та інженерів. Так, підручник Степана Прокоповича Тимошенко, який

разом із В.І. Вернадським у 1918 році створив Українську Академію Наук і став одним із її перших академіків, а у 1928 році був обраний іноземним членом Академії Наук СРСР, був створений на основі лекцій для інженерів-механіків компанії Westinghouse Electric and Manufacturing Company. Підручник був виданий у США в 1928 році під назвою «Vibration Problems in Engineering» і витримав чотири видання, причому три з них були перекладені і видані видавництвом «Наука» в 1931, 1959 і в 1985 роках під назвою «Колебания в инженерном деле» і використовувались українськими студентами в якості підручника з прикладної теорії коливань. Але значно більшої популярності серед студентів та інженерів-механіків набув підручник Івана Михайловича Бабакова «Теория колебаний», створений на основі лекцій, які автор читав на протязі багатьох років студентам спеціальності «динаміка та міцність машин» Харківського політехнічного інституту. Підручник витримав чотири видання у видавництві «Наука» (1958, 1964, 1968, 2004), а також був виданий в Японії і Китаї.

Перелічені підручники, а також підручники латиського академіка Я.Г. Пановко, автори навчального посібника широко застосовували при підготовці рукопису. Навчальний посібник призначений для студентів автомобільних спеціальностей вишів III і IV рівнів акредитації, а також для інженерів в галузі «механічна інженерія» та «транспорт».

# Розділ 1

## КОЛИВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ СВОБОДИ.

### 1.1. Вільні коливання лінійних систем з одним ступенем свободи.

Розглянемо принципову схему підвіски автомобіля, яка приведена на рисунку 1.1.

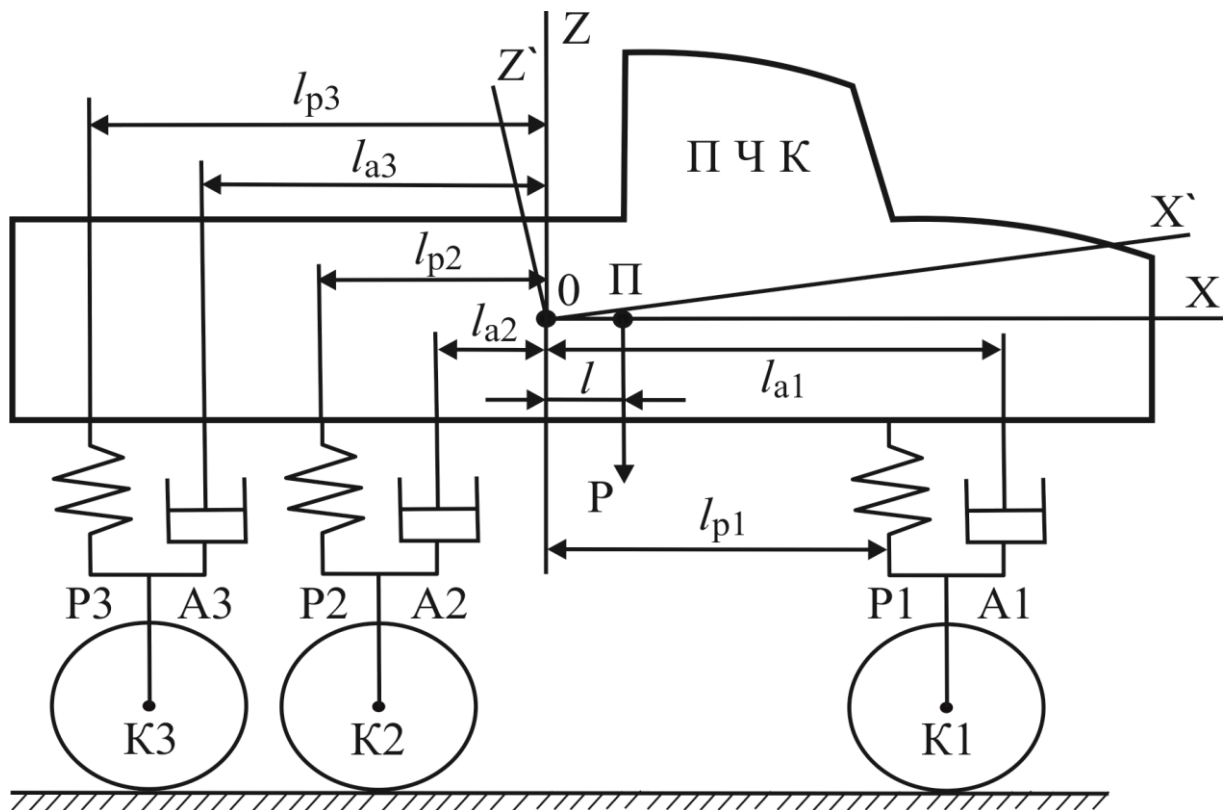


Рис. 1.1 Принципова схема підвіски трьохвісного автомобіля

Передню вісь автомобіля будемо вважати першою віссю, а дві задні вісі – відповідно другою і третьою вісями. На рисунку 1.1 прийняті наступні позначення: ПЧК – підресорена частина корпусу автомобіля; К1, К2, К3 – колеса відповідно першої, другої і третьої вісей; А1, А2, А3 – амортизатори першої, другої і третьої вісей; Р1, Р2, Р3 – ресори відповідних вісей автомобіля; П – центр пружності корпусу; ОХ – подовжня власна вісь інерції підресорної частини корпусу; ОZ – вертикальна власна вісь інерції підресорної частини корпусу;  $l_{p1}$ ,  $l_{p2}$ ,  $l_{p3}$  – відстань по горизонталі від центру тяжіння підресореної частини корпусу до точок кріплення ресор;

$l_{a1}, l_{a2}, l_{a3}$  – відстань по горизонталі від центру тяжіння підресореної частини корпусу до точок кріплення амортизаторів;  $l$  – відстань центру пружності П від центру тяжіння 0.

Під центром пружності підвіски автомобіля П будемо розуміти точку, таку, що при прикладанні до неї вертикальної зовнішньої сили  $P$  підресорена частина корпусу переміщується у вертикальному напрямку паралельно самій собі.

При прикладанні до центру пружності сили  $P$  підресорена частина корпусу переміщується вниз на величину  $z$ . При цьому додаткові сили пружності усіх ресор, що врівноважують силу  $P$ , дорівнюватимуть

$$z \sum_{i=1}^n 2c_i = P \quad (1.1)$$

де  $n$  – число вісей автомобіля;  $c_i$  – жорсткість ресори.

З іншого боку, моменти додаткових сил ресор відносно власної поперечної вісі ОУ підресореної частини корпусу, дорівнюють моменту сили  $P$

$$\sum_{i=1}^{n_1} 2c_i z l_{pi} - \sum_{j=1}^{n_2} 2c_j z l_{pj} = Pl, \quad (1.2)$$

де  $n_1$  – число носових ресор (у нашому випадку  $n_1 = 1$ );  $n_2$  – число кормових ресор (у нашому випадку  $n_2 = 2$ ).

Будемо вважати, що усі ресори автомобіля однакові  $c_i = c_j$ . Тоді формула (1.2) набуває вигляду

$$2c_i z (l_{p1} - l_{p2} - l_{p3}) = Pl. \quad (1.3)$$

Зміщення центру пружності відносно центру тяжіння дорівнює

$$l = \frac{2c_i z (l_{p1} - l_{p2} - l_{p3})}{P}. \quad (1.4)$$

З урахуванням формули (1.1) співвідношення (1.4) записується

$$l = \frac{l_{p1} - l_{p2} - l_{p3}}{3}. \quad (1.5)$$

Якщо  $l_{p1} = l_{p2} + l_{p3}$ , то  $l = 0$  і центр пружності співпадає з центром тяжіння. У цьому випадку автомобільна підвіска називається симетричною.

Коливання підресореної маси корпусу автомобіля характеризуються періодами вертикальних і кутових коливань, амплітудами, швидкостями і прискореннями коливального руху. Ці величини

називаються параметрами плавності ходу автомобіля.

Періоди коливань корпусу автомобіля, а, точніше, періоди коливань його підресореної частини, впливають головним чином на працездатність екіпажу. Практикою встановлено, що найбільш сприятливими для екіпажу періодами коливань підресореної частини корпусу являються значення періодів в інтервалі  $(0,5 \div 1,8)$  с. При періоді коливань  $T < 0,5$ с спостерігається швидка втомлюваність екіпажу, спричинена тряскою. Втомлюють екіпаж і довготривалі коливання підресореної частини корпусу з періодом  $T > 1,8$ с, так як у цьому випадку у членів екіпажу з'являються випадки «морської хвороби».

Амплітуди, швидкості і прискорення повинні бути якомога менше. Чим менше амплітуда коливань, тим менше швидкість і прискорення коливального руху, тому автомобільна підвіска повинна по можливості виключати інтенсивне розкачування підресореної частини автомобіля, що досягається шляхом цілеспрямованого вибору характеристик ресор і амортизаторів.

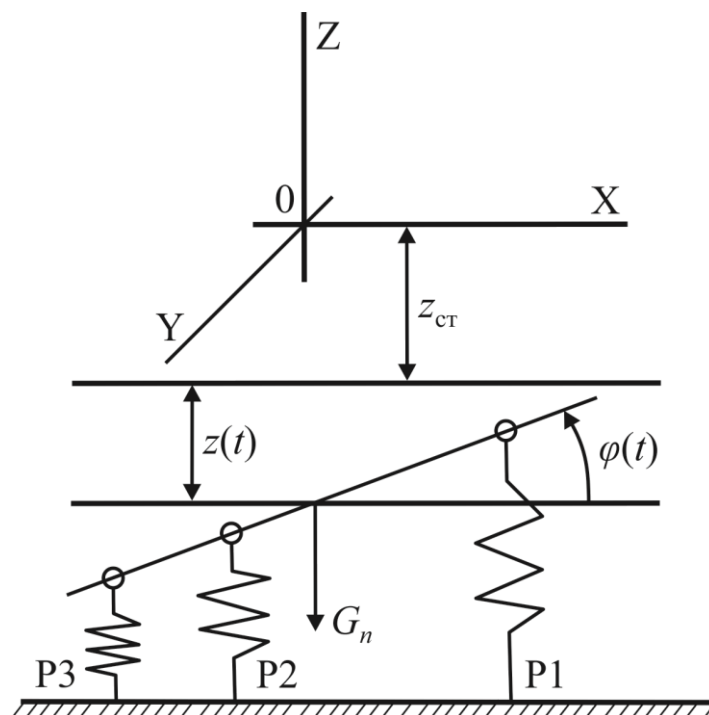


Рис. 1.2 Розрахункова схема автомобільної підвіски

Розглянемо на рисунку 1.2 розрахункову схему автомобільної підвіски, принципова схема якої приведена на рисунку 1.1. Спочатку припустимо, що амортизатори А1, А2 і А3 в схемі відсутні. Зусилля, що діють на корпус автомобіля з боку ресор, визначаються формулою

$$P_i(t) = c\delta_i(t) = c[z_{\text{н0}} - z(t) - l_{pi}\varphi(t)], \quad (1.6)$$

де прийняті наступні позначення:  $\delta_i(t)$  – вертикальне переміщення точки кріплення  $i$ -тої ресори;  $c$  – приведена жорсткість ресори;  $z_{\text{ст}}$  – прогіб ресори під дією статичного навантаження;  $z(t)$  – узагальнена координата вертикальних коливань корпусу автомобіля;  $\varphi(t)$  – узагальнена координата подовжньо-кутових коливань корпусу;  $l_{pi}$  – відстань по горизонталі від центру тяжіння підресореної частини корпусу автомобіля до точки закріплення  $i$ -тої ресори.

Використовуючи принцип Д'Аламбера, запишемо диференціальні рівняння вертикальних і подовжньо-кутових коливань корпусу автомобіля

$$-G_n + \sum_{i=1}^6 P_i(t) = M_n \ddot{z}(t); \quad (1.7)$$

$$\sum_{i=1}^6 P_i(t) l_{pi} = I_y \ddot{\varphi}(t), \quad (1.8)$$

де  $M_n = G_n/g$  – підресорена маса автомобіля,  $I_y$  – момент інерції підресореної маси  $M_n$  відносно власної центральної поперечної вісі.

У диференціальні рівняння (1.7) і (1.8) підставимо співвідношення (1.6)

$$-G_n + 6cz_{\text{н0}} - 6cz(t) - 2c\varphi(t) \sum_{i=1}^3 l_{pi} = M_n \ddot{z}(t); \quad (1.9)$$

$$2cz_{\text{н0}} \sum_{i=1}^3 l_{pi} - 2cz(t) \sum_{i=1}^3 l_{pi} - 2c\varphi(t) \sum_{i=1}^3 l_{pi}^2 = I_y \ddot{\varphi}(t). \quad (1.10)$$

У зв'язку з тим, що статична вага  $G_n$  рівноважується статичною деформацією ресор, то

$$G_n = 6cz_{\text{ст}},$$

а рівняння (1.9) записується у вигляді

$$\ddot{z}(t) + \frac{6c}{M_n} z(t) + \frac{2c \sum_{i=1}^3 l_{pi}}{M_n} \varphi(t) = 0. \quad (1.11)$$

В положенні статичної рівноваги моменти від носової і кормових ресор врівноважуються, тобто

$$2cz_{\text{ст}} \sum_{i=1}^3 l_{pi} = 0,$$

а рівняння (1.10) записується

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{2c \sum_{i=1}^3 l_{pi}^2}{I_y} \varphi(t) + \frac{2c \sum_{i=1}^3 l_{pi}}{I_y} z(t) = 0. \quad (1.12)$$

Введемо позначення

$$a = \frac{6c}{M_n}; \quad b = \frac{2c \sum_{i=1}^3 l_{pi}}{M_n}; \quad d = \frac{2c \sum_{i=1}^3 l_{pi}^2}{I_y}; \quad f = \frac{2c \sum_{i=1}^3 l_{pi}}{I_y}. \quad (1.13)$$

Тоді диференціальні рівняння коливань підресореної маси автомобіля  $M_n$  з власним центральним моментом інерції відносно поперечної вісі автомобіля  $I_y$ , записуються у вигляді

$$\ddot{z}(t) + az(t) + b\varphi(t) = 0; \quad (1.14)$$

$$\ddot{\varphi}(t) + d\varphi(t) + fz(t) = 0. \quad (1.15)$$

Обидва рівняння (1.14) і (1.15) пов'язані одне з одним, тому можливе лише сумісне рішення цих пов'язаних рівнянь. Фізично взаємний зв'язок рівнянь (1.14) і (1.15) свідчить про те, що вертикальні і кутові коливання підресореної маси здійснюються одночасно: вертикальне збурення викликає і кутове переміщення, а

кутове збурення обов'язково приводить не тільки до кутових, але й вертикальних коливань.

При розгляді розрахункової схеми автомобільної підвіски (рис. 2) було зроблено припущення про відсутність амортизаторів, тобто пристроїв, призначених для гасіння коливань за рахунок введення додаткового спротиву в конструкцію підвіски. Частіше всього в автомобілебудуванні використовуються амортизатори із спротивом, який є пропорційним швидкості переміщення точки кріплення амортизатора до корпусу автомобіля. Це переміщення, використовуючи формулу (1.6) можна записати у вигляді

$$\delta_i(t) = z_{\text{н0}} - z(t) - l_{ai}\varphi(t). \quad (1.16)$$

Швидкість переміщення точки кріплення  $i$ -того амортизатора може бути отримана диференціюванням за часом співвідношення (1.16), де через  $l_{ai}$  позначена відстань від центру тяжіння підресореної частини корпусу до точки кріплення  $i$ -того амортизатора

$$\frac{d\delta_i(t)}{dt} = -\dot{z}(t) - l_{ai}\dot{\varphi}(t). \quad (1.17)$$

В результаті зусилля спротиву і момент спротиву  $i$ -того амортизатора записується у вигляді співвідношень:

$$P_{ai}(t) = -\mu[\dot{z}(t) + l_{ai}\dot{\varphi}(t)]; \quad (1.18)$$

$$M_{ai}(t) = -\mu l_{ai}[\dot{z}(t) + l_{ai}\dot{\varphi}(t)], \quad (1.19)$$

де  $\mu$  – середнє значення коефіцієнту демпфірування амортизатора.

Введемо позначення

$$m = \frac{6\mu}{M_n}; \quad q = \frac{2\sum_{i=1}^3 \mu l_{ai}}{M_n}; \quad r = \frac{2\mu \sum_{i=1}^3 l_{ai}}{I_y}; \quad s = \frac{2\mu \sum_{i=1}^3 l_{ai}^2}{I_y}. \quad (1.20)$$

В результаті диференціальні рівняння вільних коливань автомобільної підвіски набувають вигляд

$$\ddot{z}(t) + m\dot{z}(t) + az(t) + q\dot{\varphi}(t) + b\varphi(t) = 0; \quad (1.21)$$

$$\ddot{\varphi}(t) + s\dot{\varphi}(t) + d\varphi(t) + r\dot{z}(t) + fz(t) = 0. \quad (1.22)$$

Якщо точки кріплення ресор і амортизаторів співпадають, а підвіска автомобіля являється симетричною, то  $q = b = r = f = 0$ , а система диференціальних рівнянь (1.21), (1.22) розпадається на два незалежних диференціальних рівняння:

$$\ddot{z}(t) + m\dot{z}(t) + az(t) = 0; \quad (1.23)$$

$$\ddot{\varphi}(t) + s\dot{\varphi}(t) + d\varphi(t) = 0. \quad (1.24)$$

Розглянемо спільну для рівнянь (1.23) і (1.24) форму запису

$$\ddot{q}(t) + 2n\dot{q}(t) + k^2q(t) = 0. \quad (1.25)$$

Характеристичне рівняння, що відповідає диференціальному рівнянню (1.25) записується у вигляді

$$p^2 + 2np + k^2 = 0. \quad (1.26)$$

Корені характеристичного рівняння (1.26) дорівнюють:

$$p_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (1.27)$$

При  $n < k$  під знаком квадратного кореня знаходиться від'ємна величина, тому співвідношення (1.27) подамо у вигляді

$$p_{1,2} = -n \pm j\sqrt{k^2 - n^2}.$$

Загальне рішення диференціального рівняння (1.25) записується :

$$q(t) = e^{-nt} \left[ C_1 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t \right], \quad (1.28)$$

де постійні величини  $C_1$  і  $C_2$  визначаються з початкових умов  $q_0$  і  $\dot{q}(t)$ .

Продиференціюємо за часом рішення (1.28)

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) = & -ne^{-nt} \left[ C_1 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + \right. \\ & \left. + C_2 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t \right] + \\ & + e^{-nt} \left[ C_1 \sqrt{k^2 - n^2} \cos \sqrt{k^2 - n^2} t - \right. \\ & \left. - C_2 \sqrt{k^2 - n^2} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

У співвідношеннях (1.28) і (1.29) покладемо  $t = 0$ . В результаті маємо

$$q_0 = C_2; \quad \dot{q}_0 = -nC_2 + C_1 \sqrt{k^2 - n^2},$$

звідки

$$C_1 = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}; \quad C_2 = q_0.$$

В результаті загальне рішення диференціального рівняння (1.25) записується у вигляді

$$q(t) = e^{-nt} \left[ \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + q_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t \right]. \quad (1.30)$$

Співвідношення (1.30) можна подати у вигляді

$$q(t) = Ae^{-nt} \sin \left( \sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha \right), \quad (1.31)$$

де

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{\frac{(\dot{q}_0 + nq_0)^2}{k^2 - n^2} + q_0^2};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{C_2}{C_1} = \operatorname{arctg} \frac{q_0 \sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{q}_0 + nq_0}.$$

Із розгляду співвідношень (1.30) і (1.31) можна зробити висновок, що вільні коливання підресореної частини корпусу автомобіля мають вигляд, що приведений на рис. 1.3, і доволі швидко затухають. Ці коливання здійснюються з постійною частотою  $\sqrt{k^2 - n^2}$  і постійно зменшуючою амплітудою  $A$ .

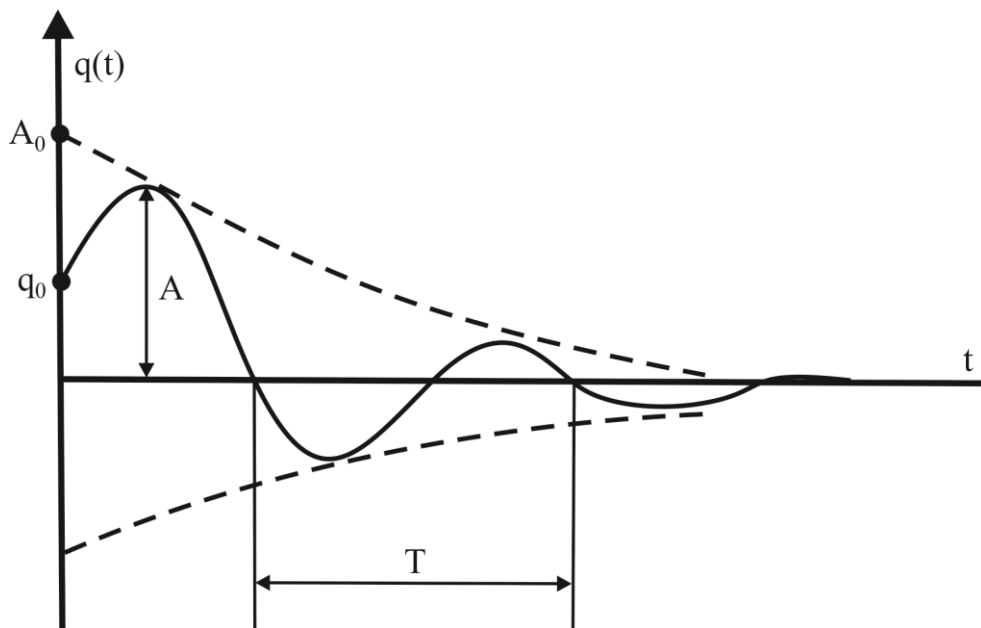


Рис. 1.3. Вільні коливання підресореної частини корпусу автомобіля

Огибаюча крива на рис. 3 визначається формулою  $A = A_0 e^{-nt}$ , де  $A_0$  – початкова ордината огибаючої кривої. Період вільних коливань корпусу дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (1.32)$$

## 1.2. Вимушені коливання лінійних систем з одним ступенем свободи.

В процесі руху автомобіля нерівності поверхні руху безперервно впливають на підресорену частину корпусу через ресори і амортизатори. Якщо нерівності поверхні руху будуть періодично повторюватись, то коливання корпусу будуть підлягати визначеним закономірностям. З визначеним припущенням характер цих нерівностей можна прийняти синусоїдальним і тоді сили і моменти, що діють на підресорену частину корпусу автомобіля через ресори і амортизатори будуть періодичними. В результаті рівняння, що описують вимушені коливання підресореної частини корпусу автомобіля набуває вигляд

$$\ddot{q}(t) + 2n\dot{q}(t) + k^2q(t) = H \sin \omega t, \quad (1.33)$$

де  $H$  – приведена амплітуда зовнішніх збурень від нерівностей дороги;  $\omega$  – частота зовнішніх збурень, яка визначається формулою  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot v \cdot a^{-1}$ ;  $v$  – швидкість руху автомобіля;  $a$  – довжина синусоїдальної нерівності (рис. 1.4).

Період вимушених коливань, що дорівнює часу проходження автомобілем повної довжини нерівності, становить

$$T = \frac{a}{v}.$$

Загальне рішення диференціального рівняння (1.33) представляє собою суму загального рішення відповідного однорідного рівняння (1.25) і частинного розв'язку рівняння (1.33)

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t). \quad (1.34)$$

Частинне рішення  $q_2(t)$  подамо у вигляді

$$q_2(t) = M \sin \omega t + N \cos \omega t, \quad (1.35)$$

де  $M$  і  $N$  – постійні величини, які задовольняють лінійним алгебраїчним рівнянням, що отримані при підставі (1.35) в рівняння (1.33)

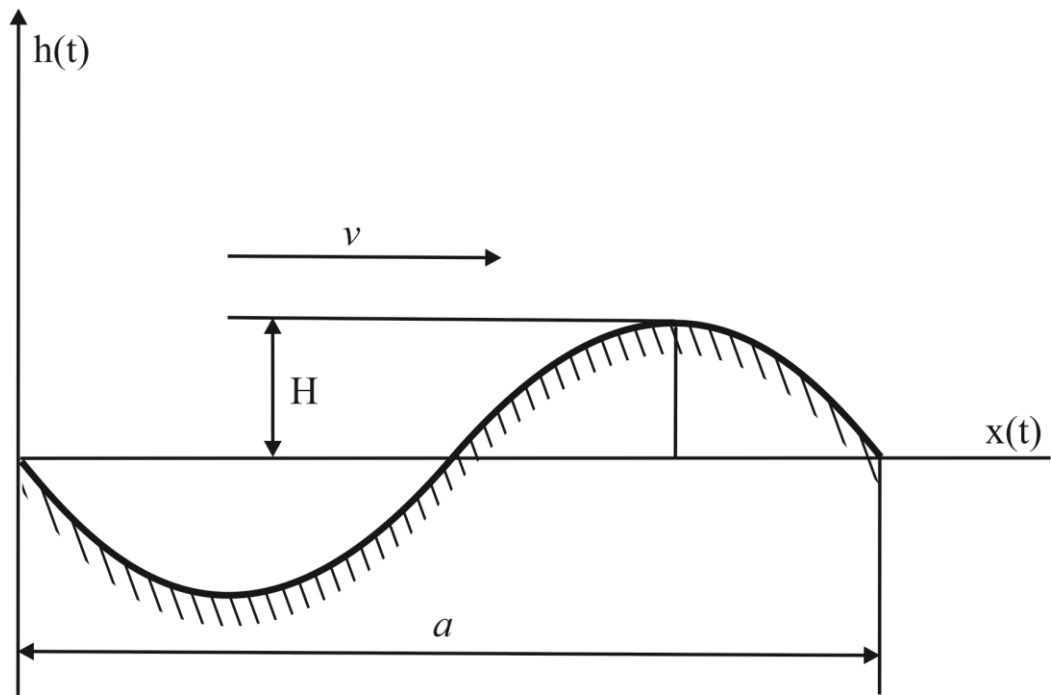


Рис. 1.4. Синусоїдальна нерівність поверхні руху автомобіля

$$\begin{aligned} -N\omega^2 + 2M\omega n + Nk^2 &= 0; \\ -M\omega^2 - 2N\omega n + Mk^2 &= H. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Із системи (1.36) знаходимо

$$\begin{aligned} M &= H \frac{k^2 - \omega^2}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}; \\ N &= -H \frac{2n\omega}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

В результаті загальне рішення диференціального рівняння (1.33) записується у вигляді

$$\begin{aligned} q(t) &= e^{-nt} \left[ \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + q_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t \right] + \\ &+ \frac{H}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \left[ (k^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2n\omega \cos \omega t \right]. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Перший член правої частини рішення (1.38), що містить множник  $e^{-nt}$  представляє собою вільні коливання, розглянуті у попередньому підрозділі. Другий член, що містить частоту збурюючого впливу  $\omega$ , представляє собою вимушені коливання підресореної частини корпусу автомобіля.

Розглянемо залежність амплітуди вимушених коливань підресореної частини корпусу автомобіля від частоти зовнішнього збурення  $\omega$

$$A_{\zeta}(\omega) = \frac{H}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}. \quad (1.39)$$

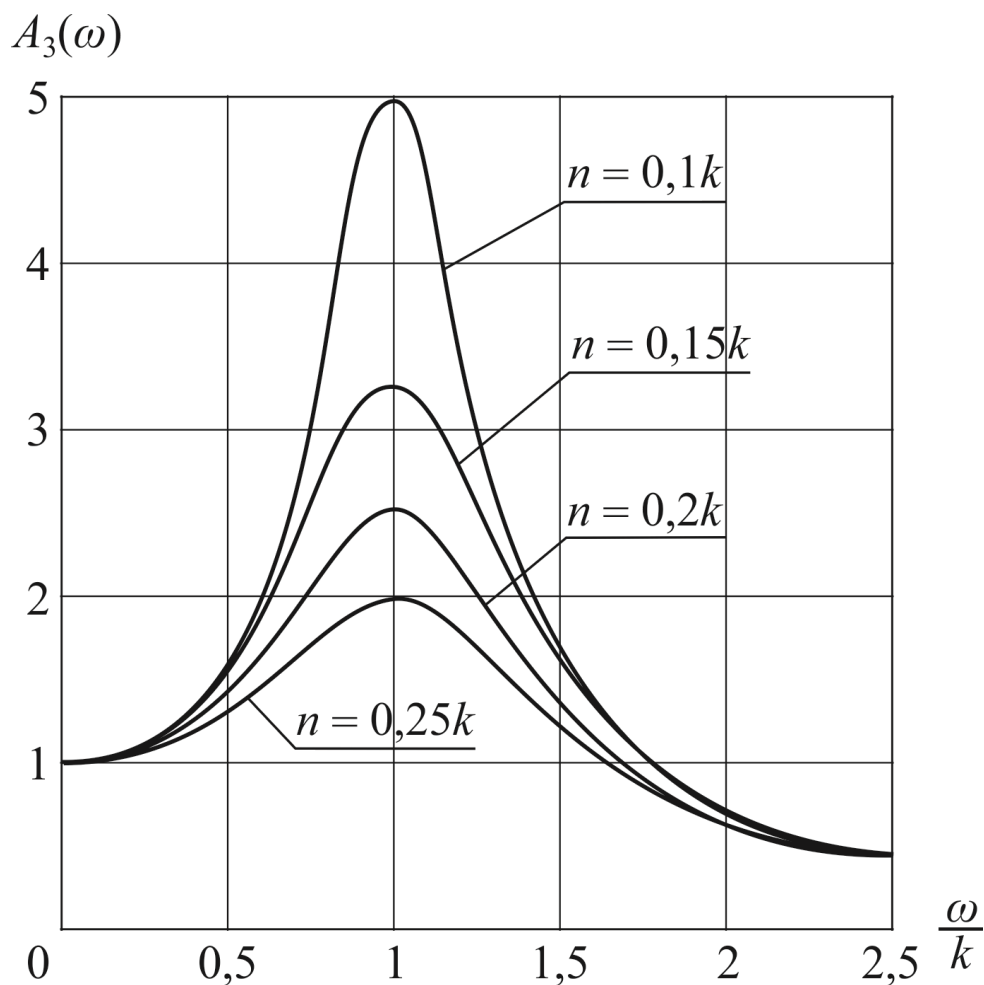


Рис. 1.5. Залежність амплітуди вимушених коливань від їх відносної частоти

На рис. 1.5 приведені залежності величини (1.39) від відносної частоти зовнішніх збурень

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{k},$$

при різних значеннях величини  $n$ .

Аналіз рис. 5 дозволяє зробити висновок, що коли частота зовнішнього збурення  $\omega$  наближається до частоти вільних коливань системи  $k$ , амплітуда вимушених коливань  $A_3(\omega)$  швидко збільшується, а її величина становиться вельми чутливою до зміни величини демпфірування  $n$ , особливо якщо воно мало. Якщо

$$\bar{\omega} \rightarrow 1,$$

то в системі має місце резонанс.

### 1.3. Випадкові коливання лінійних систем з одним ступенем свободи.

В реальних дорожніх умовах розташування нерівностей поверхні руху носить випадковий характер. Автомобіль, що рухається з визначеною швидкістю  $v$ , можна розглядати як механічну динамічну систему, на яку діють випадкові зовнішні збурення з боку поверхні руху. При цьому випадкові коливальні процеси підресореної частини корпусу автомобіля можна розглядати як стаціонарні, що протікають у часі відносно однорідно і мають вигляд випадкових коливань відносно певного середнього значення.

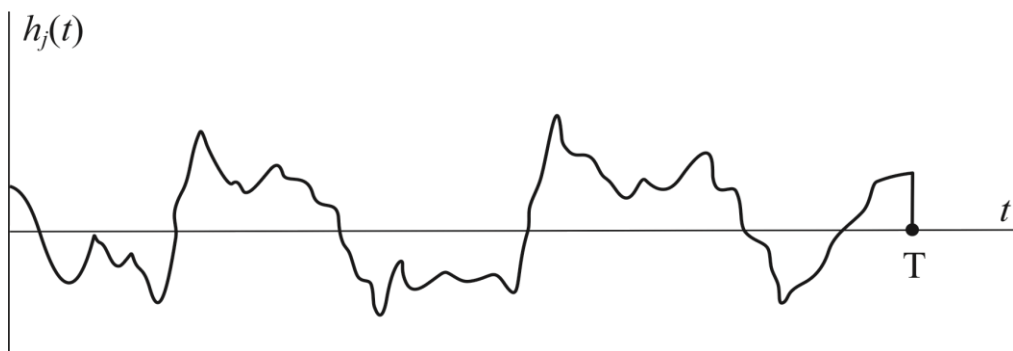


Рис. 1.6. Стаціонарний випадковий процес мікропрофіля дороги

Відомо, що кореляційна функція нерівностей дорожнього покриття описується апроксимуючою залежністю

$$R(\tau) = De^{-\alpha v \tau} \cos \beta \tau, \quad (1.40)$$

де  $D$  – дисперсія висот нерівностей;  $\alpha$ ,  $\beta$  – коефіцієнти кореляції, числові значення яких для різних дорожніх покриттів приведені в таблиці 1.

Таблиця 1.1 – Значення коефіцієнтів кореляції і дисперсії нерівностей для різних типів дорожніх покриттів

Тип дорожнього покриття	$\alpha$ , м <sup>-1</sup>	$\beta$ , м <sup>-1</sup>	$D$ , м <sup>2</sup>
Асфальтобетон	0,22	0,44	$5,5 \cdot 10^{-3}$
Мостова	0,32	0,64	$8,0 \cdot 10^{-3}$
Грунтова дорога	0,47	0,94	$11,6 \cdot 10^{-3}$
Пересічена місцевість	0,72	1,44	$20 \cdot 10^{-3}$

Зв'язок між спектральною щільністю випадкового процесу і його кореляційною функцією визначається перетворенням Фур'є

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{j\omega \tau} d\tau. \quad (1.41)$$

Підставимо (1.40) в (1.41). В результаті маємо

$$S(\omega) = D \left\{ \frac{2\alpha v \left[ v^2 (\alpha^2 + \beta^2) + \omega^2 \right]}{\omega^4 + 2\omega^2 v^2 (\alpha^2 - \beta^2) + v^4 (\alpha^2 + \beta^2)^2} \right\}. \quad (1.42)$$

На рисунку 1.7 представлені криві спектральної щільності (1.42), які побудовані для різних швидкостей руху автомобіля, що рухається по різних поверхнях. Аналіз кривих спектральних щільностей дозволяє зробити висновок, що усі вони мають явно виявлений максимум, причому значення резонансної частоти тим вище, чим вище швидкість руху автомобіля.

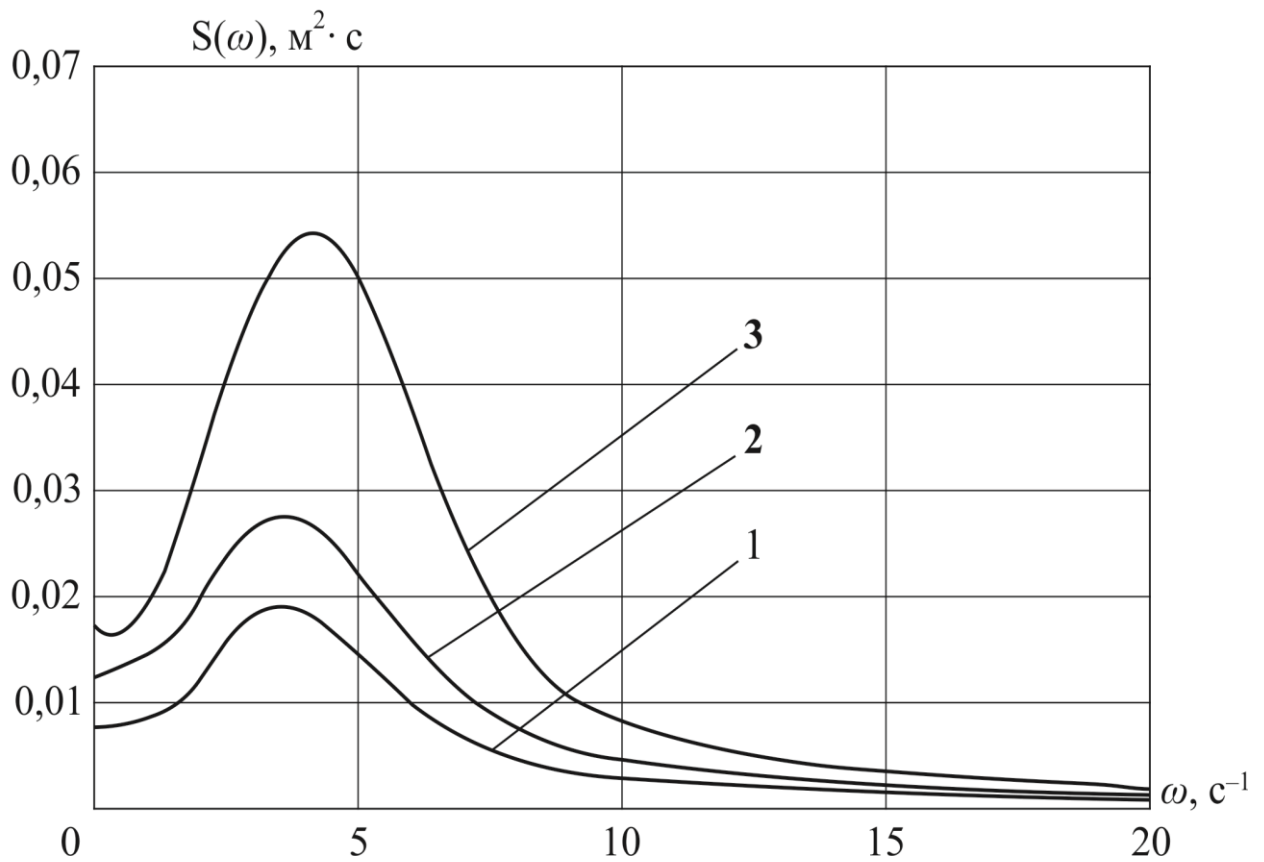
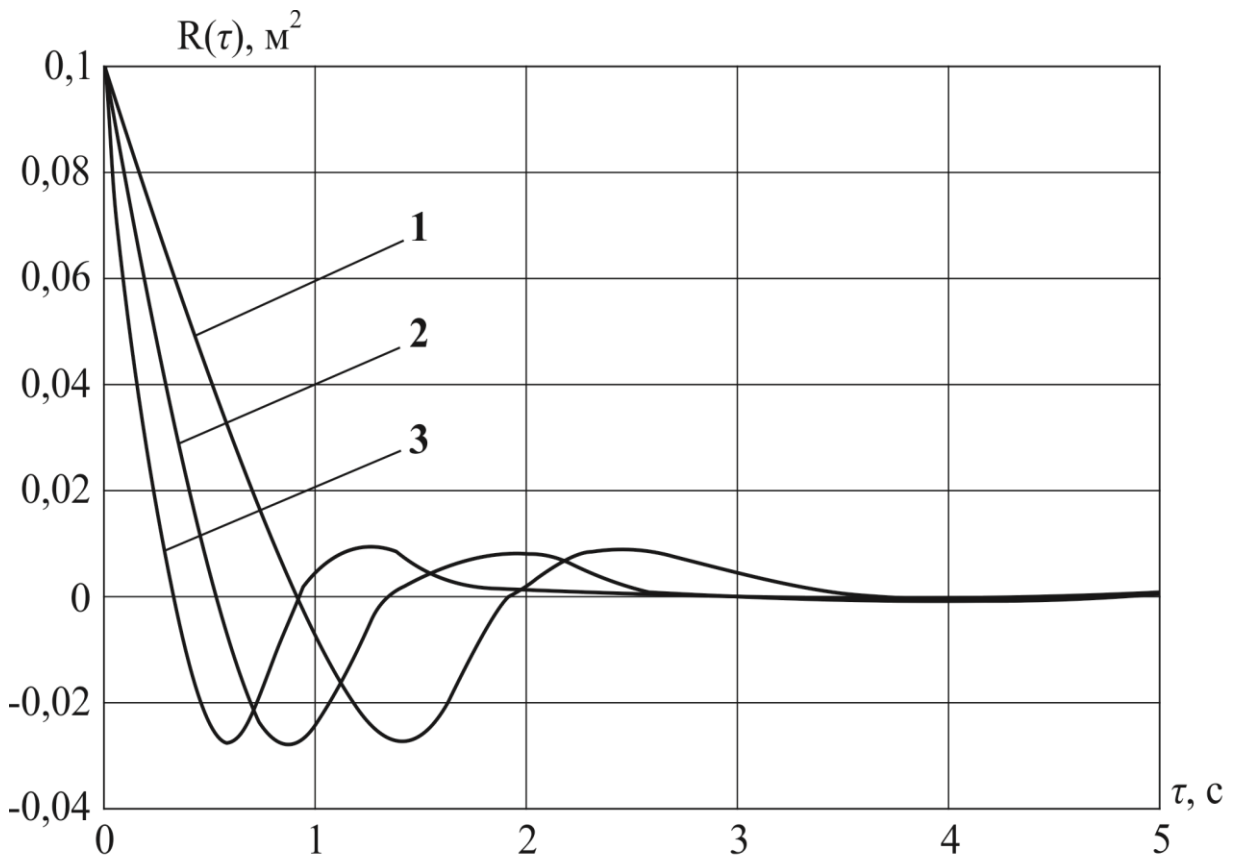


Рис. 1.7.а. Кореляційні функції та спектральні щільності поверхні руху автомобіля при  $v = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ :  
 1 – асфальтобетон; 2 – мостова; 3 – ґрунтова

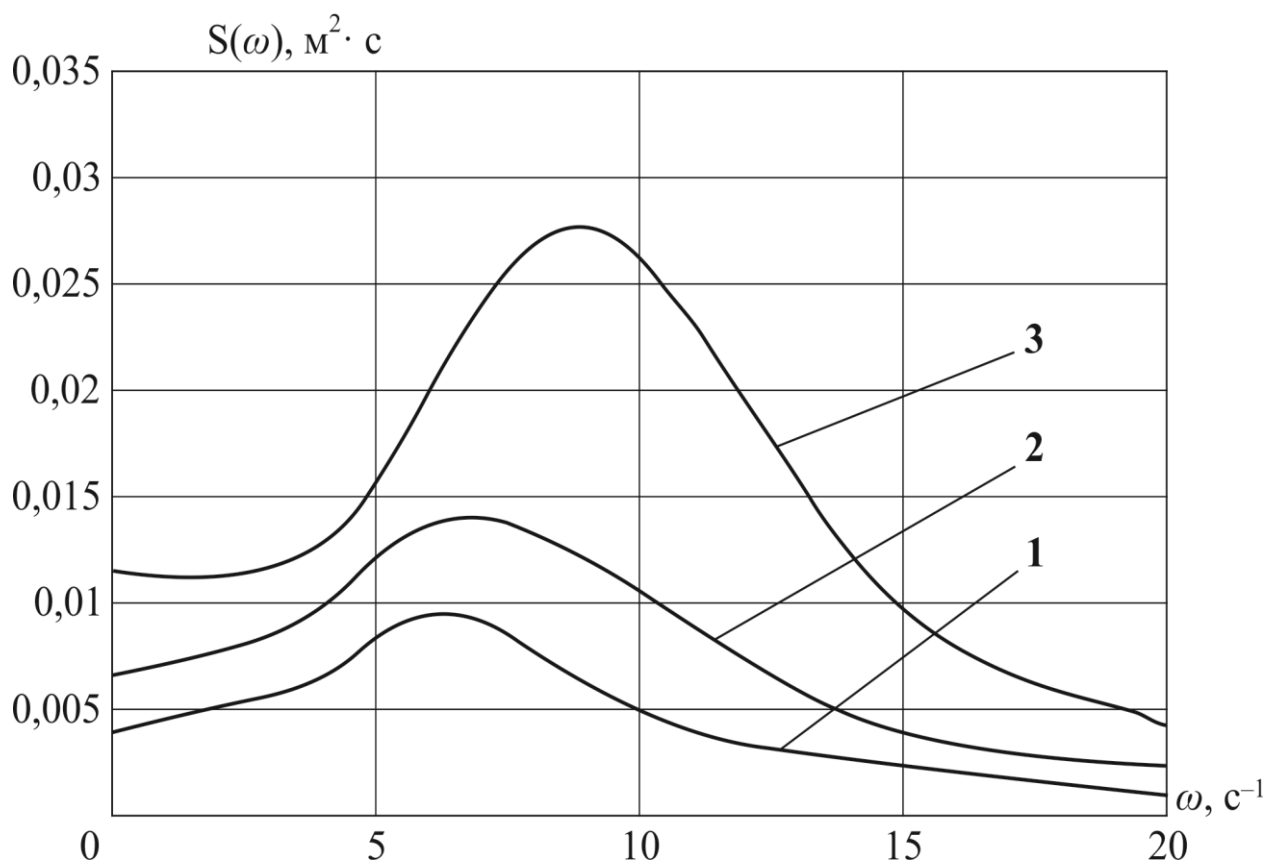
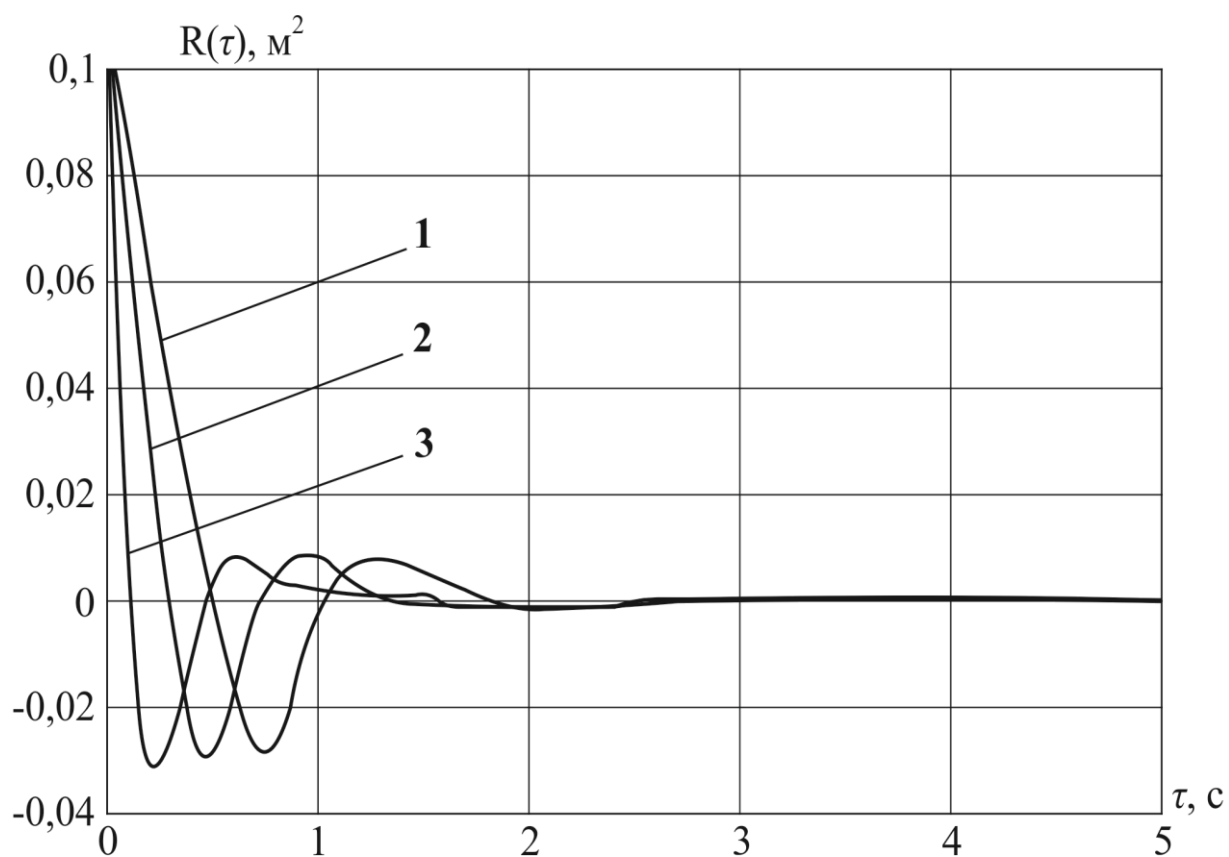


Рис. 1.7.б. Кореляційні функції та спектральні щільності поверхні руху автомобіля при  $v = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ :  
1 – асфальтобетон; 2 – мостова; 3 – ґрунтова

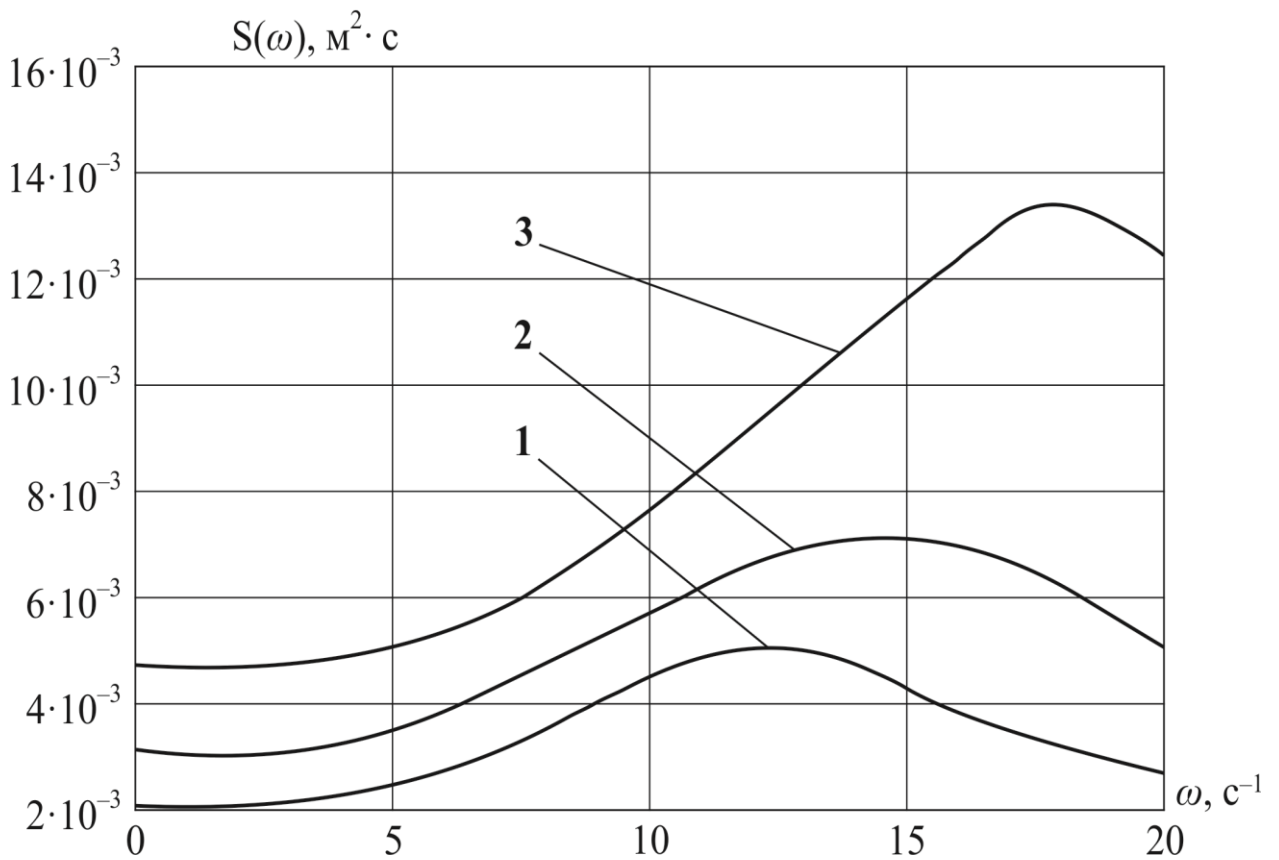
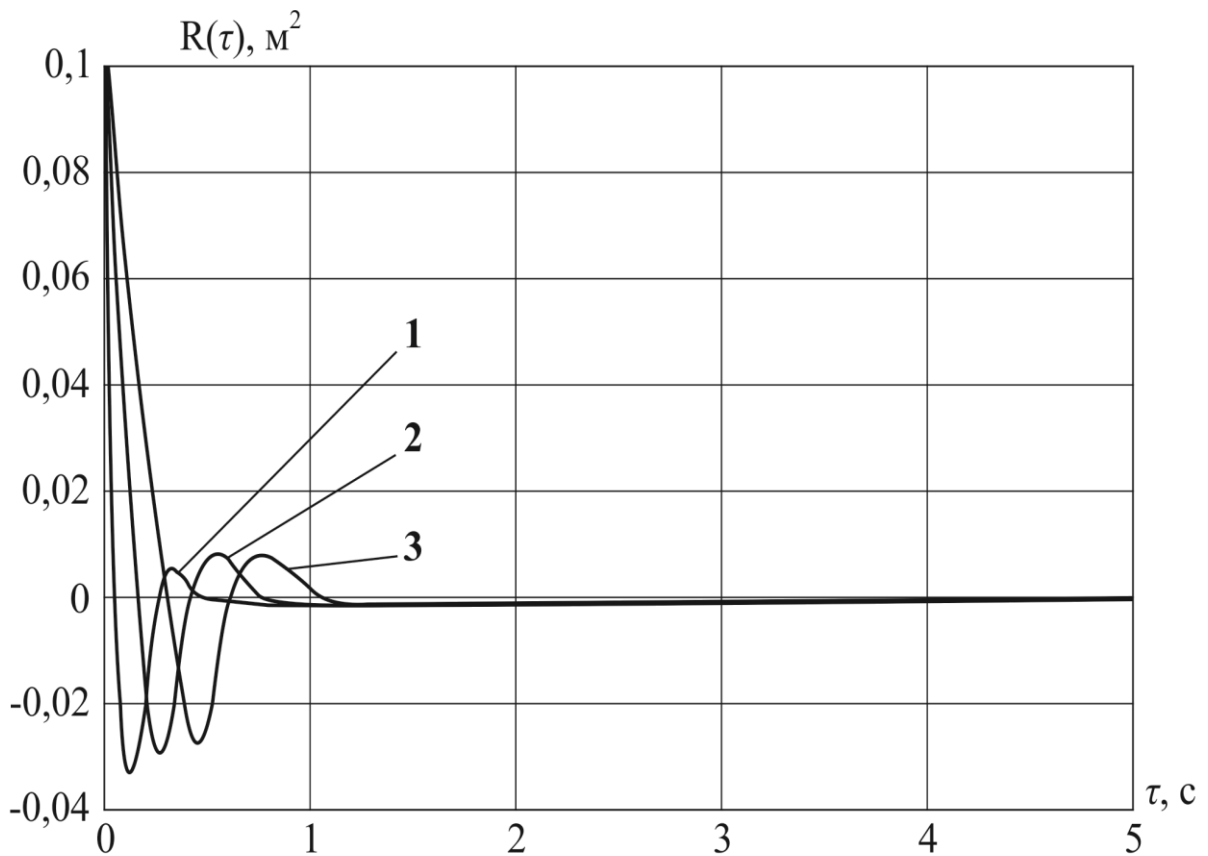


Рис. 1.7.в. Кореляційні функції та спектральні щільності  
поверхні руху автомобіля при  $v = 20 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ :  
1 – асфальтобетон; 2 – мостова; 3 – ґрунтова

Відомо, що спектральні щільності вхідного сигналу  $x(t)$  і вихідного сигналу  $y(t)$  динамічної ланки з передавальною функцією  $W(s)$  (рис. 1.8) пов'язані між собою співвідношенням

$$S_y(\omega) = R^2(\omega)S_x(\omega), \quad (1.43)$$

де  $R(\omega)$  – амплітудно-частотна характеристика динамічної ланки.

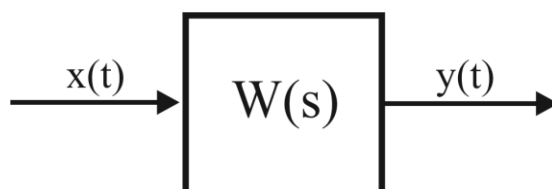


Рис. 1.8. Лінійна динамічна ланка

Покладемо, що вхідний сигнал лінійної динамічної ланки представляє собою одиничний «білий шум»

$$x(t) = \xi(t),$$

спектральна щільність якого постійна і дорівнює одиниці

$$S_x(\omega) = S_\xi(\omega) = 1.$$

Тоді, у відповідності із співвідношенням (1.43) маємо

$$S_y(\omega) = R^2(\omega). \quad (1.44)$$

З розгляду формули (1.44) і рис. 1.7 можна зробити висновок, що розглядаєма динамічна ланка являється коливальною з передавальною функцією

$$W(S) = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}, \quad (1.45)$$

де  $k$  – коефіцієнт підсилення;  $T_1, T_2$  – постійні часу.

Динамічну ланку з передавальною функцією (1.45) назвемо формуючою динамічною ланкою, тобто ланкою, що формує конкретну реалізацію випадкової функції  $y(t)$  при подаванні до його входу реалізації одиночного «білого шуму»  $\xi(t)$ . При цьому спектральна щільність випадкової функції  $y(t)$  повинна мати вигляд (1.42). Для цього величини  $k$ ,  $T_1$  і  $T_2$  треба обрати наступним чином. У співвідношенні (1.45) здійснимо заміну  $s = j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - \omega^2 T_1^2) + j\omega T_2}. \quad (1.46)$$

Для виключення комплексного числа із знаменника (1.46) помножимо чисельник і знаменник (1.46) на сполучене комплексне число  $(1 - \omega^2 T_1^2) - j\omega T_2$ . В результаті отримуємо частотну передавальну функцію у вигляді

$$W(j\omega) = \frac{(1 - \omega^2 T_1^2)k}{(1 - \omega^2 T_1^2)^2 + \omega^2 T_2^2} - j \frac{\omega T_2 k}{(1 - \omega^2 T_1^2)^2 + \omega^2 T_2^2}. \quad (1.47)$$

Приймемо позначення

$$U(\omega) = \frac{(1 - \omega^2 T_1^2)k}{(1 - \omega^2 T_1^2)^2 + \omega^2 T_2^2}; \quad V(\omega) = \frac{k\omega T_2}{(1 - \omega^2 T_1^2)^2 + \omega^2 T_2^2}. \quad (1.48)$$

Співвідношення (1.48) називаються дійсною і уявною частинами частотної передавальної функції (1.47), а власне частотна передавальна функція формуючої динамічної ланки записується у вигляді

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

а квадрат амплітудо частотної характеристики формуючої динамічної ланки при цьому дорівнює

$$R^2(\omega) = U^2(\omega) + V^2(\omega) = \frac{k^2}{(1 - \omega^2 T_1^2)^2 + \omega^2 T_2^2} = S_y(\omega). \quad (1.49)$$

У співвідношенні (1.49) покладемо  $\omega = 0$

$$k^2 = S_y(0). \quad (1.50)$$

Максимум функції (1.49) приблизно досягається при нульовому значенні виразу у дужках

$$1 - \omega_p^2 T_1^2 = 0, \quad (1.51)$$

а амплітуда резонансного піку визначається формулою

$$S_y(\omega_p) = \frac{k^2}{\omega_p^2 T_2^2}. \quad (1.52)$$

Із співвідношень (1.50) – (1.52) отримуємо значення параметрів формуючої динамічної ланки з передавальною функцією (1.45)

$$k = \sqrt{S_y(0)}; T_1^2 = \frac{1}{\omega_p^2}; T_2 = \sqrt{\frac{S_y(0)}{\omega_p^2 S_y(\omega_p)}}. \quad (1.53)$$

Залежність характерних точок спектральних щільностей, приведених на рисунку 1.7, від швидкості руху автомобіля по асфальтобетону приведені в таблиці 1.2, а значення параметрів формуючої динамічної ланки від швидкості руху автомобіля в таблиці 1.3.

Таблиця 1.2 – Залежність характерних точок кривих спектральних щільностей від швидкості руху автомобіля

Швидкість руху $v, \text{і} \cdot \tilde{\text{н}}^{-1}$	$S_y(0), \text{і}^2 \cdot \tilde{\text{н}}$	$\omega_p, \tilde{\text{н}}^{-1}$	$S_y(\omega_p), \text{і}^2 \cdot \tilde{\text{н}}$
25	$0,396 \cdot 10^{-3}$	10,92	$0,963 \cdot 10^{-3}$
20	$0,495 \cdot 10^{-3}$	8,74	$1,207 \cdot 10^{-3}$
15	$0,660 \cdot 10^{-3}$	6,56	$1,604 \cdot 10^{-3}$
10	$0,990 \cdot 10^{-3}$	4,37	$2,407 \cdot 10^{-3}$
5	$1,980 \cdot 10^{-3}$	2,19	$4,813 \cdot 10^{-3}$

Таблиця 1.3. – Значення параметрів формуючої динамічної ланки

Швидкість руху $v, \text{і} \cdot \tilde{\text{н}}^{-1}$	$k$	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$
25	$1,98 \cdot 10^{-2}$	0,0916	0,0586
20	$2,21 \cdot 10^{-2}$	0,1440	0,0922
15	$2,56 \cdot 10^{-2}$	0,1524	0,0975
10	$3,15 \cdot 10^{-2}$	0,2288	0,1464
5	$4,39 \cdot 10^{-2}$	0,4566	0,2922

Диференціальне рівняння формуючої динамічної ланки записується у вигляді

$$T_1^2 \ddot{h}_j(t) + T_2 \dot{h}_j(t) + h_j(t) = k \xi_j(t), \quad (j = \overline{1, N}), \quad (1.54)$$

де  $\xi_j(t), (j = \overline{1, N})$  –  $j$ -та реалізація одиничного «білого шуму»;  $h_j(t), (j = \overline{1, N})$  – поточна висота нерівностей поверхні руху автомобіля при  $j$ -тій реалізації одиничного «білого шуму».

На рисунку 1.9 приведені випадкові функції  $h_j(t)$  мікропрофіля дороги в залежності від швидкості руху автомобіля, що рухається по асфальтобетону. Ці функції являються рішеннями диференціальних рівнянь (1.54).

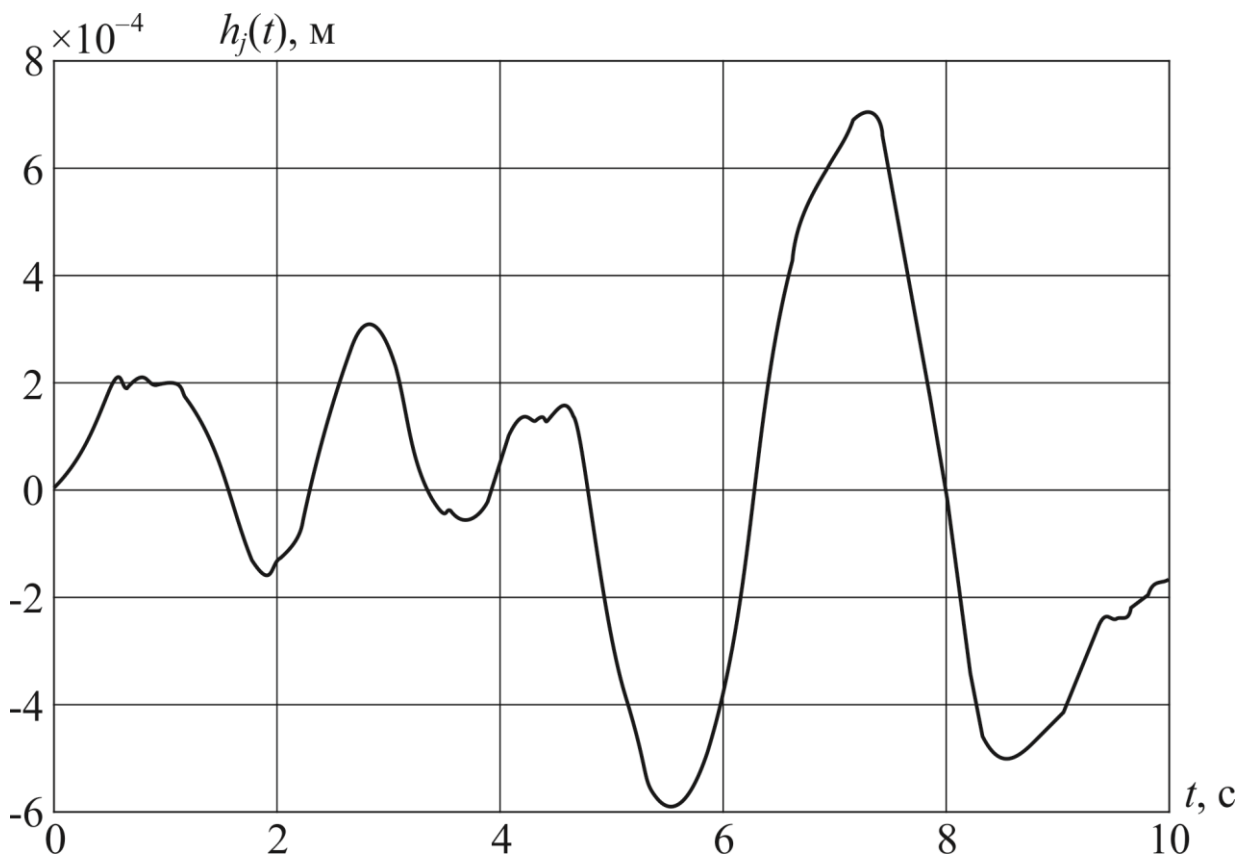


Рис. 1.9.а. Випадкова функція  $h_j(t)$  відповідає швидкості  $5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$

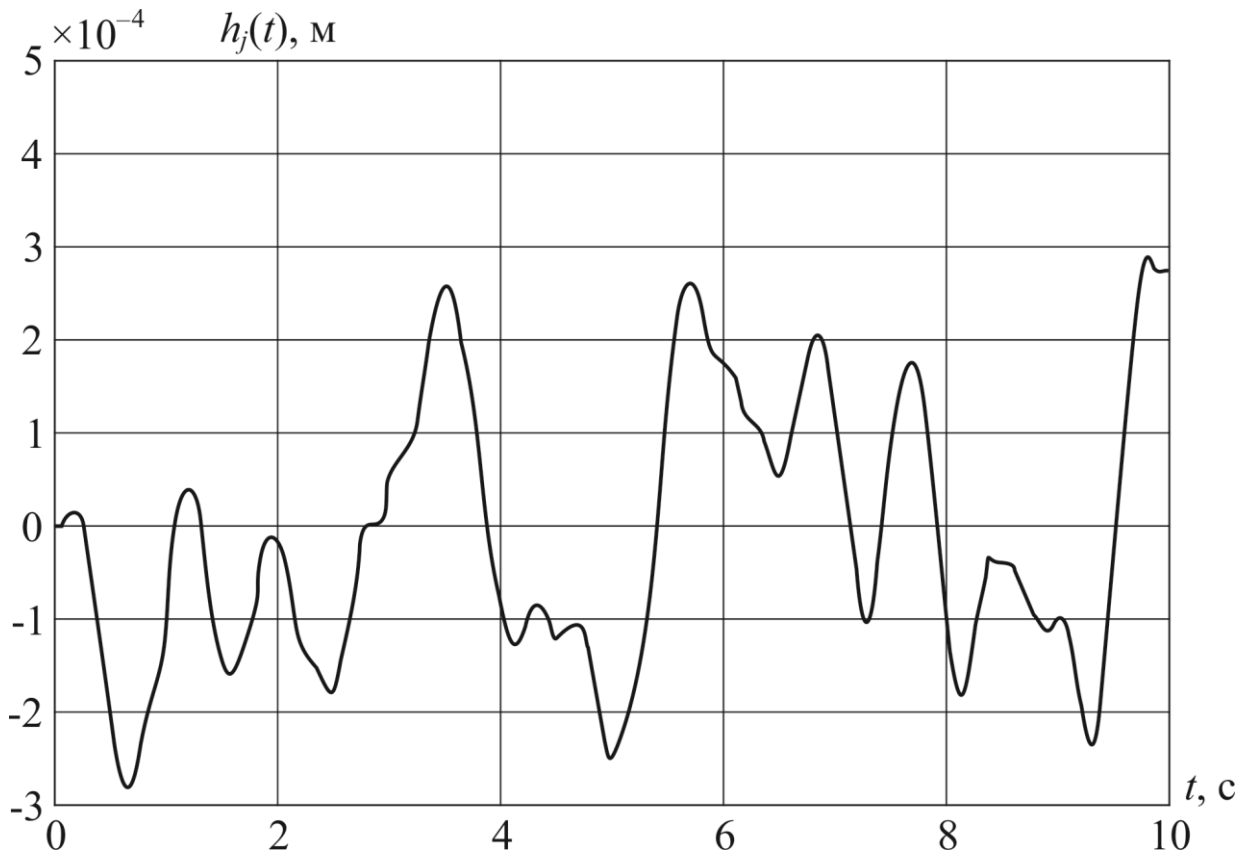


Рис. 1.9.б. Випадкова функція  $h_j(t)$  відповідає швидкості  $10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$

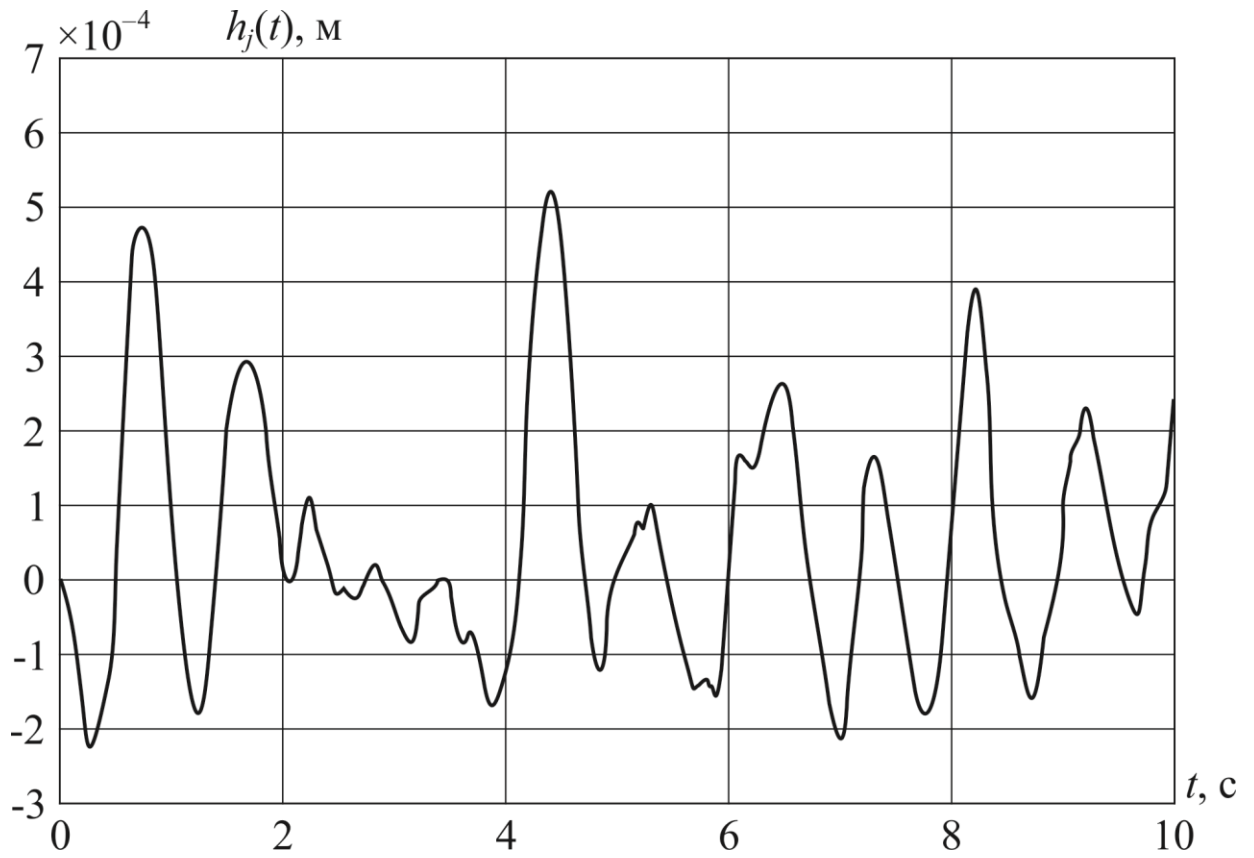


Рис. 1.9.в. Випадкова функція  $h_j(t)$  відповідає швидкості  $15 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$

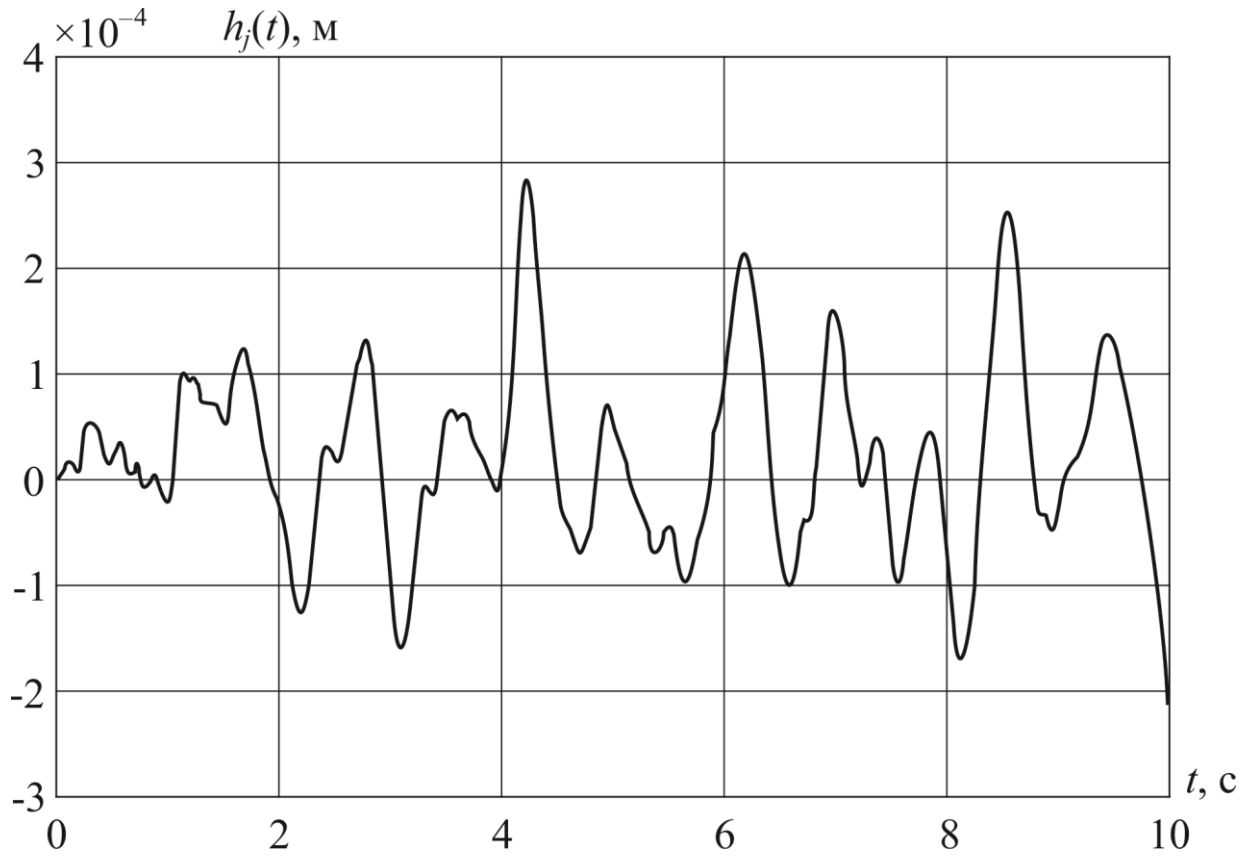


Рис. 1.9.г. Випадкова функція  $h_j(t)$  відповідає швидкості  $20 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$

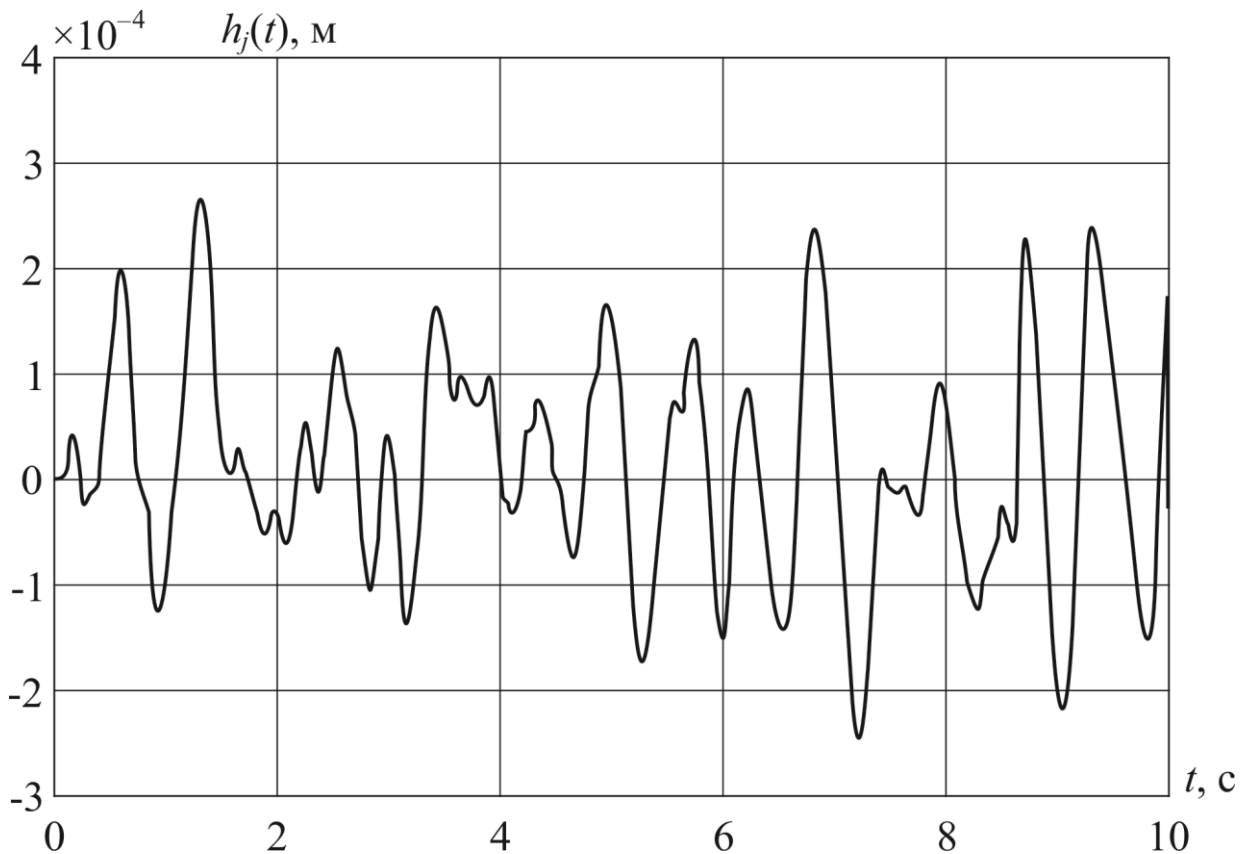


Рис. 1.9.д. Випадкова функція  $h_j(t)$  відповідає швидкості  $25 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$

Із зростанням значення швидкості руху автомобіля середня частота коливань випадкової функції  $h_j(t)$  збільшується, а середня випадкова амплітуда функції  $h_j(t)$  зменшується. В результаті вимушені випадкові коливання підресореної частини корпусу автомобіля описуються системою диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
 & \ddot{z}_j(t) + m\dot{z}_j(t) + az_j(t) + q\dot{\varphi}_j(t) + b\varphi_j(t) = \\
 & = \frac{2c}{M_n} \left[ \sum_{i=1}^3 h_j \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] + \frac{2\mu}{M_n} \left[ \sum_{i=1}^3 \dot{h}_j \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right]; \\
 & \ddot{\varphi}_j(t) + s\dot{\varphi}_j(t) + d\varphi_j(t) + rz_j(t) + fz_j(t) = \\
 & = \frac{2c}{I_y} \left[ \sum_{i=1}^3 l_i h_j \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] + \frac{2\mu}{I_y} \left[ \sum_{i=1}^3 l_i \dot{h}_j \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right]; \\
 & \quad (j = \overline{1, N})
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

де випадкова функція  $h_j \left( t + \frac{l_i}{v} \right)$  та її похідна за часом  $\dot{h}_j \left( t + \frac{l_i}{v} \right)$  задовольняють диференціальному рівнянню (1.54).

Припустимо, що розглядаємо підвіска являється симетричною, тоді математична модель збуреного руху підресореної частини корпусу автомобіля (1.55) розпадається на два незалежних рівняння:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_j(t) + m\dot{z}_j(t) + az_j(t) = \\ = \frac{2c}{M_n} \left[ \sum_{i=1}^3 h_j \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] + \frac{2\mu}{M_n} \left[ \sum_{i=1}^3 \dot{h}_j \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right]; \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_j(t) + s\dot{\phi}_j(t) + d\phi_j(t) = \\ = \frac{2c}{I_y} \left[ \sum_{i=1}^3 l_i h_j \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] + \frac{2\mu}{I_y} \left[ \sum_{i=1}^3 l_i \dot{h}_j \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right]; \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$(j = \overline{1, N}).$$

Рівняння (1.56) разом із рівнянням (1.54) представляють собою математичну модель збуреного руху або випадкових вертикальних коливань підресореної частини автомобіля, а рівняння (1.57) разом із рівнянням (1.54) представляють собою математичну модель збуреного руху або випадкових подовжньо-кутових коливань підресореної частини автомобіля.

Розглянемо випадкові вертикальні коливання підресореної частини корпусу автомобіля, що описуються диференціальними рівняннями (1.56) і (1.54), які необхідно привести до нормальної форми Коші. Введемо вектор стану, компоненти якого представляють собою узагальнені координати і узагальнені швидкості математичної моделі (1.56), (1.54)

$$X_j(t) = \begin{bmatrix} x_{j1}(t) \\ x_{j2}(t) \\ x_{j3}(t) \\ x_{j4}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_j(t) \\ \dot{z}_j(t) \\ h_j(t) \\ \dot{h}_j(t) \end{bmatrix}. \quad (1.58)$$

Тоді математична модель (1.56), (1.54) записується у нормальній формі Коші:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{j1}(t) &= x_{j2}(t); \\ \dot{x}_{j2}(t) &= -ax_{j1}(t) - mx_{j2}(t) + \\ &+ \frac{2c}{M_n} \left[ \sum_{i=1}^3 x_{j3} \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] + \frac{2\mu}{M_n} \left[ \sum_{i=1}^3 x_{j4} \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right]; \quad (1.59) \\ \dot{x}_{j3}(t) &= x_{j4}(t); \\ \dot{x}_{j4}(t) &= -\frac{1}{T_1^2} x_{j3}(t) - \frac{T_2}{T_1^2} x_{j4}(t) + \frac{k}{T_1^2} \xi_j(t). \end{aligned}$$

#### 1.4. Програмний пакет MATLAB для дослідження випадкових коливань динамічних систем.

Інтерактивна програма MATLAB (скорочення від Matrix Laboratory) є високоефективною мовою інженерних та наукових обчислень. MATLAB підтримує математичні розрахунки, візуалізацію результатів обчислень і програмування з використанням операційного оточення, яке легко освоюється. Орієнтована на матричні операції, мова MATLAB істотно полегшує виконання розрахунків у галузі лінійної алгебри, наприклад, розв'язання систем лінійних рівнянь. Особливу цінність MATLAB має завдяки наявності великої кількості додаткових пакетів прикладних програм (toolboxes), орієнтованих на вирішення задач у різних галузях науки і техніки (імітаційне моделювання, синтез та аналіз систем керування, нейронні мережі та генетичні алгоритми, нечітка логіка тощо).

Одним з таких пакетів MATLAB є SIMULINK, який використовується для моделювання і аналізу величезної кількості фізичних і математичних систем, включаючи системи з нелінійними елементами та системи, які використовують безперервний та дискретний час.

Як розширення MATLAB, SIMULINK додає багато особливостей в динамічні системи, при цьому зберігаючи всі основні можливості MATLAB-а.

Використання MATLAB-а дає можливість моделювати системи графічно, уникаючи багатьох нюансів, пов'язаних зі звичайним програмуванням.

Однією з найважливіших задач при дослідженні технічних систем в динаміці є розв'язання диференціальних рівнянь. Вирішення цієї задачі MATLAB реалізує декількома методами. Найбільш розповсюджений метод розв'язання диференціальних рівнянь – метод Рунге-Кутта 4-го порядку точності, для чого використовується стандартна функція **ode45**.

Система диференціальних рівнянь записується у вигляді окремого файлу, ім'я якого присутнє у списку одного з параметрів функції; інші параметри – це початок інтервалу інтегрування, кінець інтервалу інтегрування та матриця-вектор початкових умов.

Для створення файлу системи диференціальних рівнянь останні необхідно подати в нормальній формі Коші.

Формат функції **ode45**:

$[T, Y] = \text{ode45}('m\text{-file}', [t_0 \ t_1], y_0),$

де  $[T, Y]$  – матриця рішень,  $T$  – час,  $Y$  – матриця-вектор рішень,  $m\text{-file}$  – ім'я файлу, де знаходиться система диференціальних рівнянь,  $t_0$  – початок інтервалу інтегрування,  $t_1$  – кінець інтервалу інтегрування,  $y_0$  – вектор початкових умов.

Для виведення результатів у вигляді графіка використовується команда **plot**:

`>>plot(T, Y)`

Виведення  $i$ -го рішення  $y_i$  виконується таким форматом:

`>>plot(T, Y(:,i))`

Розглянемо на прикладі розв'язання системи диференціальних рівнянь (1.59), що описують коливання центра тяжіння корпусу транспортного засобу під час руху по дорожньому покриттю, що моделюється системою (1.54). Складність вирішення системи (1.59) полягає в тому, що у правій її частині присутні значення із запізненням, які описують висоту нерівностей дорожнього покриття. Функція **ode45** в своєму стандарті не забезпечує розв'язання таких рівнянь. Тому, спочатку промодельуємо

нерівності на всьому інтервалі інтегрування розглядаємої системи, вирішивши систему (1.54), а потім використаємо отримані значення та спеціально розроблений алгоритм для розв'язання системи (1.59).

Для розв'язання диференціального рівняння (1.54) в інтегрованому середовищі MATLAB методом Рунге-Кутта необхідно привести його до нормальної форми Коші, для чого було зроблено відповідну заміну змінних (1.58) та отримані співвідношення у вигляді 3-го та 4-го рівня системи (1.59). Попередньо ці рівняння повинні бути записані в **m-file**-функцію, тобто у файл з розширенням **m**. Для цього в меню File треба вибрати команду New. Структура **m-file** має код, який представлено у вигляді Лістингу 1.1.

#### Лістинг 1.1 – Розв'язання диференціального рівняння (1.54)

```
function yp=sys159_fun_h(t,y)
global K T1 T2
yp(1)=y(2);
yp(2)=(-y(1)-T2*y(2)+K*awgn(0,1))/(T1^2);
yp=yp`;
```

Для збереження цього файлу необхідно вибрати команду в меню File→Save as ... . При цьому назва файлу має збігатися з ім'ям функції. У нашому випадку sys159\_fun\_h.m.

Далі для вирішення всієї системи (1.59) перші два рівняння цієї системи потрібно записати в аналогічній **m-file**-функцію. Для використання змінних із запізненням розроблено додатковий алгоритм. В результаті друга **m-file**-функція має код, який представлено у вигляді Лістингу 1.2.

#### Лістинг 1.2 – Розв'язання системи рівнянь (1.59)

```
function yp=sys159_fun_z(t,y)
global V a m c mu Mp lp
global th h jh hk htk maxhj
for ik=1:3,
    while jh(ik)<=maxhj,
        if (t+lp(ik)/V)<=th(jh(ik)),
            hk(ik)=h(jh(ik),1);
            htk(ik)=h(jh(ik),2);
            break;
```

```

        end
        jh(ik)=jh(ik)+1;
    end
end
sumh=hk(1)+hk(2)+hk(3);
sumht=htk(1)+htk(2)+htk(3);
yp(1)=y(2);
yp(2)=-a*y(1)-m*y(2)+2*c/Mp*sumh+2*mu/Mp*sumht;
yp=yp`;

```

Назва файлу – sys159\_fun\_z.m.

Після підготовки файлів-функцій правих частин системи диференціальних рівнянь описаним вище способом у командному рядку можна організувати виконання функції **ode45** із попереднім завданням вхідних даних та початкових умов. Усі команди доцільно записати в командний **m-file**, як це показано у Лістингу 1.3.

### Лістинг 1.3 – Виконання функції ode45

```

global V a m c mu Mp lp
global th h jh hk htk maxhj
global K T1 T2
Vm=[25 20 15 10 5];
Km=[0.0198 0.0221 0.0256 0.0315 0.0439];
T1m=[0.0916 0.144 0.1524 0.2288 0.4566];
T2m=[0.0586 0.0922 0.0975 0.1464 0.2922];
i=5;
V=Vm(i)
K=Km(i)
T1=T1m(i)
T2=T2m(i)
lp=[2 -0.66 -1.34];
Mp=20000; c=330000; mu=51000;
a=6*c/Mp; m=6*mu/Mp;
Tk=10;
h0=[0 0];
[th,h] = ode45('sys159_fun_h',[0 Tk],h0);
figure(1)
plot(th,h(:,1),'-b','LineWidth',1)
grid on

```

```

maxhj=length(th)
jh=[1 1 1];
hk=[h(1,1) h(1,1) h(1,1)];
htk=[h(1,2) h(1,2) h(1,2)];
z0=[0 0];
[tz,z]=ode45('sys159_fun_z',[0 Tk],z0);
figure(2)
plot(tz,z(:,1),'black',tz,z(:,2),'-g','LineWidth',1.5)
grid on

```

В результаті застосування приведеної програми до систем рівнянь (1.59) отримуємо функції  $x_{j3}(t) = h_j(t)$ , що подані на рис. 1.8, а також функції  $x_{j1}(t) = Z_j(t)$  та  $x_{j2}(t) = \dot{Z}_j(t)$ , які подані на рис. 1.10.

Використання мови програмування MATLAB зі стандартною функцією **ode45** для вирішення саме системи диференціальних рівнянь (1.59) має два недоліки. По-перше, система має змінні із запізненням, для цього потрібно розробляти спеціальний алгоритм. По-друге, моделювання «білого шуму», що подається на вхід динамічної ланки, яка моделює нерівності дорожнього покриття, за допомогою стандартних функцій значно збільшує час виконання програми розрахунку коливальних процесів системи, досягаючи однієї години при інтервалі інтегрування 10 секунд в залежності від типу процесора комп'ютера, що дуже незручно при виконанні лабораторних робіт студентам.

Враховуючи наведені вище недоліки пропонується другий спосіб дослідження коливань у технічній системі MATLAB, заснований на моделюванні в середовищі Simulink пакету.

Побудуємо модель, скориставшись рівняннями (1.54), (1.56). Структурна схема моделі показана на рис. 1.9.

Елемент Band-Limited White Noise («білий шум») знаходиться в бібліотеці Simulink/Sources. Параметри: Noise power: [0.005]; Sample time: 0.01.

Елемент Transfer Fcn (передавальна функція) знаходиться в бібліотеці Simulink/Continuous. Параметри – коефіцієнти чисельника та знаменника, які мають бути векторами. Коефіцієнти слід вказувати в порядку спадання степенів  $s$ . Параметри для змінної  $h(t)$ : Numerator coefficients: [K]; Denominator coefficients: [T1<sup>2</sup> T2

1]. Параметри для змінної  $z(t)$ : Numerator coefficients: [1]; Denominator coefficients: [1 m a].

Елемент  $du/dt$  (похідна) знаходиться в бібліотеці Simulink/Continuous.

Для моделювання сум змінних із запізненням  $sumh$ ,  $sumh1$  використовуються елементи підсистем Subsystem, які знаходяться в бібліотеці Simulink/Commonly Used Blocks. Внутрішня структура обох блоків наведена у нижній частині рис. 1.9. Кожен блок включає елементи затримки Transport Delay (бібліотека Simulink/Continuous). Параметр для блока  $h2$ : Time delay:  $(lp(1)-lp(2))/V$ ; для блока  $h3$ : Time delay:  $(lp(1)-lp(3))/V$ .

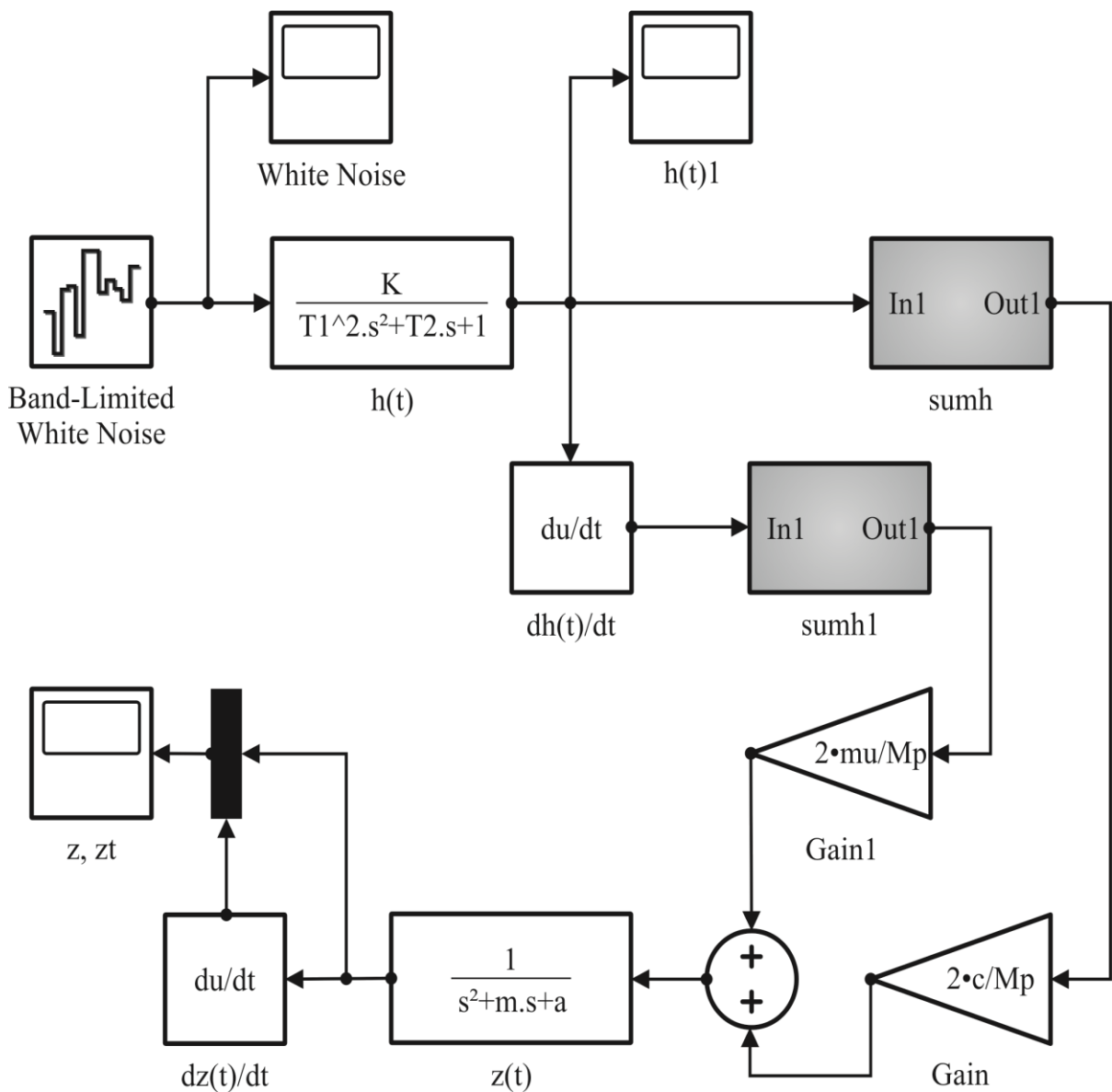


Рис. 1.10.а. Структурна схема моделі в середовищі Simulink

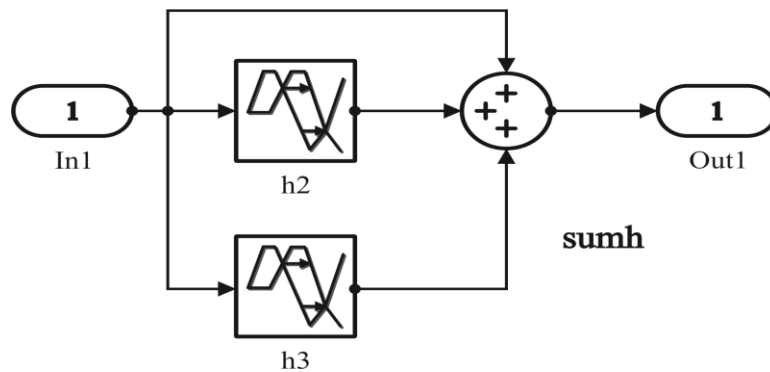


Рис. 1.9.6. Структурна схема моделі в середовищі Simulink

Підсилювачі задаються елементами Gain, які знаходяться в бібліотеці Simulink/Commonly Used Blocks.

Графіки змінних  $h(t)$ ,  $z(t)$ ,  $\dot{z}(t)$  виводяться за допомогою елементів Scope (бібліотека Simulink/Sinks).

Перед запуском моделі на виконання створимо **m-file** з вихідними даними (Лістинг 1.4).

Лістинг 1.4 – Вихідні дані для розрахунку

```

Vm=[25 20 15 10 5];
Km=[0.0198 0.0221 0.0256 0.0315 0.0439];
T1m=[0.0916 0.144 0.1524 0.2288 0.4566];
T2m=[0.0586 0.0922 0.0975 0.1464 0.2922];
i=1;
V=Vm(i)
K=Km(i)
T1=T1m(i)
T2=T2m(i)
lp=[2 -0.66 -1.34];
Mp=20000; c=330000; mu=51000;
a=6*c/Mp; m=6*mu/Mp;

```

Запустимо цей файл, в результаті значення всіх параметрів з'являться в робочому просторі MATLAB – Workspace, звідки потім використовуються під час виконання моделі. Результати виконання моделі близькі за результатами розрахунку програми.

При цьому час виконання моделі складає декілька секунд, що значно швидше, ніж використання мови програмування MATLAB зі стандартною функцією **ode45**.

На рис. 1.11 приведені випадкові процеси вертикальних коливань підресореної маси автомобіля при його русі по випадковому мікропрофіля, що приведений на рис. 1.8. Випадкові процеси отримані за допомогою моделі Simulink. Аналіз рис. 1.10 приводить до висновку, що підвищення швидкості руху транспортного засобу по випадковій поверхні приводить до підвищення частоти і до зменшення амплітуди вертикальних коливань підресореної частини корпусу автомобіля.

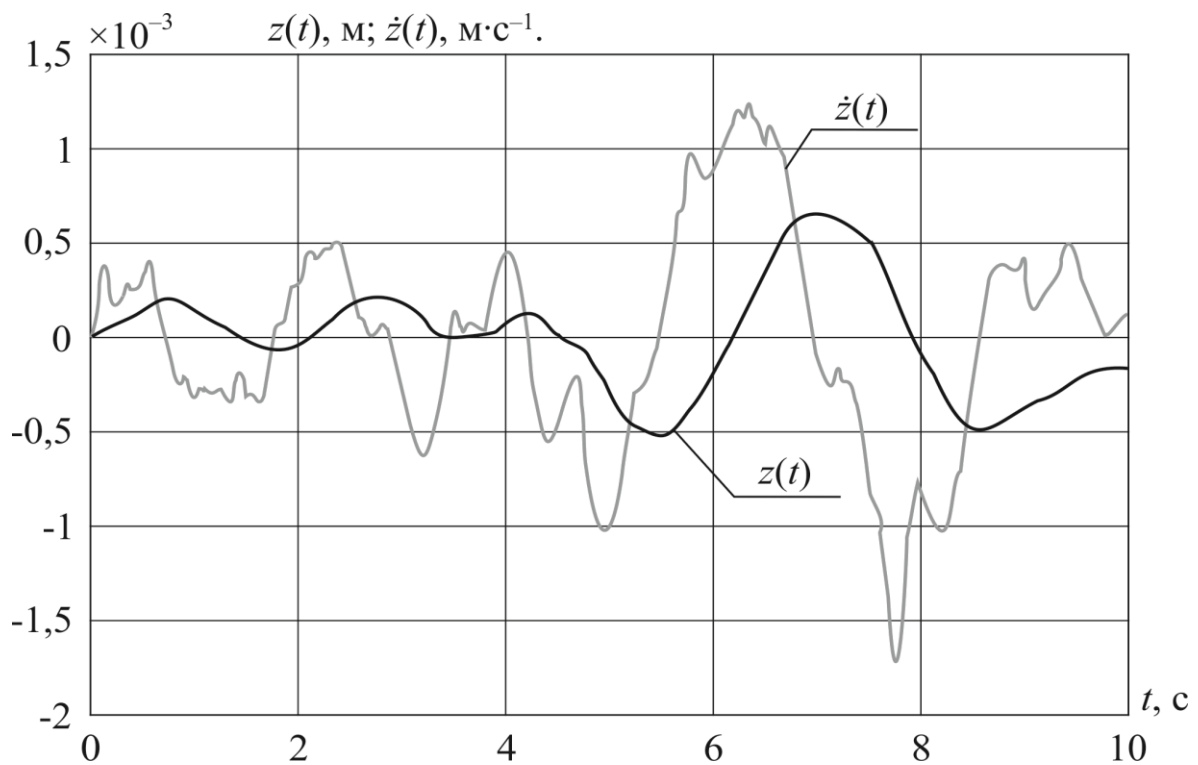


Рис. 1.11.а. Випадкові процеси вертикальних коливань підресореної маси автомобіля при  $v = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$

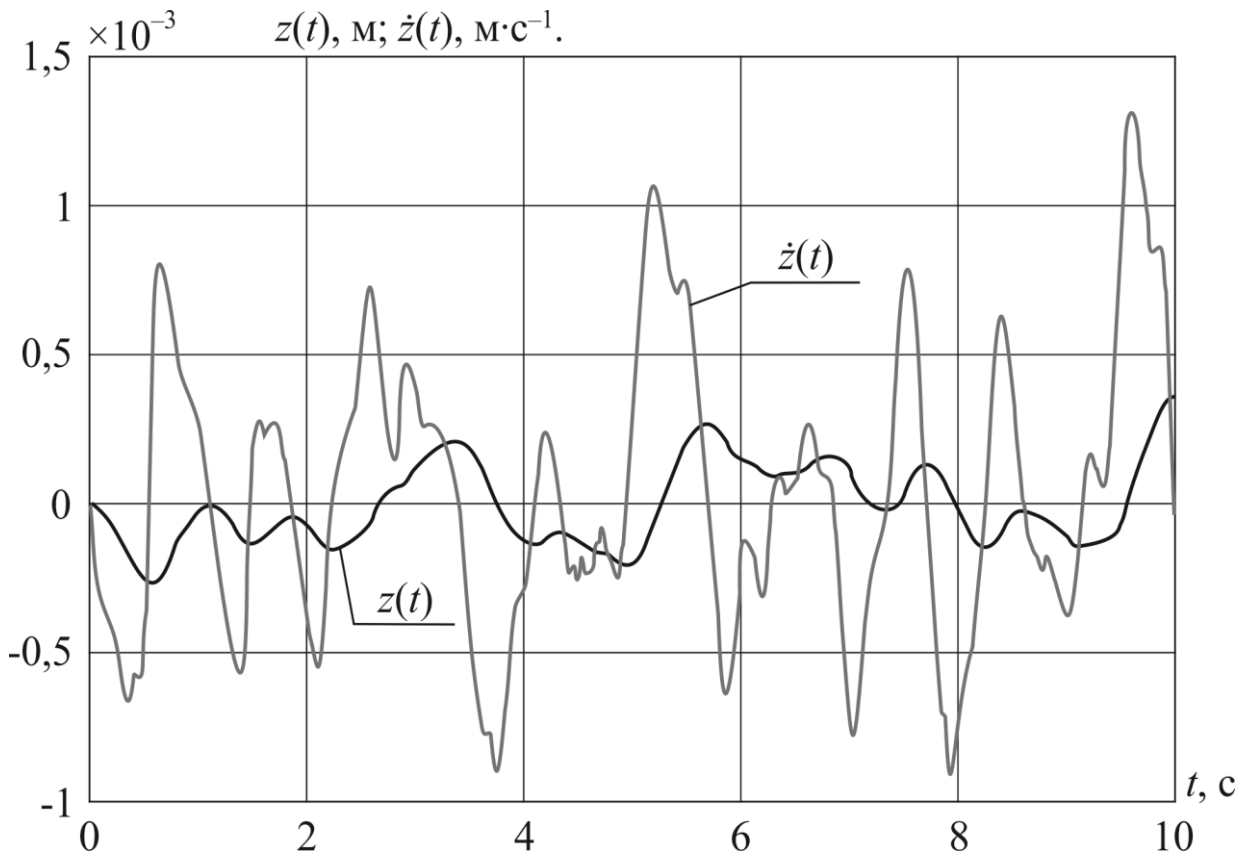


Рис. 1.11.б. Випадкові процеси вертикальних коливань підресореної маси автомобіля при  $v = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$

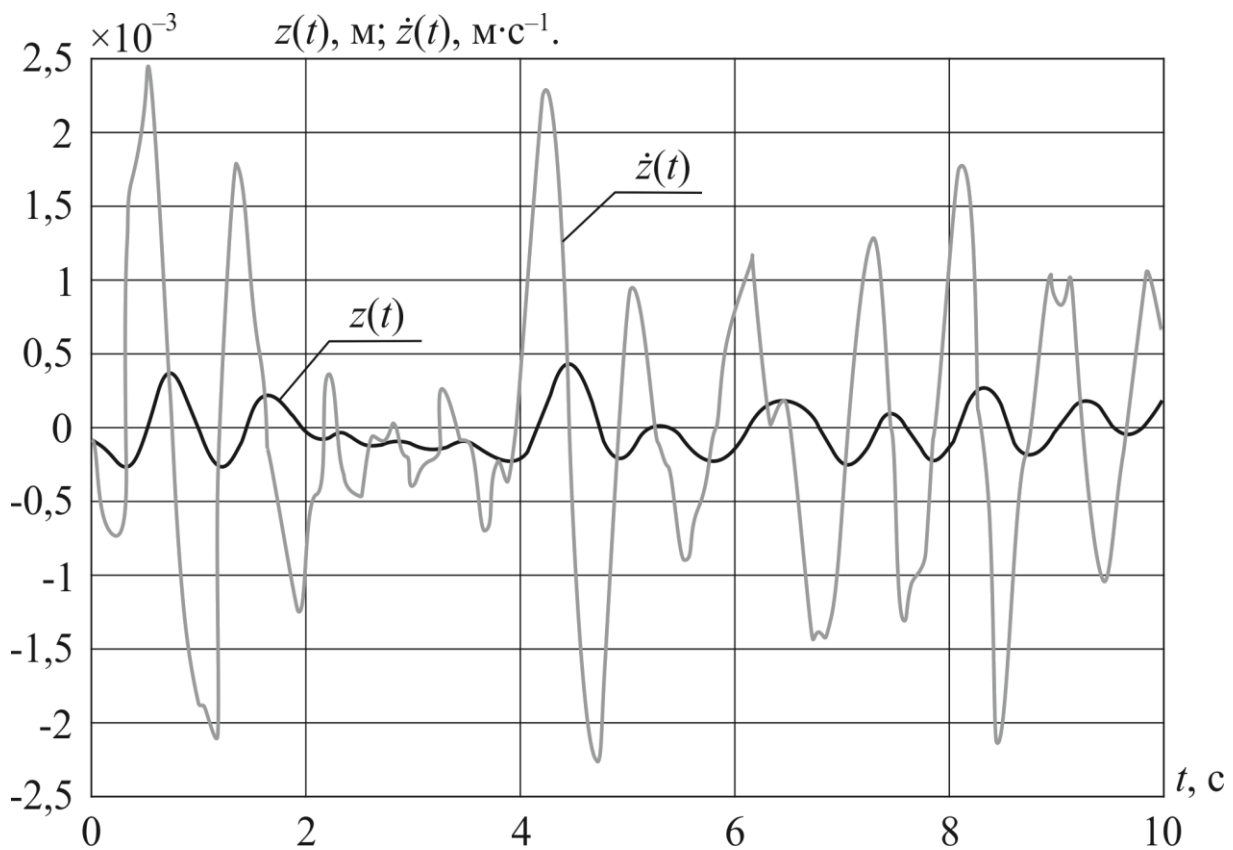


Рис. 1.11.в. Випадкові процеси вертикальних коливань підресореної маси автомобіля при  $v = 15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$

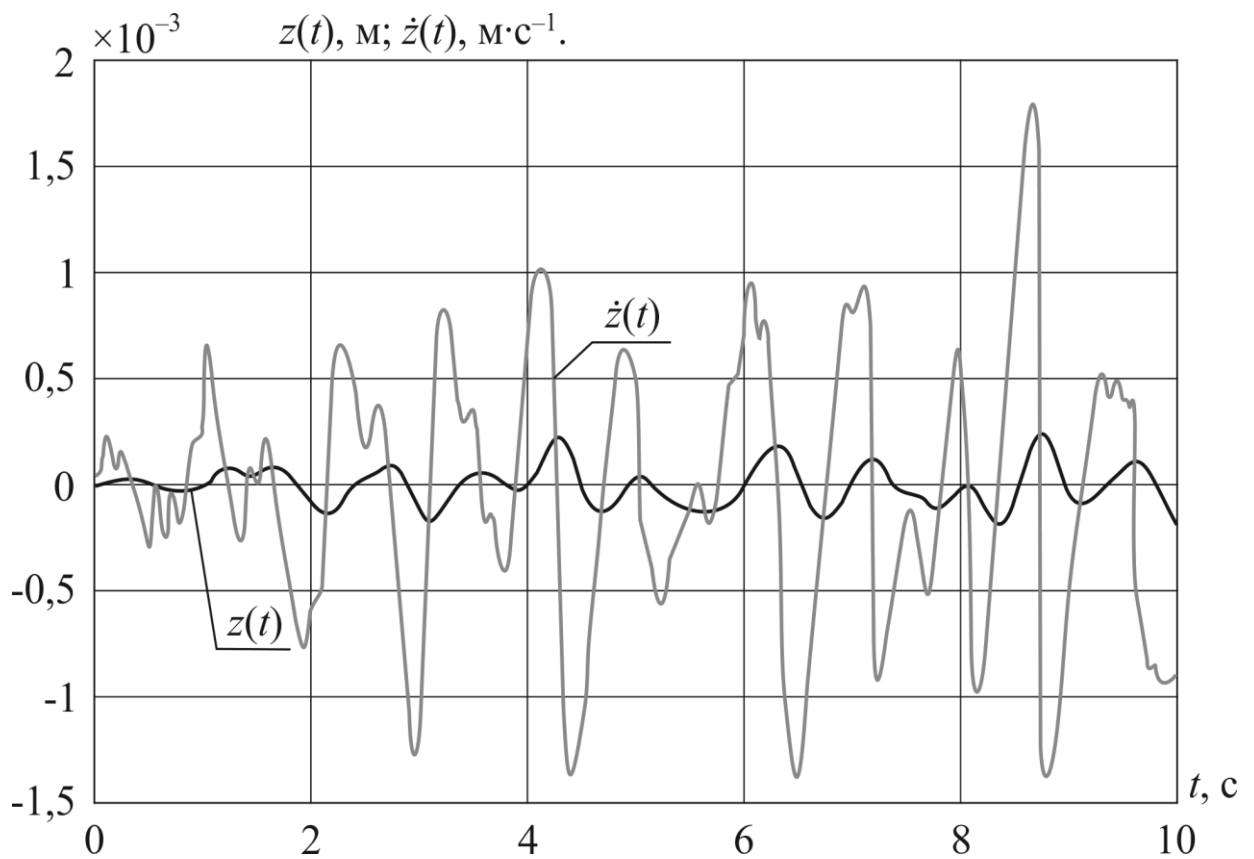


Рис. 1.11.г. Випадкові процеси вертикальних коливань підресореної маси автомобіля при  $v = 20 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$

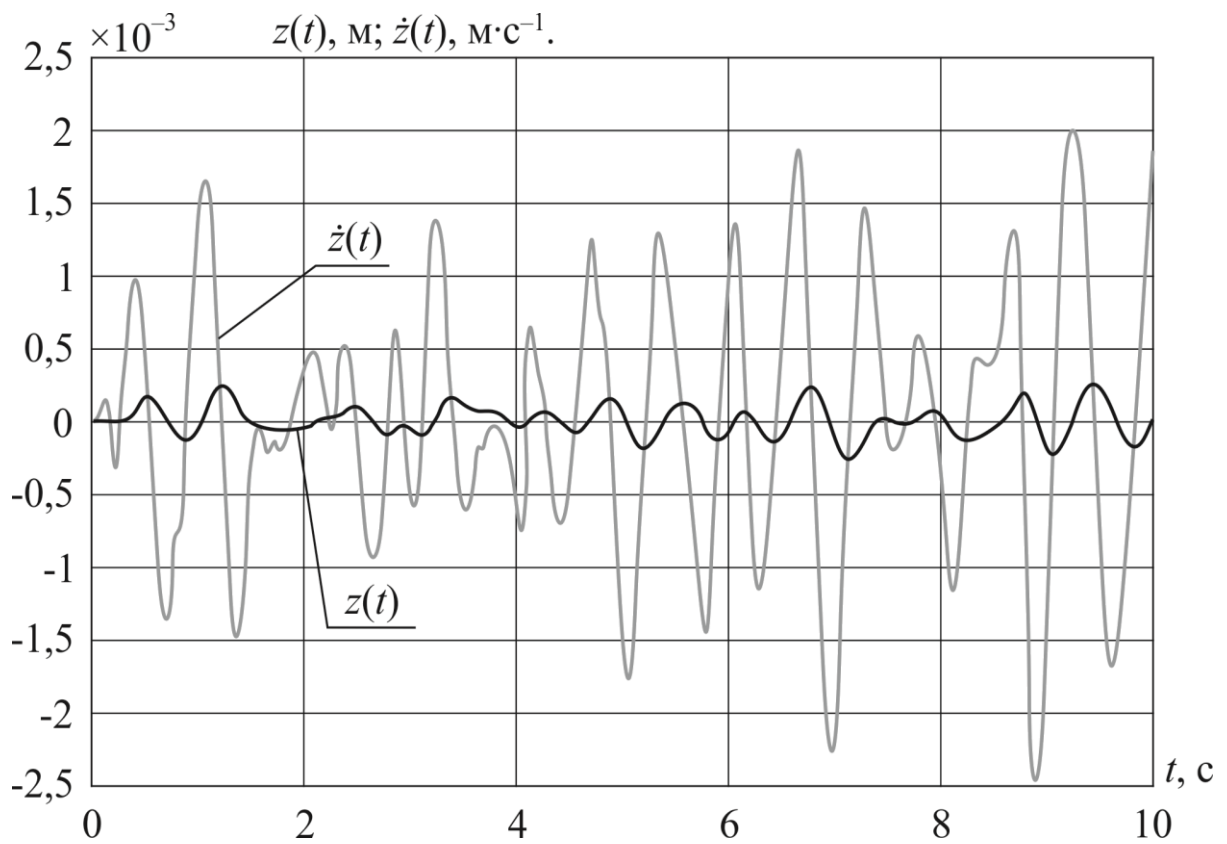


Рис. 1.11.д. Випадкові процеси вертикальних коливань підресореної маси автомобіля при  $v = 25 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$

## Контрольні запитання до розділу 1.

1. Дайте визначення центру пружності автомобіля.
2. Вкажіть діапазон періодів коливань підресореної частини корпусу автомобіля найбільш сприятливих для членів екіпажу.
3. Дайте визначення симетричної підвіски автомобіля.
4. Запишіть формулу вільних коливань підресореної маси корпусу автомобіля при симетричній підвісці.
5. Дайте визначення вимушеним коливанням корпусу автомобіля.
6. В якому випадку при вимушених коливаннях підресореної частини корпусу автомобіля виникає явище резонансу?
7. У якому випадку виникають випадкові коливання підресореної частини корпусу автомобіля?
8. Запишіть формулу для кореляційної функції нерівностей дорожнього покриття.
9. Запишіть формулу для спектральної щільності нерівностей дорожнього покриття.
10. Дайте визначення формуючої динамічної ланки.

## Розділ 2

# КОЛИВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ДВОМА СТУПЕНЯМИ СВОБОДИ.

### 2.1. Вільні коливання лінійних систем з двома ступенями свободи.

Розглянемо автомобіль з несиметричною підвіскою, вільні коливання підресореної маси якого описуються диференціальними рівняннями (1.21) і (1.22). Вектор стану динамічної системи (1.21), (1.22) подамо у вигляді

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix}$$

і запишемо систему (1.21), (1.22) в нормальній формі Коші:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -ax_1(t) - mx_2(t) - bx_3(t) - qx_4(t); \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t); \\ \dot{x}_4(t) &= -fx_1(t) - rx_2(t) - dx_3(t) - sx_4(t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Систему (2.1) запишемо у векторно-матричній формі

$$\dot{X}(t) = AX(t), \tag{2.2}$$

де  $A$  – власна матриця системи (2.1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & -m & -b & -q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -f & -r & -d & -s \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Характеристичне рівняння системи (2.1) має наступний вигляд

$$\det[A - Ep] = \begin{vmatrix} -p & 1 & 0 & 0 \\ -a & -m-p & -b & -q \\ 0 & 0 & -p & 1 \\ -f & -r & -d & -s-p \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4)$$

Розкриваючи визначник (2.4), маємо

$$p^4 + (m + s)p^3 + (a + d + ms - qr)p^2 + (as + md - br - fq)p + ad - fb = 0. \quad (2.5)$$

Отримання аналітичної форми рішення алгебраїчного рівняння четвертого ступеня надзвичайно складне, тому коливальні процеси доцільно отримувати безпосереднім інтегруванням системи (2.1) при ненульових початкових умовах

$$x_{10} = z(0) = z_0;$$

$$x_{20} = \dot{z}(0) = \dot{z}_0;$$

$$x_{30} = \varphi(0) = \varphi_0;$$

$$x_{40} = \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0.$$

На рисунку 2.1 приведені рішення системи диференціальних рівнянь (2.1) з початковими умовами:

$$z(0) = x_{10} = -0.05 \text{ і} ; \dot{z}(0) = x_{20} = 0 \text{ і} \cdot \tilde{n}^{-1};$$

$$\varphi(0) = x_{30} = 0.05 \text{ дїї} ; \dot{\varphi}(0) = x_{40} = 0 \tilde{n}^{-1}.$$

На рисунку 2.2 приведені рішення тієї ж системи при початкових умовах:

$$z(0) = x_{10} = -0.05 \text{ і} ; \dot{z}(0) = x_{20} = 0 \text{ і} \cdot \tilde{n}^{-1};$$

$$\varphi(0) = x_{30} = 0 \text{ дїї} ; \dot{\varphi}(0) = x_{40} = 0 \tilde{n}^{-1}.$$

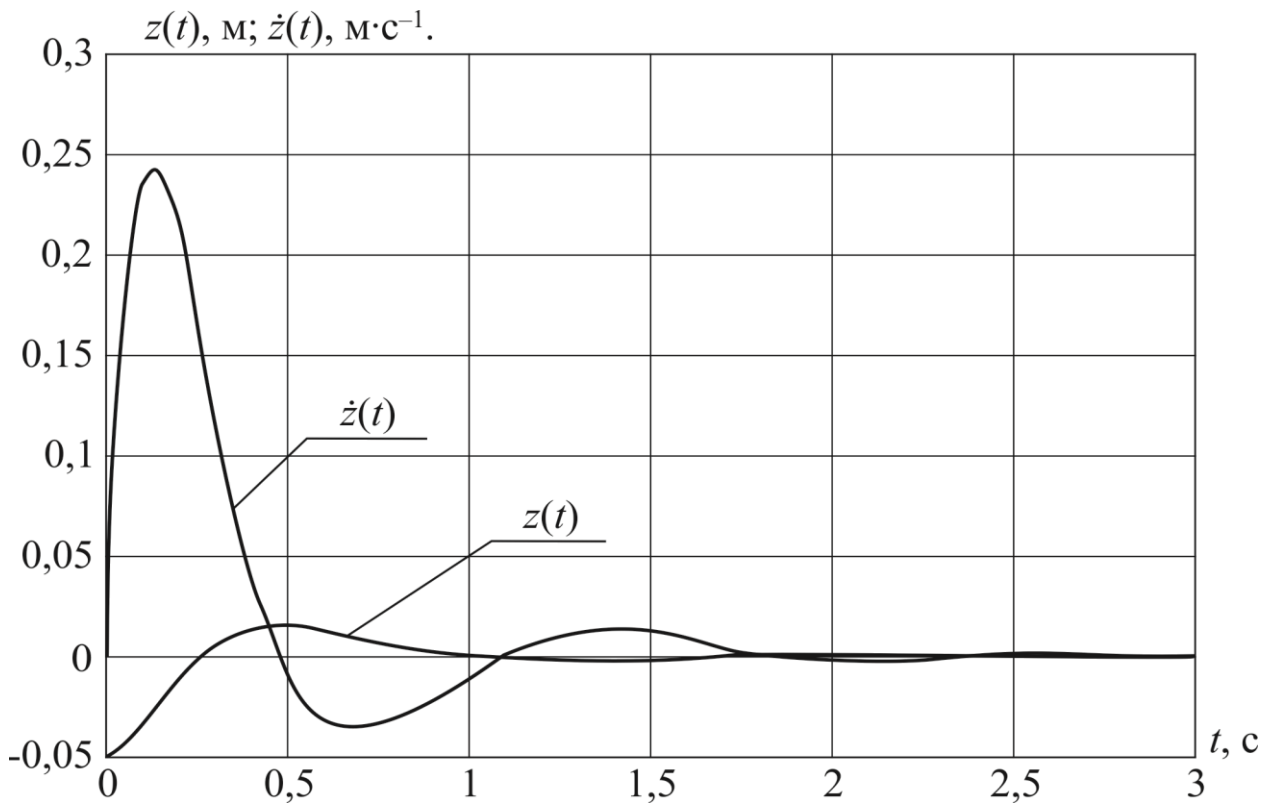


Рис. 2.1.а. Рішення системи (2.1)

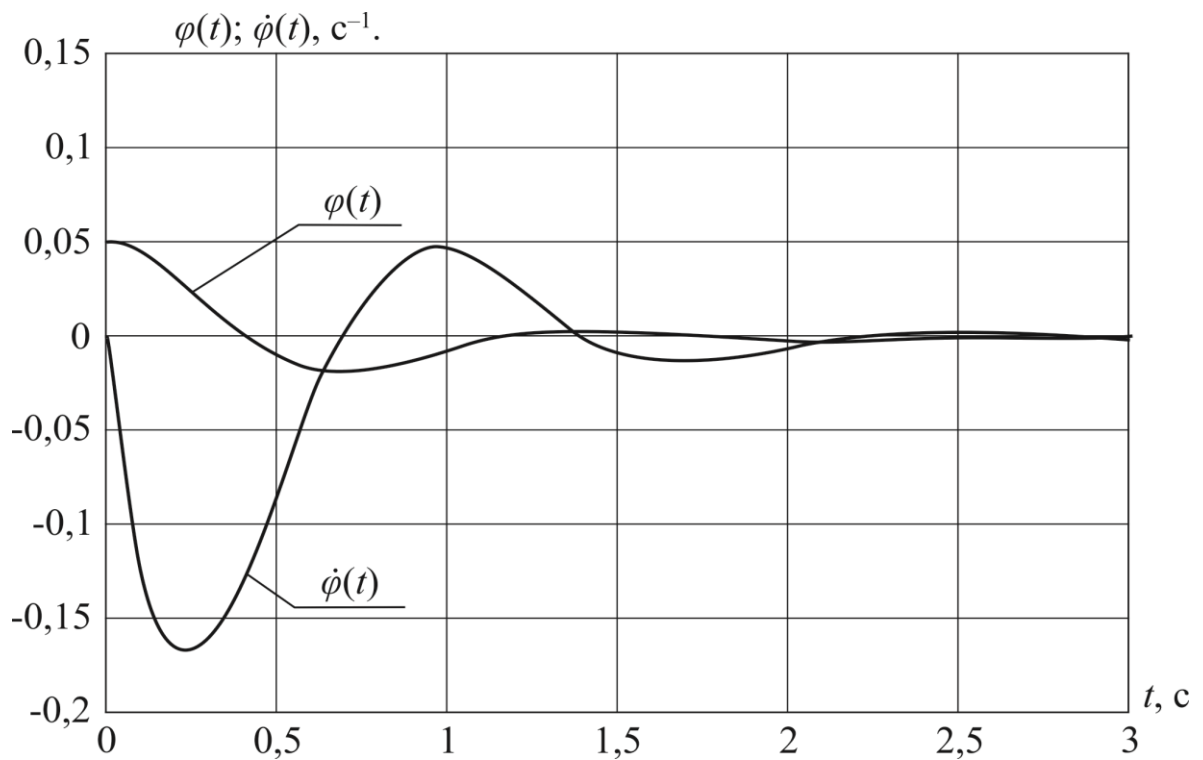


Рис. 2.1.б. Рішення системи (2.1)

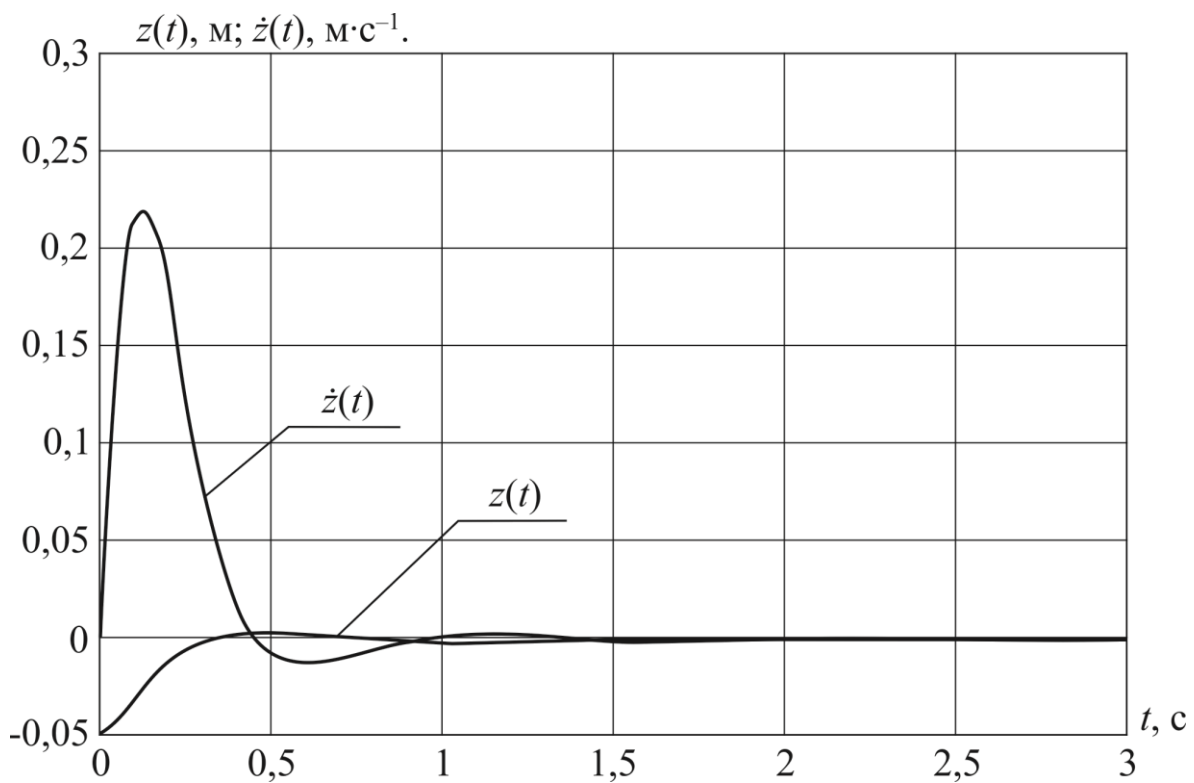


Рис. 2.2.а. Рішення системи (2.1)

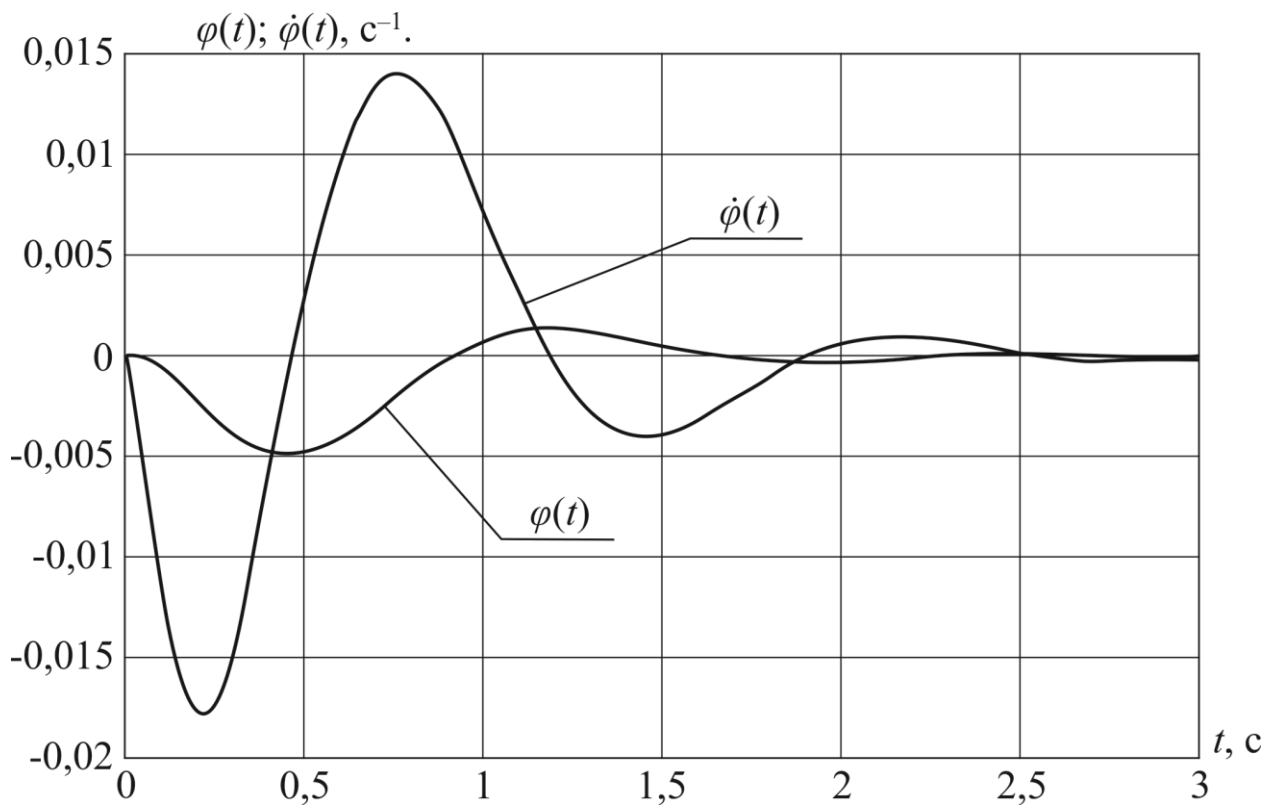


Рис. 2.2.б. Рішення системи (2.1)

Аналіз рисунку 2.1 та рисунку 2.2 приводить до висновку, що власні коливання системи (2.1) носять затухаючий характер.

## 2.2. Вимушені коливання лінійних систем з двома ступенями свободи.

Будемо вважати, що мікропрофіль поверхні руху автомобіля являється синусоїдальною, тобто в рівняннях (1.55) покладемо

$$h(t) = \frac{H}{2} \sin \omega t, \quad (2.6)$$

де  $H$  – амплітуда,  $\omega$  – частота синусоїдального профілю.

Продиференціюємо співвідношення (2.6) за часом

$$\dot{h} = \frac{H\omega}{2} \cos \omega t. \quad (2.7)$$

З урахуванням співвідношень (2.6) і (2.7) математична модель збуреного руху підресореної частини корпусу автомобіля (1.55) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \ddot{z}(t) + m\dot{z}(t) + az(t) + q\dot{\varphi}(t) + b\varphi(t) = \\ & = \frac{cH}{M_n} \sum_{i=1}^3 \sin \omega \left( t + \frac{l_i}{v} \right) + \frac{\mu H \omega}{M_n} \sum_{i=1}^3 \cos \omega \left( t + \frac{l_i}{v} \right); \\ & \ddot{\varphi}(t) + s\dot{\varphi}(t) + d\varphi(t) + rz(t) + fz(t) = \\ & = \frac{cH}{I_y} \sum_{i=1}^3 l_i \sin \omega \left( t + \frac{l_i}{v} \right) + \frac{\mu H \omega}{I_y} \sum_{i=1}^3 l_i \cos \omega \left( t + \frac{l_i}{v} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Систему (2.8) запишемо у векторно-матричній формі

$$\dot{X}(t) = AX(t) + F(t),$$

де  $X(t)$  – вектор стану динамічної системи;  $A$  – власна матриця системи;  $F(t)$  – вектор зовнішніх збурень.

Матриця  $A$  має вигляд (2.3), а вектор  $F(t)$  записується

$$F(t) = \begin{bmatrix} \frac{H}{M_n} \left[ c \sum_{i=1}^3 \sin \omega \left( t + \frac{l_i}{v} \right) + \mu \omega \sum_{i=1}^3 \cos \omega \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] \\ \frac{H}{I_y} \left[ c \sum_{i=1}^3 l_i \sin \omega \left( t + \frac{l_i}{v} \right) + \mu \omega \sum_{i=1}^3 l_i \cos \omega \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

На рисунку 2.3 приведені коливальні процеси, які побудовані за допомогою програмного пакету Simulink і описуються системою диференціальних рівнянь четвертого порядку (2.8).

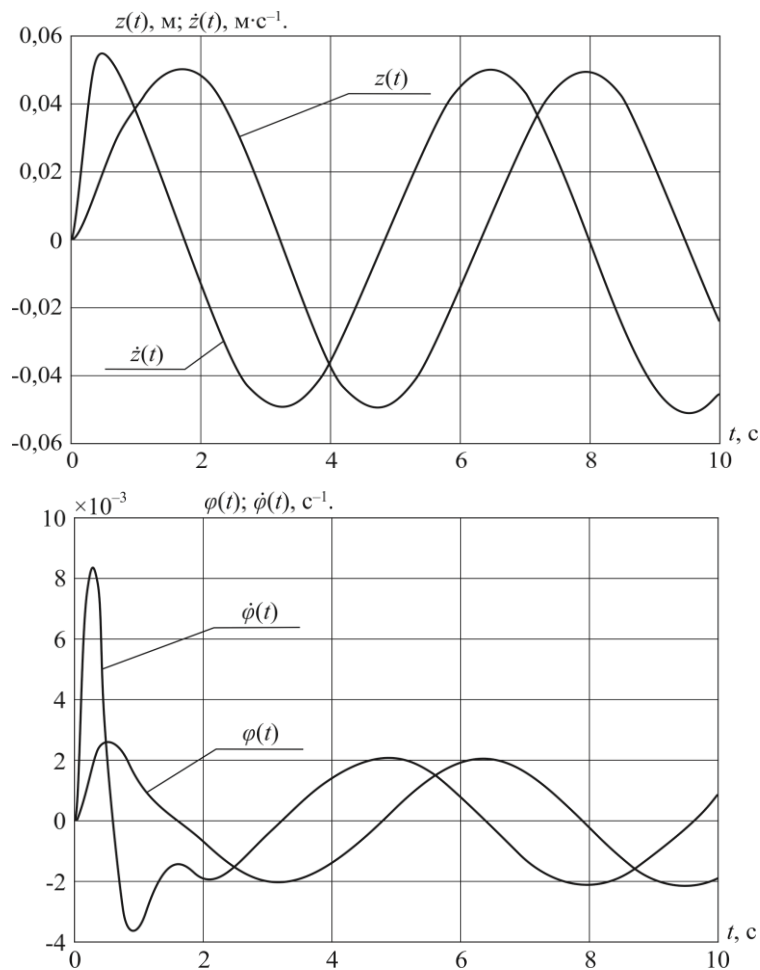
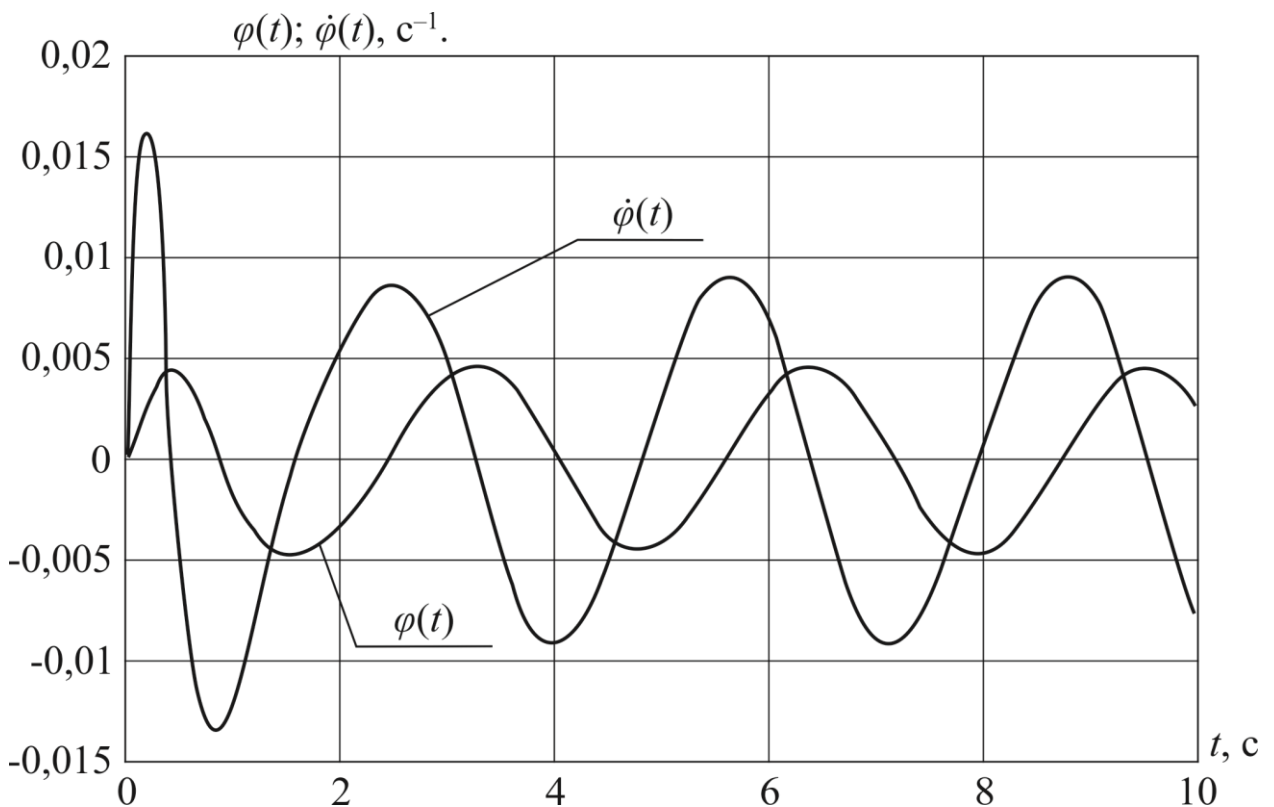
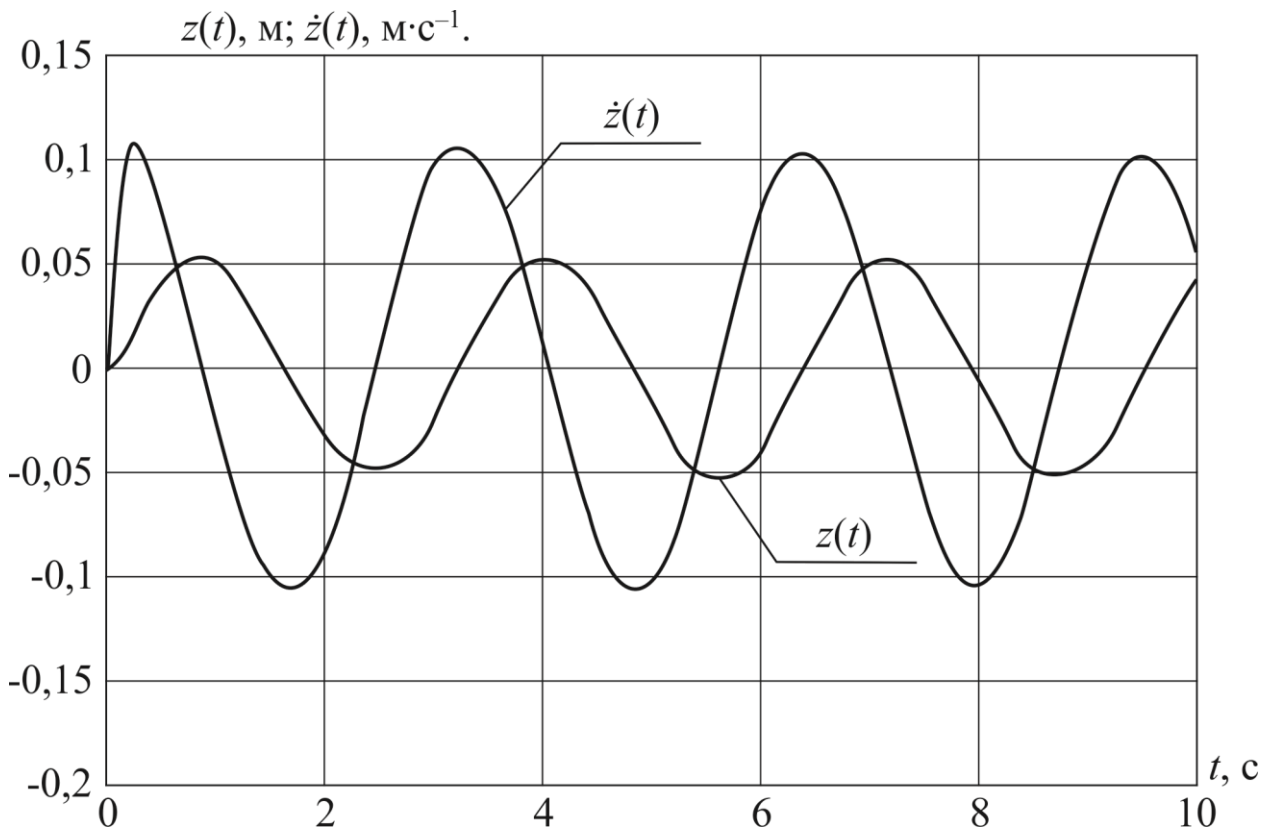
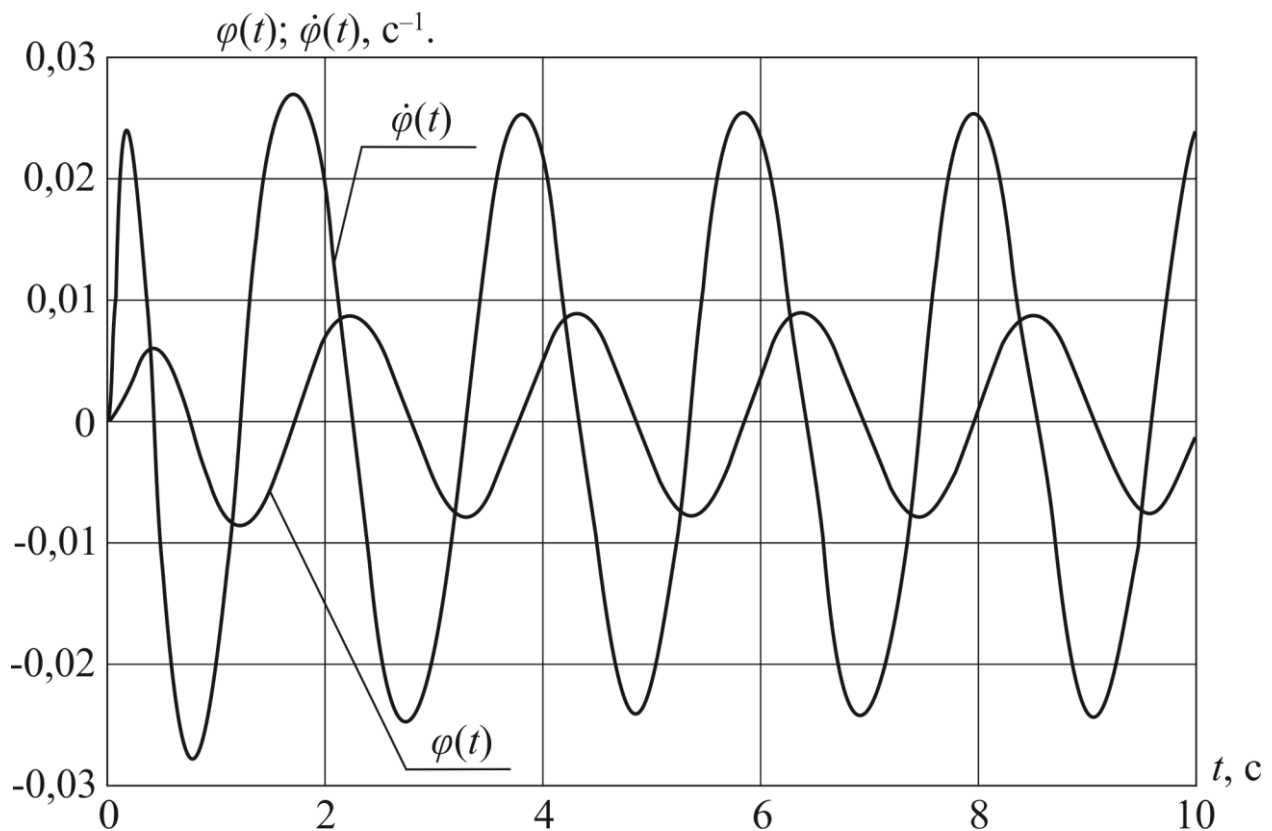
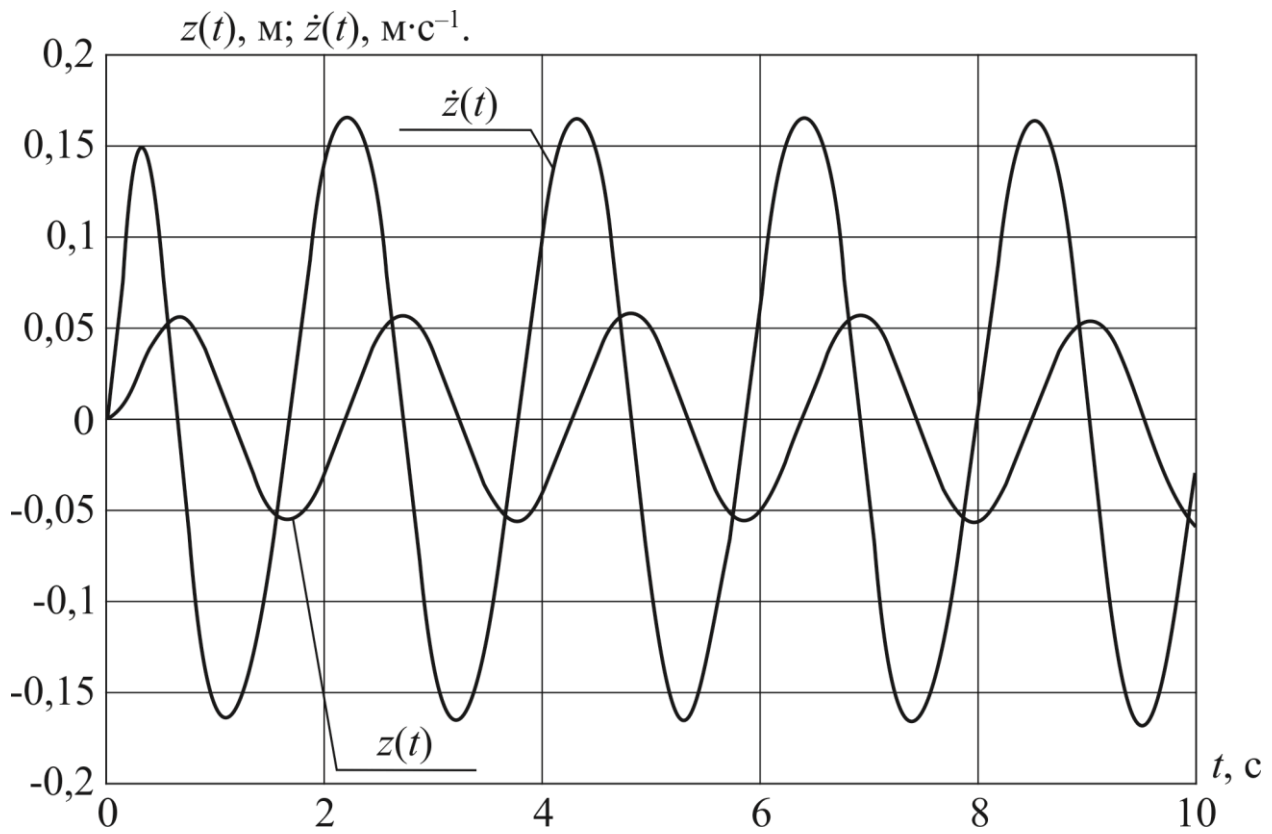


Рис. 2.3.а. Процеси вимушених коливань підресореної частини корпусу автомобіля, які відповідають частоті синусоїдального профілю  $\omega = 1 \text{ c}^{-1}$ ;



**Рис. 2.3.б. Процеси вимушених коливань підресореної частини корпусу автомобіля, які відповідають частоті синусоїдального профілю  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ ;**



**Рис. 2.3.в. Процеси вимушених коливань підресореної частини корпусу автомобіля, які відповідають частоті синусоїдального профілю  $\omega = 3 \text{ с}^{-1}$ .**

Аналіз рисунку 2.3 приводить до висновку, що власні коливання підресореної частини корпусу автомобіля досить швидко затухають, а в системі встановлюються вимушені коливання з частотою  $\omega$ , яка визначається синусоїдальним профілем нерівностей шляху і швидкістю руху автомобіля.

### 2.3. Випадкові коливання лінійних систем з двома ступенями свободи.

Повернемося до розгляду динамічної системи (1.55), яка описує випадкові вимушені коливання підресореної частини автомобіля. При розробці математичної моделі системи (1.55) біло зроблено припущення, що випадковий мікропрофіль поверхні руху за лівим і правим бортами автомобіля однаковий, що дозволило нам проаналізувати вимушені вертикальні і подовжньо-кутові коливання підресореної частини корпусу автомобіля. Вказане припущення дозволяє виключити з розгляду поперечно-кутові коливання підресореної частини корпусу. Але поперечно-кутові коливання підресореної частини корпусу автомобіля на практиці обов'язково виникають саме тому, що випадковий мікропрофіль поверхні руху за правим і лівим бортами різний і описується випадковими функціями часу  $h_{kп}(t)$  і  $h_{lл}(t)$  ( $k, l = \overline{1, N}$ ), які являються рішеннями диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} T_1^2 \ddot{h}_{ki}(t) + T_2 \dot{h}_{ki}(t) + h_{ki}(t) &= k \xi_{ki}(t); \\ (k &= \overline{1, N}); \\ T_1^2 \ddot{h}_{l\bar{e}}(t) + T_2 \dot{h}_{l\bar{e}}(t) + h_{l\bar{e}}(t) &= k \xi_{l\bar{e}}(t); \\ (l &= \overline{1, N}). \end{aligned} \tag{2.10}$$

В роботах для дослідження плавності ходу багатоопорного транспортного засобу, що містить по кожному з бортів 3 ресори і 3 амортизатори, використовується наступна математична модель збуреного руху його підресореної частини:

$$\begin{aligned}
& \ddot{z}_{kl}(t) + \frac{6\mu}{M_n} \dot{z}_{kl}(t) + \frac{6c}{M_n} z_{kl}(t) + \frac{2\mu}{M_n} \sum_{j=1}^3 l_j \dot{\phi}_{kl}(t) + \\
& + \frac{2c}{M_n} \sum_{i=1}^3 l_i \phi_{kl}(t) = \frac{c}{M_n} \left[ \sum_{i=1}^3 h_{ki} \left( t + \frac{l_i}{v} \right) + \sum_{i=1}^3 h_{le} \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] + \\
& + \frac{\mu}{M_n} \left[ \sum_{j=1}^3 \dot{h}_{ki} \left( t + \frac{l_j}{v} \right) + \sum_{j=1}^3 \dot{h}_{le} \left( t + \frac{l_j}{v} \right) \right]; \\
& \ddot{\phi}_{kl}(t) + \frac{2\mu}{I_y} \sum_{j=1}^3 l_j^2 \dot{\phi}_{kl}(t) + \frac{2c}{I_y} \sum_{i=1}^3 l_i^2 \phi_{kl}(t) + \frac{2\mu}{I_y} \sum_{j=1}^3 l_j \dot{z}_{kl}(t) + \\
& + \frac{2c}{I_y} \sum_{i=1}^3 l_i z_{kl}(t) = \frac{c}{I_y} \left[ \sum_{i=1}^3 l_i h_{ki} \left( t + \frac{l_i}{v} \right) + \sum_{i=1}^3 l_i h_{le} \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] + \\
& + \frac{\mu}{I_y} \left[ \sum_{j=1}^3 l_j \dot{h}_{ki} \left( t + \frac{l_j}{v} \right) + \sum_{j=1}^3 l_j \dot{h}_{le} \left( t + \frac{l_j}{v} \right) \right]; \\
& \ddot{\theta}_{kl}(t) + \frac{3\mu B^2}{2I_x} \dot{\theta}_{kl}(t) + \frac{3cB^2}{2I_x} \theta_{kl}(t) = \\
& = \frac{cB}{2I_x} \left[ \sum_{i=1}^3 h_{ki} \left( t + \frac{l_i}{v} \right) - \sum_{i=1}^3 h_{le} \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] + \\
& + \frac{\mu B}{2I_x} \left[ \sum_{j=1}^3 \dot{h}_{ki} \left( t + \frac{l_j}{v} \right) - \sum_{j=1}^3 \dot{h}_{le} \left( t + \frac{l_j}{v} \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Система диференціальних рівнянь (2.11) шостого порядку відрізняється від системи диференціальних рівнянь (1.55) четвертого порядку присутністю додаткового диференціального рівняння відносно узагальненої координати  $\theta(t)$ , яка представляє собою кут повороту підресореної частини корпусу автомобіля відносно її власної центральної вісі інерції  $OX$ , яка перпендикулярна вісям  $OZ$  та  $OY$ , що представлені на рисунку 1.1 та рисунку 1.2. Якщо мікропрофіль поверхні руху по лівому і правому бортам автомобіля однаковий, то права частина третього диференціального рівняння системи (2.11) дорівнює нулю, що

свідчить про відсутність поперечно-кутових коливань підресореної частини корпусу автомобіля.

Введемо в розгляд вектор стану десятого порядку

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \\ x_8(t) \\ x_9(t) \\ x_{10}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{kl}(t) \\ \dot{z}_{kl}(t) \\ \varphi_{kl}(t) \\ \dot{\varphi}_{kl}(t) \\ \theta_{kl}(t) \\ \dot{\theta}_{kl}(t) \\ h_{k\bar{i}}(t) \\ \dot{h}_{k\bar{i}}(t) \\ h_{l\bar{e}}(t) \\ \dot{h}_{l\bar{e}}(t) \end{bmatrix}.$$

З урахуванням введених раніше позначень (1.13) і (1.20), а також з урахуванням нових позначень

$$u = \frac{3\mu B^2}{2I_x}; \quad w = \frac{3cB^2}{2I_x},$$

система диференціальних рівнянь (2.11), (2.10) може бути записана в нормальній формі Коші

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -mx_2(t) - ax_1(t) - qx_4(t) - bx_3(t) + \\ &+ \frac{c}{M_n} \left[ \sum_{i=1}^3 x_7 \left( t + \frac{l_i}{v} \right) + \sum_{i=1}^3 x_9 \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] + \\ &+ \frac{\mu}{M_n} \left[ \sum_{j=1}^3 x_8 \left( t + \frac{l_j}{v} \right) + \sum_{j=1}^3 x_{10} \left( t + \frac{l_j}{v} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_3(t) &= x_4(t); \\ \dot{x}_4(t) &= -sx_4(t) - dx_3(t) - rx_2(t) - fx_1(t) + \\ &+ \frac{c}{I_y} \left[ \sum_{i=1}^3 l_i x_7 \left( t + \frac{l_i}{v} \right) + \sum_{i=1}^3 l_i x_9 \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] + \\ &+ \frac{\mu}{I_y} \left[ \sum_{j=1}^3 l_j x_8 \left( t + \frac{l_j}{v} \right) + \sum_{j=1}^3 l_j x_{10} \left( t + \frac{l_j}{v} \right) \right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_5(t) &= x_6(t); \\ \dot{x}_6(t) &= -ux_6(t) - wx_5(t) +\end{aligned}\tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}&+ \frac{cB}{2I_x} \left[ \sum_{i=1}^3 x_7 \left( t + \frac{l_i}{v} \right) - \sum_{i=1}^3 x_9 \left( t + \frac{l_i}{v} \right) \right] + \\ &+ \frac{\mu B}{2I_x} \left[ \sum_{j=1}^3 x_8 \left( t + \frac{l_j}{v} \right) - \sum_{j=1}^3 x_{10} \left( t + \frac{l_j}{v} \right) \right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_7(t) &= x_8(t); \\ \dot{x}_8(t) &= -\frac{1}{T_1^2} x_7(t) - \frac{T_2}{T_1^2} x_8(t) + \frac{k}{T_1^2} \xi_{ki}(t); \quad (k = \overline{1, N}); \\ \dot{x}_9(t) &= x_{10}(t); \\ \dot{x}_{10}(t) &= -\frac{1}{T_1^2} x_9(t) - \frac{T_2}{T_1^2} x_{10}(t) + \frac{k}{T_1^2} \xi_{l\bar{l}}(t); \quad (l = \overline{1, N})\end{aligned}$$

На рисунку 2.4 приведені випадкові процеси вимушених коливань підресореної частини автомобіля при нульових початкових умовах і різних швидкостях руху автомобіля.

Аналіз випадкових коливальних процесів, що приведені на рис. 2.4, свідчить про підвищення середньої частоти і зменшенню середньої амплітуди коливань корпусу автомобіля із збільшенням швидкості руху по випадковій поверхні.

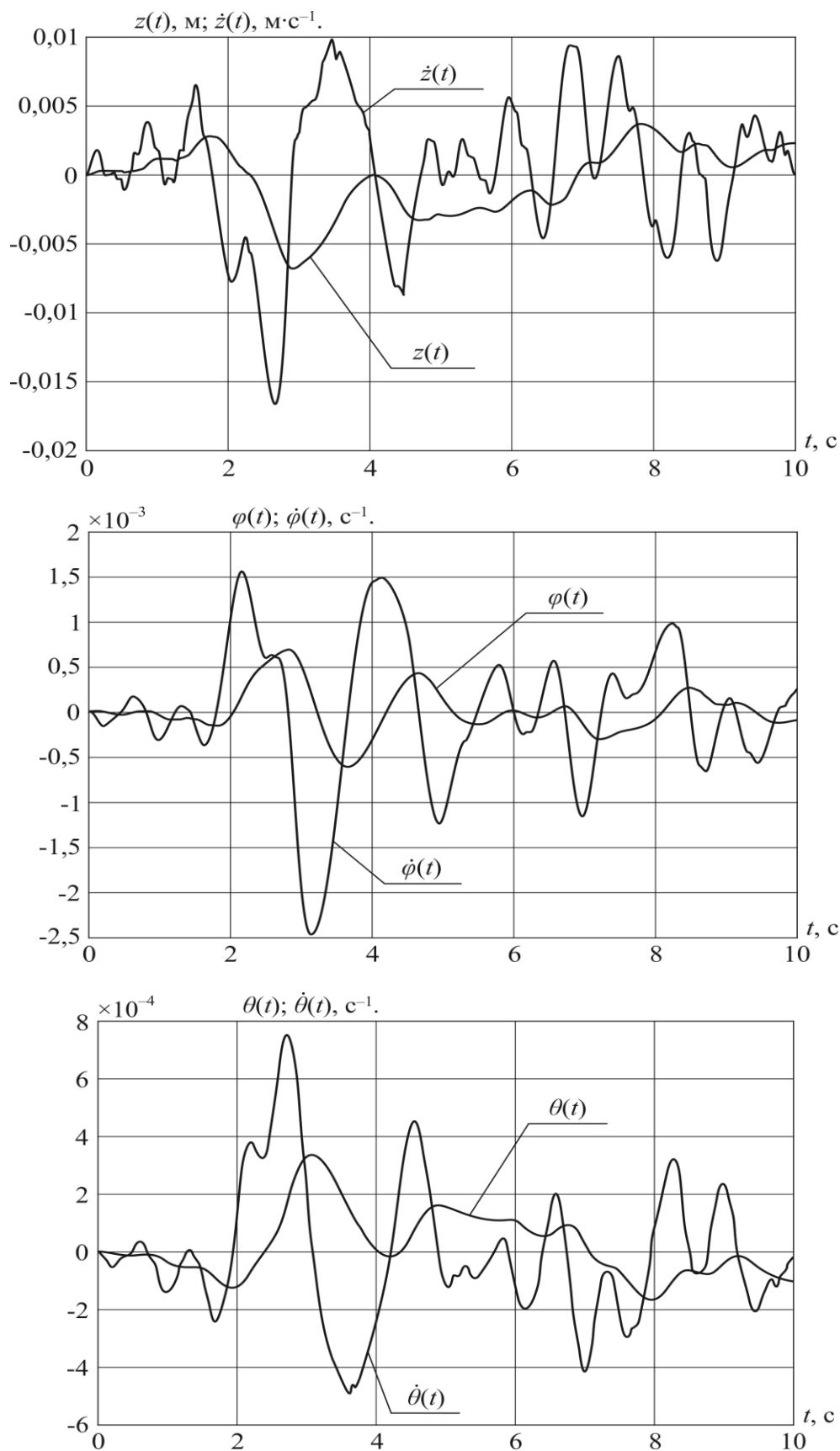


Рис. 2.4.а. Випадкові коливальні процеси підресореної частини корпусу автомобіля, які відповідають швидкості руху  $v = 5 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$

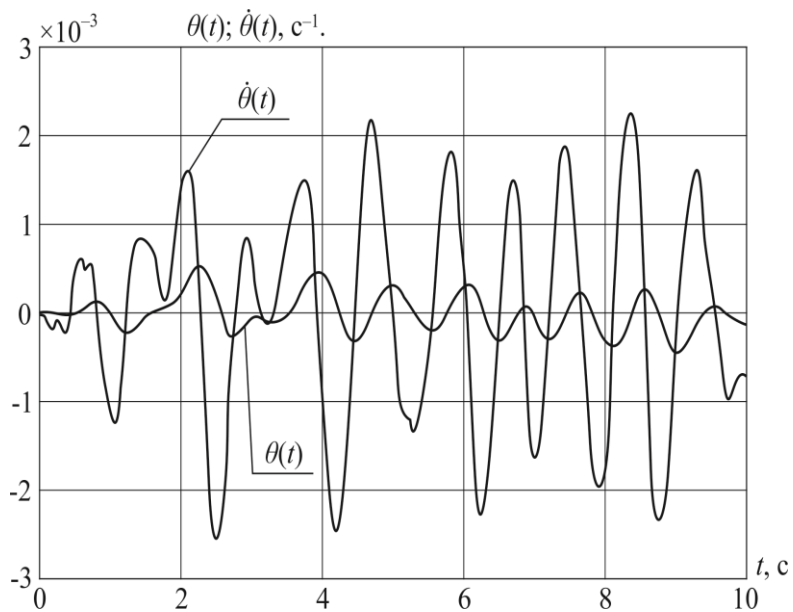
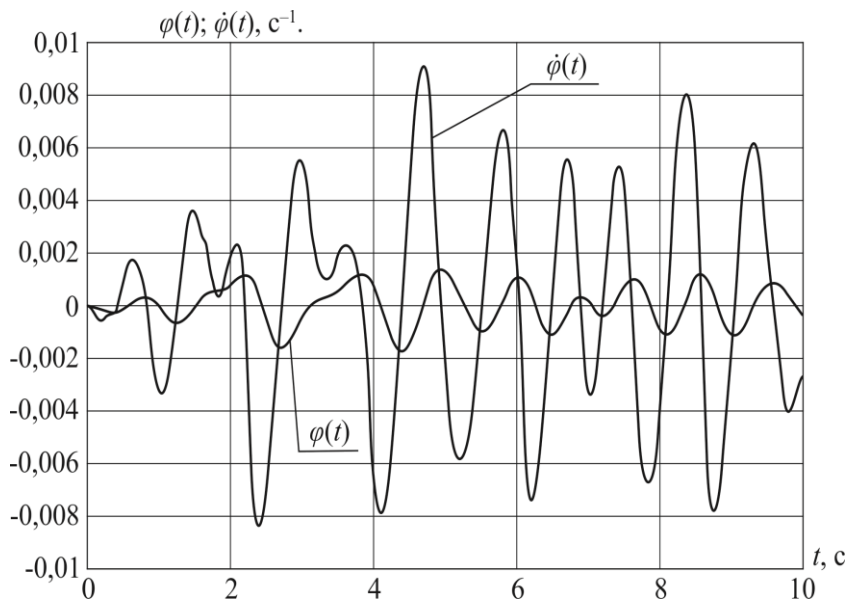
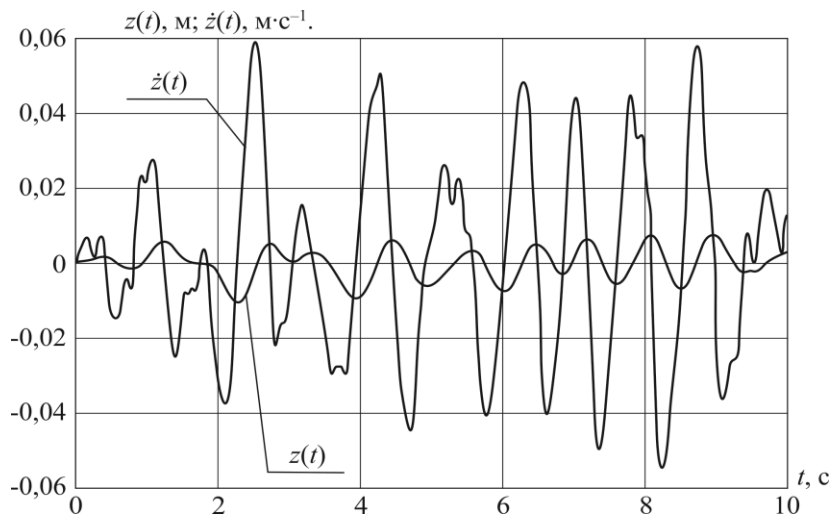
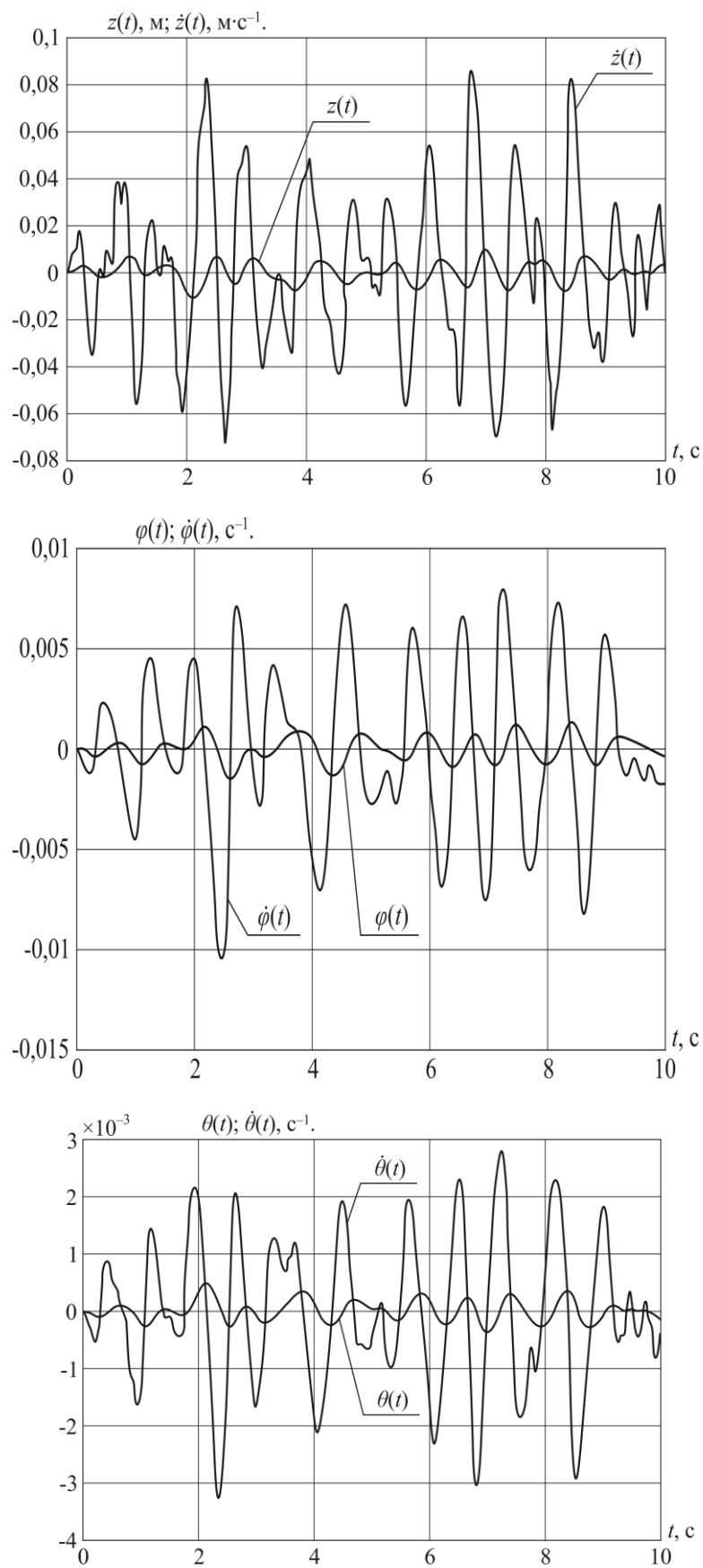


Рис. 2.4.б. Випадкові коливальні процеси підресореної частини корпусу автомобіля, які відповідають швидкості руху  $v = 15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$



**Рис. 2.4.в. Випадкові коливальні процеси підресореної частини корпусу автомобіля, які відповідають швидкості руху  $v = 25 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$**

## Контрольні запитання до розділу 2.

1. В чому різниця між коливальними системами з одним ступенем свободи і з двома ступенями свободи?
2. Опишіть процедуру приведення математичної моделі збуреного руху коливальної системи до нормальної форми Коші.
3. Дайте визначення вектору стану динамічної системи.
4. Дайте визначення власної матриці динамічної системи.
5. Дайте визначення характеристичного рівняння динамічної системи.
6. Перелічить узагальнені координати і узагальнені швидкості підресореної маси автомобіля.
7. У якому випадку спостерігається явище резонансу вимушених коливань підресореної частини корпусу автомобіля.

## Розділ 3

# КОЛИВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.

### 3.1. Основні нелінійності динамічних систем.

Теорія коливань лінійних динамічних систем набула істотного розвитку і широкого застосування в інженерній практиці. Пояснюється це, по-перше, тим, що для цього класу систем розроблені методи аналізу і синтезу, які мають достатню загальність та зручність для інженерних обчислень, по-друге, результати, які вдається отримати за допомогою лінеаризації динамічної системи, виявляються цілком задовільними, хоча й завідомо приблизними, і, по-третє, в останні десятиріччя, у зв'язку з бурхливим розвитком обчислювальної техніки і програмування, створено багато пакетів прикладних програм, зокрема, пакети MathLAB і MATCAD, які спрямовані на вирішення задач аналізу і синтезу динамічних систем, перед за все, лінійних. Здобуті за допомогою лінеаризації нелінійних динамічних систем результати можуть бути доведені, або спростовані практикою залежно від того наскільки значно впливають на динамічні процеси лінеаризовані нелінійності. Для детального і всебічного вивчення реальних технічних систем лінійні математичні моделі часто являються надто спрощеними. У таких випадках доцільним являється розгляд динамічних властивостей нелінійних математичних моделей, який стає можливим завдяки сучасним програмним продуктам.

Теорія нелінійних динамічних систем, яка ґрунтується на нелінійних математичних моделях збуреного руху таких систем, є значно ширшою галуззю науки, ніж теорія лінійних систем. Розгляд нелінійних математичних моделей дозволяє виявити суттєво нові явища, які можуть не спостерігатися у лінійних системах. Тут насамперед треба вказати на явище автоколивань, яке є періодичним рухом. Цей рух виникає не внаслідок зовнішніх періодичних діянь, а внаслідок власних динамічних властивостей самої системи. Проблема автоколивань у системах керування має велике практичне значення, але інколи, навпаки, їх використовують для поліпшення динамічних властивостей системи. У зв'язку з цим потрібно вміти визначати умови виникнення та параметри автоколивань.

Нелінійною динамічною системою називають таку систему, математична модель якої містить хоча б одне нелінійне диференціальне рівняння. Динамічна нелінійна система в загальному вигляді описується математичною моделлю, яка має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \varphi_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] + f_1(t); \\ \dot{x}_2(t) &= \varphi_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] + f_2(t); \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= \varphi_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] + f_n(t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

У векторно-матричному вигляді математична модель (3.1) записується

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t)] + F(t), \quad (3.2)$$

де вектор стану системи  $X(t)$ , вектор зовнішніх збурень  $F(t)$  і вектор-функція  $\Phi[X(t)]$  мають вигляд

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}; \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix};$$

$$\Phi[X(t)] = \begin{bmatrix} \varphi_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \\ \varphi_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \\ \vdots \\ \varphi_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \end{bmatrix}.$$

Більшість нелінійних динамічних систем може бути лінеаризована шляхом розкладання нелінійної вектор-функції  $\Phi[X(t)]$  в ряд Тейлора поблизу точки сталої рівноваги та

подальшого відкидання нелінійних членів розкладання внаслідок їх малих значень у порівнянні з лінійними членами розкладання.

Точка сталої рівноваги динамічної системи (3.1)  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$  знаходиться шляхом вирішення системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}\varphi_1[x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}] &= 0; \\ \varphi_2[x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}] &= 0; \\ \vdots & \\ \varphi_n[x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}] &= 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Введемо в розгляд відносні узагальнені координати динамічної системи (3.1)

$$y_i(t) = x_i(t) - \overline{x_{i0}}; \quad (i = \overline{1, n}).\tag{3.4}$$

Як правило, при побудові математичної моделі збуреного руху динамічної системи (3.1) її узагальнені координати обирають таким чином, щоб їх значення у стані сталої рівноваги дорівнювали нулю

$$\overline{x_{i0}} = 0; \quad (i = \overline{1, n}).\tag{3.5}$$

Тоді, у відповідності до (3.5), маємо

$$y_i(t) = x_i(t); \quad (i = \overline{1, n}),$$

а математична модель лінеаризованої динамічної системи (3.2) отримує вигляд

$$\dot{X}(t) = \left( \frac{\partial \Phi[X(t)]}{\partial X} \right)_0 X(t) + F(t),\tag{3.6}$$

де кожен з елементів власної матриці лінеаризованої динамічної системи (3.6)

$$A = \left( \frac{\partial \Phi[X(t)]}{\partial X} \right)_0$$

дорівнює

$$a_{ij} = \left[ \frac{\partial \varphi_i[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]}{\partial x_j(t)} \right]_0 \quad (3.7)$$

і представляє собою похідну від  $i$ -тої компоненти вектор-функції  $\Phi[X(t)]$  по  $j$ -тій компоненті вектора стану динамічної системи, обчислену в точці сталої рівноваги.

В результаті математична модель збуреного руху лінеаризованої динамічної системи (3.6) записується

$$\dot{X}(t) = AX(t) + F(t). \quad (3.8)$$

Систему диференціальних рівнянь (3.8) назвемо системою першого наближення відносно системи (3.2), або (3.1).

Однак існують нелінійні динамічні системи, лінеаризація яких шляхом розкладання нелінійної вектор-функції  $\Phi[X(t)]$  в ряд Тейлора і подальшого відкидання нелінійних членів розкладання, неможлива. Це стосується неаналітичних вектор-функцій  $\Phi[X(t)]$ . Прикладом таких систем являються система підресорювання автомобіля із фрикційними амортизаторами і релейна система автоматичного керування температури охолоджуючої рідини, робота яких буде розглянута в наступних підрозділах.

Розглянемо коливальну систему з тертям, в якій характеристика тертя описується нелінійною функцією узагальненої швидкості

$$F[\dot{q}(t)] = -a_1 \dot{q}(t) + a_3 \dot{q}^3(t). \quad (3.9)$$

Вигляд функції (3.9) приведений на рисунку 3.1.

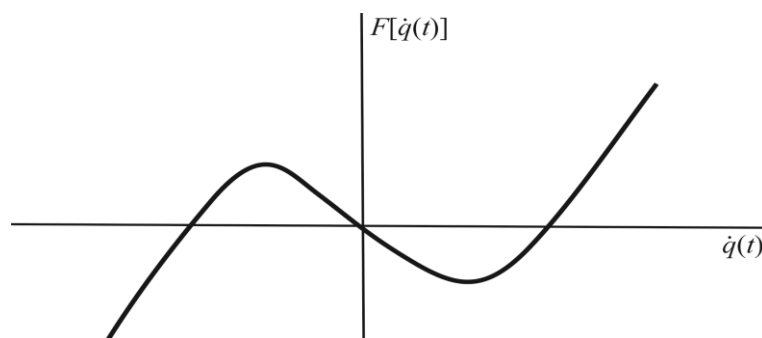


Рис. 3.1. Вигляд нелінійної функції тертя

Збурений рух коливальної системи, що розглядається описується диференціальним рівнянням Релея

$$\ddot{q}(t) - a_1 \dot{q}(t) + a_3 \dot{q}^3(t) + cq(t) = 0. \quad (3.10)$$

Покладемо  $a_1 > 0$  і  $a_3 > 0$ , і запишемо нелінійне рівняння (3.10) другого порядку в нормальній формі Коші, тобто у вигляді системи двох диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього введемо у розгляд вектор стану другого порядку

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}.$$

В результаті маємо

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -cx_1(t) + a_1 x_2(t) - a_3 x_2^3(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

На рисунку 3.2 приведені рішення системи диференціальних рівнянь при різних початкових умовах  $x_1(0) = x_{10} = 0, 1$ ;  $x_2(0) = 0$ .

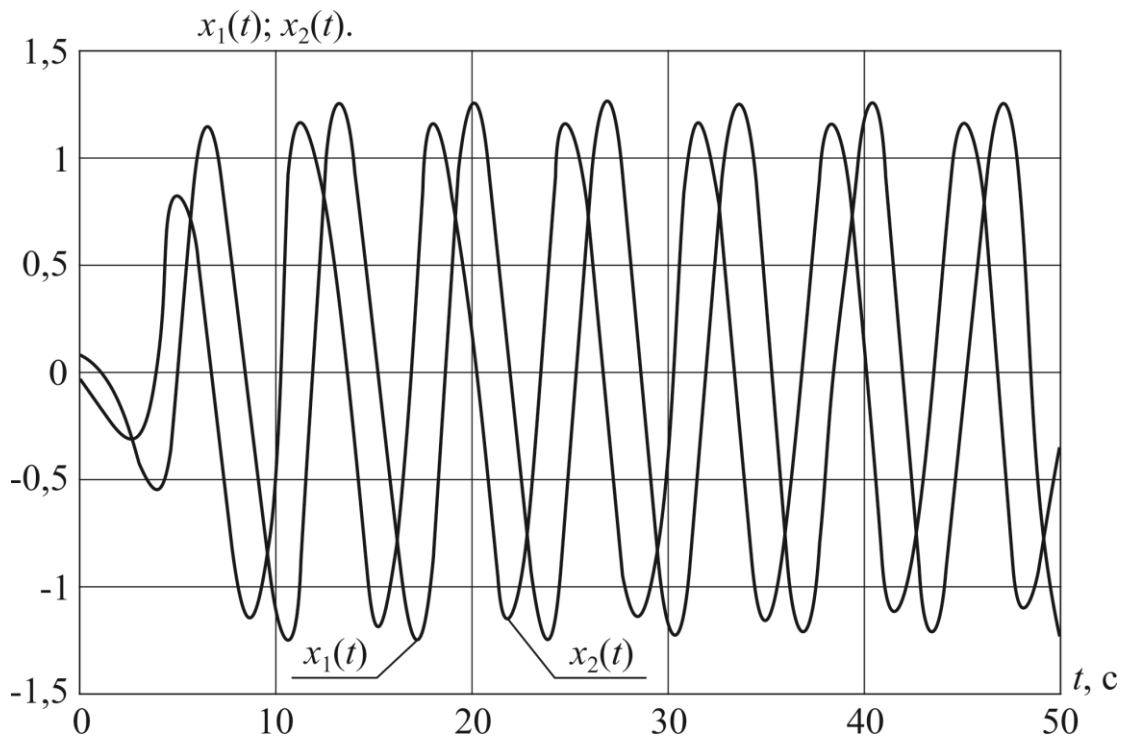
Розглянемо рівняння Ван-дер-Поля

$$\ddot{q}(t) - \mu[1 - q^2(t)]\dot{q}(t) + cq(t) = 0. \quad (3.12)$$

Рівняння (3.12) приведемо до нормальної форми Коші

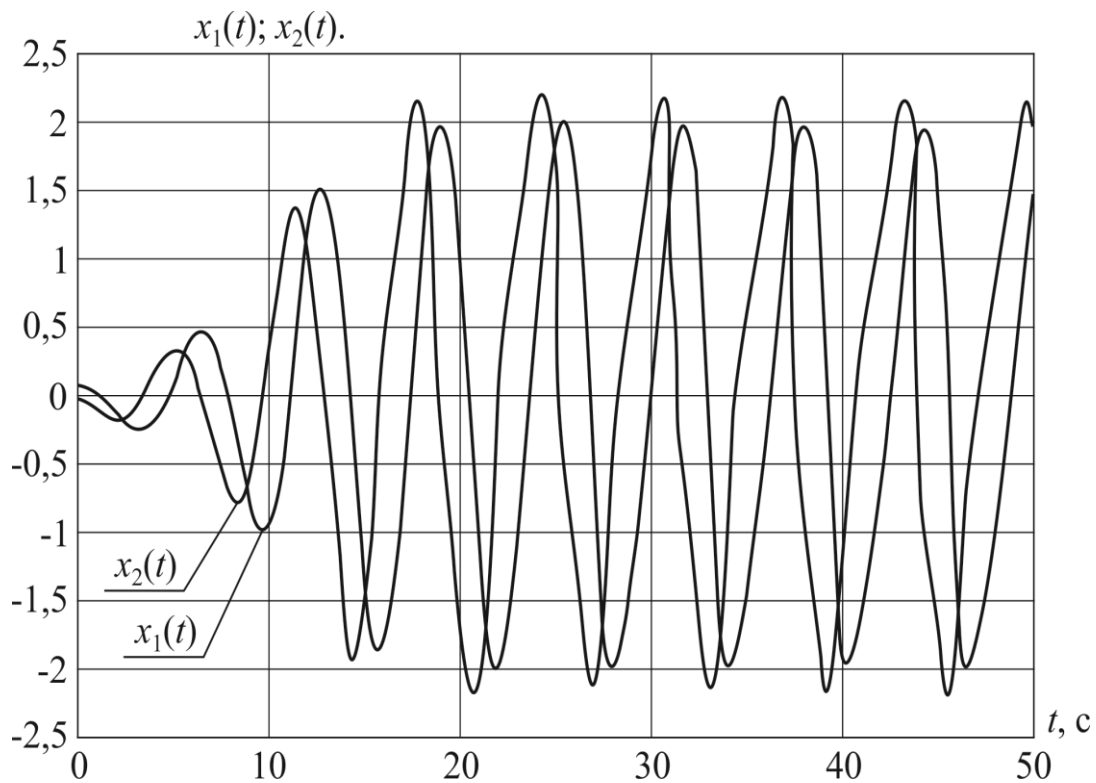
$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -cx_1(t) + \mu[1 - x_1^2(t)]x_2(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$



**Рис. 3.2. Коливальні процеси в нелінійній динамічній системі (3.11)**

На рисунку 3.3 приведені рішення рівняння Ван-дер-Поля, отримані шляхом інтегрування системи (3.13) методом Рунге-Кутта, реалізованого програмним пакетом MathLAB.



**Рис. 3.3. Коливальні процеси системи (3.13)**

### 3.2. Метод гармонічної лінеаризації нелінійностей.

У попередньому підрозділі розглядалися коливання нелінійних динамічних систем з аналітичними нелінійностями. В таких системах можуть виникати незатухаючі коливання, або так звані граничні цикли з постійною амплітудою коливань. Такі коливання відносяться до стаціонарних режимів, або режимів автоколивань.

Але більшість технічних динамічних систем містять неаналітичні нелінійності, які описуються неаналітичними функціями.

В таких системах, як правило, виникають автоколивання, параметри яких визначаються за допомогою методу гармонічної лінеаризації, який полягає в наступному.

Уявимо нелінійну динамічну систему у вигляді сполучених між собою лінійної (ЛЧ) та нелінійної (НЧ) частин (рис. 3.4).

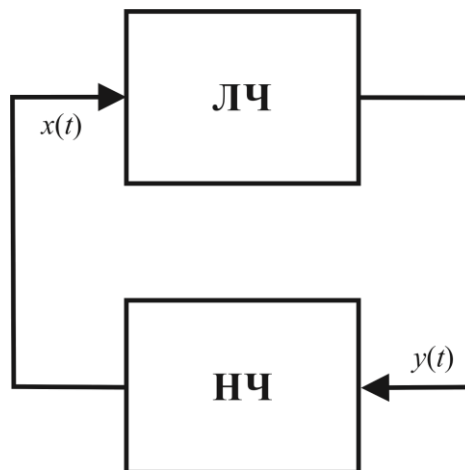


Рис. 3.4. Нелінійна динамічна система

Припустимо, що до входу лінійної частини динамічної системи подається несинусоїдальне періодичне діяння  $x(t)$ . Це діяння може бути представлено у вигляді тригонометричного ряду Фур'є. Звичайно лінійна частина системи, збурений рух якої описується лінійним диференціальним рівнянням

$$A(p)y(t) = C(p)x(t), \quad (3.14)$$

є фільтром високочастотних коливань, тобто амплітуди вищих гармонік вхідного сигналу  $x(t)$  при проходженні крізь лінійну частину динамічної системи зменшуються у багато разів. Дійсно, передавальна функція ЛЧ представляє собою відношення

перетворення Лапласу  $L\{y(t)\}$  вихідного сигналу  $y(t)$  до перетворення Лапласу  $L\{x(t)\}$  вхідного сигналу  $x(t)$  ЛЧ. Диференціальне рівняння (3.14) перетворимо за Лапласом

$$A(s)Y(s) = C(s)X(s), \quad (3.15)$$

де  $s$  – комплексна змінна перетворення Лапласу;

$$Y(s) = L\{y(t)\};$$

$$X(s) = L\{x(t)\}.$$

Передавальна функція лінійної частини динамічної системи записується у вигляді

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{C(s)}{A(s)}. \quad (3.16)$$

У співвідношенні (3.16) здійснимо заміну

$$s = j\omega.$$

В результаті отримуємо співвідношення для частотної функції ЛЧ

$$W_{\ddot{E} \times}(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{A(j\omega)} = U_{\ddot{E} \times}(\omega) + jV_{\ddot{E} \times}(\omega); \quad (3.17)$$

де  $U_{\text{лч}}(\omega)$  і  $V_{\text{лч}}(\omega)$  – дійсна та уявна частини частотної передавальної функції (3.17). Тоді амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) ЛЧ визначається співвідношенням

$$M_{\ddot{E} \times}(\omega) = \sqrt{U_{\ddot{E} \times}^2(\omega) + V_{\ddot{E} \times}^2(\omega)}. \quad (3.18)$$

Як правило, АЧХ лінійної частини динамічної системи має вигляд, приведений на рис. 3.5, де через  $\omega_1$  позначена частота першої гармоніки несинусоїдального сигналу  $x(t)$ .

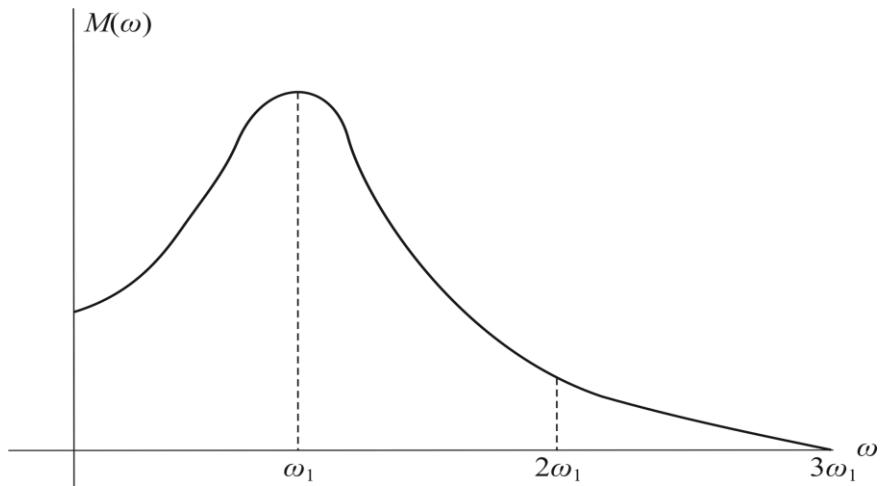


Рис. 3.5. АЧХ лінійної частини системи

Отже вищими гармоніками вихідного сигналу ЛЧ  $y(t)$  можна знехтувати, залишивши тільки першу гармоніку

$$y(t) = A \cdot \sin \omega t, \quad (3.19)$$

де  $A$  і  $\omega$  – відповідно шукані амплітуда і частота періодичного руху.

Якщо до входу нелінійної частини системи НЧ, поведінка якої описується рівнянням

$$x(t) = F[y(t), \dot{y}(t)], \quad (3.20)$$

де  $F[y(t), \dot{y}(t)]$  – нелінійна неаналітична функція своїх аргументів, поданий сигнал (3.19), то вихідний сигнал  $x(t)$  є періодичною несинусоїдальною функцією часу, яка може бути наданою у вигляді тригонометричного ряду Фур'є

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t + \dots \quad (3.21)$$

Коефіцієнти ряду (3.21) обчислюються відповідно до формул

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F[A \sin \omega t, A\omega \cos \omega t] \cos k\omega t d\omega t; \quad (3.22)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F[A \sin \omega t, A\omega \cos \omega t] \sin k\omega t d\omega t.$$

Позначимо  $\varphi = \omega t$  і запишемо співвідношення (3.22) у вигляді

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F[A \sin \varphi, A \omega \cos \varphi] \cos k\varphi d\varphi; \quad (3.23)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F[A \sin \varphi, A \omega \cos \varphi] \sin k\varphi d\varphi. \quad (3.24)$$

Вищі гармоніки ряду Фур'є (3.21) з частотами  $2\omega, 3\omega, \dots, k\omega, \dots$  відкинемо, у зв'язку з тим, що вони погано пропускаються лінійною частиною системи і мало впливають на вихідний сигнал лінійної частини

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F[A \sin \varphi, A \omega \cos \varphi] \cos \varphi d\varphi \cos \omega t + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F[A \sin \varphi, A \omega \cos \varphi] \sin \varphi d\varphi \sin \omega t = \\ &= \frac{a_0}{2} + A[q(A) \sin \omega t + q_1(A) \cos \omega t], \end{aligned} \quad (3.25)$$

де величини  $q(A)$  і  $q_1(A)$ , які називаються коефіцієнтами гармонічної лінеаризації, визначаються співвідношеннями

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F[A \sin \varphi, A \omega \cos \varphi] \sin \varphi d\varphi; \quad (3.26)$$

$$q_1(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F[A \sin \varphi, A \omega \cos \varphi] \cos \varphi d\varphi. \quad (3.27)$$

Похідна вхідного сигналу нелінійної частини динамічної системи за часом дорівнює

$$\frac{dy(t)}{dt} = py(t) = A\omega \cos \omega t. \quad (3.28)$$

Тоді, у відповідності із співвідношеннями (3.19) і (3.28), отримуємо

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \left[ q(A)y(t) + \frac{q_1(A)}{\omega} py(t) \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \left[ q(A) + \frac{q_1(A)}{\omega} p \right] y(t). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Отже, рівняння нелінійної ланки (3.20) набуло вигляд лінійного рівняння (3.29). Операція переходу від нелінійного рівняння (3.20) до лінійного (3.29) називається гармонічною лінеаризацією. Характерною особливістю методу гармонічної лінеаризації є залежність коефіцієнтів  $q(A)$  і  $q_1(A)$  від невідомої амплітуди періодичного рішення (3.19).

В праву частину диференціального рівняння (3.14) підставимо рівняння (3.29). В результаті отримаємо диференціальне рівняння збуреного руху замкненої гармонічно лінеаризованої динамічної системи, представленої на рисунку 3.5.

$$\left\{ A(p) - C(p) \left[ q(A) + \frac{q_1(A)}{\omega} p \right] \right\} y(t) = C(p) \frac{a_0}{2}. \quad (3.30)$$

Характеристичне рівняння, що відповідає диференціальному рівнянню (3.30), записується у вигляді

$$A(s) - C(s) \left[ q(A) + \frac{q_1(A)}{\omega} s \right] = 0. \quad (3.31)$$

В характеристичному рівнянні гармонічно лінеаризованої динамічної системи (3.31) здійснено заміну  $s = j\omega$

$$A(j\omega) - C(j\omega) [q(A) + jq_1(A)] = 0. \quad (3.32)$$

Співвідношення (3.32) перетворимо до вигляду

$$\frac{C(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{1}{q(A) + jq_1(A)}. \quad (3.33)$$

Ліва частина співвідношення (3.33) містить лише один з параметрів автоколиваний динамічної системи – частоту  $\omega$ ; права частина – тільки невідому амплітуду  $A$ . Крім того, ліва частина (3.33) представляє собою частотну передавальну функцію лінійної частини системи, яка може бути надана у вигляді (3.17), тобто у вигляді суми дійсної та уявної частин.

Права частина співвідношення (3.33) при  $0 \leq A \leq \infty$  описує у комплексній площині криву

$$\frac{1}{q(A) + jq_1(A)} = \frac{q(A)}{q^2(A) + q_1^2(A)} - j \frac{q_1(A)}{q^2(A) + q_1^2(A)}. \quad (3.31)$$

У комплексній площині ( $U$ ,  $V$ ) побудуємо криві, які описуються співвідношеннями (3.17) і (3.31) з позначками значень частоти на кривій (3.17) та значень амплітуди на кривій (3.34). У точці перетину кривих (якщо вона існує) визначимо значення амплітуди і частоти автоколиваний динамічної системи (рис. 3.6). Якщо точки перетину не існує, то періодичні режими в системі відсутні.

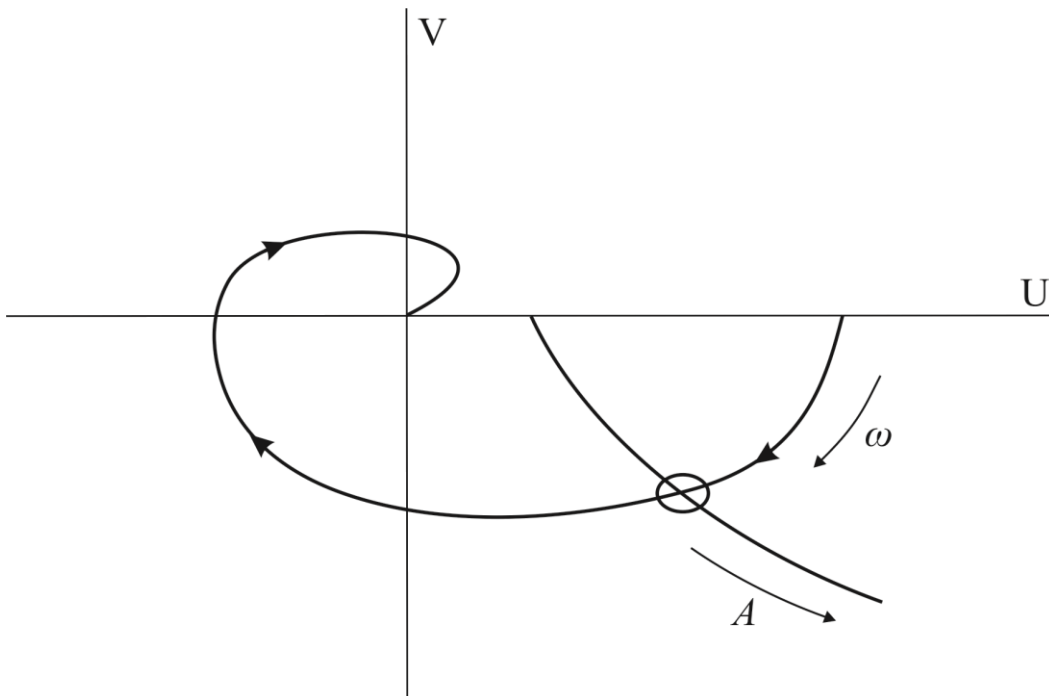


Рис. 3.6. Визначення параметрів автоколиваний нелінійної динамічної системи

### 3.3. Коливання корпусу автомобіля з торсіонною підвіскою і з фрикційними амортизаторами.

Розглянемо вимушені коливання корпусу автомобіля з незалежною торсіонною підвіскою і фрикційними амортизаторами. Для рішення цієї суттєво нелінійної задачі застосуємо метод гармонічної лінеаризації нелінійностей. В закордонних літературних джерелах в останній час з'являється інформація про застосування на автомобілях військового призначення фрикційних амортизаторів, що пояснюється успіхами, які досягнуті у створенні фрикційних матеріалів, відрізняються підвищеною зносостійкістю, високим і стабільним значенням коефіцієнта тертя. Конструкція фрикційного амортизатора достатньо проста, вона допускає ефективне сполучення з торсіонною підвіскою, тому проблема його використання в автомобілях військового призначення представляє безсумнівний практичний інтерес.

Статична характеристика  $i$ -того пружного елемента підвіски, що працює паралельно з фрикційним амортизатором, подана на рисунку 3.7.

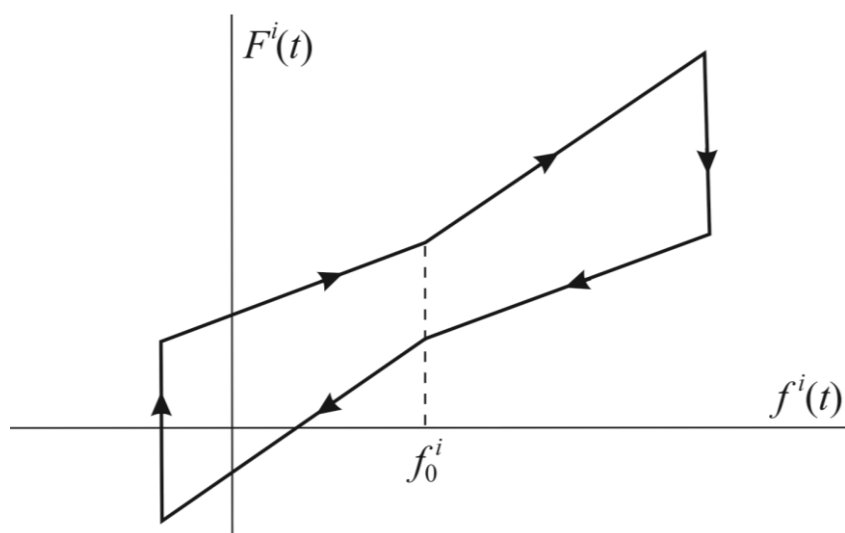


Рис. 3.7. Статична характеристика  $i$ -того елемента підвіски

Сумарна деформація  $i$ -того елемента підвіски може бути подана у вигляді

$$f^i(t) = f_0^i + f_\phi^i(t) + f_\delta^i(t), \quad (3.32)$$

де  $f_0^i$  – статична деформація  $i$ -того елемента підвіски;  $f_\varphi^i(t)$  – деформація  $i$ -того пружного елемента, обумовлена кутовим переміщенням корпусу автомобіля

$$f_\varphi^i(t) = l_i \varphi(t), \quad (3.33)$$

де  $\varphi(t)$  – узагальнена координата, що характеризує кутові переміщення корпусу;  $l_i$  – відстань від центру тяжіння корпусу до місця кріплення  $i$ -того торсіону;  $f_\delta^i(t)$  – деформація  $i$ -того пружного елемента, що викликана наїздом коліс на нерівності дороги

$$f_\delta^i(t) = -\delta_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (3.34)$$

де  $\delta_m$  – амплітуда нерівностей;  $\omega$  – частота повторення нерівностей;  $\psi_i$  – фаза вертикальних коливань  $i$ -того колеса, що дорівнює

$$\psi_i = 2\pi \frac{l_i}{a}, \quad (3.35)$$

де  $a$  – довжина хвилі нерівностей.

З урахуванням формул (3.33) і (3.34) динамічна деформація  $i$ -того пружного елемента підвіски записується у вигляді

$$\Delta f_i(t) = f_\varphi^i(t) + f_\delta^i(t) = l_i \varphi(t) - \delta_m \sin(\omega t + \psi_i). \quad (3.36)$$

Динамічне зусилля, що діє на корпус автомобіля з боку  $i$ -того пружного елемента, має вигляд

$$\Delta F^i(t) = F_\varphi^i(t) + F_\delta^i(t). \quad (3.37)$$

У відповідності з методом гармонічної лінеаризації нелінійну функцію  $F_\varphi^i(t)$  подамо у вигляді

$$F_\varphi^i(t) = - \left[ q^i(\varphi_m) + \frac{q_1^i(\varphi_m)}{\omega} p \right] l_i \varphi(t), \quad (3.38)$$

де  $\varphi_m$  – амплітуда вимушених коливань корпусу автомобіля.

Знак «мінус» в рівнянні (3.38) вказує на те, що зусилля з боку пружного елемента підвіски має знак, який являється протилежним знаку деформації.

У співвідношенні (3.38) через  $q^i(\varphi_m)$  і  $q_1^i(\varphi_m)$  позначені коефіцієнти гармонічної лінеаризації нелінійної функції  $F_\varphi^i(t)$ , для розрахунку яких побудуємо рисунок 3.8.

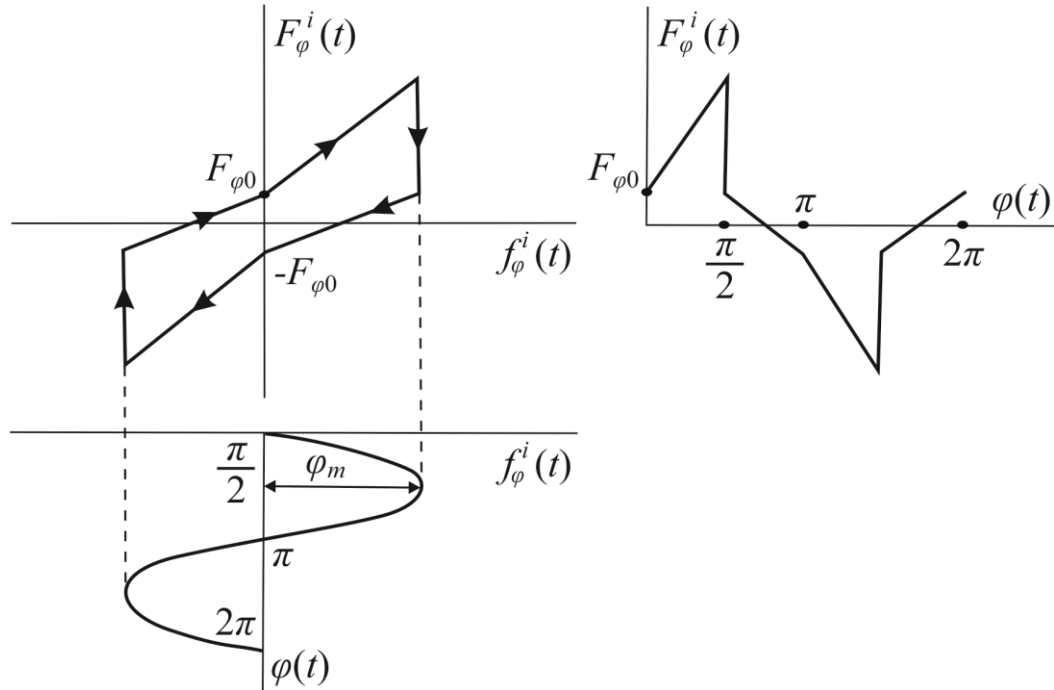


Рис. 3.8. До розрахунку коефіцієнтів гармонічної лінеаризації

У відповідності з формулами (3.26) і (3.27) обчислимо коефіцієнти гармонічної лінеаризації  $q^i(\varphi_m)$  і  $q_1^i(\varphi_m)$

$$q_\varphi^i(\varphi_m) = \frac{2}{\pi\varphi_m l_i} \int_0^{\pi/2} [F_{\varphi 0} + (c_\delta + c_\varphi)\varphi_m l_i \sin \theta] \sin \theta d\theta + \frac{2}{\pi\varphi_m l_i} \int_{\pi/2}^{\pi} [-F_{\varphi 0} + (c_\delta - c_\varphi)\varphi_m l_i \sin \theta] \sin \theta d\theta = c_\delta; \quad (3.39)$$

$$q_{1\varphi}^i(\varphi_m) = \frac{2}{\pi\varphi_m l_i} \int_0^{\pi/2} [F_{\varphi 0} + (c_\delta + c_\varphi)\varphi_m l_i \sin \theta] \cos \theta d\theta + \frac{2}{\pi\varphi_m l_i} \int_{\pi/2}^{\pi} [-F_{\varphi 0} + (c_\delta - c_\varphi)\varphi_m l_i \sin \theta] \cos \theta d\theta = \frac{4F_{\varphi 0}}{\pi\varphi_m l_i} + \frac{2c_\varphi}{\pi}, \quad (3.40)$$

де  $F_{\varphi 0}$  – зусилля тертя фрикційного амортизатора при нульовій динамічній деформації пружного елемента;  $c_{\tau}$  – лінійний коефіцієнт жорсткості торсіонного валу;  $c_{\varphi}$  – лінійний коефіцієнт жорсткості фрикційного амортизатору.

З урахуванням співвідношень (3.39) і (3.40) формула (3.38) набуває вигляду

$$F_{\varphi}^i(t) = -c_{\delta} l_i \varphi(t) - \left( \frac{4F_{\varphi 0}}{\pi \varphi_m \omega} + \frac{2c_{\varphi} l_i}{\omega \pi} \right) \dot{\varphi}(t). \quad (3.41)$$

Аналогічно нелінійну функцію  $F_{\delta}^i$  можна подати у вигляді

$$F_{\delta}^i = c_{\delta} \delta_m \sin(\omega t + \psi_i) + \left( \frac{4F_{\varphi 0}}{\pi \delta_m} + \frac{2c_{\varphi}}{\pi} \right) \delta_m \cos(\omega t + \psi_i).$$

Сумарний момент зусиль, що діють на корпус автомобіля з боку підвіски, дорівнює

$$\begin{aligned} M(t) &= 2 \sum_{i=1}^n \Delta F^i(t) l_i = -2c_{\delta} \varphi(t) \sum_{i=1}^n l_i^2 - \\ &\quad - \left( \frac{8F_{\varphi 0}}{\pi \varphi_m \omega} \sum_{i=1}^n l_i + \frac{4c_{\varphi}}{\omega \pi} \sum_{i=1}^n l_i^2 \right) \dot{\varphi}(t) + \\ &\quad + 2c_{\delta} \delta_m \sum_{i=1}^n l_i \sin(\omega t + \psi_i) + \left( \frac{8F_{\varphi 0}}{\pi} + \frac{4c_{\varphi} \delta_m}{\pi} \right) \sum_{i=1}^n l_i \cos(\omega t + \psi_i). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Для симетричної торсіонної підвіски мають місце співвідношення

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n l_i \sin(\omega t + \psi_i) &= \cos \omega t \sum_{i=1}^n l_i \sin 2\pi \frac{l_i}{a}; \\ \sum_{i=1}^n l_i \cos(\omega t + \psi_i) &= -\sin \omega t \sum_{i=1}^n l_i \sin 2\pi \frac{l_i}{a}; \\ \sum_{i=1}^n l_i &= 0. \end{aligned}$$

У зв'язку з цими співвідношеннями формулу (3.42) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 M(t) = & -2c_{\delta}\varphi(t)\sum_{i=1}^n l_i^2 - \frac{4c_{\varphi}}{\omega\pi}\sum_{i=1}^n l_i^2\dot{\varphi}(t) + \\
 & + 2c_{\delta}\delta_m\sum_{i=1}^n l_i \sin 2\pi\frac{l_i}{a}\cos\omega t - \\
 & - \left(\frac{8F_{\varphi 0}}{\pi} + \frac{4c_{\varphi}\delta_m}{\pi}\right)\sum_{i=1}^n l_i \sin 2\pi\frac{l_i}{a}\sin\omega t.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених подовжньо-кутових коливань корпусу автомобіля з урахуванням співвідношення (3.43) записується у вигляді

$$\begin{aligned}
 I_y\ddot{\varphi}(t) + \left(\frac{4c_{\varphi}}{\omega\pi}\sum_{i=1}^n l_i^2\right)\dot{\varphi}(t) + \left(2c_{\delta}\sum_{i=1}^n l_i^2\right)\varphi(t) = \\
 = 2c_{\delta}\delta_m\sum_{i=1}^n l_i \sin 2\pi\frac{l_i}{a}\cos\omega t - \\
 - \frac{(8F_{\varphi 0} + 4c_{\varphi}\delta_m)}{\pi}\sum_{i=1}^n l_i \sin 2\pi\frac{l_i}{a}\sin\omega t,
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

де  $I_y$  – момент інерції корпусу автомобіля відносно власної поперечної вісі.

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
 k_{\varphi}^2 = \frac{2c_{\delta}\sum_{i=1}^n l_i^2}{I_y}; \quad \mathbf{z} = \frac{2c_{\varphi}\sum_{i=1}^n l_i^2}{I_y\omega\pi}; \\
 A = \frac{2c_{\delta}\delta_m\sum_{i=1}^n l_i \sin 2\pi\frac{l_i}{a}}{I_y}; \\
 B = -\frac{(8F_{\varphi 0} + 4c_{\varphi}\delta_m)\sum_{i=1}^n l_i \sin 2\pi\frac{l_i}{a}}{I_y\pi}.
 \end{aligned}$$

Тоді диференціальне рівняння (3.44) приймає вигляд

$$\ddot{\varphi}(t) + 2Z\dot{\varphi}(t) + k_{\varphi}^2\varphi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t. \quad (3.45)$$

Відомо, що амплітуда вимушеної складової рішення диференціального рівняння (3.45) визначається співвідношенням

$$\varphi_m = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{(k_{\varphi}^2 - \omega^2)^2 + 4Z^2\omega^2}}. \quad (3.46)$$

Частота повторення нерівностей  $\omega$  пов'язана із швидкістю руху автомобіля залежністю

$$\omega = \frac{2\pi}{a}v. \quad (3.47)$$

Співвідношення (3.46) і (3.47) дозволяють отримати залежності амплітуди вимушених коливань корпусу від швидкості її руху при різних значеннях величини  $c_{\varphi}$ .

Нехай параметри системи підресорювання автомобіля з торсіонною підвіскою і фрикційними амортизаторами мають наступні значення:  $I_y = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ ;  $l_1 = l_5 = 1,8 \text{ м}$ ;  $l_2 = l_4 = 0,85 \text{ м}$ ;  $l_3 = 0$ ;  $c_T = 4,35 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$ ;  $F_{\varphi 0} = 10^3 \text{ Н}$ . Довжина хвилі нерівностей і їх амплітуда становить  $a = 4 \text{ м}$ ;  $\delta_m = 0,75 \cdot 10^{-1} \text{ м}$ .

На рисунку 3.9 приведені залежності амплітуди вимушених подовжньо-кутових коливань корпусу автомобіля від швидкості його руху при наступних значеннях лінійної жорсткості фрикційного амортизатора:  $c_{\varphi 1} = 9,25 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$ ;  $c_{\varphi 2} = 7 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$ ;  $c_{\varphi 3} = 5 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$ ;  $c_{\varphi 4} = 3 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$ .

Аналіз амплітудних характеристик, що приведені на рисунку 3.9 свідчить про достатньо високу ефективність автомобільної торсіонної підвіски з фрикційними амортизаторами.

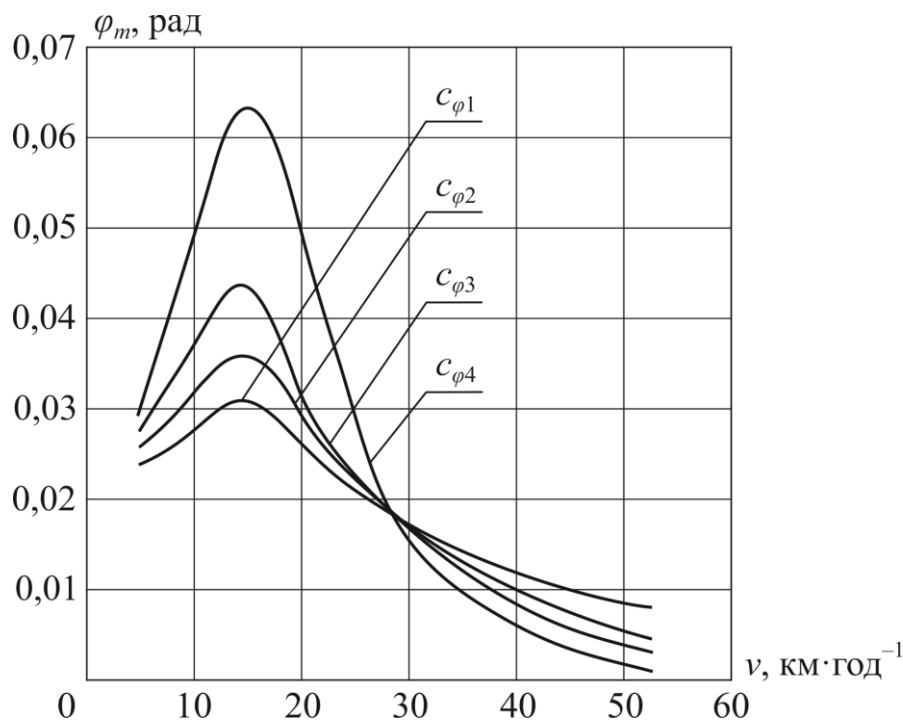


Рис. 3.9. Амплітудні характеристики системи підресорювання автомобіля з торсіонною підвіскою і фрикційними амортизаторами

### 3.4. Коливання температури охолоджуючої рідини автомобільного двигуна.

На деяких потужних двигунах вантажних автомобілів використовують вентилятори з автоматичним вимиканням. Використання таких вентиляторів поліпшує тягові властивості автомобіля і підвищує середню швидкість руху, знижує експлуатаційні витрати палива, забезпечує менш шумливу роботу двигуна, прискорює його нагрівання після запуску, сприяє надійному підтриманню оптимального температурного режиму охолоджуючої рідини і подовжує строк експлуатації вентиляторних ременів.

На рисунку 3.10 подана принципова схема системи автоматичного керування температурою охолоджуючої рідини ДВЗ. Відхилення температури охолоджуючої рідини  $\Delta T(t)$  від номінального значення  $T_0$  вимірюється терморезистором, увімкненим у мостову схему 1. Напряга з вимірювальної діагоналі мосту подається на керуючу обмотку двопозиційного реле 2. Контакти реле 2 керують роботою двигуна постійного струму 3.

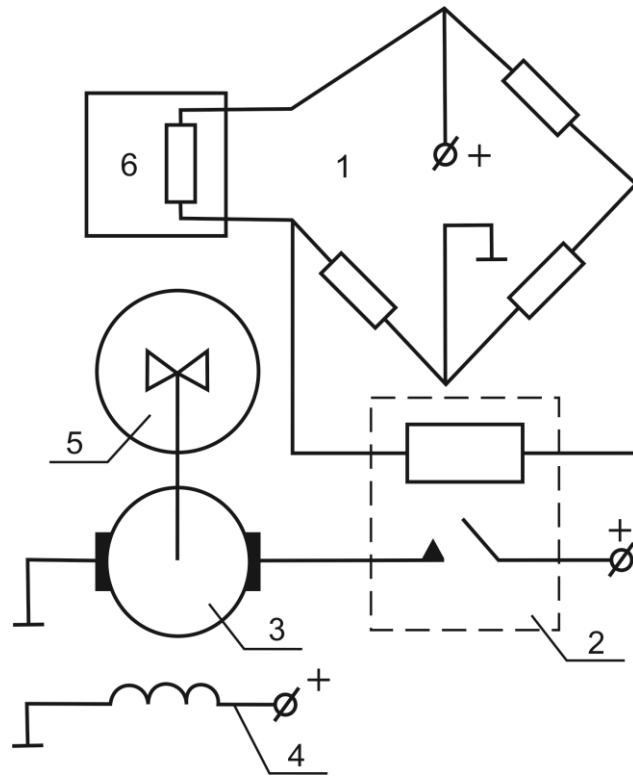


Рис. 3.10. Принципова схема САК

Статична характеристика реле 2 з мостовою схемою 1 приведена на рисунку 3.11.

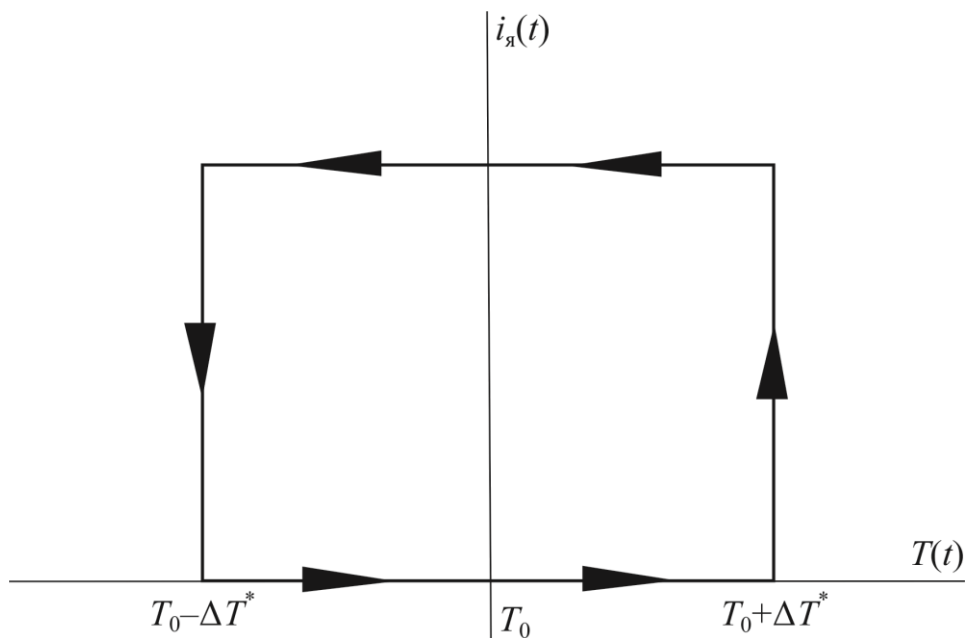


Рис. 3.11. Статична характеристика реле з мостовою схемою

Коли охолоджуюча рідина досягає температури  $T_0 + \Delta T^*$ , величина струму в обмотці реле 2 досягає значення спрацювання і нормально розімкнуті контакти реле замикаються.

При цьому електричний сигнал від бортової електромережі подається на обмотку якоря електродвигуна 3 з обмоткою збудження 4. Якір електродвигуна, механічно з'єднаний з вентилятором 5, починає обертатися, а радіатор 6 обдуватися повітрям, що викликає зниження поточної температури  $T(t)$  охолоджуючої рідини. У разі зниження температури охолоджуючої рідини до значення  $T_0 - \Delta T^*$  величина струму в обмотці реле зменшується, контакти реле розмикаються, а якір електродвигуна 3 з вентилятором 5 зупиняються. Тож припиняється обдування повітрям радіатора 6, а температура охолоджуючої рідини починає зростати.

Нелінійна характеристика, що приведена на рисунку 3.11, описується неаналітичним співвідношенням

$$i_{\text{я}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \begin{cases} T(t) < T_0 - \Delta T^*; \\ T_0 - \Delta T^* \leq T(t) \leq T_0 + \Delta T^*; \dot{T}(t) > 0; \end{cases} \\ i_{\text{я}}^* & \text{при} \begin{cases} T(t) > T_0 + \Delta T^*; \\ T_0 - \Delta T^* \leq T(t) \leq T_0 + \Delta T^*; \dot{T}(t) < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (3.48)$$

Введемо в розгляд відносну узагальнену координату

$$\Delta T(t) = T(t) - T_0$$

і припустимо, що вона змінюється у відповідності з формулою

$$\Delta T(t) = A \sin \omega t = A \sin \varphi, \quad (3.49)$$

а гармонічно лінеаризоване рівняння нелінійної частини розглядаємої системи запишемо у вигляді

$$i_{\text{я}}(t) = \frac{a_0}{2} + \left[ q(A) + \frac{q_1(A)}{\omega} p \right] \Delta T(t). \quad (3.50)$$

Для обчислення коефіцієнтів гармонічної лінеаризації розглянемо рисунок 3.12.

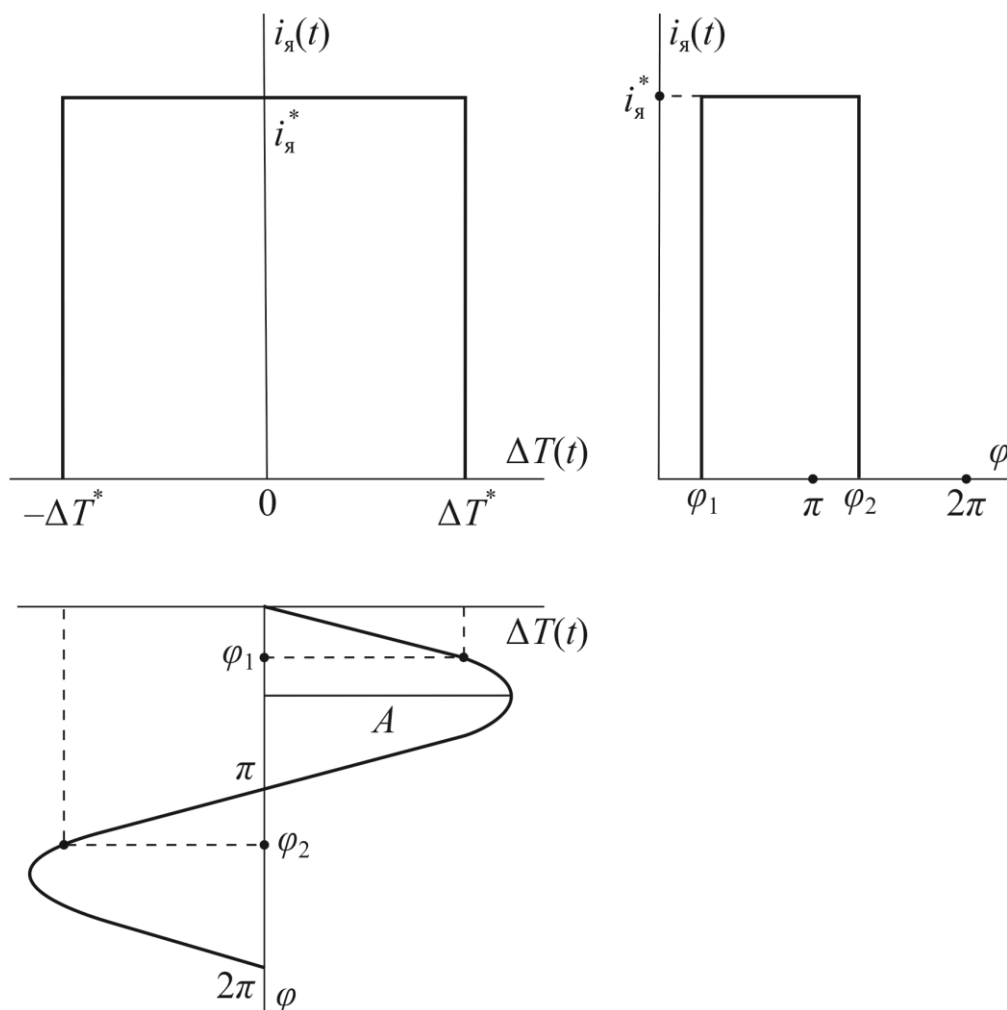


Рис. 3.12. До розрахунку коефіцієнтів гармонічної лінеаризації

Коефіцієнт  $a_0$  визначається згідно з формулою (3.23), якщо покласти в ній  $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F[A \sin \varphi, A \omega \cos \varphi] d\varphi. \quad (3.51)$$

Згідно з рис. 3.12 запишемо

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} i_{\text{я}}^* d\varphi = \frac{i_{\text{я}}^*}{\pi} (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (3.52)$$

причому

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{\Delta T^*}{A}; \quad (3.53)$$

$$\varphi_2 = \pi + \arcsin \frac{\Delta T^*}{A}. \quad (3.54)$$

Підстава формул (3.53) і (3.54) у співвідношення (3.52) дозволяє записати

$$a_0 = i_{\dot{y}}^*. \quad (3.55)$$

Коефіцієнт  $q(A)$  обчислюється за допомогою формули (3.26)

$$\begin{aligned} q(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} i_{\dot{y}}^* \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{i_{\dot{y}}^*}{\pi A} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) = \frac{2i_{\dot{y}}^*}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta T^*}{A}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Коефіцієнт  $q_1(A)$  обчислюється за допомогою рівняння (3.27)

$$\begin{aligned} q_1(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} i_{\dot{y}}^* \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{i_{\dot{y}}^*}{\pi A} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = -\frac{2i_{\dot{y}}^* \Delta T^*}{\pi A^2}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Підставимо формули (3.52), (3.56) і (3.57) у співвідношення (3.50). В результаті отримуємо гармонічно лінеаризоване рівняння нелінійної частини розглядаємої системи

$$i_{\dot{y}}(t) = \frac{i_{\dot{y}}^*}{2} + \frac{2i_{\dot{y}}^*}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta T^*}{A}\right)^2} - \frac{\Delta T^*}{A\omega} p \right] \Delta T(t). \quad (3.58)$$

Рівняння, яке описує збурений рух лінійної частини системи, має вигляд

$$(T_d p + 1) \Delta T(t) = -k_d i_{\dot{y}}(t) + k_q Q(t), \quad (3.59)$$

де коефіцієнти підсилення  $k_d$  і  $k_q$ , і постійна часу  $T_d$  характеризують процеси нагріву і охолодження охолоджуючої рідини, а через  $Q(t)$  позначається теплова енергія, яка здійснює нагрівання охолоджуючої рідини працюючим двигуном.

Якщо  $i_{я}(t) = 0$ , то диференціальне рівняння

$$(T_d p + 1)\Delta T(t) = k_q Q(t)$$

описує процес нагріву охолоджуючої рідини працюючим дизелем. При  $i_{я}(t) = i_{я}^*$  права частина диференціального рівняння (3.51) становиться від'ємною і це рівняння описує процес охолодження рідини.

Співвідношення (3.58) підставимо у праву частину рівняння (3.59)

$$\left[ T_{\ddot{a}} p + 1 + k_{\ddot{a}} \frac{2i_{\ddot{y}}^*}{\pi A} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta T^*}{A} \right)^2} - \frac{\Delta T^*}{A\omega} p \right) \right] \Delta T(t) =$$

$$= k_{\ddot{a}} \frac{i_{\ddot{y}}^*}{2} + k_q Q(t). \quad (3.60)$$

Рівнянню (3.60) відповідає наступне характеристичне рівняння

$$T_{\ddot{a}} s + 1 + k_{\ddot{a}} \frac{2i_{\ddot{y}}^*}{\pi A} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta T^*}{A} \right)^2} - \frac{\Delta T^*}{A\omega} s \right) = 0. \quad (3.61)$$

В характеристичному рівнянні (3.61) здійснено заміну  $s = j\omega$

$$j\omega T_{\ddot{a}} + 1 + k_{\ddot{a}} \frac{2i_{\ddot{y}}^*}{\pi A} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta T^*}{A} \right)^2} - j \frac{\Delta T^*}{A} \right) = 0. \quad (3.62)$$

Співвідношення (3.62) подамо у вигляді (3.33)

$$-\frac{1}{1+j\omega T_{\ddot{a}}}} = \frac{\pi A}{2k_{\ddot{a}}i_{\ddot{y}}^* \left( \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta T^*}{A} \right)^2} - j \frac{\Delta T^*}{A} \right)}. \quad (3.63)$$

Розглянемо ліву частину (3.63), яку помножимо і поділимо на комплексну величину  $1 - j\omega T_{\ddot{a}}$ , що являється сполученою до знаменника лівої частини (3.63)

$$-\frac{1}{1+j\omega T_{\ddot{a}}}} \cdot \frac{1-j\omega T_{\ddot{a}}}}{1-j\omega T_{\ddot{a}}}} = -\frac{1}{1+\omega^2 T_{\ddot{a}}^2}} + j \frac{\omega T_{\ddot{a}}}}{1+\omega^2 T_{\ddot{a}}^2}}. \quad (3.64)$$

Праву частину (3.63) також подамо у вигляді суми дійсної та уявної частин

$$\begin{aligned} & \frac{\pi A}{2k_{\ddot{a}}i_{\ddot{y}}^* \left( \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta T^*}{A} \right)^2} - j \frac{\Delta T^*}{A} \right)} \cdot \frac{\sqrt{1 - \left( \frac{\Delta T^*}{A} \right)^2} + j \frac{\Delta T^*}{A}}{\sqrt{1 - \left( \frac{\Delta T^*}{A} \right)^2} + j \frac{\Delta T^*}{A}} = \\ & = \frac{\pi}{2k_{\ddot{a}}i_{\ddot{y}}^*} \left( \sqrt{A^2 - (\Delta T^*)^2} + j \Delta T^* \right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Крива, що описується співвідношенням (3.64), в разі зміни  $\omega$  від нуля до нескінченності у комплексній площині (U,V) представляє собою півколо одиничного діаметру, а крива, що описується співвідношенням (3.65), в разі зміни  $A$  від  $\Delta T^*$  до нескінченності є прямою лінією, що паралельна дійсній вісі (див. рис. 3.13).

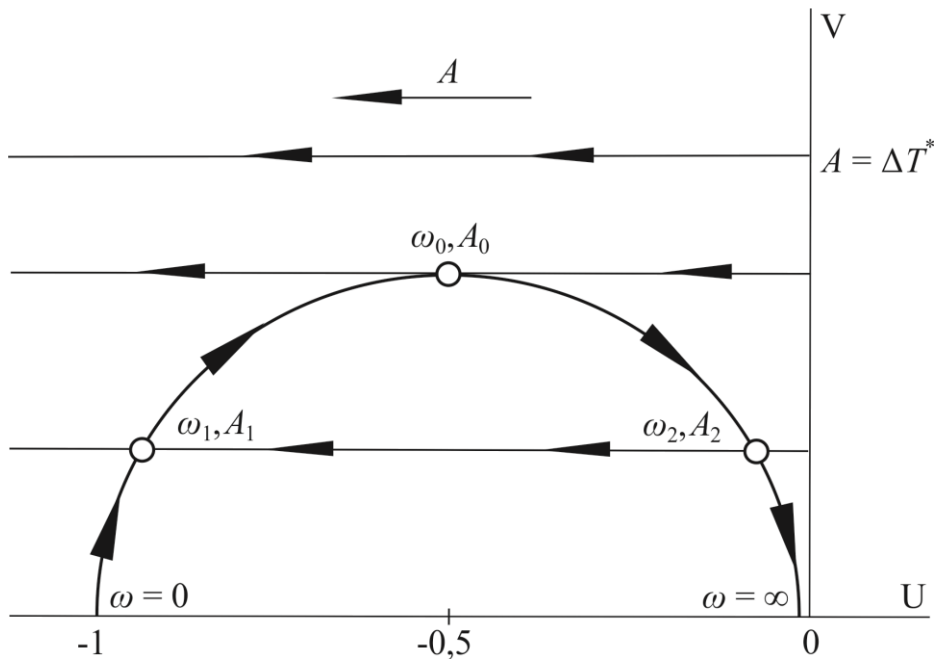


Рис. 3.13. До розрахунку амплітуд і частот автоколивань

Ці криві можуть не мати точок перетину при

$$\frac{\pi \Delta T^*}{2k_{\ddot{a}} i_{\ddot{y}}^*} > 0,5,$$

що вказує на відсутність періодичних рухів в системі. Якщо криві мають одну спільну точку при виконанні умови

$$\frac{\pi \Delta T^*}{2k_{\ddot{a}} i_{\ddot{y}}^*} = 0,5,$$

то існують автоколивання з частотою  $\omega_0$  та амплітудою  $A_0$ . В разі існування двох спільних точок у випадку виконання нерівності

$$\frac{\pi \Delta T^*}{2k_{\ddot{a}} i_{\ddot{y}}^*} < 0,5,$$

у системі існують два періодичних режими з частотами  $\omega_1$  та  $\omega_2$  і амплітудами  $A_1$  та  $A_2$ . Але стійким являється лише один з режимів. Як правило це режим з меншою амплітудою і більшою частотою, тобто  $\omega_2, A_2$ .

### 3.5. Коливання нестационарних динамічних систем, або параметричні коливання.

В задачах, що розглядаються вище, про коливання лінійних динамічних систем діючи на систему сили можна було віднести до однієї з трьох категорій:

- позиційні сили (або відновлюючі сили), які залежать тільки від узагальненої координати  $q(t)$ , наприклад, сила стиснутої ресори

$$Q(t) = -cq(t);$$

- дисипативні сили, що визначаються узагальненою швидкістю  $\dot{q}(t)$ , наприклад, сила, що діє на підресорену частину корпусу автомобіля з боку амортизатора

$$Q(t) = -\mu\dot{q}(t);$$

- вимушені сили, що являються заданими функціями часу, наприклад, такі, що визначаються мікропрофілем дороги

$$Q(t) = H \sin \omega t.$$

Але існують сили більш складної природи, зокрема, нестационарні позиційні сили, які залежать як від узагальненої координати, так і від часу в явному вигляді. Прикладом такої динамічної системи являється система, збурений рух якої описується рівнянням Мат'є

$$\ddot{q}(t) + 2n\dot{q}(t) + k^2(1 - \mu \cos \omega t)q(t) = 0. \quad (3.66)$$

При  $\mu = 0$  рівняння Мат'є (3.66) вироджується в рівняння (1.25).

Отримаємо рішення рівняння (3.66), для чого подамо його у нормальній формі Коші

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix};$$
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -k^2(1 - \mu \cos \omega t)x_1(t) - 2nx_2(t). \end{aligned} \quad (3.67)$$

В системі (3.67) покладемо  $k = 5$ ;  $\omega = 3\text{c}^{-1}$ ;  $\mu = 0,5$ ;  $n = 0,5$ . Скористуємось програмним пакетом MathLAB і за допомогою методу Рунге-Кутта проінтегруємо систему диференціальних рівнянь (3.67). Коливальні процеси в системі приведені на рисунку 3.14.

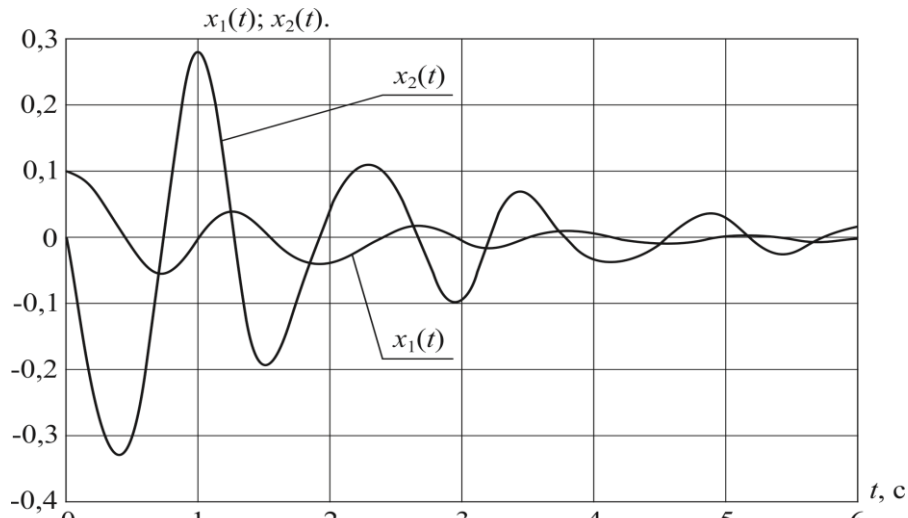


Рис. 3.14. Рішення рівняння Мат'є при  $\omega = 3 \text{ c}^{-1}$

Аналіз рисунка 3.14 приводить до висновку, що на початку коливального процесу ( $0 < t < 1,5$ )с домінує коливальний рух з частотою  $k$ , а при  $t > 1,5$ с домінує рух з частотою  $\omega$ .

На рисунку 3.15 та рисунку 3.16 приведені коливальні процеси в системі (3.67) при  $\omega = 4\text{c}^{-1}$  і  $\omega = 5\text{c}^{-1}$  відповідно.

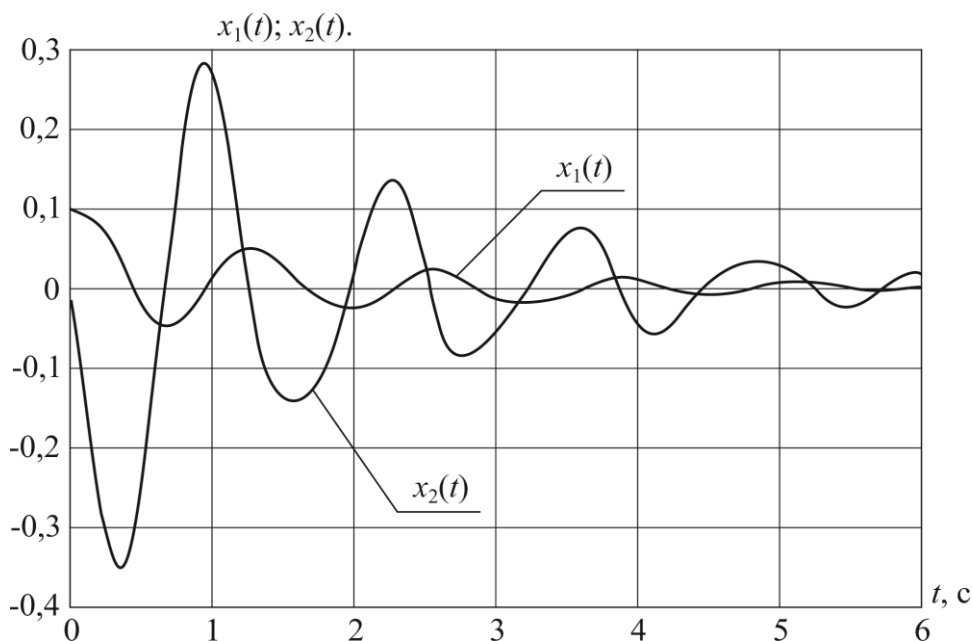


Рис. 3.15. Рішення рівняння Мат'є при  $\omega = 4 \text{ c}^{-1}$

Порівняння цих рисунків з рис. 3.14 доводить, що наближення значення частоти  $\omega$  до значення частоти  $k$  приводить до збільшення амплітуди коливань системи (3.67), які досягають максимальних значень при  $\omega = k$ .

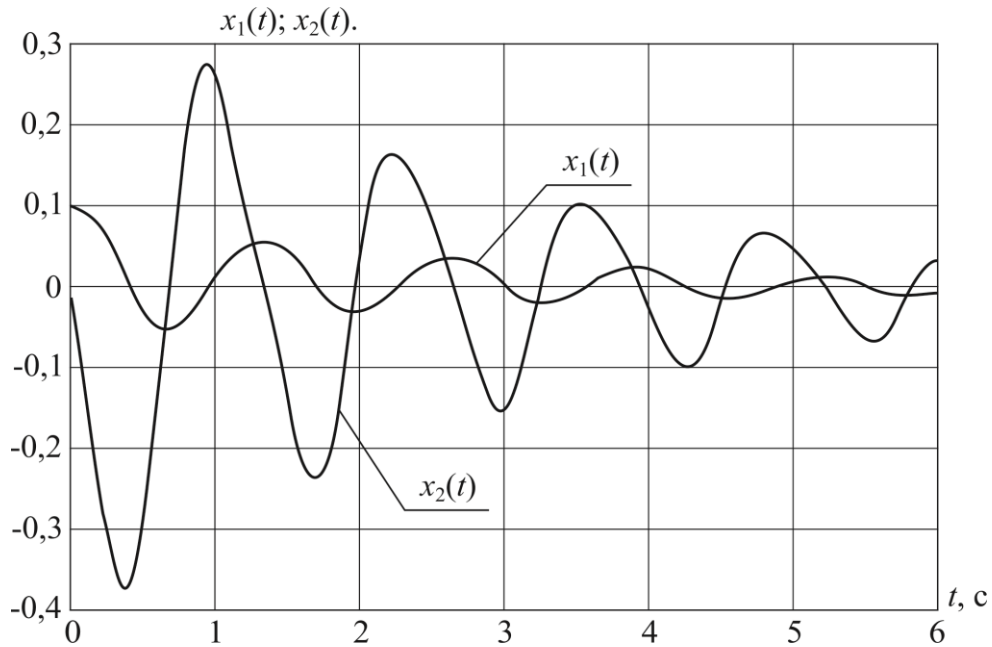


Рис. 3.16. Рішення рівняння Мат'є при  $\omega = 5\text{c}^{-1}$

Подальше зростання частоти  $\omega$  приводить до зменшення амплітуд коливальних процесів в системі (3.67), про що свідчить аналіз рисунку 3.17 та рисунку 3.18.

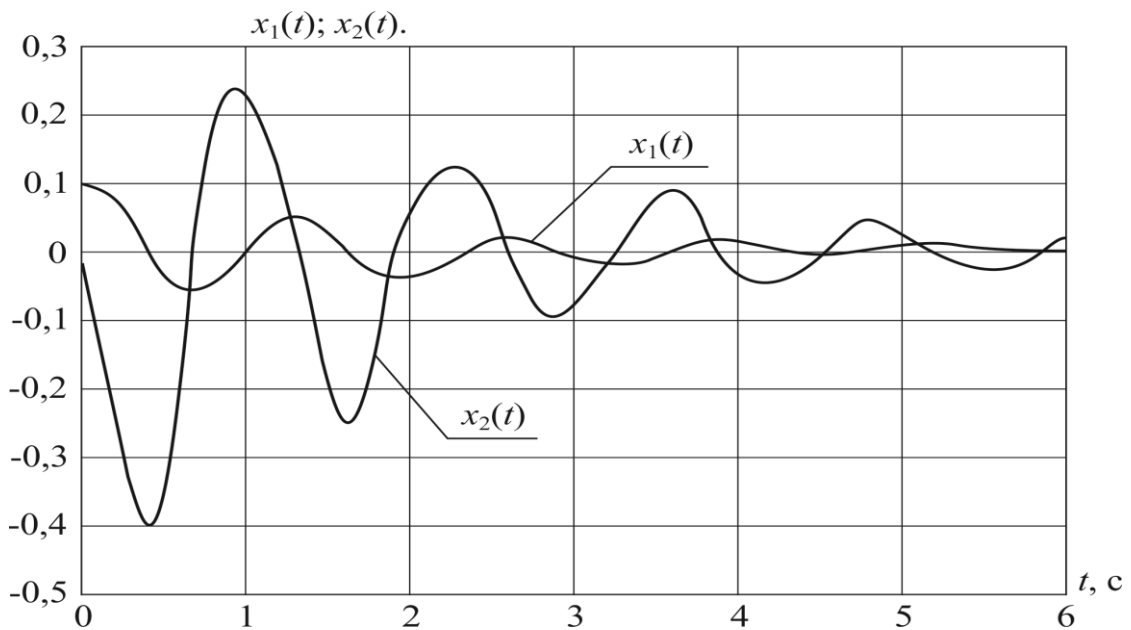


Рис. 3.17. Рішення рівняння Мат'є при  $\omega = 6\text{c}^{-1}$

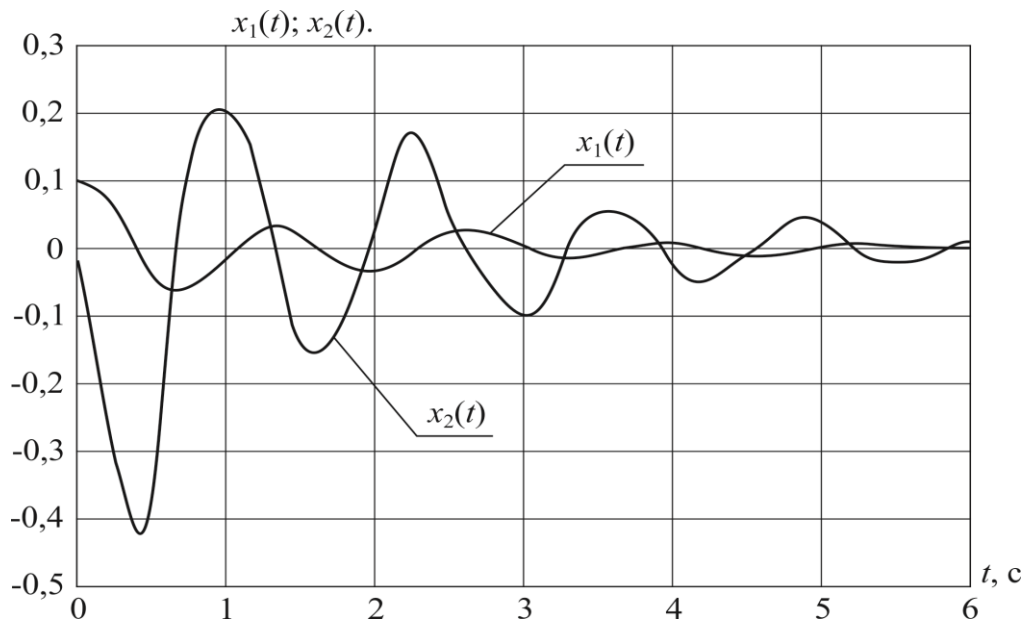


Рис. 3.18. Рішення рівняння Мат'є при  $\omega = 7\text{c}^{-1}$

### Контрольні запитання до розділу 3.

1. Дайте визначення нелінійної динамічної системи.
2. Дайте визначення аналітичних і неаналітичних нелінійностей.
3. Що ми називаємо системою першого наближення?
4. Дайте визначення динамічної системи з нелінійним тертям і запишіть диференціальне рівняння Релея.
5. Поясніть коливальні процеси в динамічній системі, що описується рівнянням Релея.
6. Поясніть коливальні процеси в динамічній системі, що описується рівнянням Ван дер Поля.
7. Коротко поясніть сутність гармонічної лінеаризації неаналітичних нелінійностей.
8. Поясніть коливальні процеси в системі підресорювання автомобіля при застосуванні фрикційних амортизаторів.
9. Поясніть коливальні процеси в системі автоматичного керування температури охолоджуючої рідини автомобільного двигуна.
10. Поясніть коливальні процеси в системі з періодичними коефіцієнтами, що описується рівнянням Мат'є.

## Розділ 4

# КРУТИЛЬНІ КОЛИВАННЯ ВАЛІВ АВТОМОБІЛЬНОГО ДВИГУНА І ТРАНСМІСІЇ.

### 4.1. Рівняння вільних крутильних коливань валів.

Розглянемо крутильні коливання багатомасової системи, яка являється загально прийнятою для розрахунку крутильних коливань колінчастих валів двигунів внутрішнього згорання і валів механічних трансмісій. Схема заміщення колінчастого валу ДВЗ багатомасовою дисковою системою цілком задовільнена при достатньо ретельному визначенні еквівалентних моментів інерції дисків і жорсткостей окремих частин валу (рис. 4.1).

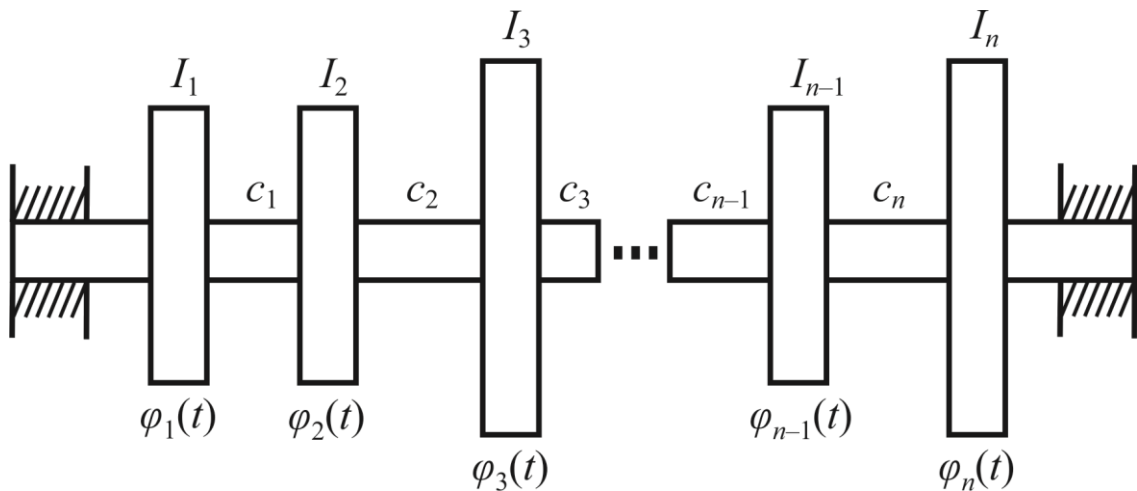


Рис. 4.1. До розрахунку крутильних коливань валів автомобільних ДВЗ і трансмісій

Стан системи, приведеної на рисунку 4.1, визначається кутами повороту кожного з дисків, тобто система має  $n$  ступенів свободи. Позначимо  $I_1, I_2, \dots, I_n$  – моменти інерції дисків відносно вісі валу;  $c_1, c_2, \dots, c_n$  – коефіцієнти жорсткості міждисккових ділянок валу;  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$  – кути повороту дисків відносно вісі валу. Крутильні моменти, що діють на ділянках валу, залежать від взаємного повороту двох сполучених дисків:

- на першій ділянці

$$c_1[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)];$$

- на другій ділянці

$$c_2[\varphi_3(t) - \varphi_2(t)];$$

- .....
- на останній ділянці

$$c_{n-1}[\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)].$$

Відповідно цьому рівняння руху системи запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1(t) - c_1[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)] &= 0; \\ I_2 \ddot{\varphi}_2(t) - c_1[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] - c_2[\varphi_3(t) - \varphi_2(t)] &= 0; \\ I_3 \ddot{\varphi}_3(t) - c_2[\varphi_2(t) - \varphi_3(t)] - c_3[\varphi_4(t) - \varphi_3(t)] &= 0; \\ \vdots & \\ I_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1}(t) - c_{n-2}[\varphi_{n-2}(t) - \varphi_{n-1}(t)] - c_{n-1}[\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)] &= 0; \\ I_n \ddot{\varphi}_n(t) - c_{n-1}[\varphi_{n-1}(t) - \varphi_n(t)] &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Система диференціальних рівнянь (4.1) представляє собою математичну модель вільних коливань валу з  $n$  дисками.

Просумуємо ліві частини диференціальних рівнянь (4.1). В результаті отримуємо співвідношення

$$I_1 \ddot{\varphi}_1(t) + I_2 \ddot{\varphi}_2(t) + \dots + I_n \ddot{\varphi}_n(t) = 0. \tag{4.2}$$

Співвідношення (4.2) свідчить, що головний момент кількості руху всій системи дисків відносно вісі валу при вільних крутильних коливаннях залишається постійним. Цей момент можна прийняти рівним нулю і розглядати тільки коливання, що викликаються скручуванням валу:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= A_1 \sin(kt + \beta); \\ \varphi_2(t) &= A_2 \sin(kt + \beta); \\ \vdots & \\ \varphi_n(t) &= A_n \sin(kt + \beta), \end{aligned} \tag{4.3}$$

де  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – амплітуди крутильних коливань дисків.

Підставимо формули (4.3) в диференціальні рівняння (4.1) і запишемо їх в операторній формі

$$\begin{aligned}
 (c_1 - k^2 I_1)A_1 - c_1 A_2 &= 0; \\
 -c_1 A_1 + (c_1 + c_2 - k^2 I_2)A_2 - c_2 A_3 &= 0; \\
 -c_2 A_2 + (c_2 + c_3 - k^2 I_3)A_3 - c_3 A_4 &= 0; \\
 \vdots & \\
 -c_{n-1} A_{n-1} + (c_{n-1} - k^2 I_n)A_n &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Будемо розглядати співвідношення (4.4) як систему алгебраїчних рівнянь з  $n + 1$  невідомими ( $n$  невідомих амплітуд і частота  $k$ ), тому усі невідомі з цієї системи визначити неможливо, однак система (4.4) дозволяє обчислити частоту  $k$  і знайти співвідношення між амплітудами  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Система (4.4) має тривіальне рішення  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$  і припускає нетривіальне рішення в тому випадку, якщо визначник системи дорівнює нулю

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} (c_1 - k^2 I_1) & -c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_1 & (c_1 + c_2 - k^2 I_2) & -c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & (c_2 + c_3 - k^2 I_3) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{n-1} & (c_{n-1} - k^2 I_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{4.5}$$

## 4.2. Частотне рівняння вільних крутильних коливань валів.

Розгортаючи визначник (4.5) і дорівнюючи його нулю, отримуємо рівняння  $n$ -того ступеню відносно  $k^2$ , яке називається рівнянням частот.

Запишемо рівняння частот для різної кількості дисків. При  $n = 1$ ,  $c_1 = 0$  і в цьому випадку  $k^2 = 0$ . Цей випадок відповідає рівномірному обертанню валу без деформації, тобто без крутильних коливань.

При  $n = 2$ ,  $c_2 = 0$  рівняння частот має вигляд

$$k^2 - \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} c_1 = 0. \tag{4.6}$$

При  $n = 3$ ,  $c_3 = 0$  рівняння частот записується

$$k^4 - \left( \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} c_1 + \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} c_2 \right) k^2 + \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} c_1 c_2 = 0. \quad (4.7)$$

При  $n = 4$ ,  $c_4 = 0$  маємо

$$k^6 - \left( \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} c_1 + \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} c_2 + \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} c_3 \right) k^4 + \left( \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} c_1 c_2 + \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \cdot \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} c_1 c_3 + \frac{I_2 + I_3 + I_4}{I_2 I_3 I_4} c_2 c_3 \right) k^2 - \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{I_1 I_2 I_3 I_4} c_1 c_2 c_3 = 0. \quad (4.8)$$

Із системи рівнянь (4.4) можна знайти не тільки частоти вільних крутильних коливань валу, але й послідовно знайти відповідні відношення між амплітудами коливань, що відповідні кожній з частот вільних коливань валу.

Визначимо власні частоти крутильних коливань циліндричного валу, на якому закріплені чотири диска. Параметри динамічної системи мають наступні значення:

$$\begin{aligned} I_1 &= 200 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; \\ I_2 &= 80 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; \\ I_3 &= 50 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; \\ I_4 &= 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; \\ c_1 &= 2 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ c_2 &= 1,66 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ c_3 &= 2 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Для визначення частот крутильних коливань валу скористуємось формулою (4.8). Підставивши в неї значення параметрів динамічної системи, отримуємо наступне рівняння частот

$$k^6 - 1,4917 \cdot 10^5 k^4 + 5,3917 \cdot 10^9 k^2 - 3,5833 \cdot 10^{13} = 0. \quad (4.9)$$

Для обчислення власних частот вільних коливань валу скористуємось програмним пакетом MathLAB (див. додаток 1). В результаті маємо

$$k_1^2 = 8556,25 \text{ c}^{-2};$$

$$k_2^2 = 42849 \text{ c}^{-2};$$

$$k_3^2 = 97781,29 \text{ c}^{-2}.$$

### 4.3. Нормальні форми крутильних коливань валів.

З основної системи рівнянь (4.4) можна знайти не тільки власні частоти вільних коливань валу, але й відповідні співвідношення між амплітудами. Якщо першу власну частоту  $k_1^2$ , знайдену з частотного рівняння (4.8) підставити в систему (4.4), то можна послідовно знайти усі амплітуди крутильних коливань дисків через амплітуду  $A_1$ . Так, з першого рівняння (4.4) можна записати

$$c_1 A_2 = (c_1 - k_1^2 I_1) A_1,$$

або

$$A_2 = \left( 1 - \frac{k_1^2 I_1}{c_1} \right) A_1. \quad (4.10)$$

Друге рівняння (4.4) запишемо у вигляді

$$c_2 A_3 = -c_1 A_1 + (c_1 + c_2 - k_1^2 I_2) A_2,$$

або

$$A_3 = -\frac{c_1}{c_2} A_1 + \left( 1 + \frac{c_1}{c_2} - \frac{k_1^2 I_2}{c_2} \right) A_2. \quad (4.11)$$

В праву частину замість  $A_2$  підставимо формулу (4.10). В результаті отримуємо

$$A_3 = \left[ 1 - \frac{k_1^2}{c_1 c_2} (I_1 c_2 + I_2 c_1 - I_1 c_1 + k_1^2 I_1 I_2) \right] A_1. \quad (4.12)$$

І, нарешті, останнє рівняння (4.4) запишемо у вигляді

$$c_3 A_3 = (c_3 - k_1^2 I_4) A_4, \quad (4.13)$$

у ліву частину (4.13) замість  $A_3$  підставимо співвідношення (4.12). В результаті отримуємо

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{c_3}{c_3 - k_1^2 I_4} A_3 = \\ &= \frac{c_3}{c_3 - k_1^2 I_4} \left[ 1 - \frac{k_1^2}{c_1 c_2} (I_1 c_2 + I_2 c_1 - I_1 c_1 + k_1^2 I_1 I_2) \right] A_1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Якщо умовно прийняти  $A_1 = 1$ , то формули

$$\begin{aligned} \bar{A}_2 &= 1 - \frac{k_1^2 I_1}{c_1}; \\ \bar{A}_3 &= 1 - \frac{k_1^2}{c_1 c_2} (I_1 c_2 + I_2 c_1 - I_1 c_1 + k_1^2 I_1 I_2); \\ \bar{A}_4 &= \frac{c_3}{c_3 - k_1^2 I_4} \left[ 1 - \frac{k_1^2}{c_1 c_2} (I_1 c_2 + I_2 c_1 - I_1 c_1 + k_1^2 I_1 I_2) \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

визначають відносні значення амплітуд вільних крутильних коливань валу з чотирма дисками, що відповідають першій власній частоті крутильних коливань.

Для отримання відносних амплітуд вільних коливань валу, що відповідають другій власній частоті у формули (4.15) замість величини  $k_1^2$  слід підставити величину  $k_2^2$ , а для отримання відносних амплітуд, що відповідають третій власній частоті у формули (4.15) замість  $k_1^2$  слід підставити  $k_3^2$ .

#### 4.4. Вимушені крутильні коливання валів.

Вимушені коливання колінчастих валів являються невідворотнім наслідком змінності активних моментів, що діють на коліна. Ці моменти носять періодичний характер і обумовлені, поперше, тиском газу в циліндрах  $i$ , по-друге, силами інерції рухомих частин двигуна. Розглянемо найбільш загальний випадок, коли на окремі диски схеми заміщення діють змінні моменти. Середні за часом значення цих моментів викликають постійну за часом деформацію колінчастого валу, тому для аналізу вимушених коливань середні значення моментів слід виключати із розгляду і аналізувати вплив лише змінних частин кожного з моментів. Ці частини будемо називати збуджуючими моментами і позначимо

$$\begin{aligned}M_1(t) &= M_1 \sin \omega t; \\M_2(t) &= M_2 \sin \omega t; \\&\vdots \\M_n(t) &= M_n \sin \omega t,\end{aligned}\tag{4.16}$$

де  $M_1, M_2, \dots, M_n$  – амплітуди збуджуючих моментів на кожному з дисків схеми заміщення;  $\omega$  – частота збуджуючих моментів.

Рівняння вимушених коливань будуть відрізнятися від рівнянь вільних коливань (4.1) наявністю збуджуючих моментів

$$\begin{aligned}I_1 \ddot{\varphi}_1(t) - c_1[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)] &= M_1 \sin \omega t; \\I_2 \ddot{\varphi}_2(t) - c_1[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] - c_2[\varphi_3(t) - \varphi_2(t)] &= M_2 \sin \omega t; \\I_3 \ddot{\varphi}_3(t) - c_2[\varphi_2(t) - \varphi_3(t)] - c_3[\varphi_4(t) - \varphi_3(t)] &= M_3 \sin \omega t; \\I_4 \ddot{\varphi}_4(t) - c_3[\varphi_3(t) - \varphi_4(t)] &= M_4 \sin \omega t.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Система диференціальних рівнянь (4.17) описує вимушені коливання колінчастого валу чотирьохциліндрового двигуна.

При збудженнях синусоїдального типу стаціонарні коливання будуть здійснюватись з частотою збудження  $\omega$

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= A_1 \sin \omega t; \\\varphi_2(t) &= A_2 \sin \omega t; \\\varphi_3(t) &= A_3 \sin \omega t; \\\varphi_4(t) &= A_4 \sin \omega t.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Підставимо співвідношення (4.16) і (4.18) в рівняння (4.17) і отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
 -A_1 I_1 \omega^2 - c_1 (A_2 - A_1) &= M_1; \\
 -A_2 I_2 \omega^2 - c_1 (A_1 - A_2) - c_2 (A_3 - A_2) &= M_2; \\
 -A_3 I_3 \omega^2 - c_2 (A_2 - A_3) - c_3 (A_4 - A_3) &= M_3; \\
 -A_4 I_4 \omega^2 - c_3 (A_3 - A_4) &= M_4.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Систему (4.19) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 A_1 (c_1 - I_1 \omega^2) - A_2 c_1 &= M_1; \\
 -A_1 c_1 + A_2 (c_1 + c_2 - I_2 \omega^2) - A_3 c_2 &= M_2; \\
 -A_2 c_2 + A_3 (c_2 + c_3 - I_3 \omega^2) - A_4 c_3 &= M_3; \\
 -A_3 c_3 + A_4 (c_3 - I_4 \omega^2) &= M_4.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Детермінант системи алгебраїчних рівнянь (4.20) записується у вигляді

$$D = \begin{vmatrix} c_1 - I_1 \omega^2 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - I_2 \omega^2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 - I_3 \omega^2 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 - I_4 \omega^2 \end{vmatrix}. \tag{4.21}$$

Введемо у розгляд два чотирьохмірні вектори

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}.$$

Тоді систему (4.20) запишемо у векторно-матричній формі

$$DA = M, \tag{4.22}$$

а рішення системи (4.22) отримуємо у вигляді

$$A = D^{-1}M. \tag{4.23}$$

Для отримання значень невідомих амплітуд вимушених коливань колінчастого валу доцільно також використання програмного пакету MathLAB. Якщо частота  $\omega$  збурюючих моментів (4.16) наближається до будь-якої з власних частот  $k_1, k_2, \dots, k_n$  колінчастого валу, то в коливальній системі виникає явище резонансу. Частоти, при яких виникають резонансні крутильні коливання, називають критичними.

Для попередження резонансних коливань потрібно підбирати параметри колінчастого валу таким чином, щоб частота обертання його була достатньо далеко від критичної частоти.

Значення критичних частот можуть бути отримані при  $D = 0$ , що являється наслідком розгляду співвідношення (4.23).

Розглянемо двохциліндровий автомобільний двигун, схема заміщення якого приведена на рис. 4.2.

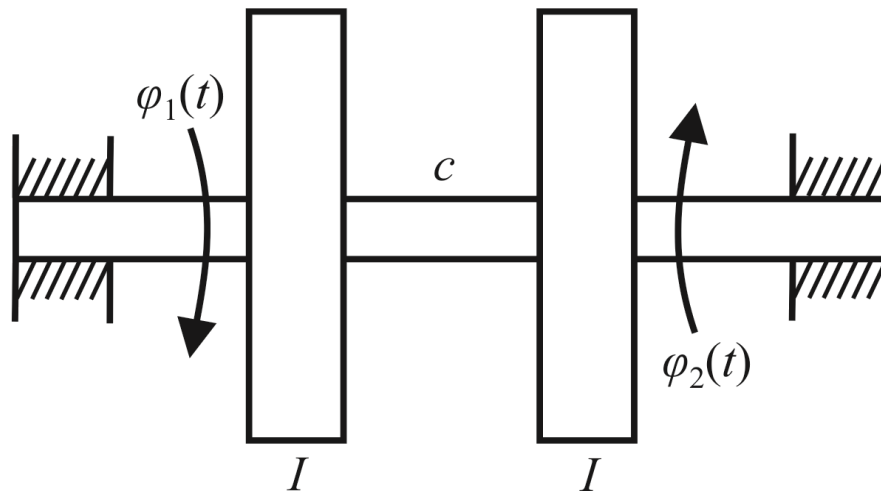


Рис. 4.2. Схема заміщення колінчастого валу двохциліндрового ДВЗ

Детермінант системи алгебраїчних рівнянь відносно амплітуд крутильних коливань  $A_1$  і  $A_2$  приймає наступний вигляд

$$D = \begin{vmatrix} c - I\omega^2 & -c \\ -c & c - I\omega^2 \end{vmatrix} = (c - I\omega^2)^2 - c^2 = \quad (4.24)$$

$$= -2cI\omega^2 + I^2\omega^4 = I\omega^2(I\omega^2 - 2c).$$

Детермінант (4.24) дорівнюємо нулю і отримаємо значення критичного значення частоти крутильних коливань

$$(\omega^*)^2 = \frac{2c}{I}; \omega^* = \sqrt{\frac{2c}{I}}. \quad (4.25)$$

Резонансні крутильні коливання в схемі заміщення, що подана на рис. 4.2, будуть відсутні, якщо значення критичної частоти (4.25) не попадають в інтервал робочих частот двигуна ( $\omega_{\min} \div \omega_{\max}$ ).

Перейдемо до розгляду трьохциліндрового ДВЗ, схема заміщення якого надана на рис. 4.3.

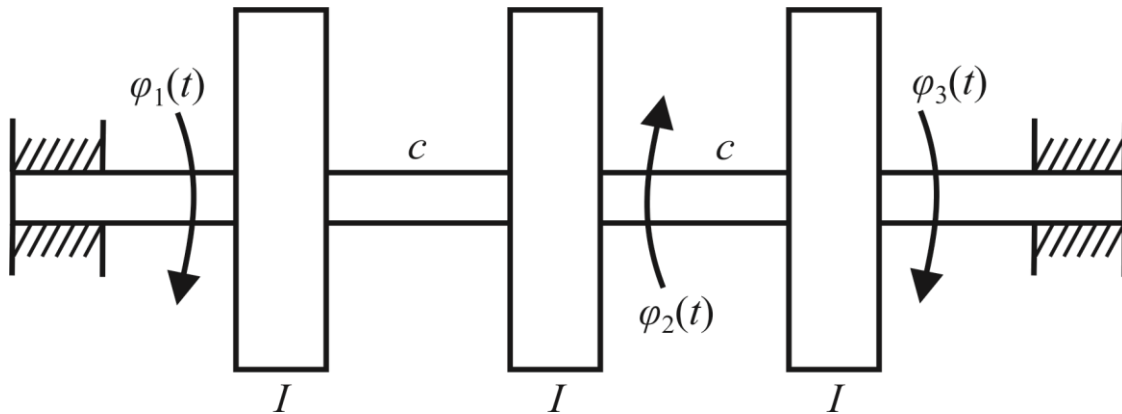


Рис. 4.3. Схема заміщення колінчастого валу трьохциліндрового ДВЗ

Детермінант системи алгебраїчних рівнянь відносно амплітуд крутильних коливань  $A_1$ ,  $A_2$  і  $A_3$  має наступний вигляд

$$D = \begin{vmatrix} c - I\omega^2 & -c & 0 \\ -c & 2c - I\omega^2 & -c \\ 0 & -c & c - I\omega^2 \end{vmatrix} = \quad (4.26)$$

$$= -I\omega^2 (I^2\omega^4 - 4cI\omega^2 + 3c^2).$$

Детермінант (4.26) дорівнюємо нулю і отримаємо біквдратне рівняння для визначення критичних частот крутильних коливань схеми заміщення, що надана на рис. 4.3

$$I^2\omega^4 - 4cI\omega^2 + 3c^2 = 0. \quad (4.27)$$

Поділимо обидві частини біквдратного рівняння (4.27) на  $I^2$ . В результаті маємо

$$\omega^4 - 4\frac{c}{I}\omega^2 + 3\frac{c^2}{I^2} = 0. \quad (4.28)$$

Рішення біквadratного рівняння (4.28) визначають значення критичних частот крутильних коливань колінчастого валу трьохциліндрового ДВЗ

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{3c}{I}}; \quad \omega_2^* = \sqrt{\frac{c}{I}}.$$

І, нарешті, розкриємо детермінант (4.21), який відповідає чотирьохциліндровому ДВЗ

$$D = \omega^2 \left( \omega^6 - 6\frac{c}{I}\omega^4 + 10\frac{c^2}{I^2}\omega^2 - 4\frac{c^3}{I^3} \right). \quad (4.29)$$

На жаль, відсутні аналітичні залежності для розрахунку коренів поліному 6-го порядку

$$\omega^6 - 6\frac{c}{I}\omega^4 + 10\frac{c^2}{I^2}\omega^2 - 4\frac{c^3}{I^3} = 0. \quad (4.30)$$

Для розрахунку коренів поліному (4.30) застосуємо програмний пакет MathLAB (див. Додаток 1).

#### **Контрольні запитання до розділу 4.**

1. Поясніть схему заміщення при розробці математичної моделі вільних коливань колінчастого валу двигуна.
2. Запишіть математичну модель вільних коливань колінчастого валу чотирьохциліндрового двигуна.
3. Запишіть математичну модель вимушених коливань колінчастого валу чотирьохциліндрового двигуна.

## Розділ 5

# КОЛИВАННЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.

### 5.1. Вільні коливання пружної гармати на шасі армійського автомобіля.

Дискретно-континуальними динамічними системами будемо називати складні технічні об'єкти, що представляють собою сукупність дискретної частини із зосередженими параметрами і континуальної частини із розподільними параметрами, які взаємодіють одна з іншою. Математична модель збуреного руху дискретно-континуальної динамічної системи представляє собою сукупність звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь в часткових похідних. Прикладами дискретно-континуальних динамічних систем являються ракети різного класу з рідинними реактивними двигунами, космічні апарати з пружними елементами сонячних батарей, літаки різного класу з пружними крилами, самохідні артилерійські установки з довжиною стволу гармати, що перевищує 40 калібрів; автомобілі-паливозаправники з цистернами, об'єм яких перевищує 20 м<sup>3</sup>.

Розглянемо гармату колісної самохідної артилерійської установки калібром 120 мм, розрахункова схема якої приведена на рисунку 5.1.

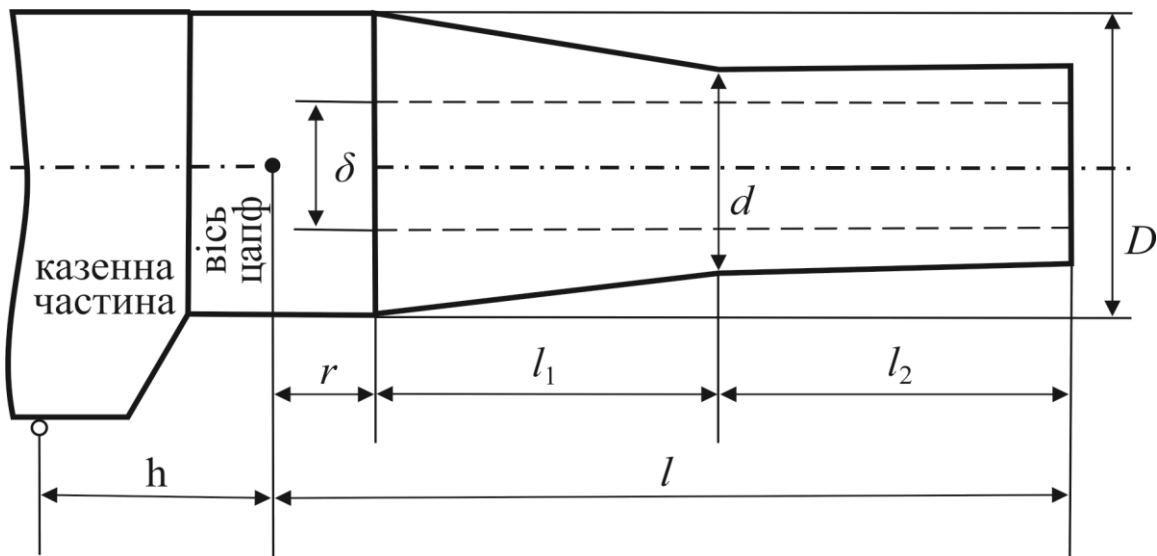


Рис. 5.1. Розрахункова схема гармати САУ:  
 $\delta = 120$  мм;  $d = 172$  мм;  $D = 252$  мм;  $r = 250$  мм;  
 $l_1 = 2180$  мм;  $l_2 = 2400$  мм;  $l = 4830$  мм.

Будемо розглядати гармату як сукупність твердого тіла (казенної частини) і пружного елемента (стволу). Введемо наступні системи координат:  $0X_0Y_0Z_0$  – інерціальна система координат з центром  $0$  розташованим на вісі цапф, причому вісі  $0X_0$  і  $0Y_0$  утворюють площину стрільби;  $0X_1Y_1Z_1$  – пов'язана з казенною частиною система координат (рис. 5.2).

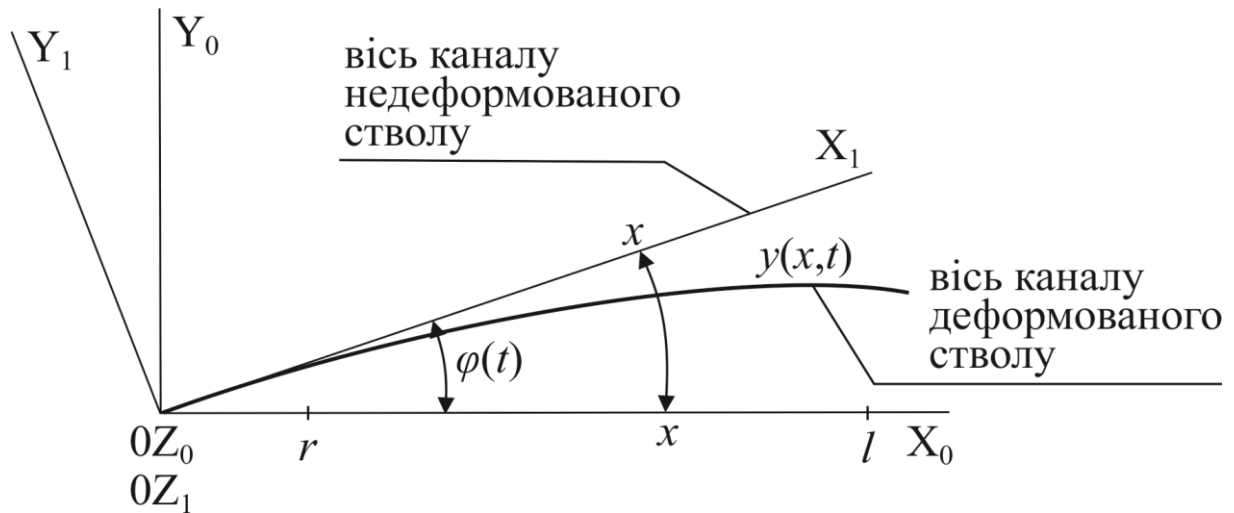


Рис. 5.2. Системи координат

Вісь  $0X_0$  співпадає з лінією прицілювання, а вісь  $0X_1$  спрямована вздовж вісі недеформованого каналу стволу. Відстань  $0r$  дорівнює довжині відрізка від вісі цапф гармати до місця з'єднання стволу і казенної частини, а відстань  $0l$  дорівнює довжині відрізка від вісі цапф до дульного зрізу. Отже, довжина деформуємого стволу гармати складає  $l-r$ . Вісі  $0Z_0$  та  $0Z_1$  перпендикулярні до площини стрільби.

Позначимо через  $x$  поточну відстань від вісі цапф гармати до будь-якої точки стволу. Тоді  $y(x,t)$  представляє собою поточне відхилення цієї точки від вісі  $0X_1$ .

Розглянемо математичну модель вільних коливань стволу гармати, для чого скористаємось принципом Гамільтона. Кінетична і потенціальна енергія стволу пружної гармати визначається співвідношеннями:

$$K = \frac{1}{2} \left\{ I_n \left[ \frac{d\varphi(t)}{dt} \right]^2 + \int_r^l m(x) v^2(x,t) dx \right\}; \quad (5.1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_r^l EI(x) \left[ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx, \quad (5.2)$$

де  $\varphi(t)$  – кут повороту пов'язаної з гарматою системи координат відносно інерціальної системи,  $v(x,t)$  – поточна швидкість руху точки  $X$  стволу, яка визначається формулою

$$v(x,t) = (x+r) \frac{d\varphi(t)}{dt} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}; \quad (5.3)$$

$m(x)$  – погонна маса стволу;  $EI(x)$  – згинна жорсткість стволу;  $I_n$  – момент інерції недеформуємої гармати відносно вісі цапф.

У відповідності до принципу Гамільтона розглянемо кінетичний потенціал, який дорівнює

$$L = K - \Pi, \quad (5.4)$$

а також введемо до розгляду величину  $S$ , яка називається дією за Гамільтоном на відрізку часу  $(0, T)$  і визначається формулою

$$S = \int_0^T L dt. \quad (5.5)$$

З урахуванням формулі (5.1) – (5.4) обчислимо варіацію величини (5.5) з урахуванням крайових умов

$$y(x,t) \Big|_{x=r} = 0; \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=r} = 0; \quad (5.7)$$

$$EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0; \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] \Big|_{x=l} = 0 \quad (5.9)$$

і дорівнюємо цю варіацію нулю. В результаті отримуємо

$$I_n \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} - \int_r^l m_1(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} dx = 0; \quad (5.10)$$

$$m_1(x) \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -m(x)g, \quad (5.11)$$

де величина  $m_1(x)$  визначається формулою

$$m_1(x) = m(x)(x - r). \quad (5.13)$$

З урахуванням внутрішнього демпфірування матеріалу стволу гармати, математичну модель вільних коливань стволу гармати запишемо в остаточному вигляді:

$$I_n \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} - \int_r^l m_1(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} dx = 0; \quad (5.14)$$

$$m_1(x) \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x) \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = -m(x)g, \quad (5.15)$$

де  $\zeta$  коефіцієнт внутрішнього демпфірування.

У відповідності з роботами функцій  $y(x,t)$  подамо у вигляді (метод Фур'є):

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x) T_i(t), \quad (5.16)$$

де  $n$  – число враховуємих тонів пружних коливань стволу.  
Підставимо (5.16) у рівняння (5.14) і (5.15)

$$I_n \ddot{\phi}(t) - \sum_{i=1}^n \ddot{T}_i(t) \int_r^l m_1(x) \gamma_i(x) dx = 0; \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} & m_1(x) \ddot{\phi}(t) + m(x) \sum_{i=1}^n \gamma_i(x) \ddot{T}_i(t) + \\ & + E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ I(x) \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i(x) T_i(t) \right] + \\ & + \zeta E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ I(x) \sum_{i=1}^n \ddot{\gamma}_i(x) \dot{T}_i(t) \right] = -m(x)g. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Обидві частини рівняння (5.18) помножимо на  $\gamma_j(x)$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) і проінтегруємо в межах від  $r$  до  $l$

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}(t) \int_r^l m_1(x) \gamma_j(x) dx + \\ & + \sum_{i=1}^n \ddot{T}_i(t) \int_r^l m(x) \gamma_i(x) \gamma_j(x) dx + \\ & + E \sum_{i=1}^n T_i(t) \int_r^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ I(x) \dot{\gamma}_i(x) \gamma_j(x) \right] dx + \\ & + \zeta E \sum_{i=1}^n \dot{T}_i(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_r^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ I(x) \ddot{\gamma}_i(x) \gamma_j(x) \right] dx = \\ & = - \int_r^l m(x) g \gamma_j(x) dx. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Запишемо умови ортогональності власних форм пружних коливань стволу

$$\int_r^l m_1(x) \gamma_j(x) dx = a_j, \quad (j = \overline{1, n});$$

$$E \int_r^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} [I(x) \ddot{\gamma}_i(x) \gamma_j(x)] dx = \begin{cases} 0 & \text{і} \quad \text{д} \ddot{\text{e}} \quad i \neq j \\ b_j & \text{і} \quad \text{д} \ddot{\text{e}} \quad i = j \end{cases};$$

$$\int_r^l m(x) \gamma_i(x) \gamma_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{і} \quad \text{д} \ddot{\text{e}} \quad i \neq j \\ c_j & \text{і} \quad \text{д} \ddot{\text{e}} \quad i = j \end{cases};$$

$$\int_r^l m(x) \gamma_j(x) dx = k_j; \quad (j = \overline{1, n}).$$

У співвідношеннях (5.20) можна покласти

$$\gamma_i(x) = \sin \frac{i\pi}{2(l-r)} x; \quad (i = \overline{1, n}).$$

З урахуванням співвідношень (5.19) і (5.20) система (5.17), (5.18) записується у вигляді

$$I_n \ddot{\phi}(t) - \sum_{i=1}^n a_i \ddot{T}_i(t) = 0; \quad (5.22)$$

$$a_i \ddot{\phi}(t) + c_i \ddot{T}_i(t) + \zeta b_i \dot{T}_i(t) + b_i T_i(t) = -k_i g; \quad (i = \overline{1, n}).$$

Для гармати калібру 120 мм, розрахункова схема якої приведена на рис. 5.1, коефіцієнти математичної моделі (5.21) при урахуванні перших трьох тонів пружних коливань стволу приведені в таблиці 5.1. При цьому значення моменту інерції  $I_n$  складає  $I_n = 736,9 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ , а значення коефіцієнту внутрішнього тертя  $\zeta$  дорівнює  $\zeta = 0,0082 \text{ с}$ .

Таблиця 5.1 – Коефіцієнти математичної моделі вільних коливань пружної гармати

Номер тону	$a_i \text{ Н} \cdot \text{с}^2$	$b_i \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$	$c_i \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^2$	$k_i \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^2$
1	$9,721 \cdot 10^2$	$2,213 \cdot 10^5$	$2,152 \cdot 10^3$	$3,612 \cdot 10^2$
2	$7,999 \cdot 10^2$	$3,194 \cdot 10^6$	$1,941 \cdot 10^3$	$3,994 \cdot 10^2$
3	$6,340 \cdot 10^2$	$1,736 \cdot 10^7$	$2,144 \cdot 10^3$	$2,2860 \cdot 10^2$

Будемо вважати гармату застопореною, причому кут  $\varphi(t)$  при цьому покладемо рівним  $\varphi(t) = \varphi_0$ . Рівняння (5.22) записуються в цьому випадку у вигляді:

$$c_i \ddot{T}_i(t) + \zeta b_i \dot{T}_i(t) + b_i T_i(t) = -k_i g; \quad (i = \overline{1, n}). \quad (5.23)$$

Покладемо, що

$$T_i(t) = T_{i0} + \Delta T_i(t), \quad (5.24)$$

де  $T_{i0}, (i = \overline{1, n})$  – статичні складові, що обумовлені статичним прогином стволу,  $\Delta T_i(t), (i = \overline{1, n})$  – динамічні складові. Тоді кожне з рівнянь (5.23) розкладається на два рівняння

$$b_i T_{i0} = -k_i g; \quad (5.25)$$

$$c_i \Delta \ddot{T}_i(t) + \zeta b_i \Delta \dot{T}_i(t) + b_i \Delta T_i(t) = 0; \quad (i = \overline{1, n}). \quad (5.26)$$

З урахуванням співвідношення (5.16), (5.21) і (5.25) отримуємо формулу для розрахунку статичного прогину стволу

$$y(x) = -g \sum_{i=1}^n \gamma_i(x) T_{i0} = -g \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{b_i} \sin \frac{i\pi}{2(l-r)} x. \quad (5.26)$$

Статичний прогин стволу в районі дульного зрізу може бути обчислений при підстановці в (5.26)  $x = l - r$ :

$$y(l - r) = -g \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{b_i}. \quad (5.27)$$

Перейдемо до розгляду вільних коливань гармати. Для цього від системи (5.22) перейдемо до розгляду системи

$$\begin{aligned} I_n \ddot{\varphi}(t) - \sum_{i=1}^n a_i \Delta \ddot{T}_i(t) &= 0; \\ a_i \ddot{\varphi}(t) + c_i \Delta \ddot{T}_i(t) + \zeta b_i \Delta \dot{T}_i(t) + b_i \Delta T(t) &= 0; \\ (i = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Кожне з рівнянь (5.26) описує вільні коливання  $i$ -того парціального осцилятора, тому описаний вище метод переходу від математичної моделі (5.14), (5.15) у часткових похідних до математичної моделі (5.28) у звичайних диференціальних рівняннях отримав назву метода парціальних осциляторів. Вперше цей метод був застосований Б.І. Рабіновичем і Г.С. Нарімановим при розробці математичної моделі збуреного руху двохступінчастої міжконтинентальної балістичної ракети Р-16 з чотирма баками, заповненими рідким паливом та окислювачем. Систему (5.28) розв'яжемо відносно старших похідних, враховуючи лише перший тон пружних коливань гармати

$$\begin{aligned} I_n \ddot{\varphi}(t) - a_1 \Delta \ddot{T}_1(t) &= 0; \\ a_1 \ddot{\varphi}(t) + c_1 \Delta \ddot{T}_1(t) &= -\zeta b_1 \Delta \dot{T}_1(t) - b_1 \Delta T_1(t); \end{aligned} \quad (5.29)$$

Введемо в розгляд вектор другого порядку

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \Delta T_1(t) \end{bmatrix}$$

і запишемо рівняння (5.29) векторно-матричній формі

$$A \ddot{Y}(t) = B \dot{Y}(t) + C Y(t), \quad (5.30)$$

де матриці  $A$ ,  $B$  і  $C$  дорівнюють

$$A = \begin{bmatrix} I_n & -a_1 \\ a_1 & c_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\zeta b_1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b_1 \end{bmatrix}$$

Із рівняння (5.30) отримуємо

$$\ddot{Y}(t) = A^{-1}B\dot{Y}(t) + A^{-1}CY(t). \quad (5.31)$$

Зворотня матриця  $A^{-1}$  дорівнює

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} c_1 & +a_1 \\ -a_1 & I_n \end{bmatrix};$$

$$\det A = \begin{vmatrix} c_1 & -a_1 \\ a_1 & I_n \end{vmatrix} = I_n c_1 + a_1^2;$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{I_n c_1 + a_1^2} & + \frac{a_1}{I_n c_1 + a_1^2} \\ -\frac{a_1}{I_n c_1 + a_1^2} & \frac{I_n}{I_n c_1 + a_1^2} \end{bmatrix}.$$

Здійснено перевірку, помноживши матриці  $A$  і  $A^{-1}$ .

$$\begin{bmatrix} I_n & -a_1 \\ a_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{c_1}{I_n c_1 + a_1^2} & + \frac{a_1}{I_n c_1 + a_1^2} \\ -\frac{a_1}{I_n c_1 + a_1^2} & \frac{I_n}{I_n c_1 + a_1^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{I_n c_1 + a_1^2}{I_n c_1 + a_1^2} & \frac{I_n a_1 - I_n a_1}{I_n c_1 + a_1^2} \\ \frac{a_1 c_1 - c_1 a_1}{I_n c_1 + a_1^2} & \frac{a_1^2 + I_n c_1}{I_n c_1 + a_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Добуток матриць  $A$  і  $A^{-1}$  дорівнює одиничній матриці, тобто матриця  $A^{-1}$  обчислена вірно.

Знайдемо матриці  $A^{-1}B$  і  $A^{-1}C$

$$\frac{1}{I_n c_1 + a_1^2} \begin{bmatrix} c_1 & a_1 \\ -a_1 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\zeta b_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{I_n c_1^2 + a_1^2} \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \zeta b_1 \\ 0 & -I_n \zeta b_1 \end{bmatrix};$$

$$\frac{1}{I_n c_1 + a_1^2} \begin{bmatrix} c_1 & a_1 \\ -a_1 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{I_n c_1 + a_1^2} \begin{bmatrix} 0 & -a_1 b_1 \\ 0 & -I_n b_1 \end{bmatrix}.$$

В результаті векторно-матричне рівняння (5.31) може бути записане у скалярній формі

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{1}{I_n c_1 + a_1^2} \left[ -a_1 \zeta b_1 \Delta \dot{T}_1(t) - a_1 b_1 \Delta T_1(t) \right]; \quad (5.32)$$

$$\square \ddot{T}(t) = \frac{1}{I_n c_1 + a_1^2} \left[ -I_n \zeta b_1 \Delta \dot{T}_1(t) - I_n b_1 \Delta T_1(t) \right].$$

Диференціальні рівняння (5.32) представляють собою математичну модель вільних коливань пружного стволу гармати. Введемо позначення

$$a_{\varphi T} = -\frac{a_1 b_1}{I_n c_1 + a_1^2}; \quad a_{TT} = -\frac{I_n b_1}{I_n c_1 + a_1^2},$$

і запишемо систему (5.32) у вигляді

$$\ddot{\varphi}(t) = a_{\varphi \delta} \left[ \zeta \Delta \dot{T}_1(t) + \Delta T_1(t) \right]; \quad (5.33)$$

$$\Delta \ddot{T}(t) = a_{\delta \delta} \left[ \zeta \Delta \dot{T}_1(t) + \Delta T_1(t) \right].$$

Введемо у розгляд вектор стану пружної гармати четвертого порядку

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ \Delta T_1(t) \\ \Delta \dot{T}_1(t) \end{bmatrix}$$

і запишемо систему (5.33) в нормальній формі Коші:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= a_{\varphi\delta}x_3(t) + a_{\varphi\delta}\zeta x_4(t); \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t); \\ \dot{x}_4(t) &= a_{\delta\delta}x_3(t) + a_{\delta\delta}\zeta x_4(t). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Скористуємось програмним пакетом MathLAB і отримаємо рішення системи диференціальних рівнянь (5.34) при початкових умовах:  $x_1(0) = 0$ ;  $x_2(0) = 0$ ;  $x_3(0) = 0,16 \cdot 10^{-1}$  м;  $x_4(0) = 0$ .

Скориставшись даними таблиці 5.1, обчислимо значення коефіцієнтів  $a_{\varphi\Gamma}$  і  $a_{\Gamma\Gamma}$ , які складають:

$$\begin{aligned} a_{\varphi\Gamma} &= -0,848 \cdot 10^2 \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}; \\ a_{\Gamma\Gamma} &= -0,643 \cdot 10^2 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

На рис. 5.3 приведені коливальні процеси, які описуються системою диференціальних рівнянь (5.34) і представляють собою вільні коливання пружного стволу танкової гармати калібром 120 мм.

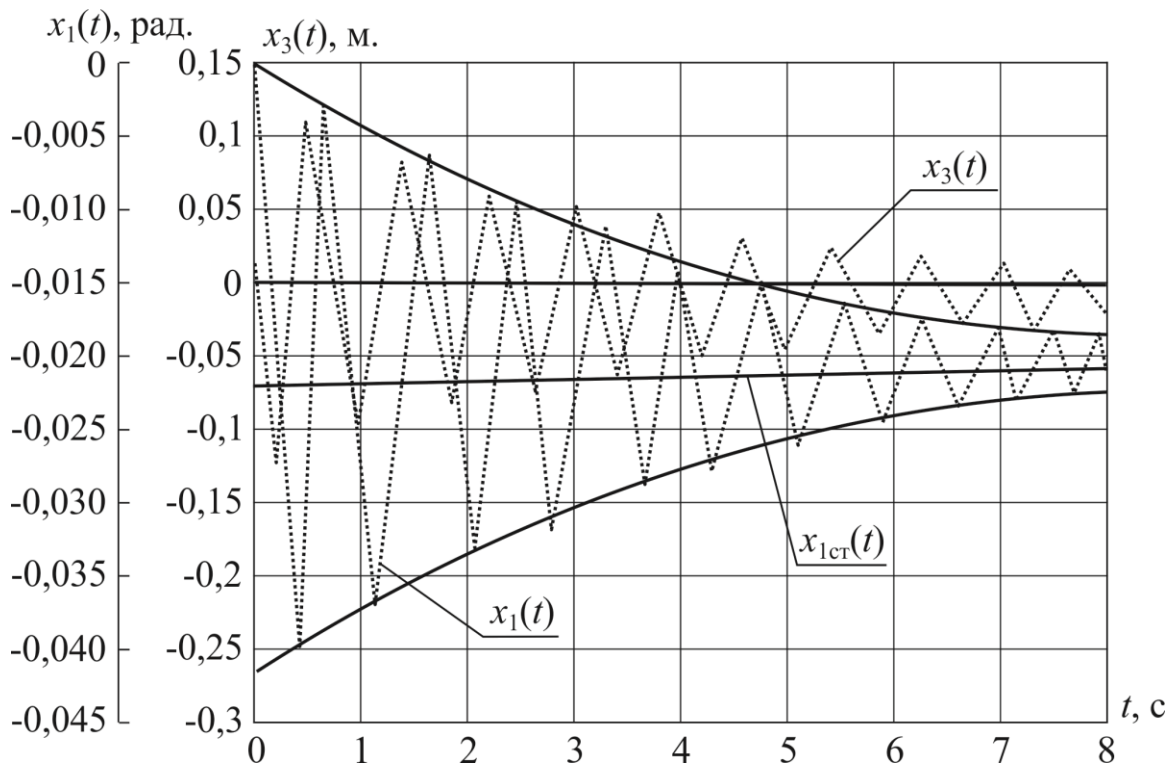


Рис. 5.3. Вільні коливання врівноваженої відносно вісі цапф танкової гармати

Аналіз проведених коливальних процесів приводить до наступних висновків:

- коливальний процес  $x_3(t) = \Delta T_1(t)$  носить затухаючий характер внаслідок внутрішнього тертя матеріалу стволу;
- коливальний процес  $x_3(t)$  не залежить від рішень перших двох диференціальних рівнянь систем (5.34), внаслідок того, що третє і четверте диференціальні рівняння (5.34) представляють собою самостійну динамічну підсистему;
- коливальний процес в цілому  $x_1(t)$  не являється затухаючим, а має статичну похибку  $x_{1ст}(t)$ ; затухаючою являється лише перехідна складова процесу  $x_1(t)$ , який представляє собою суму перехідної і сталої складових

$$x_1(t) = x_{1пер}(t) + x_{1ст}(t);$$

- коливальний процес  $x_3(t)$  являється збуджуючим процесом для процесу  $x_1(t)$ .

## 5.2. Вимушені коливання пружної гармати на шасі армійського автомобіля.

Гармата, що розташована на шасі армійського автомобіля, знаходиться під дією вимушених коливань підресореної частини шасі. Завдяки силі тертя у вісі цапф гармати на останню діє зусилля збудження

$$M_3(t) = m_{\pi} \text{sign}[\dot{\phi}_{\dot{A}}(t) - \dot{\phi}(t)] + \mu[\dot{\phi}_{\dot{A}}(t) - \dot{\phi}(t)], \quad (5.35)$$

де  $\dot{\phi}(t)$  – кутова швидкість повороту гармати відносно вісі цапф;  $\dot{\phi}_{\dot{A}}(t)$  – кутова швидкість повороту башти з гарматою у площині стрільби;  $m_c$  – момент сухого тертя у вісі цапф;  $\mu$  – коефіцієнт рідинного тертя у вісі цапф. На рисунку 5.4 приведені наступні системи координат:  $O_K X_K Y_K Z_K$  – система координат, що пов'язана з підресореною частиною корпусу автомобіля;  $O_B X_B Y_B Z_B$  – система координат, що пов'язана з баштою, яка обертається в горизонтальній площині і в якій закріплена гармата;  $O_G X_G Y_G$  – система координат, що пов'язана з гарматою, причому вісь  $O_G X_G$  співпадає з віссю неформованого стволу, а вісь  $O_G Y_G$  співпадає з віссю цапф.

Поточний кут повороту башти відносно підресореної частини корпусу складає  $\alpha(t)$ , поточна швидкість подовжньо-кутових коливань корпусу складає  $\dot{\varphi}_{\hat{e}}(t)$ , а поточна швидкість поперечно кутових коливань корпусу складає  $\dot{\theta}_{\hat{e}}(t)$ . Тоді із розглядання рисунку 5.4 можна записати співвідношення для кутової швидкості подовжньо-кутових коливань башти

$$\dot{\varphi}_{\hat{A}}(t) = \dot{\varphi}_{\hat{e}}(t) \cos \alpha(t) + \dot{\theta}_{\hat{e}}(t) \sin \alpha(t). \quad (5.36)$$

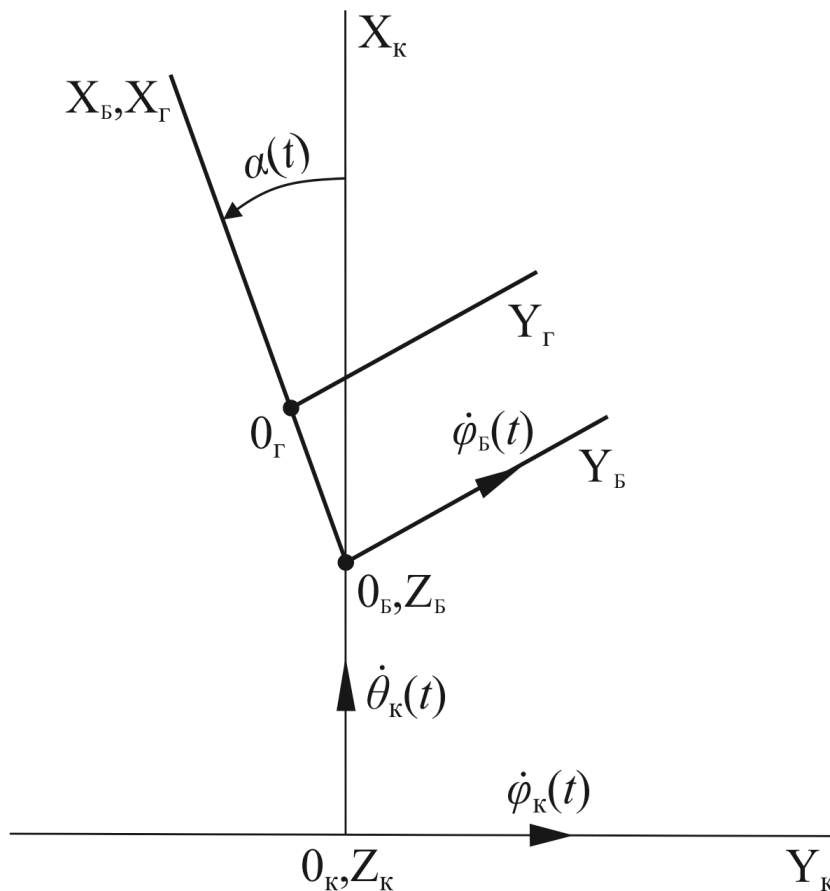


Рис. 5.4. Системи координат, пов'язані з корпусом, баштою і гарматою

Підстава співвідношення (5.36) в формулу (5.35) дозволяє отримати значення збурюючого моменту, що діє на гармату. Крім того, на ствол гармати діє розподілене зусилля, що визначається формулою

$$F(x, t) = m(x) [\ddot{z}_K(t) - g], \quad (5.37)$$

де  $\ddot{z}_k(t)$  – вертикальне прискорення центру тяжіння підресореної частини корпусу автомобіля.

В результаті математична модель вимушених коливань пружної танкової гармати записується у вигляді

$$I_n \ddot{\phi}(t) - \sum_{i=1}^n a_i \Delta \ddot{T}_i(t) = M_3(t);$$

$$a_i \ddot{\phi}(t) + c_i \Delta \ddot{T}_i(t) + \zeta b_i \Delta \dot{T}_i(t) + b_i \Delta T_i(t) = k_i \ddot{z}_e(t); \quad (5.38)$$

$$(i = \overline{1, n}).$$

Поточні величини  $\ddot{z}_e(t)$ ,  $\dot{\phi}_e(t)$  <sup>3</sup>  $\dot{\theta}_e(t)$  визначаються математичною моделлю (2.11). Якщо до математичної моделі (5.38) порядку  $2(n+1)$  додати систему диференціальних рівнянь (2.11) 6-го порядку, а також систему диференціальних рівнянь (2.10) четвертого порядку, то, з урахуванням співвідношень (5.35) і (5.36), отримуємо систему диференціальних рівнянь  $2(n+6)$  порядку, яка описує випадкові коливальні процеси стволу гармати, що встановлена на шасі армійського автомобіля, який рухається по випадковій поверхні.<sup>1</sup>

### **5.3. Автомобіль-паливозаправник як дискретно-континуальна система. Вимушені коливання вільної поверхні транспортуємої рідини та їх вплив на курсову стійкість автомобіля.**

Забезпечення рідким паливом військових підрозділів, здійснюється автомобілями-паливозаправниками у вкрай важких умовах зруйнованих доріг, на яких термінове гальмування часто призводить до втрати автомобілем стійкості руху внаслідок порушень зчеплення його коліс з дорогою. Найкращі світові зразки автомобілів-паливозаправників оснащені системами керування гальмами, які складаються принаймні з двох паралельно

---

<sup>1</sup> Повне рішення задачі випадкових вимушених коливань танкової гармати приведено в статті : Е.Е. Александров, Т.Е. Александрова. Параметричний синтез цифрової системи стабілізації танкової гармати. Проблеми керування та інформатики. 2015. №6. с. 5 – 20.

функціонуючих систем автоматичного керування: антиблокувальної системи ABS, що запобігає блокуванню коліс при різкому натисненні на педаль гальмі, і системи курсової стійкості автомобіля VSC (Vehicle Stability Control). Система VSC працює в комплексі з системою ABS і дозволяє більш ефективно розподілити гальмівні зусилля на колесах і підвищити керованість і стійкість руху автомобіля в процесі гальмування.

Системами ABS і VSC оснащені усі автомобілі, що випускаються в Євросоюзі, Великій Британії, США, Японії і Південній Кореї. Але найбільш ефективно використання таких систем на автомобілях-паливозаправниках, внаслідок впливу коливань рідкого палива в цистерні на стійкість руху автомобіля. Оцінимо цей вплив на прикладі вітчизняного автомобіля-паливозаправника КрАЗ-63221 з односекційною цистерною валізного типу, об'ємом  $20 \text{ м}^3$ , довжиною  $a = 6 \text{ м}$ , шириною  $b = 2,4 \text{ м}$  і висотою  $H = 1,4 \text{ м}$ . Ширина колії дорівнює  $B = 2 \text{ м}$ , суха маса дорівнює  $10700 \text{ кг}$ , а за умови, що цистерна заповнена паливом наполовину, маса автомобіля складає  $M = 20000 \text{ кг}$ , а момент інерції відносно власної вертикальної вісі складає  $I = 14,8 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , причому відстань між центрами тяжіння автомобіля і цистерни дорівнює  $\Delta L = 1 \text{ м}$ . При русі по ґрунтовій дорозі паливозаправник може досягати швидкості руху  $V_0 = 18 \text{ м/с}$ .

Розроблена математична модель збуреного руху автомобіля в процесі гальмування із «затверділим» паливом. Ця модель має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= -\frac{1}{M} \{2k_{\tilde{a}} p_0 + Gf_0\} + F_x(t); \\ \ddot{\psi}(t) &= -\frac{Bk_{\tilde{a}}}{2I} \Delta p(t) - \frac{2H_m M}{I} v(t) \dot{\psi}(t) f_0 + \frac{1}{I} M_{\psi}(t); \\ \dot{y}(t) &= -v(t) \psi(t), \end{aligned} \quad (5.39)$$

де  $k_{\tilde{a}}$  – коефіцієнт ефективності гальмі;  $p_0$  – тиск гальмівної рідини на виході головного гальмівного циліндру;  $f_0$  – середнє значення коефіцієнту спротиву руху;  $\Delta p(t)$  – різниця тисків гальмівної

рідини у гальмівних магістралях правого і лівого бортів автомобіля;  
 $v(t)$  – поточна швидкість руху автомобіля при гальмуванні;  
 $\psi(t)$  – поточний кут повороту корпусу автомобіля при гальмуванні;  
 $y(t)$  – бічний зсув центру тяжіння автомобіля при гальмуванні;  
 $H_m$  – відстань від поверхні руху автомобіля до його центру тяжіння;  
 $F_x(t)$ ,  $M_\psi(t)$  – збурюючі сила та момент, що зумовлені відхиленнями значень коефіцієнтів спротиву руху по бортам автомобіля від їх середнього значення

$$f_{\dot{i}}(t) = f_0 + \Delta f_{\dot{i}}(t);$$

$$f_{\ddot{e}}(t) = f_0 + \Delta f_{\ddot{e}}(t),$$

і визначаються формулами

$$F_x(t) = \frac{G}{2M} [\Delta f_{\dot{i}}(t) + \Delta f_{\ddot{e}}(t)]; \quad (5.40)$$

$$M_\psi(t) = \frac{H_m M}{I} v_x(t) \dot{\psi}(t) [\Delta f_{\dot{i}}(t) - \Delta f_{\ddot{e}}(t)].$$

Розроблена математична модель збуреного руху автомобіля-паливозаправника з урахуванням коливань вільної поверхні палива в цистерні. Модель отримана при застосуванні методу парціальних осциляторів і має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= -\frac{1}{M} [2k_{\bar{a}} p_0 + G f_0] - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \ddot{x}_k(t) + F_x(t); \\ \ddot{\psi}(t) &= -\frac{B k_{\bar{a}}}{2I} \Delta p(t) - \frac{2 H_m M}{I} v(t) \dot{\psi}(t) f_0 + \\ &+ \frac{f_0}{I} \sum_{l=1}^m m_l \{ [\Delta L - (H_n + h_l)] \ddot{y}_l(t) - g y_l(t) \} + M_\psi(t); \quad (5.41) \\ \dot{y}(t) &= -v(t) \psi(t); \end{aligned}$$

$$\ddot{x}_k(t) + \varepsilon_k \dot{x}_k(t) + \omega_k^2 x_k(t) = -\dot{v}(t); \quad (k = \overline{1, n});$$

$$\ddot{y}_l(t) + \varepsilon_l \dot{y}_l(t) + \omega_l^2 y_l(t) = -v(t)\dot{\psi}(t) - \Delta L \ddot{\psi}(t); \quad (l = \overline{1, m}).$$

де  $\Delta L$  – відстань між центром тяжіння автомобіля і вертикальною віссю цистерни;  $H_n$  – відстань від поверхні дорожнього покриття до днища цистерни;  $g$  – прискорення сили тяжіння,  $h_l$  – відстань від днища цистерни до центру тяжіння  $l$ -того парціального осцилятора.

$$h_l = h - \frac{th\left(\lambda_l^y \frac{h}{2}\right)}{\lambda_l^y}; \quad (l = \overline{1, m}),$$

В математичній моделі (5.41) прийняті наступні позначення:  $x_k(t)$ ,  $(k = \overline{1, n})$  – подовжні зміщення центрів тяжіння парціальних осциляторів відносно вертикальної вісі цистерни, що описують  $n$  форм подовжніх коливань палива у цистерні;  $y_l(t)$ ,  $(l = \overline{1, m})$  – поперечні зміщення центрів тяжіння парціальних осциляторів відносно вертикальної вісі цистерни, що описують перші  $m$  форм поперечних коливань палива у цистерні;  $m_k$ ,  $(k = \overline{1, n})$ ;  $m_l$ ,  $(l = \overline{1, m})$  – маси парціальних осциляторів, що визначаються співвідношеннями:

$$m_k = m \frac{2th(\lambda_k^x h)}{\pi^2 \lambda_k^x h (k - 0,5)^2}; \quad (k = \overline{1, n});$$

$$m_l = m \frac{2th(\lambda_l^y h)}{\pi^2 \lambda_l^y h (l - 0,5)^2}; \quad (l = \overline{1, m}),$$

де  $m$  – маса рідини в цистерні;  $h$  – рівень рідини в цистерні при відсутності коливань;  $\lambda_k^x$ ,  $(k = \overline{1, n})$ ;  $\lambda_l^y$ ,  $(l = \overline{1, m})$  – хвильові числа подовжніх та поперечних коливань рідини, причому

$$\lambda_k^x = (1 + n_x) \frac{\pi(2k-1)}{a}; \quad (k = \overline{1, n});$$

$$\lambda_l^y = (1 + n_y) \frac{\pi(2l-1)}{b}; \quad (l = \overline{1, m}),$$

$n_x$  – кількість поперечних перегородок в цистерні;  $n_y$  – кількість подовжніх перегородок;  $a, b$  – відповідно довжина і ширина цистерни залізного типу;  $\varepsilon_k, (k = \overline{1, n}); \varepsilon_l, (l = \overline{1, m})$  – коефіцієнти дисипації парціальних осциляторів

$$\varepsilon_k = \omega_k \frac{\Delta f}{\pi}; \quad (k = \overline{1, n});$$

$$\varepsilon_l = \omega_l \frac{\Delta f}{\pi}; \quad (l = \overline{1, m}),$$

$\Delta f$  – логарифмічний декремент затухання коливань палива;  $\omega_k, (k = \overline{1, n}); \omega_l, (l = \overline{1, m})$  – власні частоти парціальних осциляторів, що визначаються формулами:

$$\omega_k = \sqrt{g\lambda_k^x th(\lambda_k^x h)}; \quad (k = \overline{1, n});$$

$$\omega_l = \sqrt{g\lambda_l^y th(\lambda_l^y h)}; \quad (l = \overline{1, m}),$$

Розглянемо режим термінового гальмування автомобіля-паливозаправника КрАЗ-63221 при  $f_0 = 0,09$ ;  $p_0 = 1$  МПа, початковій швидкості  $v(0) = 18$  м·с<sup>-1</sup>, при значенні коефіцієнта інтенсивності гальмування  $k_\Gamma = 0,02$  м<sup>2</sup> і при наполовину заповненій цистерні ( $M = 20 \cdot 10^3$  кг;  $I = 14,8 \cdot 10^4$  кг·м<sup>2</sup>). На рисунку 5.5 приведені процеси гальмування (поточна швидкість  $v(t)$  і поточне прискорення  $w(t)$  центру тяжіння автомобіля) при застосуванні цистерни без поперечних перегородок, а на рис. 5.6 приведені ті ж процеси при застосуванні цистерни з однією поперечною перегородкою.

Графіки на цих рисунках відображають помітний негативний вплив подовжніх коливань вільної поверхні палива на плавність руху автомобіля-паливозаправника та вказують на можливість зменшення подовжніх коливань палива при використанні поперечних перегородок.

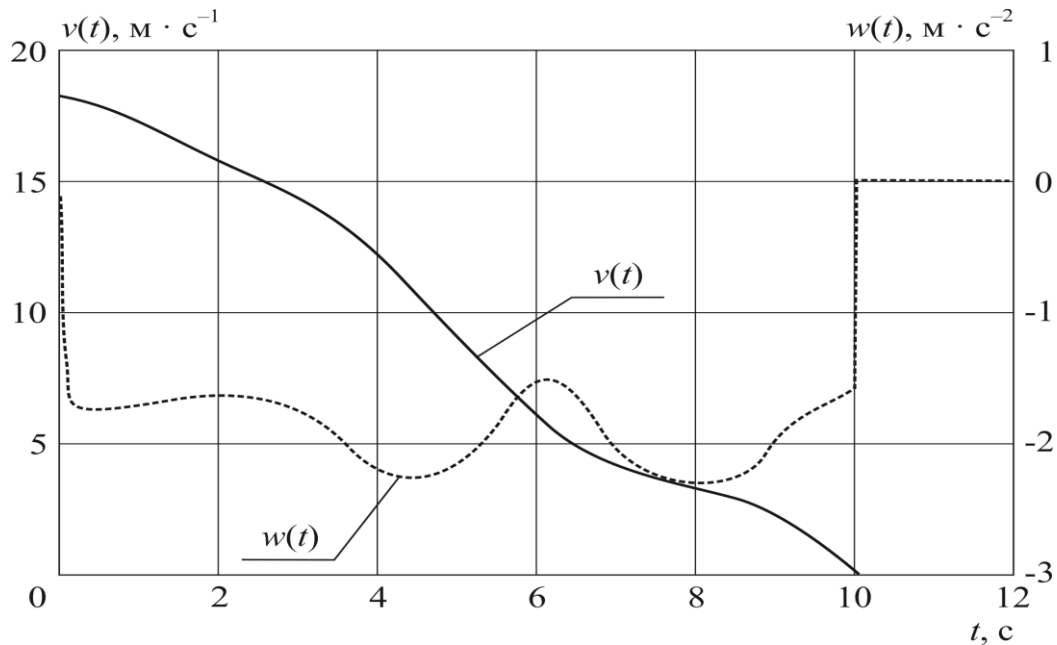


Рис. 5.5. Процеси гальмування паливозаправника з цистерною без поперечних перегородок

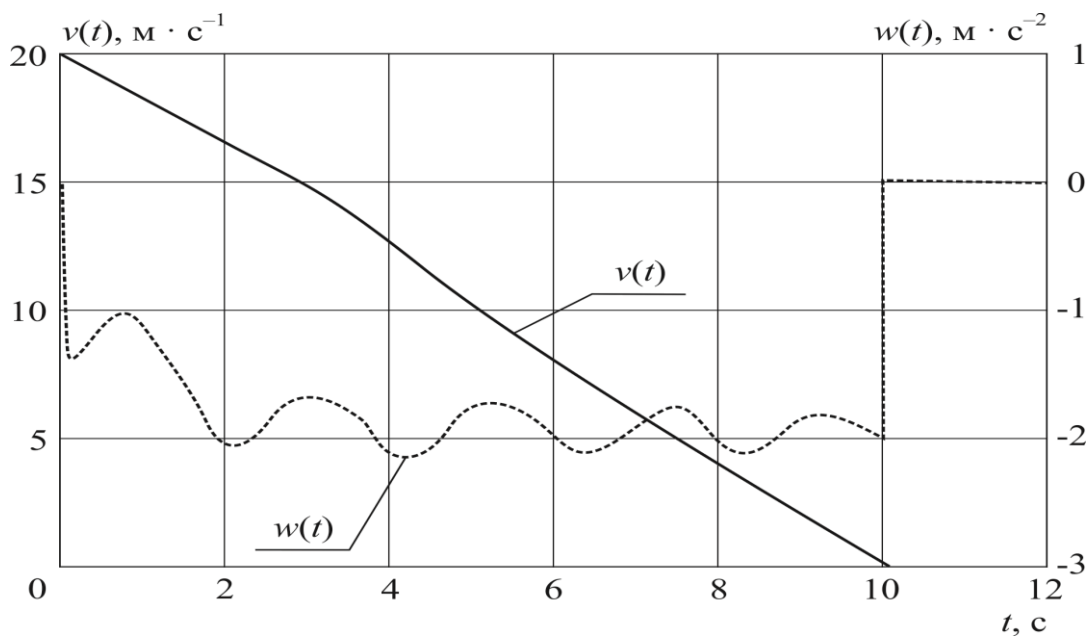


Рис. 5.6. Процеси гальмування паливозаправника з цистерною з однією поперечною перегородкою

На рисунку 5.7 зображені залежності від рівня рідини у цистерні перших трьох власних частот вільних подовжніх та поперечних коливань палива. Аналіз рисунку 5.7 приводить до висновку, що частоти вільних коливань палива в цистерні суттєво залежать від рівня заповнення цистерни і зростають при збільшенні цього рівня. Проте, якщо цистерна заповнена більш ніж наполовину, зростання частот уповільнюється, особливо для другої і третьої форм коливань.

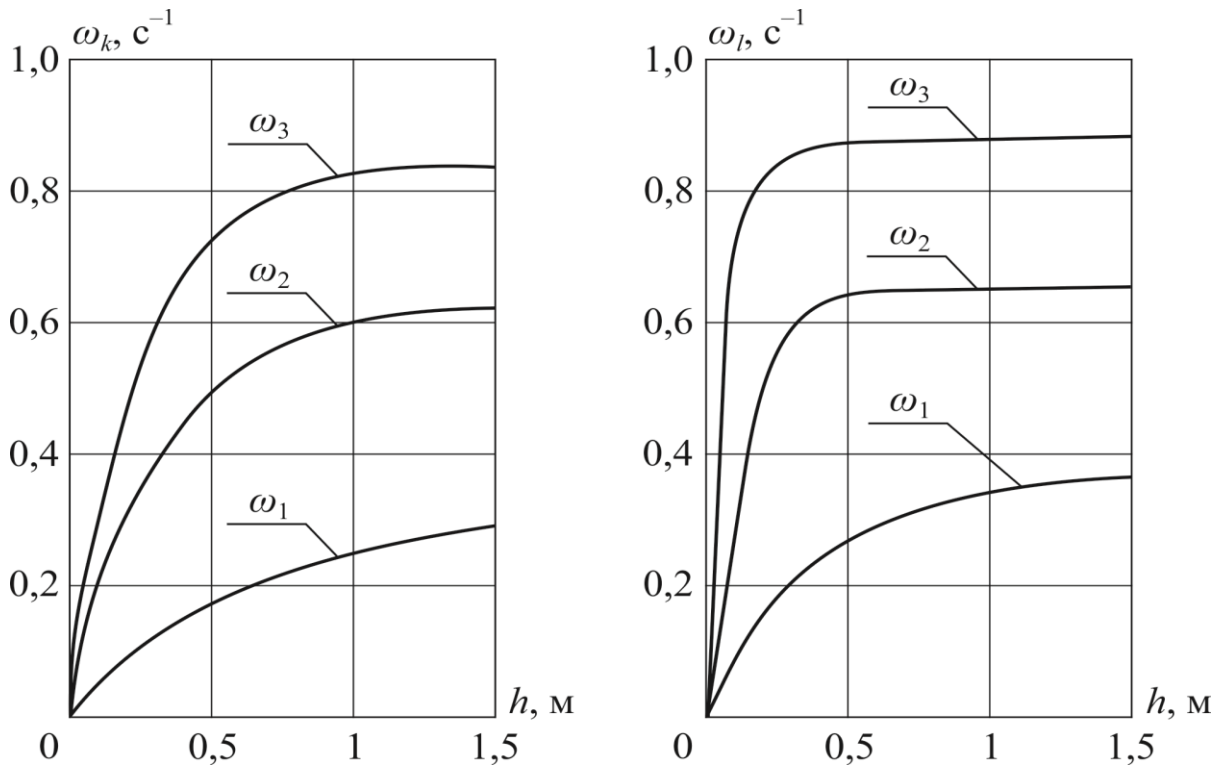


Рис. 5.7. Залежність власних частот осциляторів в залежності від рівня палива в цистерні

На рисунку 5.8 зображені залежності відносної сумарної парціальної маси від рівня палива в цистерні та кількості осциляторів, які враховуються

$$\delta x(h, k) = \frac{1}{m(h)} \sum_{i=1}^k m_i(h);$$

$$\delta y(h, l) = \frac{1}{m(h)} \sum_{j=1}^l m_j(h).$$

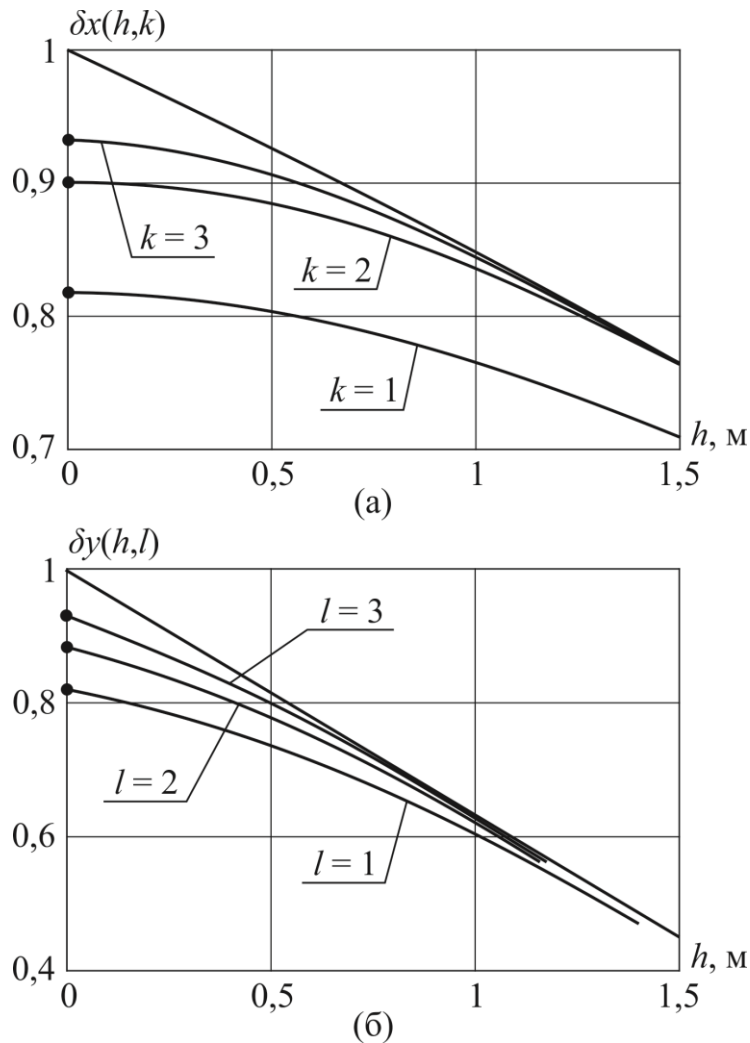


Рис. 5.8. Відносна маса рідини, що рухається у парціальних прошарках: (а – при подовжніх коливаннях; б – при поперечних коливаннях)

В результаті порівняльного аналізу графіків рисунку 5.8 можна зробити висновок, що при розгляді подовжніх коливань палива в цистерні доцільно враховувати три перші форми коливань, тобто в рівняннях (5.41) прокласти  $n = 3$ . При розгляді поперечних коливань достатньо враховувати лише першу форму, тобто в системі (5.41) покласти  $m = 1$ .

Слід зауважити, що подовжні коливання палива в цистерні впливають лише на плавність руху автомобіля-паливозаправника. Як правило, сучасні цистерни паливозаправників мають 2-3 поперечні напівпрозорі перегородки, які одночасно виконують функції ребер жорсткості цистерни. Тому при вирішенні задач аналізу і синтезу систем курсової стійкості паливозаправників подовжніми коливаннями палива в цистерні взагалі нехтують, а в математичній моделі збуреного руху палива враховують лише першу форму поперечних коливань.

Зрозуміло, що за умови повністю заповненої цистерни вільна поверхня палива відсутня і низькочастотні коливання палива не спостерігаються. Відомо правило, якому підкорюються екіпажі морських танкерів: кожна цистерна та ємність при транспортуванні повинні бути повністю заповнені, або повністю порожні. Нажаль, відповідати цьому правилу автомобілі-паливозаправники військового призначення не можуть. Тому єдиним шляхом підвищення їх стійкості являється оснащення таких автомобілів системами курсової стійкості VSC.

### **Контрольні запитання до розділу 5.**

1. Які динамічні системи називаються дискретно-континуальними?
2. В чому полягає сутність методу Гамільтона?
3. В чому причина вимушених коливань пружної гармати, розташованої на шасі армійського автомобіля?
4. Чим відрізняється математична модель збуреного руху автомобіля-паливозаправника із «затверділим» паливом від збуреного руху автомобіля із рідким паливом?
5. Як виглядає математична модель збуреного руху автомобіля-паливозаправника із повністю заповненою цистерною?
6. У чому полягає сутність методу парціальних осциляторів?

## Розділ 6

# СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.

### 6.1. Визначення стійкості динамічної системи за Ляпуновим.

Під динамічною системою будемо розуміти об'єкт будь-якої фізичної природи, або фізичний процес, поведінка якого описується системою диференціальних рівнянь (звичайних, або в часткових похідних), що називається математичною моделлю об'єкта або процесу. Стан математичної моделі в будь який момент часу  $t$  може бути представлений у вигляді елемента  $X(t)$  множини можливих станів  $G_x$ , яка може розглядатися як простір станів динамічної системи. Для більшості задач теорії динамічних систем простором станів являється евклідовий метричний простір, в якому відстань між двома його елементами  $X_1 \in G_x$  і  $X_2 \in G_x$  у вигляді дійсної функції  $\rho(X_1, X_2)$  задовольняє трьома аксіомам:

1.  $\rho(X_1, X_2) = 0$  при  $X_1 = X_2$ ;
2. аксіома симетрії  $\rho(X_1, X_2) = \rho(X_2, X_1)$ ;
3. аксіома трикутника  $\rho(X_1, X_3) \leq \rho(X_1, X_2) + \rho(X_2, X_3)$ .

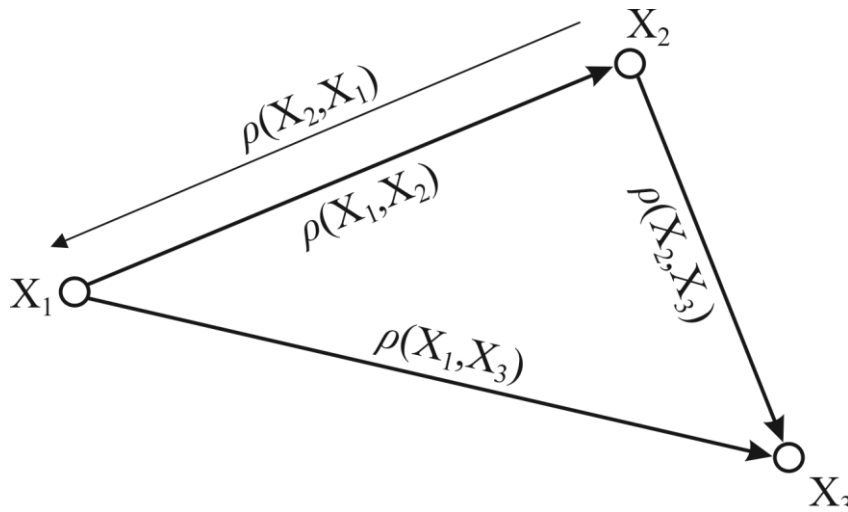


Рис. 6.1. До аксіом метричного простору

Елементами метричного евклідова простору станів  $R^n$  являється  $n$ -мірні вектори

$$X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T, \quad (6.1)$$

а відстань  $\rho$  визначається як евклідова норма різниці векторів  $X_1(t)$  та  $X_2(t)$

$$\begin{aligned} \rho[X_1(t), X_2(t)] &= \left\{ [x_{11}(t) - x_{12}(t)]^2 + [x_{21}(t) - x_{22}(t)]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \dots + [x_{n1}(t) - x_{n2}(t)]^2 \right\}^{1/2} = \\ &= \langle [X_1(t) - X_2(t)], [X_1(t) - X_2(t)] \rangle^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Відстань (6.2) задовольняє трьом приведеним вище аксіомам. При  $n = 3$  евклідовий простір являється реальним трьохмірним простором.

Векторне диференціальне рівняння, що описує збурений рух динамічної системи відносно стану сталої рівноваги має вигляд

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t), \alpha]; \quad X(t) \in R^n; \quad \alpha \in R^s, \quad (6.3)$$

де  $\alpha$  –  $s$ -мірний вектор варійованих параметрів динамічної системи;  $\Phi[X(t), \alpha]$  –  $n$ -мірна вектор-функція компонентів  $n$ -мірного вектора стану  $X(t)$  і  $s$ -мірного вектора варійованих параметрів  $\alpha$ . При розробці математичної моделі (6.3) звичайно покладають, що в стані сталої рівноваги  $X(t) = 0$ .

Поряд з поняттям динамічної системи будемо використовувати поняття динамічного процесу. Якщо поведінка динамічної системи описується рівнянням (6.3), то динамічний процес представляє собою рішення диференціального рівняння (6.3) при визначеній початковій умові  $X(0)$  і визначеному векторі варійованих параметрів  $\alpha \in G_\alpha \in R^s$ . Вектор стану динамічного процесу позначимо  $X(t, \alpha)$ . Кінець вектору  $X(t, \alpha)$ , що називається **зображуюча точка**, при зміні часу  $t$  описує в просторі  $R^n$  **фазову траєкторію**.

Під стійкістю динамічної системи будемо вважати властивість системи повертатися в режим сталої рівноваги після виходу з нього в результаті зовнішнього збурення.

Концепція збурено-незбуреного руху динамічної системи (6.3) сформульована О.М. Ляпуновим і полягає в тому, що в момент часу  $t = 0$  динамічна система (6.3) миттєво переходить із стану сталої

рівноваги  $X = 0$  в точку  $X(0)$  і далі рухається сама по собі, без впливу зовнішніх збурень. Визначення стійкості динамічної системи (6.3) за Ляпуновим має наступний вигляд: стан сталої рівноваги  $X = 0$  динамічної системи (6.3) стійкий, якщо для будь-якого малого позитивного числа  $\varepsilon > 0$  можна бути знайти друге позитивне число  $r(\varepsilon) > 0$ , яке залежить від  $\varepsilon$ , таке, що з часом має місце нерівність  $\|X(t, \alpha)\| \leq \varepsilon$ , якщо вектор початкових умов обраний згідно з нерівністю  $\|X(0)\| \leq r(\varepsilon)$ .

Через  $\|X(t, \alpha)\|$  позначена норма вектора  $X(t, \alpha)$

$$\|X(t, \alpha)\| = \rho[X(t, \alpha)] = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t, \alpha)}. \quad (6.4)$$

На рисунку 6.2 показана залежність величини норми вектору стану  $X(t, \alpha)$  від часу для стійкої і нестійкої динамічних систем.

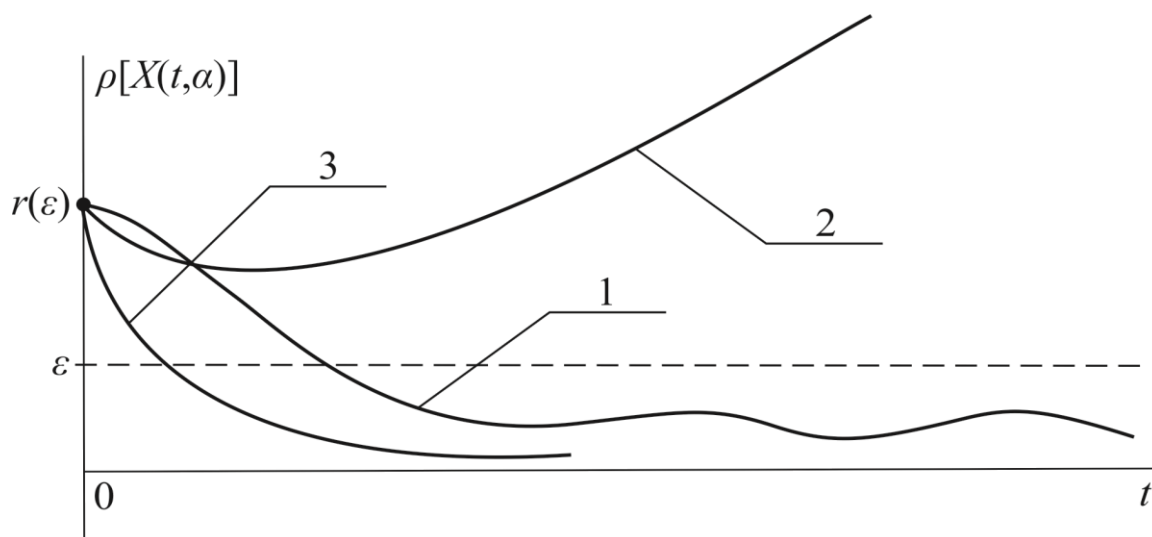


Рис. 6.2. Залежність норм вектору стану від поточного часу руху стійкої (1) і нестійкої (2) динамічних систем

Стан стійкої рівноваги динамічної системи (6.3) називається **асимптотично стійким**, якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  можна обрати величину  $r(\varepsilon) > 0$ , таку, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t, \alpha)\| = 0,$$

як поводить крива 3 рисунку 6.2.

## 6.2. Стійкість лінійних динамічних систем.

Збурений рух лінійної динамічної системи описується векторно-матричним диференціальним рівнянням (3.8). Відомо, що рішення лінійного диференціального рівняння (3.8) записується у вигляді

$$X(t) = X_{\text{ст}}(t) + X_{\text{пер}}(t), \quad (6.5)$$

де  $X_{\text{ст}}(t)$  – стала складова, що представляє собою часткове рішення диференціального рівняння (3.8) при заданому векторі зовнішніх збурень  $F(t)$ ;  $X_{\text{пер}}(t)$  – перехідна складова, яка представляє собою загальне рішення однорідного диференціального рівняння

$$\dot{X}(t) = A(\alpha)X(t). \quad (6.6)$$

Динамічна система являється стійкою, якщо норма вектору  $X_{\text{пер}}(t)$  з часом затухає

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho[X_{\text{пер}}(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \|X_{\text{пер}}(t)\| = 0.$$

Якщо з часом векторний перехідний процес розходиться

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho[X_{\text{пер}}(t)] = \infty,$$

то динамічна система (3.8) є нестійкою.

Динамічні системи, в яких векторний перехідний процес з часом не розходиться і не затухає, називаються нейтральними або такими, що знаходяться на межі стійкості.

Рішення однорідного диференціального рівняння (6.6) можуть бути записані у вигляді

$$\begin{aligned} x_{i \text{ ä} 1}(t) &= c_{11}e^{s_1 t} + c_{12}e^{s_2 t} + \dots + c_{1n}e^{s_n t}; \\ x_{i \text{ ä} 2}(t) &= c_{21}e^{s_1 t} + c_{22}e^{s_2 t} + \dots + c_{2n}e^{s_n t}; \\ &\vdots \\ x_{i \text{ ä} n}(t) &= c_{n1}e^{s_1 t} + c_{n2}e^{s_2 t} + \dots + c_{nn}e^{s_n t}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

де постійні  $c_{ij}$ ,  $(i, j = \overline{1, n})$  визначаються початковими умовами системи (6.6), а величини  $s_1, s_2, \dots, s_n$  являються коренями характеристичного рівняння

$$\det[A(\alpha) - Es] = 0. \quad (6.8)$$

Корені характеристичного рівняння (6.8) визначаються лише елементами матриці  $A$  і не залежать від вектор-функції  $F(t)$ . Таким чином, стійкість лінійної динамічної системи являється повністю її внутрішньою властивістю і не залежить від зовнішніх збурень, що діють на систему.

Корені характеристичного рівняння (6.8) можуть біти дійсними і комплексно-сполученими. Розглянемо ці випадки.

Нехай один із коренів, наприклад  $s_k$ , є дійсним і від'ємним  $s_k = -\alpha_k$ . Тоді  $k$ -тий доданок у рішеннях (6.7), який визначається цим коренем, становить

$$c_{ik} e^{-\alpha_k t}, \quad (i = \overline{1, n}).$$

Очевидно, що при  $t \rightarrow \infty$  цей доданок буде затухати. Якщо корінь  $s_k$  позитивний  $s_k = \alpha_k$ , то йому відповідає  $k$ -тий доданок у рішеннях (6.7), який має вигляд

$$c_{ik} e^{\alpha_k t}, \quad (i = \overline{1, n})$$

і розходиться з часом.

Нехай  $k$ -тий і  $k + 1$  корені характеристичного рівняння комплексно-сполучені з від'ємною дійсною частиною

$$s_{k,k+1} = -\alpha_k \pm j\beta_k.$$

Тоді доданок у рішеннях (6.7), що відповідає цим кореням, має вигляд

$$\begin{aligned} & c_{ik} e^{(-\alpha_k + j\beta_k)t} + c_{ik+1} e^{(-\alpha_k - j\beta_k)t} = \\ & = c_{ik} e^{-\alpha_k t} e^{j\beta_k t} + c_{ik+1} e^{-\alpha_k t} e^{-j\beta_k t} = \\ & = A_{ik} e^{-\alpha_k t} \sin(\beta_k t + \psi_k), \quad (i = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (6.9)$$

де

$$A_{ik} = \sqrt{c_{ik}^2 + c_{ik+1}^2}; \psi_k = \arctg \frac{c_{ik+1}}{c_{ik}}.$$

Доданок (6.9) представляє затухаючу синусоїду. При позитивній дійсній частині комплексно-сполучених коренів

$$s_{k,k+1} = \alpha_k \pm j\beta_k,$$

доданок у рішеннях (6.7), що відповідає цим кореням, становить

$$A_{ik} e^{\alpha_k t} \sin(\beta_k t + \psi_k)$$

і представляє собою синусоїду, що розходиться.

Припустимо, що  $k$ -тий корінь характеристичного рівняння дійсний нульовий  $\alpha_k = 0$ . Тоді доданок у рішеннях (6.7), що відповідає цьому кореню, записується

$$c_{ik} e^{0 \cdot t} = c_{ik},$$

тобто не розходиться і не затухає.

І, нарешті, припустимо, що  $k$  і  $k + 1$  корені характеристичного рівняння (6.8) чисто уявні

$$s_{k,k+1} = \pm j\beta_k.$$

Тоді доданок у рішеннях (6.7), що відповідає цим кореням, має вигляд

$$A_k \sin(\beta_k t + \psi_k),$$

тобто представляє собою синусоїду, що не затухає і не розходиться, а має постійну амплітуду.

Таким чином лінійна динамічна система (3.8) являється стійкою, якщо усі корені її характеристичного рівняння (6.8) мають від'ємні дійсні частини.

Якщо хоча б один корінь характеристичного рівняння (6.8) має позитивну дійсну частину, то динамічна система являється нестійкою. Якщо характеристичне рівняння динамічної системи, не маючи коренів з позитивною дійсною частиною, має хоча б один корінь з нульовою дійсною частиною, то така динамічна система являється нейтральною, або такою, що знаходиться на межі області стійкості.

Прямий шлях дослідження стійкості лінійної динамічної системи полягає у знаходженні коренів її характеристичного рівняння. Однак цей шлях являється надто трудомістким, особливо коли ступінь характеристичного вище трьох. У цьому випадку дуже важливо знайти ознаки, за якими можна зробити висновки про стійкість динамічної системи без безпосереднього визначення коренів її характеристичного рівняння. Ці ознаки називають критеріями стійкості.

Розглянемо стійкість вільних коливань пружної танкової гармати, математична модель яких має вигляд (5.34). Розглянемо характеристичне рівняння системи лінійних диференціальних рівнянь (5.34)

$$\det \begin{vmatrix} -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & \alpha_{\phi\delta} & \alpha_{\phi\delta}\zeta \\ 0 & 0 & -s & 1 \\ 0 & 0 & \alpha_{\delta\delta} & \alpha_{\delta\delta}\zeta - s \end{vmatrix} =$$

$$= s^2 (s^2 - \alpha_{\delta\delta}\zeta s - \alpha_{\delta\delta}) = 0.$$

Характеристичне рівняння системи (5.34) має два нульових кореня, отже система (5.34) не являється стійкою. В кращому разі вона являється нейтральною, тобто такою, що знаходиться на межі області стійкості, про що свідчать криві перехідних процесів, поданих на рисунку 5.3.

Третє і четверте рівняння (5.34) представляють собою окрему модель коливальної підсистеми, процеси якої на залежать від перших двох рівнянь системи (5.34), так як праві частини цих рівнянь не містять рішень перших двох рівнянь (5.34), в той час, як зміна компонент  $x_3(t)$  і  $x_4(t)$  впливає на рішення двох перших рівнянь системи, про що свідчить процес  $x_1(t)$  рис. 5.3.

### 6.3. Алгебраїчні критерії стійкості.

Усі критерії стійкості лінійних динамічних систем поділяються на дві групи – алгебраїчні критерії і частотні критерії стійкості. Серед алгебраїчних критеріїв стійкості найбільше розповсюдження отримав критерій стійкості Рауса-Гурвиця.

Розвернемо визначник у лівій частині характеристичного рівняння динамічної системи (6.8) і запишемо характеристичне рівняння у вигляді поліному  $n$ -того порядку

$$D(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0. \quad (6.10)$$

Для характеристичного рівняння (6.10) побудуємо квадратну матрицю розміром  $n \times n$ , яка називається матрицею Гурвиця, за наступним правилом. Перший рядок матриці Гурвиця заповнюється коефіцієнтами характеристичного рівняння (6.10) з непарними індексами, а відсутні елементи першого рядку заповнюються нулями. Другий рядок матриці Гурвиця заповнюється коефіцієнтами характеристичного рівняння (6.10) з парними індексами, а відсутні елементи другого рядку також заповнюються нулями. Третій рядок матриці Гурвиця представляє собою перший рядок, який зсунутий на один елемент вправо, а четвертий рядок представляє собою другий рядок, який зсунутий на один елемент вправо. При виконанні цього правила останнім елементом останнього рядку являється коефіцієнт характеристичного рівняння  $a_n$ . Для характеристичного рівняння (6.10) матриця Гурвиця набуває вигляд

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Критерій Рауса-Гурвиця формулюється наступним чином: динамічна система з характеристичним рівнянням (6.10) являється стійкою, якщо при  $a_0 > 0$  усі головні діагональні мінори матриці Гурвиця позитивні.

Головні діагональні мінори матриці Гурвиця (6.11) називаються визначниками Гурвиця і записуються у вигляді:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= a_1; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \det \tilde{A}.\end{aligned}$$

Як приклад розглянемо стійкість системи підресорювання автомобіля, характеристичне рівняння якої має вигляд (2.5). Обчислимо коефіцієнти характеристичного рівняння (2.5), використовуючи формули (1.13) і (1.20):

$$\begin{aligned}m + s &= \frac{6\mu}{M_n} + \frac{2\mu \sum_{i=1}^3 l_{ai}^2}{I_y} = 2\mu \left( \frac{3}{M_n} + \frac{\sum_{i=1}^3 l_{ai}^2}{I_y} \right); \\ a + d + ms - qr &= \frac{6c}{M_n} + \frac{12\mu^2 \sum_{i=1}^3 l_{ai}^2}{M_n I_y} + \frac{2c \sum_{i=1}^3 l_{pi}^2}{I_y} - \frac{4\mu^2 \left( \sum_{i=1}^3 l_{ai} \right)^2}{M_n I_y}; \\ md + as - br - fq &= \frac{12c\mu \sum_{i=1}^3 l_{pi}^2}{M_n I_y} + \frac{6c}{M_n} \cdot \frac{2\mu \sum_{i=1}^3 l_{ai}^2}{I_y} - \frac{2c \sum_{i=1}^3 l_{pi}}{M_n} \cdot \frac{2\mu \sum_{i=1}^3 l_{ai}}{I_y} - \\ &\quad - \frac{2c \sum_{i=1}^3 l_{pi}}{I_y} \cdot \frac{2\mu \sum_{i=1}^3 l_{ai}}{M_n} = \frac{24c\mu}{M_n I_y} \sum_{i=1}^3 l_{ai}^2 - \frac{8c\mu}{M_n I_y} \sum_{i=1}^3 l_{pi} \cdot \sum_{i=1}^3 l_{ai} = \\ &= c\mu \frac{8}{M_n I_y} \left[ 3 \sum_{i=1}^3 l_{ai}^2 - \left( \sum_{i=1}^3 l_{pi} \right) \left( \sum_{i=1}^3 l_{ai} \right) \right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ad - fb &= \frac{c^2 12 \sum_{i=1}^3 l_{pi}^2}{M_n I_y} - \frac{c^4 4 \left( \sum_{i=1}^3 l_{pi} \right)^2}{M_n I_y} = \\
&= c^2 \left[ \frac{12}{M_n I_y} \sum_{i=1}^3 l_{pi}^2 - \frac{4}{M_n I_y} \left( \sum_{i=1}^3 l_{pi} \right)^2 \right] = \\
&= c^2 \frac{4}{M_n I_y} \left[ 3 \sum_{i=1}^3 l_{pi}^2 - \left( \sum_{i=1}^3 l_{pi} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \left( \frac{3}{M_n} + \frac{\sum_{i=1}^3 l_{ai}^2}{I_y} \right); \\
a_{21} &= \frac{6}{M_n} + \frac{2 \sum_{i=1}^3 l_{pi}^2}{I_y}; \\
a_{22} &= \frac{12 \sum_{i=1}^3 l_{ai}^2}{M_n I_y} - \frac{4 \left( \sum_{i=1}^3 l_{ai} \right)^2}{M_n I_y}; \\
a_3 &= \frac{8}{M_n I_y} \left[ 3 \sum_{i=1}^3 l_{ai}^2 - \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 l_{pi} \right) \left( \sum_{i=1}^3 l_{ai} \right) \right]; \\
a_4 &= \frac{4}{M_n I_y} \left[ 3 \sum_{i=1}^3 l_{pi}^2 - \left( \sum_{i=1}^3 l_{pi} \right)^2 \right]. \tag{6.12}
\end{aligned}$$

В результаті характеристичне рівняння (2.5) приймає вигляд

$$D(s) = s^4 + \mu a_1 s^3 + c a_{21} s^2 + \mu^2 a_{22} s^2 + c \mu a_3 s + c^2 a_4 = 0. \tag{6.13}$$

Параметри системи підресорювання покладемо рівними:  
 $M_n = 2 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^2$  (кг);  $I_y = 2 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$  (кг·м<sup>2</sup>);  $c = 0,33 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$ ;  
 $\mu = 0,51 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}$ ;  $l_{p1} = 2 \text{ м}$ ;  $l_{p2} = -0,66 \text{ м}$ ;  $l_{p3} = -1,34 \text{ м}$ ;  $l_{a1} = 2,5 \text{ м}$ ;  
 $l_{a2} = -0,16 \text{ м}$ ;  $l_{a3} = -0,84 \text{ м}$ .

Використовуючи формули (6.12), оцінимо значення коефіцієнтів характеристичного рівняння (6.13):  $a_1 = 3,7 \cdot 10^{-4}$ ;  
 $a_{21} = 3 \cdot 10^{-4}$ ;  $a_{22} = 20,87 \cdot 10^{-9}$ ;  $a_3 = 20,871$ ;  $a_4 = 18,69 \cdot 10^{-9}$ ;  $\mu a_1 = 18,27$ ;  
 $ca_{21} = 10^2$ ;  $\mu^2 a_{22} = 54,26$ ;  $c\mu a_3 = 350,6$ ;  $c^2 a_4 = 2020$ .

Сформуємо матрицю Гурвиця

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 18,27 & 350,6 & 0 & 0 \\ 1 & 154,26 & 2020 & 0 \\ 0 & 18,27 & 350,6 & 0 \\ 0 & 1 & 154,26 & 2020 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

і обчислимо головні діагональні мінори матриці (6.14):

$$\Delta_1 = 18,27 > 0;$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 18,27 & 350,6 \\ 1 & 154,26 \end{vmatrix} = \\ &= 2818,33 - 350,6 = 2467,730 > 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 18,27 & 350,6 & 0 \\ 1 & 154,26 & 2020 \\ 0 & 18,27 & 350,6 \end{vmatrix} = \\ &= 988106,568 - 122920,360 - 674261,658 = \\ &= 190924,550 > 0; \end{aligned}$$

$$\Delta_4 = 2020 \cdot \Delta_3 = 385667591 > 0.$$

Усі головні діагональні мінори матриці Гурвиця (6.14) позитивні, тому динамічна система підресорювання автомобіля при обраних значеннях варійованих параметрів  $c$  і  $\mu$  являється стійкою.

#### 6.4. Частотні критерії стійкості.

Серед частотних критеріїв стійкості найбільше розповсюдження отримав критерій стійкості Михайлова.

В характеристичному рівнянні (6.10) здійснено заміну  $s = j\omega$ . В результаті отримуємо характеристичний вектор

$$\begin{aligned} D(j\omega) = & \\ = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + a_2(j\omega)^{n-2} + \dots + a_{n-1}j\omega + a_n. & \end{aligned} \quad (6.15)$$

Представимо характеристичний вектор (6.15) у вигляді суми дійсної та уявної частин

$$X(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots ; \quad (6.16)$$

$$Y(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots . \quad (6.17)$$

Годограф характеристичного вектора (6.15) представляє криву, що описується кінцем вектору при зміні  $\omega$  від нуля до нескінченності у комплексній площині (X,Y) і будується за допомогою співвідношень (6.16) і (6.17) (рис. 6.3).

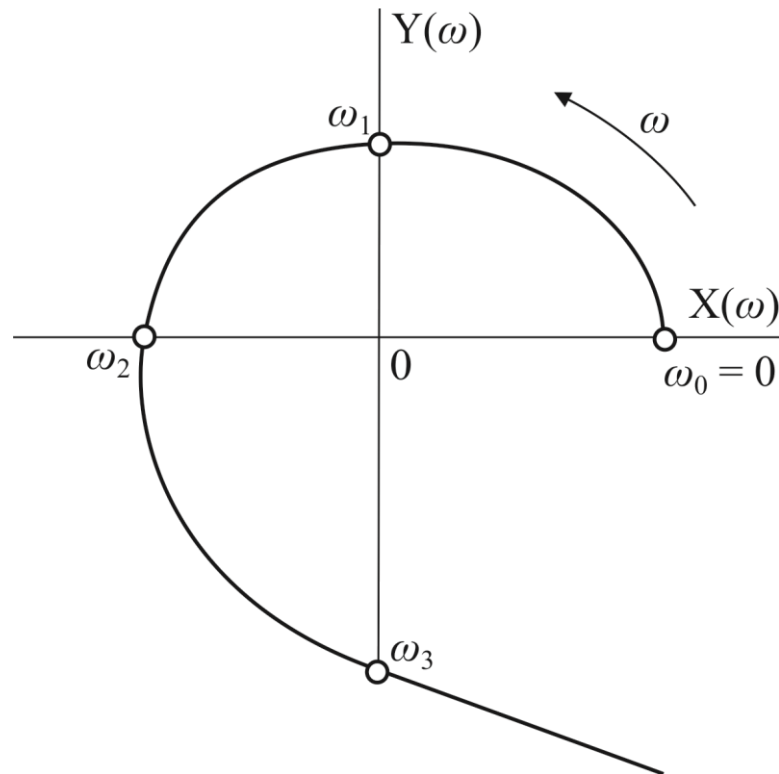


Рис. 6.3. Годограф характеристичного вектору

В характеристичному поліномі (6.10) значення коефіцієнтів складають:  $a_0 = 1$ ;  $a_1 = 18,27$ ;  $a_2 = 154,26$ ;  $a_3 = 350,6$ ;  $a_4 = 2020$ . Тоді характеристичний поліном розглядаємої системи набуває вигляд

$$D(s) = s^4 + 18,27s^3 + 154,26s^2 + 350,6s + 2020. \quad (6.18)$$

У (6.18) здійснено заміну  $s = j\omega$  і отримуємо характеристичний вектор

$$D(j\omega) = \omega^4 - j18,27\omega^3 - 154,26\omega^2 + j350,6\omega + 2020. \quad (6.19)$$

Виділимо у (6.19) дійсну та уявну частини

$$X(\omega) = \omega^4 - 154,26\omega^2 + 2020; \quad (6.20)$$

$$Y(\omega) = -18,27\omega^3 + 350,6\omega. \quad (6.21)$$

Знайдемо частоти  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  і  $\omega_3$ , які відповідають точкам перетину годографом характеристичного вектору вісей комплексної площини (X,Y). В точках, що відповідають частотам  $\omega_1$  і  $\omega_3$ , величина  $X(\omega)$  дорівнює нулю, тому значення частот  $\omega_1$  і  $\omega_3$  слід знайти рішення біквдратного рівняння

$$\omega_{1,3}^4 - 154,26\omega_{1,3}^2 + 2020 = 0, \quad (6.22)$$

звідки

$$\begin{aligned} \omega_{1,3}^2 &= 77,13 \pm \sqrt{5949,036 - 2020} = \\ &= 77,13 \pm \sqrt{3929,036} = \\ &= 77,13 \pm 62,682; \\ \omega_1^2 &= 14,448; \quad \omega_3^2 = 139,812. \end{aligned}$$

В точці, що відповідає частоті  $\omega_2$ , величина  $Y(\omega)$  дорівнює нулю, тому значення частоти  $\omega_2$  знаходиться з рівняння

$$\begin{aligned} -18,27\omega_2^2 + 350,6 &= 0; \\ \omega_2^2 &= 19,189. \end{aligned}$$

Годограф характеристичного вектору (6.19) проходить послідовно через чотири квадранти комплексної площини (X,Y) у тому випадку, якщо частоти  $\omega_1, \omega_2$  і  $\omega_3$  дорівнюють нерівності

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3,$$

або

$$\omega_1^2 < \omega_2^2 < \omega_3^2. \quad (6.23)$$

Отримані значення частот, що відповідають точкам перетину годографом характеристичного вектору вісей комплексної площини відповідають нерівностям (6.23), тобто розглядаєма система підресорювання являється стійкою.

### 6.5. Побудова областей стійкості лінійних динамічних систем в площині варійованих параметрів.

Розглянемо характеристичне рівняння (6.13), в якому виділені варійовані параметри системи підресорювання – коефіцієнт жорсткості ресори і коефіцієнт демпфірування амортизатора  $c$  і  $\mu$

$$D(s, c, \mu) = s^4 + \mu a_1 s^3 + c a_{21} s^2 + \mu^2 a_{22} s^2 + c \mu a_3 s + c^2 a_4 = 0. \quad (6.24)$$

В (6.24) здійснимо заміну  $s = j\omega$ , виділимо в отриманому співвідношенні дійсну і уявну частини і дорівняємо їх нулю

$$\begin{aligned} \omega^4 - j\mu a_1 \omega^3 - c a_{21} \omega^2 - \mu^2 a_{22} \omega^2 + j c \mu a_3 \omega + c^2 a_4 = \\ = X(\omega, c, \mu) + jY(\omega, c, \mu) = 0, \end{aligned}$$

де

$$X(\omega, c, \mu) = \omega^4 - c a_{21} \omega^2 - \mu^2 a_{22} \omega^2 + c^2 a_4 = 0; \quad (6.25)$$

$$Y(\omega, c, \mu) = -\mu a_1 \omega^3 + c \mu a_3 \omega = 0. \quad (6.26)$$

Із співвідношення (6.26) маємо

$$-a_1 \omega^2 + c a_3 = 0,$$

звідки

$$c = \frac{a_1}{a_3} \omega^2. \quad (6.27)$$

Підставимо (6.27) у співвідношення (6.25)

$$\omega^4 - \frac{a_1}{a_3} a_{21} \omega^4 - \mu^2 a_{22} \omega^2 + \frac{a_1^2}{a_3^2} a_4 \omega^4 = 0. \quad (6.28)$$

Із співвідношення (6.28) отримуємо

$$\mu^2 = \frac{1}{a_{22}} \left\{ 1 - \frac{a_1 a_{21}}{a_3} + \frac{a_1^2 a_4}{a_3^2} \right\} \omega^2,$$

або

$$\mu = \omega \sqrt{\frac{1}{a_{22}} - \frac{a_1 a_{21}}{a_3 a_{22}} + \frac{a_1^2 a_4}{a_3^2 a_{22}}}. \quad (6.29)$$

Використовуючи співвідношення (6.27) і (6.29), побудуємо в площині варійованих параметрів системи підресорювання ( $c, \mu$ ) границю області стійкості (рис. 6.4) при зміні  $\omega$  від нуля до нескінченності.

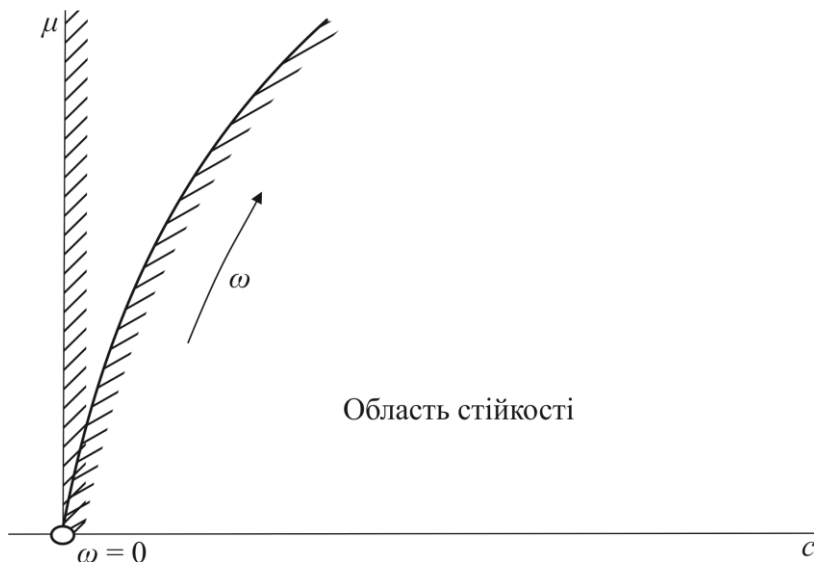


Рис. 6.4. Область стійкості системи підресорювання автомобіля

Для визначення області стійкості системи підресорювання автомобіля скористуємось правилом штриховки, яке формулюється наступним чином. Якщо рухатись вздовж границі області стійкості у бік зростання  $\omega$  і обчислювати визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X(\omega, c, \mu)}{\partial c} & \frac{\partial X(\omega, c, \mu)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial Y(\omega, c, \mu)}{\partial c} & \frac{\partial Y(\omega, c, \mu)}{\partial \mu} \end{vmatrix}, \quad (6.30)$$

то границю області стійкості слід штрихувати зліва, якщо визначник (6.30) позитивний, і справа, якщо визначник (6.30) від'ємний. При цьому штриховка спрямована усередину області стійкості.

Скориставшись залежностями (6.25) і (6.26), обчислимо визначник (6.30)

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a_{21}\omega^2 + 2ca_4 & -2\mu a_{22}\omega^2 \\ \mu a_3\omega & 0 \end{vmatrix} = 2\mu^2 a_3 a_{22} \omega^3. \quad (6.31)$$

Визначник (6.31) позитивний при будь-якому значенні  $\omega$ , тому границю області стійкості слід штрихувати зліва.

### Контрольні запитання до розділу 6.

1. Дайте визначення динамічної системи.
2. Поясніть, що ми називаємо вектором стану динамічної системи.
3. Дайте визначення норми вектору стану динамічної системи.
4. Дайте визначення стійкості динамічної системи за Ляпуновим.
5. Як впливають на стійкість динамічної системи зовнішні збурення, що діють на систему?
6. Запишіть математичну модель збуреного руху лінійної динамічної системи.
7. Запишіть характеристичне рівняння лінійної динамічної системи.
8. Як розташовані корені характеристичного рівняння стійкої, нестійкої і нейтральної динамічної системи?
9. Сформулюйте критерій стійкості Рауса-Гурвиця.
10. Сформулюйте критерій стійкості Михайлова.
11. Що ми називаємо годографом характеристичного вектору?
12. Сформулюйте правило штрихування.

## Розділ 7

# СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.

### 7.1. Теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням.

Математична модель збуреного руху динамічної системи у векторно-матричній формі записується у вигляді (3.2)

$$\dot{X} = \Phi[X(t)] + F(t). \quad (7.1)$$

Якщо вектор-функція  $\Phi[X(t)]$  являється аналітичною функцією компонент вектору стану  $X(t)$ , то вона може бути подана у вигляді ряду Тейлора в районі стану сталої рівноваги  $X(t) = 0$

$$\begin{aligned} \Phi[X(t)] = & \Phi[0] + \left( \frac{\partial \Phi[X(t)]}{\partial X(t)} \right)_0 X(t) + \\ & + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 \Phi[X(t)]}{\partial X(t) \partial X(t)} \right)_0 X(t) X^T(t) + \dots \end{aligned} \quad (7.2)$$

Якщо в стані сталої рівноваги  $X(t) = 0$ , то  $\Phi[0] = 0$ . Відкинемо в формулі (7.2) нелінійні члени розкладання і отримуємо лінеаризоване диференціальне рівняння

$$\dot{X}(t) = AX(t) + F(t), \quad (7.3)$$

в якому елементи матриці  $A$  визначаються формулами (3.7). Динамічну систему, збурений рух якої описується лінійним диференціальним рівнянням (7.3) назвемо системою першого наближення відносно нелінійної системи (7.1).

Вище вказувалось, що стійкість динамічної системи відносно стану сталої рівноваги являється внутрішньою властивістю системи і не залежить від зовнішніх збурень, що діють на систему. Тому в подальшому будемо розглядати математичну модель нелінійної динамічної системи у вигляді

$$\dot{X}(t) = \Phi[X(t)], \quad (7.4)$$

а відповідну математичну модель системи першого наближення у вигляді

$$\dot{X}(t) = AX(t). \quad (7.5)$$

Запишемо характеристичне рівняння системи першого наближення (7.5)

$$\det[A - Es] = 0. \quad (7.6)$$

Основу дослідження стійкості нелінійних динамічних систем, які описуються рівняннями типу (7.4), складають теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням.

**Теорема 1.** Якщо всі корені характеристичного рівняння (7.6) системи першого наближення (7.5) мають від'ємні дійсні частини, то нелінійна система (7.4) являється стійкою, які б не були члени, що відкидаються при складанні рівняння першого наближення.

**Теорема 2.** Якщо серед коренів характеристичного рівняння (7.6) системи першого наближення (7.5) є хоча б один корінь з позитивною дійсною частиною, то нелінійна система (7.4) являється нестійкою, які б не були члени, що відкидаються при складанні рівняння першого наближення.

**Теорема 3.** Якщо характеристичне рівняння (7.6) системи першого наближення (7.5) не має коренів з позитивною дійсною частиною, але має хоча б один корінь з нульовою дійсною частиною, то не можна робити висновок про стійкість нелінійної системи (7.4) за рівнянням першого наближення (7.5); нелінійна система (7.4) у цьому випадку може бути як стійкою, так і нестійкою.

Як приклад розглянемо коливальну систему з тертям, що описується рівнянням Релея (3.10). Запишемо диференціальне рівняння (3.10) в нормальній формі Коші. Вектор стану динамічної системи (3.10) має вигляд

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}.$$

В результаті отримуємо

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= a_1 x_2(t) - a_3 x_2^3(t) - c x_1(t). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Система першого наближення відносно нелінійної системи рівнянь (7.7) записується у вигляді

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -cx_1(t) + a_1x_2(t).\end{aligned}\tag{7.8}$$

Запишемо характеристичне рівняння системи першого наближення (7.8)

$$\begin{vmatrix} -s & 1 \\ -c & a_1 - s \end{vmatrix} = s^2 - a_1s + c = 0.\tag{7.9}$$

Корені характеристичного рівняння (7.9) дорівнюють

$$s_{1,2} = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - c}.$$

Обидва корені характеристичного рівняння (7.9) системи першого наближення (7.8) мають позитивні дійсні частини. В цьому випадку стан сталої рівноваги системи (7.7) являється нестійким.

Нехай збурений рух динамічної системи описується диференціальними рівняннями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + \alpha x_1^3(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + \alpha x_2^3(t).\end{aligned}\tag{7.10}$$

Система першого наближення, що відповідає нелінійній системі (7.10), записується

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t).\end{aligned}\tag{7.11}$$

Характеристичне рівняння системи першого наближення (7.11) має вигляд

$$D(s) = \begin{vmatrix} -s & 1 \\ -1 & -s \end{vmatrix} = s^2 + 1 = 0.\tag{7.12}$$

Корені характеристичного рівняння (7.12) чисто уявні з нульовою дійсною частиною

$$s_{1,2} = \pm j.$$

Таким чином, зробити висновок про стійкість нелінійної динамічної системи (7.10) на основі аналізу її першого наближення (7.11) неможливо.

## 7.2. Теорема другого або прямого методу Ляпунова.

Загальна теорія стійкості динамічних систем, автором якої являється О.М. Ляпунов, базується на використанні спеціальних функцій, що отримали назву функцій Ляпунова.

Розглянемо функцію  $V[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ , аргументами якої являються компоненти вектору стану динамічної системи  $X(t)$ . Функція  $V[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$  являється знаковизначеною функцією своїх аргументів, якщо вона дорівнює нулю лише в одній точці фазового простору  $R^n$   $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ , а в усіх інших точках фазового простору має один і той же знак.

Прикладом позитивно-визначеної функції у двовірному фазовому просторі являється функція

$$V[x_1(t), x_2(t)] = x_1^2(t) + x_2^2(t). \quad (7.13)$$

Функція (7.13) дорівнює нулю лише в точці  $x_1 = x_2 = 0$ , а в усіх інших точках двовірного фазового простору має позитивне значення (рис. 7.1).

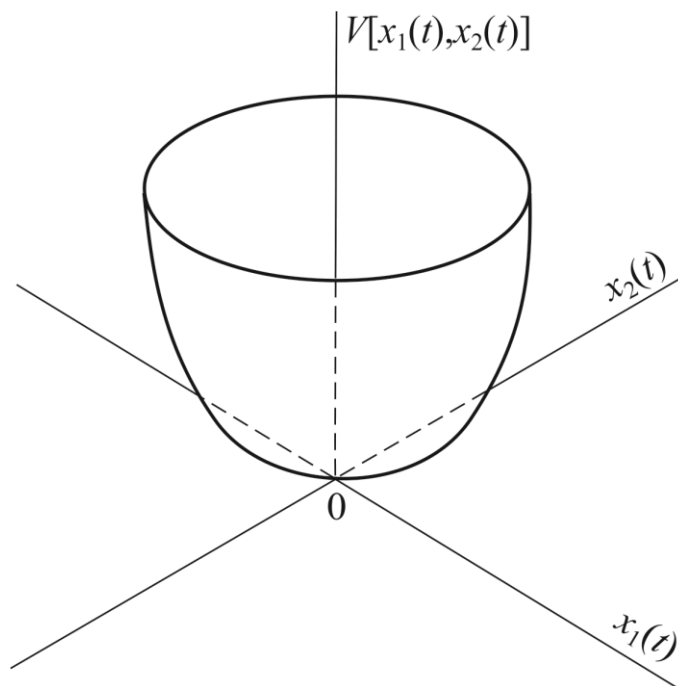


Рис. 7.1. Приклад позитивно-визначеної функції

Функція  $V[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$  являється знакопостійною функцією своїх аргументів, якщо вона дорівнює нулю не лише в точці  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ , але й в деяких інших точках  $n$ -мірного фазового простору, а в усіх інших точках має один і той же знак.

Прикладом позитивної знакопостійної функції у двомірному фазовому просторі являється функція

$$V[x_1(t), x_2(t)] = [x_1(t) + x_2(t)]^2. \quad (7.14)$$

Функція (7.14) дорівнює нулю не лише в точці  $x_1 = x_2 = 0$ , але й всюди, де  $x_1 = -x_2$ , а в усіх інших точках двомірного фазового простору має позитивне значення (рис. 7.2).

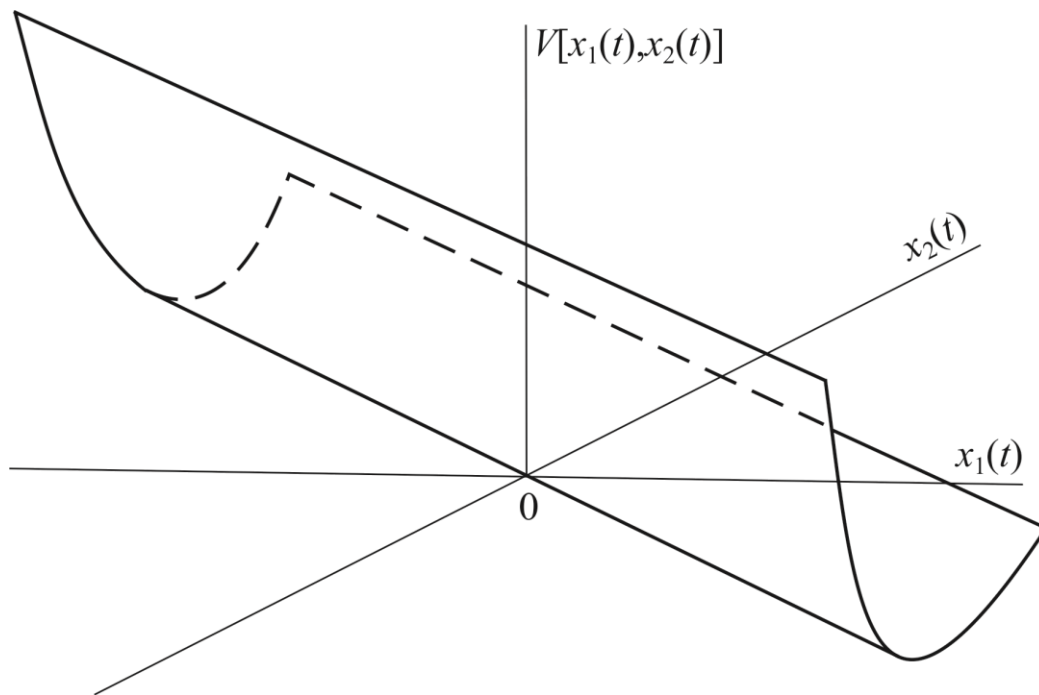


Рис. 7.2. Приклад позитивної знакопостійної функції

Теорема О.М. Ляпунова про стійкість руху динамічних систем, що складають основу другого, або прямого методу Ляпунова, формується наступним чином.

**Теорема 1.** Якщо диференціальне рівняння збуреного руху динамічної системи (7.4) таке, що можна вказати знаковизначену функцію  $V[X(t)]$  таку, що повна похідна від цієї функції за часом, обчислена в силу рівняння (7.4), являється знакопостійною функцією протилежного знаку з  $V[X(t)]$ , або дорівнює нулю, то збурений рух динамічної системи являється стійким.

**Теорема 2.** Якщо диференціальне рівняння збуреного руху динамічної системи (7.4) таке, що можна вказати знаковизначену функцію  $V[X(t)]$  таку, що повна похідна від цієї функції за часом, обчислена в силу рівняння (7.4), являється знаковизначеною функцією протилежного знаку з  $V[X(t)]$ , то збурений рух динамічної системи являється стійким асимптотично.

Повна похідна за часом від функції  $V[X(t)]$ , обчислена в силу рівняння (7.4), дорівнює

$$\begin{aligned} W[X(t)] &= \frac{dV[X(t)]}{dt} = \left\langle \frac{\partial V[X(t)]}{\partial X(t)}, \frac{\partial X(t)}{\partial t} \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V[X(t)]}{\partial x_i(t)} \cdot \frac{\partial x_i(t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V[X(t)]}{\partial x_i(t)} \cdot \dot{x}_i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V[X(t)]}{\partial x_i(t)} \cdot \varphi_i[X(t)]. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Як приклад розглянемо стійкість динамічної системи (7.10). Позитивно визначену функцію Ляпунова системи (7.10) оберемо у вигляді (7.13).

Обчислимо повну похідну за часом функції (7.13) в силу рівнянь (7.10), скориставшись формулою (7.15)

$$\begin{aligned} \frac{dV[X(t)]}{dt} &= \frac{\partial V[X(t)]}{\partial x_1(t)} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial V[X(t)]}{\partial x_2(t)} \dot{x}_2(t) = \\ &= 2x_1(t) [x_2(t) + \alpha x_1^3(t)] + 2x_2(t) [-x_1(t) + \alpha x_2^3(t)] = \\ &= 2\alpha [x_1^4(t) + x_2^4(t)]. \end{aligned} \quad (7.16)$$

При  $\alpha < 0$  повна похідна позитивно визначеної функції Ляпунова (7.13) за часом являється від'ємно визначеною функцією, тому при  $\alpha < 0$  динамічна система (7.10) являється асимптотично стійкою.

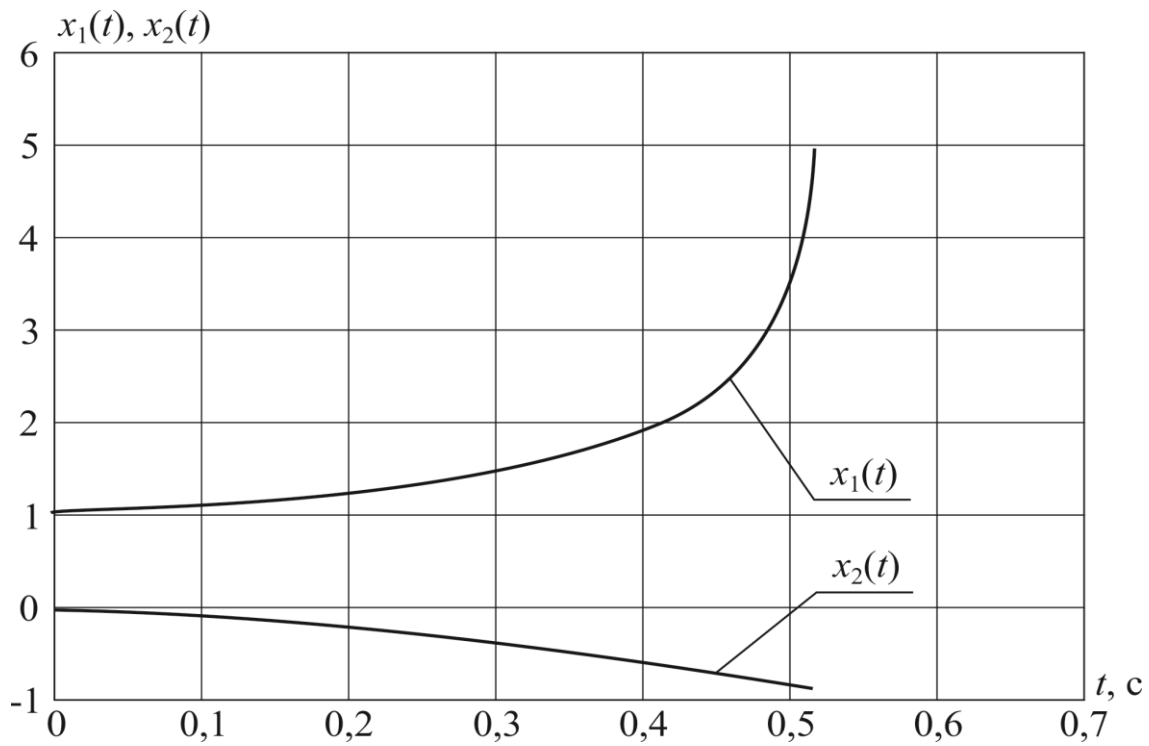


Рис. 7.3.а. Рішення системи диференціальних рівнянь (7.10), де  $\alpha = 1$

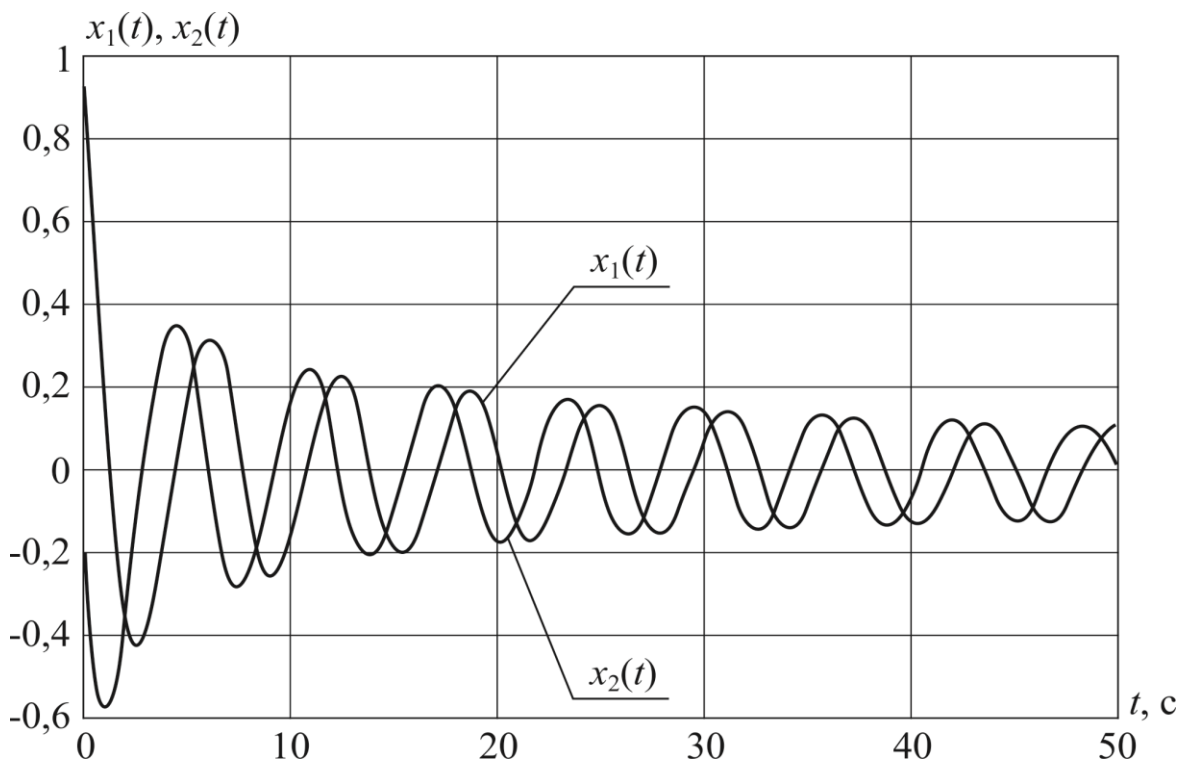


Рис. 7.3.б. Рішення системи диференціальних рівнянь (7.10), де  $\alpha = -1$

На рисунку 7.3 приведені рішення системи диференціальних рівнянь (7.10) при початкових умовах  $x_1(0) = 1$ ;  $x_2(0) = 0$ . Варіант *a* відповідає  $\alpha = +1$ , а варіант *б* відповідає  $\alpha = -1$ .

### 7.3. Теорема Ляпунова про нестійкість руху динамічних систем.

Теорема Ляпунова про нестійкість стану сталої рівноваги динамічної системи формулюється наступним чином.

**Теорема.** Якщо рівняння збуреного руху динамічної системи (7.4) відносно стану сталої рівноваги  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  таке, що можна вказати знаковизначену функцію  $V[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ , повна похідна якої за часом обчислена в силу рівняння (7.4)  $\dot{V}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$  має знак однаковий з  $V[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ , то стан сталої рівноваги являється нестійким, тобто рух динамічної системи в околі стану сталої рівноваги нестійкий.

Як приклад розглянемо динамічну систему, збурений рух якої в околі сталої рівноваги  $x_1 = x_2 = 0$  описується диференціальними рівняннями

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= 3x_2(t) + 4x_1^3(t) + x_1^5(t); \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -5x_1(t) + 3x_2^5(t). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Функцію Ляпунова  $V[x_1(t), x_2(t)]$  оберемо у вигляді

$$V[x_1(t), x_2(t)] = 5x_1^2(t) + 3x_2^2(t). \quad (7.18)$$

Обчислимо повну похідну за часом позитивної знаковизначеної функції (7.18) в силу рівнянь (7.17)

$$\begin{aligned} \frac{dV[x_1(t), x_2(t)]}{dt} &= \frac{\partial V[x_1(t), x_2(t)]}{\partial x_1(t)} \cdot [3x_2(t) + 4x_1^3(t) + x_1^5(t)] + \\ &+ \frac{\partial V[x_1(t), x_2(t)]}{\partial x_2(t)} \cdot [-5x_1(t) + 3x_2^5(t)] = \\ &= 10x_1(t) [3x_2(t) + 4x_1^3(t) + x_1^5(t)] + 6x_2(t) [-5x_1(t) + 3x_2^5(t)] = \\ &= 30x_1(t)x_2(t) + 40x_1^4(t) + 10x_1^6(t) - \\ &- 30x_2(t)x_1(t) + 18x_2^6(t) = 40x_1^4(t) + 10x_1^6(t) + 18x_2^6(t). \end{aligned} \quad (7.19)$$

При будь-яких  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  функції  $V[x_1(t),x_2(t)]$  і  $\dot{V}[x_1(t),x_2(t)]$  позитивно-визначені, тобто мають однакові знаки. Отже стан сталої рівноваги  $x_1 = x_2 = 0$  являється нестійким, а рух динамічної системи в околі стану сталої рівноваги являється нестійким.

На рисунку 7.4 приведені рішення системи диференціальних рівнянь (7.17) при початкових умовах  $x_1(0) = 1$ ;  $x_2(0) = 0$ , які свідчать про нестійкість системи (7.17).

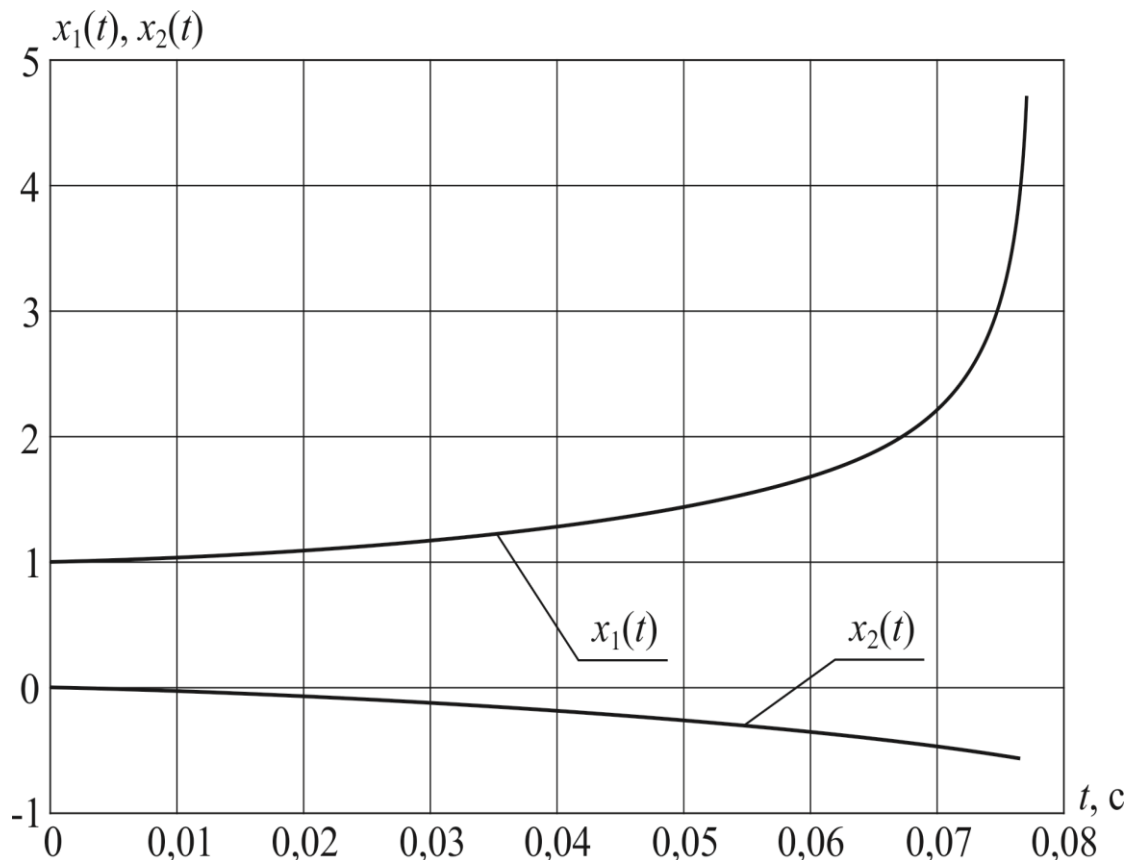


Рис. 7.4. Рішення системи диференціальних рівнянь (7.17)

### Контрольні запитання до розділу 7.

1. Що ми називаємо динамічною системою першого наближення?
2. Запишіть формулу для характеристичного рівняння системи першого наближення.
3. Що можна сказати про стійкість нелінійної динамічної системи, якщо дійсні частини усіх коренів характеристичного рівняння динамічної системи першого наближення мають від'ємні значення?

4. Що можна сказати про стійкість нелінійної динамічної системи, якщо серед коренів характеристичного рівняння динамічної системи першого наближення є один корінь з позитивною дійсною частиною?
5. Що можна сказати про стійкість нелінійної динамічної системи, якщо серед коренів характеристичного рівняння динамічної системи першого наближення є один корінь з нульовою дійсною частиною, а усі інші корені мають від'ємні дійсні частини?
6. Дайте визначення знаковизначеної функції своїх аргументів.
7. Дайте визначення знакопостійної функції своїх аргументів.
8. Сформууйте теорему Ляпунова про стійкість руху динамічних систем.
9. Сформууйте теорему Ляпунова про асимптотичну стійкість руху динамічних систем.
10. Сформууйте теорему Ляпунова про нестійкість руху динамічних систем.

## ДОДАТОК 1

### Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи №1.

**Тема** розрахунково-графічної роботи (РГР) №1: «Вибір конструкційних параметрів колінчастого валу автомобільного дизеля у відповідності з вимогою відсутності резонансних явищ».

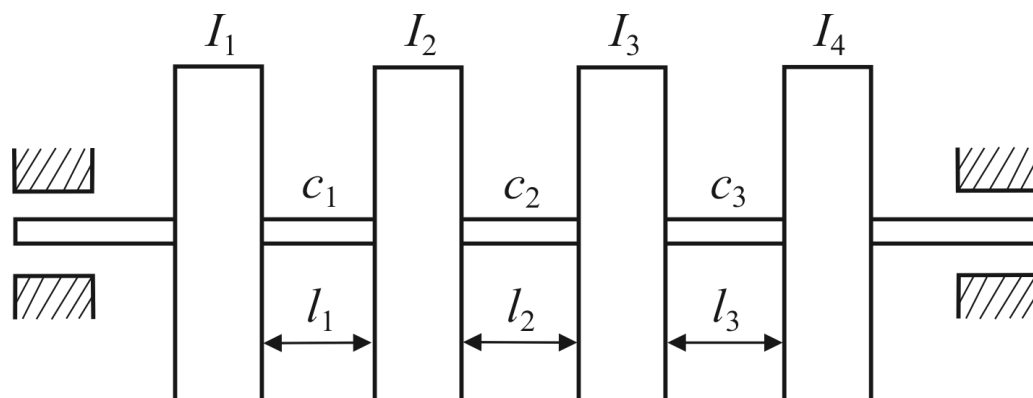


Рис. Д1. Схема заміщення колінчастого валу  
автомобільного двигуна

**Вхідні дані РГР №1.** Розглянемо крутильні коливання багатомасової системи, розрахункова система якої приведена на рисунку Д1, і яка являється загальноприйнятою, хоча й небездоганною, схемою для розрахунку крутильних коливань колінчастих валів двигунів внутрішнього згоряння (бензинових і дизельних). Приведення реального колінчастого валу до схеми прямого валу базується на наступних передпосилках:

- полярний момент інерції диску відносно вісі валу повинен дорівнювати полярному моменту інерції коліна з урахуванням приєднаної маси шатуна з поршнем;
- жорсткість на скручування частини валу між дисками повинна дорівнювати жорсткості на скручування відповідної частини колінчастого валу.

Перелічені передпосилки не можуть в повній мірі забезпечити повну еквівалентність схеми заміщення і реального колінчастого валу, так як приведений полярний момент інерції мас коліна і шатуна змінюється в процесі обертання колінчастого валу внаслідок переміщення поршня в циліндрі, тому заміна коліна з шатуном диском з постійним моментом інерції не являється сторогою. При всіх своїх недоліках схема заміщення задовільнена. Численні

експерименти підтверджують прийнятність схеми заміщення при достатньо ретельному визначенні еквівалентних моментів інерції і жорсткостей.

В прийнятій схемі заміщення на рисунку Д1 значення моментів інерції і жорсткостей приймемо рівними:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I; \quad (\text{Д.1})$$

$$\begin{aligned} c_1 = c_2 = c_3 = c, \\ l_1 = l_2 = l_3 = l, \end{aligned} \quad (\text{Д.2})$$

причому  $I = 80 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ ;  $c = 2 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $l = 0,25 \text{ м}$ .

**Послідовність виконання РГР №1.** Рівняння частот у відповідності до формули (4.5) запишемо у вигляді

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} c_1 - k^2 I_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - k^2 I_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 - k^2 I_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 - k^2 I_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{Д.3})$$

З урахуванням співвідношень (Д.1) і (Д.2) рівняння частот (Д.3) зводиться до вигляду

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} c - k^2 I & -c & 0 & 0 \\ -c & 2c - k^2 I & -c & 0 \\ 0 & -c & 2c - k^2 I & -c \\ 0 & 0 & -c & c - k^2 I \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{Д.4})$$

Підсумуємо усі строчки визначника (Д.4) і занесемо відповідні суми у першу строчку

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} -k^2 I & -k^2 I & -k^2 I & -k^2 I \\ -c & 2c - k^2 I & -c & 0 \\ 0 & -c & 2c - k^2 I & -c \\ 0 & 0 & -c & c - k^2 I \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{Д.5})$$

Усі елементи першої строчки визначника (Д.5) однакові, тому приведемо визначник (Д.5) до вигляду

$$\Delta(k^2) = -k^2 \begin{vmatrix} I & I & I & I \\ -c & 2c - k^2 I & -c & 0 \\ 0 & -c & 2c - k^2 I & -c \\ 0 & 0 & -c & c - k^2 I \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{Д.6})$$

Розкриваючи визначник (Д.6), отримуємо частотне рівняння (Д.6) у вигляді

$$\Delta(k^2) = k^2 \left[ k^6 - \frac{6c}{I} k^4 + \frac{10c^2}{I^2} k^2 - \frac{4c^3}{I^3} \right] = 0. \quad (\text{Д.7})$$

Отримане рівняння має один корінь  $k^2 = 0$ , якому відповідає рівномірне обертання колінчастого валу без деформації, тобто без крутильних коливань. Інші корені відповідають частотам  $k_1$ ,  $k_2$  і  $k_3$  власних крутильних коливань, для відшукування яких треба знайти рішення алгебраїчного рівняння

$$k^6 - \frac{6c}{I} k^4 + \frac{10c^2}{I^2} k^2 - \frac{4c^3}{I^3} = 0. \quad (\text{Д.8})$$

Для параметрів колінчастого валу  $I = 80 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2$  і  $c = 2 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}$ , значення коренів рівняння (Д.8) складають  $k_1 = 125 \text{ с}^{-1}$ ;  $k_2 = 231 \text{ с}^{-1}$ ;  $k_3 = 303 \text{ с}^{-1}$ . Діапазон робочих частот обертання автомобільного дизеля становить:  $\omega_{\min} = 50 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_{\max} = 280 \text{ с}^{-1}$ .

Для обраного діапазону робочих частот обертання колінчастого валу ДВЗ величина жорсткості  $c = 2 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}$  відрізків вала між дисками не забезпечує захист ДВЗ від резонансних режимів. Справді, власні частоти крутильних коливань валу  $k_1 = 125 \text{ с}^{-1}$  і  $k_2 = 231 \text{ с}^{-1}$  входять до обраного діапазону робочих частот обертання колінчастого валу.

Жорсткість частини колінчастого валу між дисками визначається формулою

$$c = \frac{GI_p}{l}, \quad (\text{Д.9})$$

де  $l$  – довжина частини колінчастого валу між дисками;  $G$  – модуль зсуву, середня величина якого для сталі дорівнює  $G = 8,3 \cdot 10^{10} \text{ Н}\cdot\text{м}^{-2}$ ;

$I_p$  – полярний геометричний момент інерції перерізу частини колінчастого валу між дисками, який визначається формулою

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}, \quad (\text{Д.10})$$

де  $D$  – діаметр кола перерізу.

Підставимо (Д.10) в (Д.9). В результаті маємо

$$c = \frac{G\pi D^4}{32l}. \quad (\text{Д.11})$$

Аналіз формули (Д.11) приводить до висновку, що величина жорсткості частини колінчастого валу між дисками залежить по-перше, від діаметру  $D$  і, по-друге, довжини  $l$ , причому залежність від діаметру  $D$  пропорційна четвертому ступеню від  $D$ , тобто ця залежність дуже сильна.

Проектування ДВЗ потрібної потужності передбачає вибір моменту інерції  $I$  схеми заміщення і відстані  $l$  між дисками, тому ці величини небажано змінювати при проведенні антирезонансних заходів. Тобто єдиним варійованим параметром являється вибір діаметру  $D$ , при якому корені рівняння частот (Д.8) знаходяться поза діапазонами ( $\omega_{\min}$ ,  $\omega_{\max}$ ) робочих частот обертання колінчастого валу ДВЗ.

Рівняння частот (Д.8) з урахуванням формули (Д.11) записується:

$$k^6 - \frac{6G\pi D^4}{32l} k^4 + \frac{10G^2 \pi^2 D^8}{1024l^2 I^2} k^2 - \frac{4G^3 \pi^3 D^{12}}{32768l^3 I^3} = 0,$$

або

$$k^6 - \frac{G\pi D^4}{5,33l} k^4 + \frac{G^2 \pi^2 D^8}{102,4l^2 I^2} k^2 - \frac{G^3 \pi^3 D^{12}}{8192l^3 I^3} = 0. \quad (\text{Д.12})$$

Для обраного значення жорсткості частин колінчастого валу між дисками знайдемо величину його діаметру  $D$  з використанням формули (Д.9)

$$I_p = \frac{cl}{G} = \frac{2 \cdot 10^6 \text{ Ї} \cdot \text{ї} \times 0,25 \text{ ї}}{8,3 \cdot 10^{10} \text{ Ї} \cdot \text{ї}^{-2}} = \frac{0,5 \cdot 10^6}{8,3 \cdot 10^{10}} \text{ ї}^4 = 0,6 \cdot 10^{-5} \text{ ї}^4.$$

У відповідності з формулою (Д.10) маємо

$$\begin{aligned}
 D &= \sqrt[4]{\frac{32I_p}{3,14}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 0,06 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = \\
 &= \sqrt[4]{0,611 \cdot 10^{-4}} = \sqrt{0,78 \cdot 10^{-2}} = \\
 &= 0,088 \text{ м.}
 \end{aligned}$$

Будемо змінювати діаметр частини колінчастого валу між дисками і оцінювати власні частоти коливань колінчастого валу. Результати помістимо в таблицю Д.1.

Таблиця Д.1 – Залежність власних частот коливань колінчастого валу в залежності від варійованого параметру  $D$ .

$D$ , м	$k_1$ , с <sup>-1</sup>	$k_2$ , с <sup>-1</sup>	$k_3$ , с <sup>-1</sup>
0,08	99	182	239
0,088	125	231	303
0,1	155	285	374
0,11	187	345	452
0,14	303	558	723
0,15	348	641	840

Аналіз таблиці Д.1 доводить, що при  $D \geq 0,14$  м усі корені рівняння частот (Д.12) покидають діапазон робочих частот обертання колінчастого валу ДВЗ (рис. Д2).

На рисунку Д2 діапазон робочих частот двигуна внутрішнього згоряння ( $\omega_{\min} = 50 \text{ с}^{-1} - \omega_{\max} = 280 \text{ с}^{-1}$ ) заштрихований. Корені рівняння частот (Д.12) покидають заштриховану зону при  $D \geq 0,137$  м, тому діаметр частини колінчастого валу між дисками повинен задовольняти нерівності

$$D \geq 0,14 \text{ м.}$$

Таким чином при  $D \geq 0,14$  м резонансні явища в проектуємому ДВЗ не виникають.

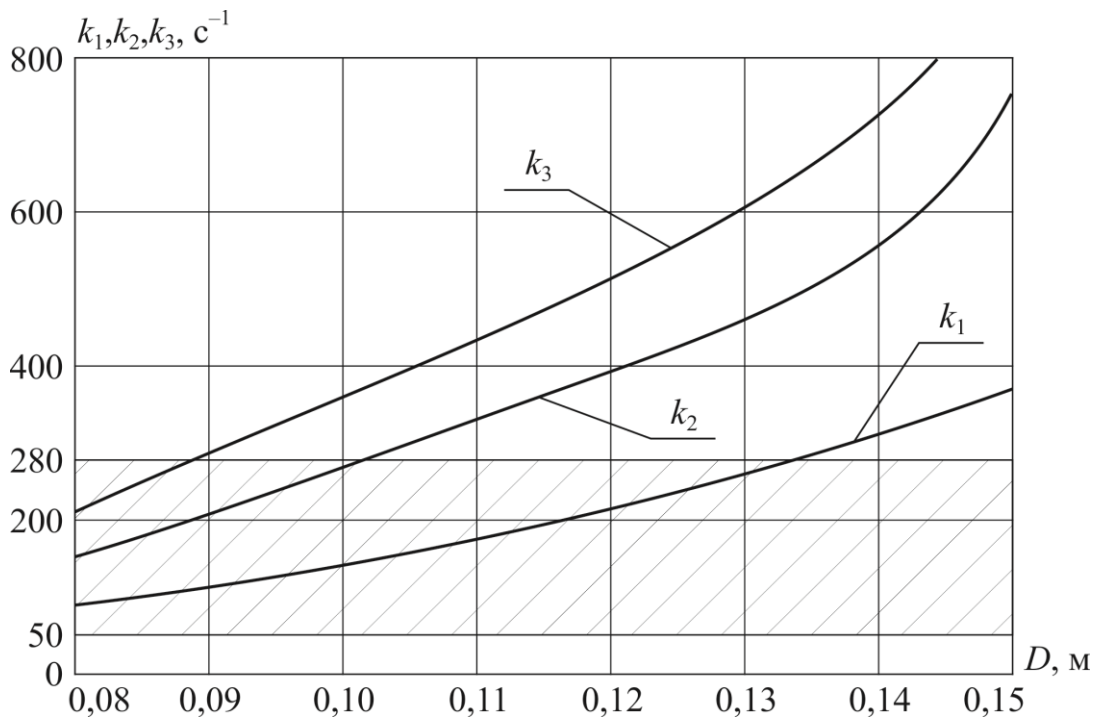


Рис. Д2. Залежність коренів рівняння частот від діаметру частин колінчастого валу між дисками

**Об'єкт дослідження.** Резонансні явища в чотирьохциліндровому чотирьохтактному автомобільному ДВЗ пов'язані з крутильними коливаннями колінчастого валу:

- а). діапазон робочих частот ДВЗ ( $50 \div 280$ )  $\text{s}^{-1}$ ;
- б). момент інерції коліна з урахуванням приєднаної маси шатуна з поршнем  $I = (50 + n \cdot 5) \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ , де  $n$  – номер у відповідності до списку академічної групи;
- в). довжина частини колінчастого валу між колінами  $(0,20 + n \cdot 0,01) \text{ м}$ ;
- г). величина модулю зсуву для матеріалу колінчастого валу складає  $G = 8,3 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$ ;
- д). діаметр частини колінчастого валу змінюємо від  $D_{\min} = 0,05 \text{ м}$  до величини, при якій усі корені рівняння частот (Д.12) покидають діапазон робочих частот ДВЗ, з кроком  $\Delta D = 0,01 \text{ м}$ ;
- е). заповнюємо таблицю Д.1 і будуємо рис Д2;
- ж). робимо загальні висновки.

## ДОДАТОК 2

### Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи №2.

**Тема** розрахунково-графічної роботи №2: «Побудова областей стійкості системи курсової стійкості автомобіля в площині варійованих параметрів електронного блоку керування».

**Вихідні дані РГР №2.** Розглянемо кутові коливання корпусу автомобіля, оснащеного системою курсової стійкості VSC (Vehicle Stability Control), що описуються другим рівнянням (5.39)

$$\ddot{\psi}(t) = -\frac{BK_{\tilde{a}}}{2I} \Delta p(t) - \frac{2H_m M}{I} v(t) \dot{\psi}(t) f_0 + \frac{1}{I} M_{\psi}(t). \quad (\text{Д.13})$$

Різниця тисків гальмівної рідини у гальмівних магістралях правого і лівого бортів автомобіля

$$\Delta p(t) = p_{\text{і}}(t) - p_{\text{є}}(t)$$

формується виконавчим органом системи VSC, принципальна схема якого приведена на рисунку Д3.

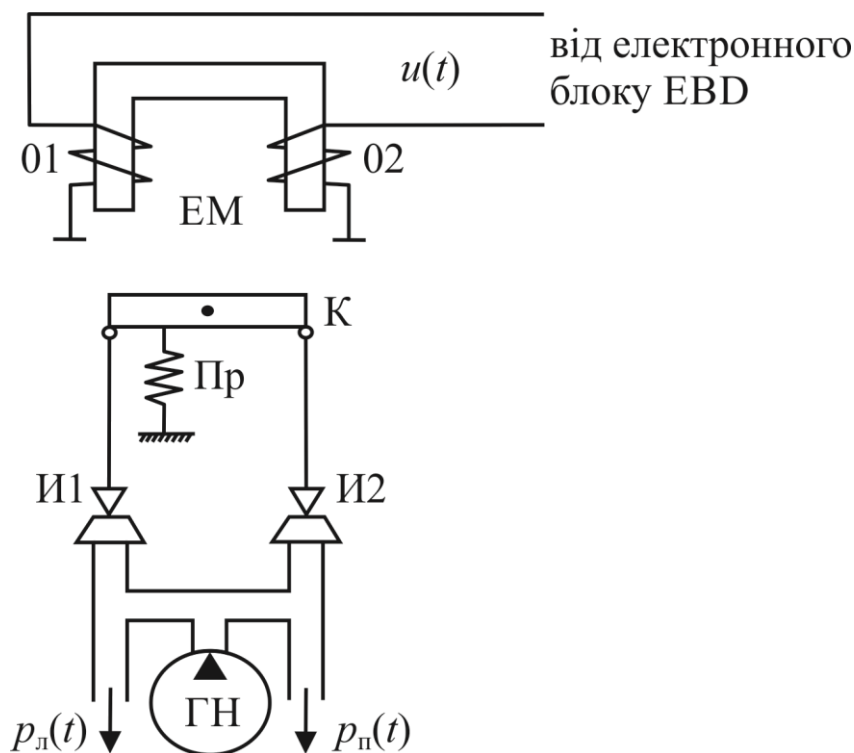


Рис. Д3. Принципальна схема виконавчого органа системи VSC

Електронний блок розподілення гальмівних зусиль EBD (Electronic Brake Distribution) на основі вихідних сигналів чутливих елементів формує сигнал керування у вигляді

$$\dot{e}(t) = k_1\psi(t) + k_2\dot{\psi}(t), \quad (\text{Д.14})$$

де  $k_1$  і  $k_2$  – варійовані параметри EBD. Сигнал  $|u(t)|$  подається на обмотку 01, якщо  $u(t) < 0$ , або на обмотку 02, якщо  $u(t) \geq 0$ , що призводить до повороту коромисла К на від’ємний кут  $\gamma(t)$  (за годинниковою стрілкою) у першому випадку, або на позитивний кут  $\gamma(t)$  (проти годинникової стрілки) у другому випадку. При цьому збурений рух коромисла К описується диференціальним рівнянням

$$I_{\hat{e}}\ddot{\gamma}(t) + f_k\dot{\gamma}(t) + c_k\gamma(t) = k_{\hat{a}i} \dot{e}(t), \quad (\text{Д.15})$$

а різниця тисків гальмівної рідини у гальмівних магістралях правого і лівого бортів автомобіля пропорційна куту повороту коромисла  $\gamma(t)$

$$\Delta p(t) = k_p \gamma(t). \quad (\text{Д.16})$$

В диференціальному рівнянні (Д.15) прийняті наступні позначення:  $I_k$  – момент інерції коромисла К відносно його вісі обертання;  $f_k$  – коефіцієнт рідинного тертя у вісі обертання;  $c_k$  – коефіцієнт жорсткості пружини Пр, що фіксує нейтральний стан коромисла при  $u(t) = 0$ ;  $k_{em}$  – коефіцієнт підсилення електромагніту ЕМ.

З урахуванням співвідношень (Д.14) і (Д.16) диференціальне рівняння (Д.15) приймає наступний вигляд

$$\Delta\ddot{p}(t) = -\frac{f_k}{I_{\hat{e}}} \Delta\dot{p}(t) - \frac{c_k}{I_{\hat{e}}} \Delta p(t) + \frac{k_{\hat{a}i} k_p}{I_{\hat{e}}} [k_1\psi(t) + k_2\dot{\psi}(t)]. \quad (\text{Д.17})$$

Диференціальні рівняння (Д.13) і (Д.17) у сукупності представляють собою математичну модель замкненої системи курсової стійкості автомобіля.

**Послідовність виконання РГР.** В математичній моделі (Д.13), (Д.17) введемо позначення

$$\frac{BK_{\hat{a}}}{2I} = a_{\psi p}; \quad \frac{2H_m M}{I} f_0 = a'_{\psi\psi}; \quad \frac{f_k}{I_{\hat{e}}} = a'_{pp}; \quad \frac{c_k}{I_{\hat{e}}} = a_{pp}; \quad \frac{k_{\hat{a}i} k_p}{I_{\hat{e}}} = k.$$

В результаті математична модель (Д.13), (Д.17) приймає наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\ddot{\psi}(t) &= -a_{\psi p} \Delta p(t) - a'_{\psi \psi} v(t) \dot{\psi}(t); \\ \Delta \ddot{p}(t) &= -a_{pp} \Delta p(t) - a'_{pp} \Delta \dot{p}(t) + kk_1 \psi(t) + kk_2 \dot{\psi}(t).\end{aligned}\tag{Д.18}$$

Систему диференціальних рівнянь (Д.18) приведемо до нормальної форми Коші, для чого розглянемо вектор стану системи

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \Delta p(t) \\ \Delta \dot{p}(t) \end{bmatrix}.$$

В результаті маємо:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -a'_{\psi \psi} v(t) x_2(t) - a_{\psi p} x_3(t); \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t); \\ \dot{x}_4(t) &= kk_1 x_1(t) + kk_2 x_2(t) - a_{pp} x_3(t) - a'_{pp} x_4(t).\end{aligned}\tag{Д.19}$$

Математична модель (Д.19) являється нестационарною, так як коефіцієнт  $-a'_{\psi \psi} v(t)$  залежить від поточного часу. Для дослідження такої системи скористуємося методом «заморожених» коефіцієнтів. Будемо вважати, що значення швидкості руху автомобіля в моменти часу  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$  постійні і побудуємо області стійкості для кожного з моментів  $t_k \in [0, \tau]$ , ( $k = \overline{0, n}$ ) в площині варійованих параметрів  $(k_1, k_2)$ . Введемо позначення  $v_k = v(t_k)$  і запишемо систему диференціальних рівнянь (Д.19) у вигляді:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= -a'_{\psi \psi} v_k x_2(t) - a_{\psi p} x_3(t); \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t); \\ \dot{x}_4(t) &= kk_1 x_1(t) + kk_2 x_2(t) - a_{pp} x_3(t) - a'_{pp} x_4(t), \\ &\left(k = \overline{0, n}\right).\end{aligned}\tag{Д.20}$$

Власна матриця системи (Д.20) дорівнює

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a'_{\psi\psi}v_k & -a_{\psi p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ kk_1 & kk_2 & -a_{pp} & -a'_{pp} \end{bmatrix}, \quad (k = \overline{0, n}).$$

Характеристичний поліном системи (Д.20) запишемо у вигляді

$$D(s) = \det(A - Es) = \begin{vmatrix} -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a'_{\psi\psi}v_k - s & -a_{\psi p} & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 \\ kk_1 & kk_2 & -a_{pp} & -a'_{pp} - s \end{vmatrix}, \quad (k = \overline{0, n}). \quad (\text{Д.21})$$

Розкриємо визначник (Д.21) за елементами першої стрічки

$$D(s) = s^4 + (a'_{pp} + a'_{\psi\psi}v_k)s^3 + (a_{pp} + a'_{pp}a'_{\psi\psi}v_k)s^2 + (a_{pp}a'_{\psi\psi}v_k + a_{\psi p}kk_2)s + a_{\psi p}kk_1, \quad (\text{Д.22})$$

$$(k = \overline{0, n}).$$

В характеристичному поліномі (Д.22) здійснено заміну  $s = j\omega$  і отримаємо співвідношення для характеристичного вектору

$$D(j\omega) = \omega^4 - j(a'_{pp} + a'_{\psi\psi}v_k)\omega^3 - (a_{pp} + a'_{pp}a'_{\psi\psi}v_k)\omega^2 + ja_{pp}a'_{\psi\psi}v_k\omega + ja_{\psi p}kk_2\omega + a_{\psi p}kk_1, \quad (\text{Д.23})$$

$$(k = \overline{0, n}).$$

Характеристичний вектор нейтральної динамічної системи (системи, що знаходиться на границі області стійкості), проходить через початок координат комплексної площини  $[X(\omega, k_1, k_2), Y(\omega, k_1, k_2)]$ , де  $X(\omega, k_1, k_2)$  і  $Y(\omega, k_1, k_2)$  – відповідно дійсна та уявна частини характеристичного вектора (Д.23).

Отже, на границі області стійкості розглядаємої системи мають місце співвідношення:

$$\begin{aligned}
 X(\omega, k_1, k_2) &= R_e D(j\omega) = \omega^4 - (a_{pp} + a'_{pp} a'_{\psi\psi} v_k) \omega^2 + a_{\psi p} k k_1 = 0; \\
 Y(\omega, k_1, k_2) &= I_m D(j\omega) = -(a'_{pp} + a'_{\psi\psi} v_k) \omega^2 + \\
 &+ a_{pp} a'_{\psi\psi} v_k + a_{\psi p} k k_2 = 0, \\
 &(k = \overline{0, n}).
 \end{aligned}
 \tag{Д.24}$$

Із співвідношень (Д.24) отримуємо:

$$\begin{aligned}
 k_1(\omega) &= \frac{1}{a_{\psi p} k} \left\{ (a_{pp} + a'_{pp} a'_{\psi\psi} v_k) \omega^2 - \omega^4 \right\}; \\
 k_2(\omega) &= \frac{1}{a_{\psi p} k} \left\{ (a'_{pp} + a'_{\psi\psi} v_k) \omega^2 - a_{pp} a'_{\psi\psi} v_k \right\}, \\
 &(k = \overline{0, n}).
 \end{aligned}
 \tag{Д.25}$$

Припустимо, що:  $\alpha_{\psi p} = 0,135 \cdot 10^{-4} \text{ Н}^{-1} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ ;  $\alpha'_{\psi\psi} = 0,0408 \text{ м}^{-1}$ ;  $\alpha'_{pp} = 0,56 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$ ;  $\alpha_{pp} = 1,03 \cdot 10^4 \text{ с}^{-2}$ ;  $k = 1,03 \cdot 10^9 \text{ В}^{-1} \cdot \text{Па} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $v_0 = 25 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $v_1 = 20 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $v_2 = 15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $v_3 = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $v_4 = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $v_5 = 0 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ .

На рисунку Д4 приведені області стійкості замкненої системи курсової стійкості автомобіля, які побудовані для кожного значення швидкості  $v_k$ , ( $k = \overline{0, 5}$ ).

На рис. Д4 побудовані області майже зливаються одна з однією, що свідчить про незначний вплив поточної швидкості руху автомобіля  $v_k$  на курсову стійкість руху.

Для нанесення штриховки скористуємось правилом штриховки, побудувавши визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X(\omega, k_1, k_2)}{\partial k_1} & \frac{\partial X(\omega, k_1, k_2)}{\partial k_2} \\ \frac{\partial Y(\omega, k_1, k_2)}{\partial k_1} & \frac{\partial Y(\omega, k_1, k_2)}{\partial k_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\psi p} k & 0 \\ 0 & a_{\psi p} k \end{vmatrix} = a_{\psi p}^2 k^2 > 0. \tag{Д.26}$$

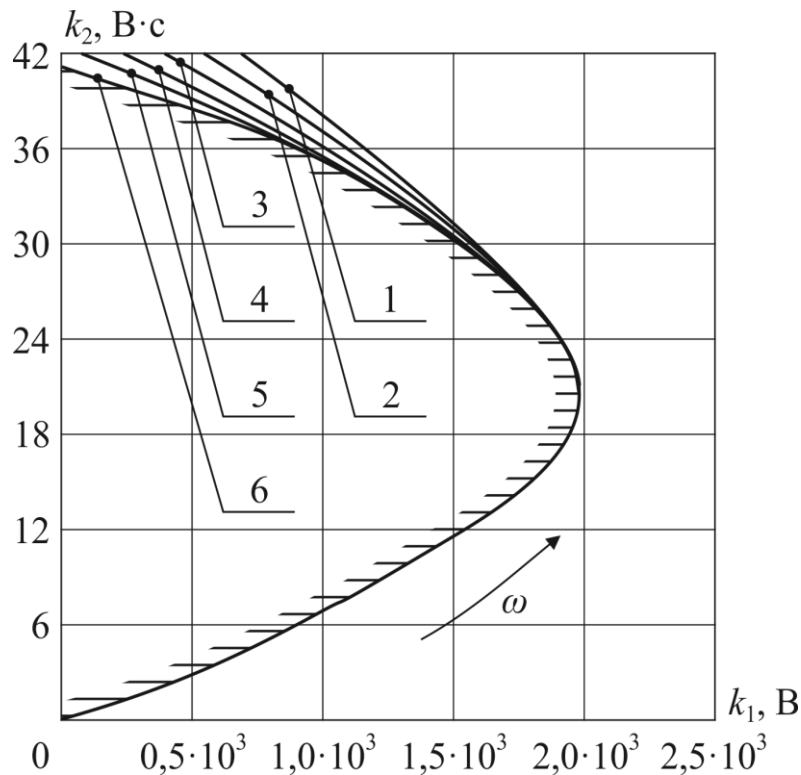


Рис. Д4. **Області стійкості замкненої системи курсової стійкості автомобіля:**

1 –  $v_0 = 25 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ; 2 –  $v_1 = 20 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ; 3 –  $v_2 = 15 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  
 4 –  $v_3 = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ; 5 –  $v_4 = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ; 6 –  $v_5 = 0 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Визначник (Д.26) позитивний, отже при переміщені вздовж границі області стійкості у бік зростання  $\omega$  границю слід штрихувати зліва. При цьому штриховка спрямована в середину області стійкості.

**Об'єктом дослідження** РГР №2 являються процеси кутової стабілізації корпусу автомобіля в режимі термінового гальмування і вибір значень варійованих параметрів системи курсової стійкості автомобіля, які забезпечують стійкість руху в заданому напрямку.

## Список літературних джерел.

1. Aleksandrov Ye., Aleksandrova T., Kostianyk I., Morgun Ya. Simulation of Random External Disturbance Acting on the Car Body in the Urgent Braking Mode. *Advanced Information Systems*. 2023. vol. 7. №1. Pp. 14 – 17.
2. Александров Є.Є. Основи автомобільної автоматики. Харків: ХНАДУ, 2010. 172с.
3. Александров Є.Є., Александрова Т.Є., Овчаренко Ю.Є. Підвищення технічних та ергономічних характеристик рухомих об'єктів військового призначення. Харків: ХНАДУ, 2019. 176с.
4. Alexandrov Ye., Alexandrova T., Morgun Ya. Parametric Synthesis of the Electronic Control Unit of the Course Stability System of the Car. *Easter-European Journal of Enterprise Technologies*, 2019. №6/9 (102). P.p. 39 – 45.
5. Александров Є.Є., Александрова Т.Є., Григор'єв О.Л., Моргун Я.Ю. Стійкість та автоколивання електронної замкненої системи стабілізації курсу автомобіля з цистерною. *Вісник НТУ «ХП»*. Серія: «Математична моделювання в техніці та технологіях». 2020. №1. С. 44 – 63.
6. Александров Є.Є., Александрова Т.Є., Григор'єв О.Л., Моргун Я.Ю. Про вплив коливань вільної поверхні рідини на курсову стійкість автомобіля-паливозаправника. *Озброєння та військова техніка*. 2021. №1. С. 36 – 43.
7. Александров Є.Є., Александрова Т.Є., Григор'єв О.Л., Моргун Я.Ю. Про вплив коливань транспортуємої рідини на область стійкості замкненої системи автоматичного керування курсом автомобіля. *Вісник НТУ «ХП»*. Серія: «Системний аналіз, управління та інформаційні технології». 2021. №1(5). С. 29 – 41.
8. Ігдалов Й.М., Кучма Л.Д., Поляков М.В., Шептун Ю.Д. Ракети-носії і космічні ступені ракет як об'єкт керування. Дніпропетровськ: АРТ-ПРЕСС, 2004. 564с.
9. Eswaran, M., Parulekar, Y.M., Reddy, G.R. (2019). Introduction to Structural Dynamics and Vibration of Single-Degree-of-Freedom Systems. In: Reddy, G., Muruva, H., Verma, A. (eds) *Textbook of Seismic Design*. Springer, Singapore. [https://doi.org/10.1007/978-981-13-3176-3\\_3](https://doi.org/10.1007/978-981-13-3176-3_3)

10. Kerschen, G., Vakakis, A.F. (2020). Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems. In: Allemang, R., Avitabile, P. (eds) Handbook of Experimental Structural Dynamics. Springer, New York, NY. [https://doi.org/10.1007/978-1-4939-6503-8\\_35-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4939-6503-8_35-1)
11. Linge, S., Langtangen, H.P. (2017). Vibration ODEs. In: Finite Difference Computing with PDEs. Texts in Computational Science and Engineering, vol 16. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-55456-3\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-55456-3_1)
12. Povstenko, Y. (2024). Essentials of Fractional Calculus. In: Fractional Thermoelasticity. Solid Mechanics and Its Applications, vol 278. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-64587-7\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-031-64587-7_1)
13. Volterra, E., Zachmanoglou, E.C., & Kolsky, H. (1965). Dynamics of vibrations.
14. Chang, Zongyu & Ali, Rai & Ren, Ping & Zhang, Guangbin & Wu, Peixin. (2015). Dynamics and Vibration Analysis of Delta Robot. <https://doi.org/10.2991/icimm-15.2015.257>
15. Genta, G. (2009). Vibration of Beams. In: Genta, G. (eds) Vibration Dynamics and Control. Mechanical Engineering Series. Springer, Boston, MA. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-79580-5\\_12](https://doi.org/10.1007/978-0-387-79580-5_12)