

УДК 004

**ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ДЛЯ 3D
РЕКОНСТРУКЦІЇ ПОЛІВ КОНЦЕНТРАЦІЙ ТЯЖКИХ МЕТАЛІВ:
МОДЕЛЬ, ВАЛІДАЦІЯ ТА ПОРІВНЯННЯ З МЕТОДАМИ ШЕПАРДА**

Першина Ю.І., Ковтун А.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків

У роботі наведено чисельну реалізацію методу інтерлінації функцій трьох змінних за відомими слідами на заданій системі вертикальних прямих. Проведено моделювання просторового розподілу концентрацій важких металів у ґрунті за обмеженими вимірюваннями та порівняння з методами Шепарда. Оцінено точність наближення за різними підходами, наведено табличні результати. Особливу увагу приділено варіаціям інтерлінації та їх застосуванню до профілів з розривами. Чисельна реалізація алгоритмів виконана у середовищі комп'ютерної математики MATLAB з використанням мови програмування MATLAB (R2023a). Отримані результати демонструють ефективність підходу в умовах обмеженості даних.

Важкі метали накопичуються у ґрунті та навіть у малих концентраціях є токсичними для живих організмів [1]. Це призводить до їх надходження в рослини, харчові продукти і зрештою в організм людини, спричиняючи хронічні захворювання [1][2]. Забруднення ґрунтів важкими металами також погіршує родючість і порушує екосистеми [3]. Основними джерелами такого забруднення є металургія, хімічна промисловість, транспорт, агрохімікати, відходи тощо [4]. Додатково, військові дії спричиняють значні викиди важких металів на полях бою [5], що ускладнює ситуацію. Отже, актуальною задачею є математичне моделювання розподілу забруднення ґрунту за обмеженими, безконтактно отриманими даними [6]. Для цієї мети доцільно застосувати методи інтерлінації, які використовують дані вздовж ліній та забезпечують вищу точність відновлення [7].

Нехай невідома функція $f(x, y, z)$ описує просторовий розподіл концентрації забруднення важкими металами. Відомі її значення лише на множині вертикальних свердловин (ліній) в дискретних точках: на i -й свердловині задано профіль $g_i(z) = f(x_i, y_i, z)$ [6,7]. Інтерлінація дозволяє відновити $f(x, y, z)$ у всьому об'ємі за цими слідами. Для кожної внутрішньої точки (x, y, z) обчислюються ваги, об'єднуючи вплив усіх свердловин, і формується наближене значення $f^*(x, y, z)$ як зважена сума профілів [6,7]. Крім стандартної інтерлінації, розглядається “часткова” інтерлінація – окреме інтерполювання профілів вище та нижче глибини $z = 0.5$ для урахування стрибка в середині шару [6,7]. Також для порівняння використано класичну 3D інтерполяцію Шепарда (обернені ваги на основі повної відстані) та її модифікацію з анізотропним масштабуванням відстаней [6,7].

$$w_i(x, y) = \frac{1}{\left(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} + \lambda_{2D}\right)^{\beta_{2D}}} \quad (1)$$

У формулі (1) параметри обрано рівними $\lambda_{2D} = 0.1, \beta_{2D} = 2$ – ці значення забезпечують оптимальну точність інтерполяції за результатами чисельних експериментів [8]. Невелике додатне λ_{2D} усуває особливість при нульовій відстані та обмежує вплив найближчих свердловин. Показник $\beta_{2D} = 2$ (обернений квадрат відстані) обрано як базовий, оскільки він дав найменшу похибку наближення. Обчислені ваги нормуються (приводяться до суми 1), після чого вздовж кожної свердловини інтерполюються значення профілів $g_i(z)$ на висоту z та усереднюються з цими ваговими коефіцієнтами [6,7].

У дослідженні застосовано варіант інтерлінації — методику, за якою значення тривимірної функції $f(x, y, z)$ відомі лише на вертикальних прямих (свердловинах) у точках $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$. Вздовж кожної з m свердловин

вимірюється вертикальний профіль
 $g_i(z) = f(x_i, y_i, z)$, $z \in [0,1], i = 1, \dots, m$, після чого значення функції у внутрішніх точках домену $\Omega = [0,1]^3$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ наближуються як зважена сума таких профілів із вагами, що залежать від горизонтальної відстані до свердловин.

Для чисельної валідації побудовано синтетичну модель розподілу забруднення:

$$f(x, y, z) = \sin(\pi x) \cos(\pi y) e^{-z} + 0,5 \cdot \mathbf{1}_{\{z > 0,5\}}$$

яка поєднує гладку коливальну частину та стрибок на рівні $z = 0.5$, що моделює зміну концентрації між шарами ґрунту.

Для перевірки методики використано синтетичний розподіл концентрації, що містить гладку коливальну складову та стрибок на рівні $z = 0.5$ [6,7]. Розглянуто $m = 9$ свердловин, на яких задано різні типи вертикальних профілів $g_i(z)$. Зокрема, використано функції:

$$g_1(z) = e^{-4z} + 0.1 \sin(3\pi z)$$

$$g_2(z) = 0.8 \cos(2\pi z) + 0.2z$$

$$g_3(z) = 0.5 + 0.4 \sin(5z) e^{-z}$$

$$g_4(z) = 1.2 e^{-3z} - 0.1z^2$$

$$g_5(z) = 0.6 + 0.3 \cos(4\pi z)$$

$$g_6(z) = e^{-2.5z} + 0.05 \sin(8z)$$

Наведені вище профілі охоплюють типові форми розподілу забруднення з глибиною: експоненційне згасання, синусоїдальні коливання навколо базового рівня, наявність квадратичного тренду тощо. Цей набір дозволяє перевірити роботу методів як на гладких, так і на розривних ділянках (стрибок на рівні $z = 0.5$ імітує різку зміну концентрації між двома шарами ґрунту).

Для кожного з методів обчислено максимальну (**max err**) і середню (**mean err**) абсолютні похибки, а також ці похибки окремо для верхнього

шару $z < 0.5$ та нижнього шару ($z \geq 0.5$). Результати наведено в табл. 1 [8]. Інтерлінація демонструє меншу середню похибку (0.161 проти 0.232 у Шепарда) [8], хоча класична інтерполяція Шепарда має трохи нижчу максимальну похибку у верхньому шарі. У нижньому шарі інтерлінація забезпечує суттєво менший максимум похибки (0.519 проти 0.757), ніж Шепард [6,7]. Модифікований метод Шепарда дає найменшу середню похибку (0.156) завдяки анізотропному масштабу, але його максимальна похибка в глибокому шарі перевищує показник інтерлінації. Часткова інтерлінація майже не відрізняється від стандартної, оскільки врахування стрибка не вплинуло на точність у цьому випадку.

Таблиця 1. Максимальні та середні похибки методів № test = 10 .

| Метод | max err | mean err | max err ($z < 0.5$) | mean err ($z < 0.5$) | max err ($z \geq 0.5$) | mean err ($z \geq 0.5$) |
|-----------------------------------|---------|----------|-----------------------|------------------------|--------------------------|---------------------------|
| Інтерлінація | 0.9044 | 0.1610 | 0.9044 | 0.2046 | 0.5189 | 0.1174 |
| Покращена інтерлінація (часткова) | 0.9044 | 0.1610 | 0.9044 | 0.2046 | 0.5189 | 0.1174 |
| Шепард 3D | 0.7924 | 0.2316 | 0.7924 | 0.2362 | 0.7567 | 0.2270 |
| Модифікований Шепард | 0.8526 | 0.1563 | 0.8526 | 0.1879 | 0.6230 | 0.1247 |

Висновки. Розроблений метод інтерлінації функцій трьох змінних ефективно відновлює просторовий розподіл концентрації важких металів за даними вимірів на обмеженій кількості свердловин. Показано, що запропонований підхід забезпечує точність наближення на рівні сучасних 3D методів інтерполяції та є стійким до впливу помірному шуму. Отримані результати можуть бути використані для побудови карт забруднення ґрунтів; у подальшому планується апробація моделі на реальних експериментальних даних з урахуванням неоднорідності розподілу забруднення [6,7]. Повний опис математичного апарату, алгоритмів реалізації, а також додаткових

експериментів з аналізом точності методів інтерлінації та Шепарда наведено в статті [8].

Література:

1. С. А. Балюк, В. В. Медведєв, М. М. Мірошніченко, Є. В. Скрилик, Д. О. Тимченко, А. І. Фатєєв, А. О. Христенко, Ю. Л. Цапко, «Екологічний стан ґрунтів України», Український географічний журнал, № 2, с. 38–42, 2012.
2. Л. О. Жеребна, Вплив високих рівнів забруднення свинцем і кадмієм підзолистих і типових чорноземів на надходження цих елементів у рослини ячменю та кукурудзи. Автореф. дис. ... канд. біол. наук, Харків, Україна, 2003.
3. В. Г. Рошко, О. В. Грабовський, «Оцінка забруднення важкими металами агроценозів, що межують з автомобільними шляхами», Вісник УжНУ. Серія: Біологія, № 6, с. 259–262, 1999.
4. Н. Є. Твердохлебова, Н. С. Євтушенко, «Регіональна екологічна безпека в умовах воєнного стану», у Сучасні технології в промисловому виробництві: матеріали X Всеукр. наук.-техн. конф., Суми, Україна, 18–21 квіт. 2023, с. 177–178. Суми: СумДУ, 2023.
5. М. М. Гічка, «Дистанційне зондування в системі моніторингу ґрунтів України», Вісник аграрної науки, № 12, с. 72–75, 2005.
6. I.I. Pershyna, Restoration of discontinuous functions by discontinuous interlineation splines / I.I.Pershyna // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – Запоріжжя, 2022. – № 4. С. 29 – 39.
7. I. Sergienko, V. Zadiraka, and O. M. Lytvyn, “Interlineation of Functions,” in Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Cham: Springer, 2021, pp. 75–176.
8. Ю. І. Першина, А. В. Ковтун, «Математичне моделювання розподілу забруднення важкими металами методами неруйнівного контролю за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних», Прикладні проблеми комп’ютерних наук, безпеки та математики, № 5, с. 24–31, 2025.