УДК 519.853.32

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ МЕРЕЖ

О.А. Тиричева, доцент, к.т.н., Д.С. Терещенко, студент, ХНАДУ

Анотація. *У статті розглянуте питання визначення оптимальних допустимих інтервалів часу для виконання в локальній мережі комплексу інформаційно пов'язаних задач підприємства (установи).*

Ключові слова: *комплекс інформаційно пов'язаних задач підприємства (установи), локальна комп'ютерна мережа, методи нелінійного математичного програмування.*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Е.А. Тиричева, доцент, к.т.н., Д.С. Терещенко, студент, ХНАДУ

Аннотация. *В статье рассмотрен вопрос определения оптимальных допустимых интервалов времени для выполнения в локальной сети комплекса информационно связанных задач предприятия (организации).*

Ключевые слова: *Комплекс информационно связанных задач предприятия (организации), локальная компьютерная сеть, методы нелинейного математического программирования.*

USE OF METHODS OF MATHEMATICAL MODELING FOR THE INCREASE OF EFFICIENCY OF FUNCTIONING OF COMPUTER NETWORKS

O. Tyrycheva, assistant professor, cand. eng. sc., D. Tereschenko, student, KhNAHU

Abstract. *In this article we will consider the question of determination of the optimal possible time domains for the implementation of the complex of the informatively constrained tasks in the local network of the enterprise (establishments).*

Keywords: *complex of the informatively constrained tasks of enterprise (establishments), local computer network, methods of the nonlinear mathematical programming.*

Вступ

При проектуванні системи автоматизації роботи підприємства (установи) розробник стикається з проблемою забезпечення своєчасності вирішення термінових інформаційно пов'язаних задач, що входять в комплекс задач, які вирішуються у рамках автоматизованої системи підприємства (установи). У доповіді розглянуте питання визначення оптимальних допустимих інтервалів часу для виконання в локальній мережі таких комплексів задач користувачів.

Вивчення шляхів підвищення ефективності функціонування обчислювальних мереж, що орієнтовані на обробку комплексів інформаційно пов'язаних задач підприємства (установи), що мають директивні, об'єктивно призначені терміни виконання задач визначає актуальність даного дослідження. Розроблений автором алгоритм має широкий спектр застосування і може бути використаний при оптимізації потоків в транспортних системах.

Аналіз публікацій

У наукових роботах для розв'язування задач нелінійного програмування великий вимірності запропонований цілий ряд ефективних алгоритмів на засаді апроксимаційного підходу, суттєвість якого полягає в тому, що розв'язання початкової нелінійної задачі здійснюється у результаті розв'язання послідовності допоміжних задач квадратичного програмування простішого вигляду, що вимагають значно менших обчислювальних витрат, ніж початкова задача.

Огляд літератури, показав, що метод лінеаризації [1 - 5] займає серед цих методів особливе місце: він сходиться з будь-якого початкового наближення, не вимагає строго позитивної визначеності матриці других похідних функції Лагранжа і має достатньо просту структуру допоміжної квадратичної задачі.

Мета і постановка завдання

Забезпечення своєчасності рішення припускає визначення для кожної задачі комплексу таких допустимих термінів її виконання, які дозволяють не лише вирішити цю задачу в межах її директивних термінів, але і не порушити при виконанні директивних термінів тих задач, які пов'язані з цією задачею інформаційно.

Наприклад, розглянемо підмножину *Z={x, y, z}* комплексу задач, що складається з трьох задач *x, y, z* таких, що результат рішення задачі *x* входить до складу вхідних даних, що необхідні для вирішення задачі *y*, а результат рішення задачі *y*, в свою чергу, використовується в якості початкових даних при рішенні задачі *z*.

Кожній задачі призначені початковий і кінцевий директивні терміни її виконання. Тобто - через об'єктивні причини жодна задача не може почати виконуватися раніше настання її початкового директивного терміну і не може завершитися пізніше за її кінцевий директивний термін. У окремому випадку вхідні директивні терміни рішення усіх трьох задач можуть співпадати. Час виконання кожної задачі визначається об'ємом початкових даних і потужністю технічних засобів, за допомогою яких обробляється і передається інформація.

Оскільки в цьому прикладі задачі пов'язані інформаційно, очевидно, що реальні допустимі інтервали їх виконання на осі часу повинні розташовуватися послідовно: спочатку виконується задача *x*, потім результати її рішення передаються задаче *y* и виконується задача *y*, далі результати рішення задачі *y* передаються задаче *z* и виконується задача *z*. При цьому всі допустимі інтервали виконання задач *x, y* и *z* повинні розташовуватися в межах відповідних директивних інтервалів рішення задач.

Очевидно, що таких наборів допустимих інтервалів виконання задач *x, y* і *z* може знайтися незліченна множина. Але якщо ми виберемо деякий критерій оцінювання знайденого рішення, наприклад, вартісний, то можна визначити набір допустимих інтервалів виконання задач підмножини *Z* оптимальний або наближений до оптимального за вибраним критерієм.

Оптимізаційна задача вирішується для кожної з підмножин задач, що пов'язані інформаційно, $Z = \{z_j\}$, $j = \overline{1, J}$, де J – кількість задач у підмножині.

Постановка задачі визначення нових кордонів взаємно припустимих інтервалів виконання задач є наступною.

Визначити такі припустимі терміни $t_j^н, t_j^к$ виконання задачі z_j, що доставляють мінімум вартісному функціоналу

$$C = \min_{t_j^н, t_j^к} \left\{ \sum_{s=1}^{Q} \theta_{1s} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} \left(\frac{u_j \eta_{ji}}{t_j^к - t_j^н}\right)^{\beta_{1s}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{K} \theta_{2k} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \left(\frac{u_j \delta_{jl}}{t_j^к - t_j^н}\right)^{\beta_{2k}} \right\} \quad (1)$$

де Q, K – число статей витрат відповідно на вузли і канали зв'язку мережі;
$\theta_{1s}, \theta_{2k}, \beta_{1s}, \beta_{2k}$ - константи, $\theta_{1s}, \theta_{2k} > 0$,

$0 < \beta_{1s}, \beta_{2k} < 1,\ s = \overline{1,Q},\ k = \overline{1,K}$;

$$\eta_{ji} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } z_j - \text{задача обробки на } i - \text{м вузлі;} \\ 0 - \text{у протилежному випадку;} \end{cases}$$

$$\delta_{jl} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } z_j - \text{передача інформації по} \\ \qquad l - \text{му каналу зв'язку мережі;} \\ 0 - \text{у протилежному випадку;} \end{cases}$$

$$u_j = \begin{cases} \omega_j, \text{ якщо } z_j - \text{задача обробки;} \\ V_j, \text{ якщо } z_j - \text{задача передачі;} \end{cases}$$

ω_j - трудомісткість в умовних одиницях рішення j-й задачі;

V_j - об'єм інформації, що передається по каналу зв'язку.

При цьому повинні виконуватись наступні обмеження

$$t_j^{н} \geq d_j^{н},\ j = \overline{1,J}, \qquad (2)$$

$$t_j^{к} \leq d_j^{к},\ j = \overline{1,J}, \qquad (3)$$

$$t_j^{к} > t_j^{н},\ j = \overline{1,J}, \qquad (4)$$

$$\bigcap_{j \in J} [t_j^{к}, t_j^{н}] = \varnothing,\ j = \overline{1,J}, \qquad (5)$$

$$t_j^{к} - \min_p \{t_p^{н} \mid H_p \in Y_j\} \leq 0,\ j = \overline{1,J}, \qquad (6)$$

де $d_j^{н}, d_j^{к}$ - завданні об'єктивно директивні терміни виконання z_j; J - кількість задач множини Z; H_p - номер вершини-задачі графа $G(Z, \Gamma)$, що відображує інформаційно - логічну структуру комплексу задач Z із взаємними зв'язками; Y_j - множина індексів (номерів) задач Z, що безпосередньо зв'язані з z_p по входу і виходу відповідно.

Обмеження (2), (3) враховують завдання директивних термінів рішення задач z_j. Обмеження (4) задає умову ненульовій довжини взаємно припустимих інтервалів. Обмеження (5) задає умову не перетину в часі інтервалів виконання задач, що призначені на даний вузол (канал зв'язку), а згідно обмеженню (6) взаємно припустимі інтервали задач, зв'язаних інформаційно, не повинні перетинатися в часі.

Основний розділ. Результати досліджень

Задача (1) - (6) ставиться до класу задач нелінійного математичного програмування і характеризується великою вимірністю, зумовленою кількістю завдань (що вирішуються на мережі і знаходяться у інформаційному зв'язку) та розрідженістю матриці умов.

Узагальнений метод множників Лагранжа є ефективним лише для деяких окремих випадків постановки (1) - (6).

У загальному випадку метод лінеаризації має лінійну швидкість збіжності. Проте існують модифікації методу [4], для яких при значному чималому видаленні від екстремуму швидкість збіжності лінійна, а при достатній близькості до розв'язання - квадратична.

Особливість рішення допоміжних квадратичних задач полягає в тому, що в них враховуються лише ті обмежування, у яких порушення припустимості найбільше [2 - 4].

Означена особливість зменшує вимірність допоміжних задач і завдяки цьому зменшує обчислювальну складність початкової нелінійної задачі.

Перераховані достоїнства методу лінеаризації зумовлюють вибір даного методу для розв'язання оптимізаційної задачі у постановці (1) - (6).

Розглянемо алгоритм рішення поставленої задачі. Хай $\bar{t}(0) = \{t_j(0)\},\ j = \overline{1,J}$, - початкове (нульове) наближення, де $t_j(0) = \{t_j^{н}(0), t_j^{к}(0)\}$, и хай завдано $\varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1$.

Опишемо алгоритм метода лінеаризації на k-му кроці, коли вже отримано k-е наближення до рішення $\bar{t}(k)$. Побудову (k+1)-го приближення проводимо наступним чином.

1) Задача квадратичного програмування вирішується відносно $\bar{p}$:

$$\min_{p}\left\{\left(C'^{T}(\bar{t}(k)),\ \bar{p})\right)+\frac{1}{2}\left\|\bar{p}\right\|^{2}\right\}, \qquad (7)$$

$$(\phi_s'^{T}(\bar{t}(k)),\bar{p})+\phi_s(\bar{t}(k))\le 0,\ s\in S_\delta(\bar{t}(k)),$$

де $S_\delta(\bar{t})=\left\{s\in S:\phi_s(t)\ge\max_{s\in S}\phi_s(\bar{t})-\delta\right\},\delta\ge 0,$

$\Phi=\left\{\phi_s(\bar{t})\right\}$ - множина функцій таких, що

$$\phi_s(\bar{t})=\begin{cases} d_s^{н}-t_s^{н},\ s=\overline{1,J}, \\ t_{s-J}^{к}-d_{s-J}^{к},\ s=\overline{J+1,2J}, \\ t_{s-2J}^{н}-t_{s-2J}^{к},\ s=\overline{2J+1,3J}, \\ t_{s-3J}^{к}-\min_{a}\left\{t_a^{н}\left|H_a\in Y_{s-3J}\right.\right\},\ s=\overline{3J+1,4J}, \end{cases}$$

$$\bar{t}=\left\{t_j\right\},t_j=\left\{t_j^{н},t_j^{к}\right\},\ j=\overline{1,J},$$

$\left\|\bar{p}\right\|$ - евклідова норма вектора $\bar{p}$.

Рішенням задачі (7) є вектор $\bar{p}(k)\equiv\bar{p}(\bar{t}(k))$.

2) Знаходимо перше значення $s=0,1,...$, при якому буде виконана нерівність

$$\phi(\bar{t}(k)+\frac{1}{2^s}\cdot\bar{p}(k))+N\cdot\max_{s\in S}\phi_s(\bar{t}(k)+\frac{1}{2^s}\cdot\bar{p}(k))$$
$$\le\phi(\bar{t}(k))+N\cdot\max_{s\in S}\phi_s(\bar{t}(k))-\frac{1}{2^s}\cdot\varepsilon\cdot\left\|\bar{p}(k)\right\|^2 .$$

Якщо ця нерівність вперше виконалася при $s=s_0$, то вважаємо

$$\alpha(k)=2^{-s_0}\ ,\ \bar{t}(k+1)=\bar{t}(k)+\alpha(k)\cdot\bar{p}(k).$$

Таким чином, на кожному кроці алгоритму виконується нерівність

$$\phi(\bar{t}(k+1))+N\cdot\max_{s\in S}\phi_s(\bar{t}(k+1)\le\phi(\bar{t}(k))+$$
$$+N\cdot\max_{s\in S}\phi_s(\bar{t}(k))-\alpha(k)\cdot\varepsilon\cdot\left\|\bar{p}(k)\right\|^2 .$$

В [4] показано, що вибір $\alpha(k)$ на кожній ітерації відбувається за кінцеве число дроблень одиниці навпіл, і обумовлена збіжність алгоритму. Зокрема доведено, якщо функція мети і обмеження нелінійної задачі є опуклими, то алгоритм сходиться за кінцеве число кроків при будь-якому $\delta>0$.

Проведемо аналіз функції мети (1) і доведемо, що вона є опуклою. (Оскільки всі обмеження задачі (2)-(6) є лінійними, то вони є і опуклими.)

З властивостей опуклих функцій [4] виходить, що якщо

$$f(\bar{x})=\sum_{b=1}^{B}A_b f_b(\bar{x}),$$

причому $A_b>0,\ f_b(\bar{x})$ - опуклі функції, $b=\overline{1,B}$, то і $f(\bar{x})$ - опукла функція.

Оскільки $\theta_{1s},\theta_{2k}>0,\ s=\overline{1,Q},\ k=\overline{1,K}$, то достатньо довести опуклість функції виду

$$f(\bar{x})=(x_1-x_2)^{-\beta},$$

де $x_1>x_2,\ 0<\beta<1,\ \bar{x}=\left\{x_1,x_2\right\}$.

Для доказу покажемо, що матриця других похідних $f''(\bar{x})$ позитивно визначена, тобто $(f''(\bar{x})\bar{y},\bar{y})\ge 0$ для будь-яких $\bar{x},\bar{y}\in E^2, E^2$ - двовимірний евклідів простір, $\bar{y}=\left\{y_1,y_2\right\}$.

$$f''(\bar{x})=\begin{vmatrix}\beta(\beta+1)(x_1-x_2)^{-\beta-2} & -\beta(\beta+1)(x_1-x_2)^{-\beta-2} \\ -\beta(\beta+1)(x_1-x_2)^{-\beta-2} & \beta(\beta+1)(x_1-x_2)^{-\beta-2}\end{vmatrix}$$

$$(f''(\bar{x})\bar{y},\bar{y})=y_1^2\cdot\beta(\beta+1)(x_1-x_2)^{-\beta-2}-$$
$$-y_1\cdot y_2\cdot\beta(\beta+1)(x_1-x_2)^{-\beta-2}-$$
$$-y_1\cdot y_2\cdot\beta(\beta+1)(x_1-x_2)^{-\beta-2}+$$
$$+y_2^2\cdot\beta(\beta+1)(x_1-x_2)^{-\beta-2}=$$
$$=\beta(\beta+1)(x_1-x_2)^{-\beta-2}(y_1-y_2)^2 .$$

Оскільки $(y_1-y_2)^2>0$ при $y_1\ne y_2$ і $(y_1-y_2)^2=0$ при $y_1=y_2$, а $\beta>0$ і $x_1-x_2>0$ по умові завдання, то $(f''(\bar{x})\bar{y},\bar{y})\ge 0$ і $f(\bar{x})$ - опукла функція.

Властивість опуклості критерію (1) доведена, а значить, задача (1) - (6) вирішувана за кінцеве число кроків при будь-якому $\delta>0$.

Проведене дослідження метода лінеаризації показало, що якщо вибрано початкове наближення, що задовольняє системі нерівностей (2)-(6), то є можливим вибір таких значень параметрів N і ε, при яких кожне наближення методу краще по критерію (1) попереднього і задовольняє системі (2) - (6). З метою обґрунтування отриманого результату доведемо наступне

Твердження. Нехай $\phi(\bar{x}) \in (C, +\infty), C > 0$, і в точці $\overline{x_0}$ виконується умова

$$f_i(\overline{x_0}) \le 0,\ i \in I, \quad (8)$$

і нехай серед функцій $f_i(\bar{x})$, $i \in I$, є одна рівна тотожно нулю.

Тоді при чималому $N > 0$ існує ε, що задовольняє умові

$$0 < \varepsilon < 1, \quad (9)$$

для котрого на множині

$$\Omega_N = \left\{ \bar{x} \,\middle|\, \phi(\bar{x}) + N \cdot F(\bar{x}) \le \phi(\overline{x_0}) + \right. \left. + N \cdot F(\overline{x_0}) - \alpha \cdot N \cdot \varepsilon \right\},$$

де $F(\bar{x}) = \max_{i \in I} f_i(\bar{x})$, а α - позитивне скільки завгодно мале число, виконуються умови

$$\phi(\bar{x}) < \phi(\overline{x_0}), \quad (10)$$

$$f_i(\bar{x}) \le 0,\ i \in I. \quad (11)$$

Доказ. З визначення $F(\bar{x})$ виходить, що

$$\phi(\bar{x}) \le \phi(\overline{x_0}) + N \cdot F(\bar{x}) \quad . \quad (12)$$

З умови (8) маємо, що

$$\phi(\overline{x_0}) + N \cdot F(\overline{x_0}) - \alpha \cdot N \cdot \varepsilon < \phi(\overline{x_0}). \quad (13)$$

Якщо $\bar{x} \in \Omega_N$, то з нерівностей (12), (13) витікає справедливість співвідношення (10).

Для будь-якого $\bar{x} \in \Omega_N$ з урахуванням (8) виконується умова

$$F(\bar{x}) \le \frac{\phi(\overline{x_0}) - \phi(\bar{x})}{N} - \alpha \cdot \varepsilon. \quad (14)$$

Оскільки $\phi(\bar{x}) \in (C, +\infty)$, $C > 0$, то з урахуванням доведеного співвідношення (10) різниця $\phi(\overline{x_0}) - \phi(\bar{x})$ обмежена, і тому при достатньо великому $N > 0$

$$\varepsilon = \frac{\phi(\overline{x_0}) - \phi(\bar{x})}{N \cdot \varepsilon}$$

задовольняє умові (9) і обертає в рівність вираз (14), що доводить справедливість нерівності (11). Твердження доведено.

Проведене дослідження дає можливість при дефіциті часу використовувати в якості покращеного значення початкового наближення результат проміжних ітерацій.

Висновки

1) При використанні методу лінеаризації для вирішення задачі (1) - (6) основною операцією, що вимагає значних обчислювальних витрат, є рішення квадратичної задачі (7).

2) При виборі методу рішення (7) слід враховувати, що для контролю правильності визначення константи N при вирішенні (7) необхідно отримати відповідні множники Лагранжа [4].

3) При рішенні задачі (7) доцільно перейти до подвійної задачі і використовувати для її вирішення ітераційний алгоритм, що представляє деяку видозміну методу Гауса-Зейделя [5].

Література

1. https://uk.wikipedia.org
2. http://studopedia.ru/2_75858_metod-linearizatsii.html
3. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. – М.: Наука, 1983. – 136 с.
4. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
5. Кюнци Г.П., Крелле В. Нелинейное программирование - М.: Советское радио, 1965. - 304 с.