МОДЕЛЮВАННЯ ТРАС З УРАХУВАННЯМ ТОПОЛОГІЧНОЇ ТА ГЕОМЕТРИЧНОЇ СКЛАДОВИХ

Доц. Плєхова Г.А., ХНАДУ

При проектуванні інженерних мереж (водопроводу, теплотрас і ін.) В неоднозв'язних областях виникають завдання пошуку ламаних мінімальної довжини і / або зламів, для вирішення яких не можуть бути застосовані традиційні методи варіаційного типу. Для вирішення базової задачі, побудови в неоднозв' язній багатокутній області F ламаної мінімальної довжини на безперервному сімействі шляхів $U = P_{S_0}$ запропонований метод [1], що дає рішення виду

$$p = C_0, C_1, ..., C_n; \quad C_0 = A, \; C_0 = B, \tag{1}$$

де - вершини кордону FrF.

Однак, поряд з нею актуальні і такі стандартні задачі мінімізації числа зламів (тобто внутрішніх вершин C_i), де $l(p)$ – довжина, п(р) – число зламів траси р: задача $S_n : n(p) > \min, \; p \in U$; задача $S_{n,l} : l(p) > \min, \; p \in U_n$; $U_n = \arg\min n(p)$, $p \in U$; задача $S_{n+1} : f(p) = a \times l(p) + b \times n(p) > \min, \; p \in U$.

Для вирішення цих задач пропонується єдиний підхід, заснований на наведених нижче властивостях класів ламаних S_n, $S_{n;l}$. Так, розглянемо деяку ламану $p \in U$ в поданні (1), п > 1. Її фрагмент AC_1C_2 ... C_k назвемо канонічним, якщо в вершинах C_2 ... C_{k-1} знак кута повороту той сами, що й в C_1, а в C_k – протилежний, або $C_k = B$. Нехай ν(p) – число канонічних ламаних, утворюючих їх шлях, j – кут повороту ламаної на канонічній ділянці j, $(j = 1, 2, ..., m = v(p))$,p)), а [АО/д] – ціла частина цього повороту в одиницях д.

Лемма 1. Нехай p_1, p_n, p_{nl} – рішення стандартних задач S_1, S_n, S_{nl} відповідно, та k = $v(p_1)$. Тоді має місце наступна оцінка

$$\begin{aligned} &n(p_{nl}) = n(p_n) \geq v(p_l) - 1 + \\ &+ \sum_{i=1}^{k=1} \left(1 + \left[\Delta\Phi_i / \pi\right]\right) + \left[\Delta\Phi_k / \pi\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Задача S_1. Дана траса *p* мінімального числа зламів, яка на ділянці A_0ABB_0 співпадає з межею області *F* на відрізку $OO' \subset AB$. Необхідно знайти таке положення прямої *A'B'* (кут *x* відносно OO', що проходить через вершини *O* або *O',* щоб ламана $B_0B'A'A_0$ лежала в області *F* та її довжина була мінімальною для всіх таких пар точок, що лежать на прямих A_0C, B_0C.

Вирішення цієї задачі для точки O має наступний вид, де $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ – кути A_0AB, B_0BA, ACO, OCB, а C – точка перетину прямих A_0A, B_0B

$$x = \alpha - \arcsin\left[\sqrt{\frac{\sin\delta}{\sin\gamma}\sin(\beta + x)}\right]. \quad (3)$$

Нехай p_1 – рішення задачі S_1 у вигляді (1). Розглянемо оптимізуючі деформації f_n та f_{nl} шляхи p_1, реалізуючі симпліціальне поповнення та варіювання ламаних, які мінімізують відповідні функціонали. Нехай C_i, C_{i+1} – вершини деякої ламаної p, а Z – точка перетину прямих $C_{i-1}C_i$ та $C_{i+1}C_{i+2}$, що лежить по іншу сторону від прямої C_iC_{i+1} по відношенню до точки дотику з кордоном $L=Fr\ F$. Такий 2-симплекс $s_i = C_iZC_{i+1}$ назвемо симпліціальним поповненням шляху p, якщо він лежить в F; в цьому випадку замінюємо в p вершини C_i, C_{i+1} вершиною Z, а цю операцію назвемо *процедурою 1* (симпліціальною деформацією ламаної). При цьому симплекс s_i назвемо фінальним, якщо його 1-симплекси C_iZ_i, $C_{i+1}Z$ не належать іншим симпліціальним поповненням шляху p. Якщо ж симплекс s_i не лежить в F, вважаємо, що ламана p на цій ділянці не може бути поповнена; однак, в цьому випадку не виключено, що вона може бути поповнена симплексом $s_i^* \subset F$, який отриманий деформацією симплекса s_i, яку назвемо процедурою 2 (варіації 2-симплекса).

Алгоритм 1. Застосовуємо до шляху p_i процедуру 1 до отримання всіх можливих симпліціальних поповнень. Якщо залишилися 2-симплекси $K = \{s_i\}$, якими ламана p_i не може бути поповнена, застосовуємо до них процедуру 2 і виключаємо з К всі ті симплекси, що поповнили шлях p_i. Отриману ламану позначимо $p_п'$.

Алгоритм 2. Вирішуємо задачу S_1 для всіх симпліціально не поповнених 1-симплексів ламаної p_l' з К. Отриманий шлях позначимо p_{nl}'.

Лемма 2. Якщо симпліціальні поповнення ламаної p_i (крім, можливо, фінальних) лежать в F, то шлях p_n' (відповідно p_{nl}', визначає рішення задачі $S_{n>1}$ для числа вершин п(p_n'), і задач S_n, $S_{n>1}$ якщо в (2) маємо рівність.

Застосування алгоритмів 1 і 2 дозволяє мінімізувати число зламів і довжину ламаної в P_{sd} [A,B], хоча і не гарантує досягнення мінімального числа зламів. Однак, практична цінність оптимального рішення може виявитися сумнівною, тому що не виключає отримання ламаної з кутами повороту, близькими до д, що абсолютно неприйнятно для більшості додатків.

Розглянемо тепер задачу S_{n+1}. Нехай $n_1 = n(p_1),\ n_2 = n(p_{nl}'),\ n_1 > n_2 + 1.$.

Алгоритм 2. Початкова установка: т:= $п_1$, $p_т' = p_1$.

1. Вважаємо $m:=m$-1 і застосовуємо алгоритм 2 до кожного 2-симпліціального поповненню шляху p_{m+1}'. Найкоротшу з отриманих ламаних позначимо p_m'.

2. Якщо $m=n_2+1$, переходимо до кроку 3; інакше - до кроку 1.

3. Обчислюємо $f_m = a \times l(p_m') + b \times n(p_m')$ при $m = n_2$, n_2+1, ... , n_1 і приймаємо шлях p_k' на якому $f(p)$ *(p)* досягає мінімуму, за рішення задачі S_{n+l}.

Література

1. Смеляков С.В., Стоян Ю.Г. Математическая модель некоторых задач оптимизации на путях // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1981. №1. С. 180–188.