УДК 519.161

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ СИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ КЛАССА КОММИВОЯЖЕРА БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

О.Б. Маций, ассистент, ХНАДУ

Аннотация. *Предложенный метод позволяет существенно повысить точность симметричной задачи класса коммивояжера большой размерности, который находит широкое применение при исследовании многочисленных моделей циклических процессов.*

Ключевые слова: *алгоритм, граф, пространство решений, функционал стоимости, относительная погрешность.*

ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ СИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ КЛАСУ КОМІВОЯЖЕР ВЕЛИКОЇ РОЗМІРНОСТІ

О.Б. Маций, асистент, ХНАДУ

Анотація. *Запропонований метод дозволяє істотно підвищити точність симетричної задачі класу комівояжера великої розмірності, який знаходить широке застосування при дослідженні численних моделей циклічних процесів.*

Ключові слова: *алгоритм, граф, простір рішень, функціонал вартості, відносна похибка.*

IMPROVING THE ACCURACY OF SYMMETRIC PROBLEMS OF SALESPEOPLE LARGE-SCALE CLASS

O. Matsiy, assistant, KhNAHU

Abstract. *The proposed method can significantly improve the accuracy of the symmetric traveling salesman problem of the of large-scale class which are widely used in the study of multiple models of cyclic processes*

Key words: *algorithm, graph, solution space, functional value, relative error.*

Введение

Задача коммивояжера является математической моделью для многих прикладных задач, среди которых можно выделить следующие: упорядочения, ранжирования, классификации, расписания, радиотехники, очередности ввода объектов при освоении территории и ряд других.

Большинство встречающихся в приложениях задач характеризуются большой размерностью, при их решении возникают значительные вычислительные трудности [1].

Анализ публикаций

Большинство прикладных задач типа коммивояжера являются труднорешаемыми, а значит, для нахождения точного решения такой задачи только переборные методы, требующие на практике значительных вычислительных ресурсов. Они не гарантируют нахождение оптимума в установленном временном промежутке и поэтому зачастую оказываются непригодными в системах реального времени [1]. Альтернативой точным переборным методам являются эффективные приближенные методы, строящие допустимое решение с приемлемой точностью. Известные приближенные алгоритмы для задач типа коммивояжера можно условно разбить на две группы. К первой группе относятся процедуры, реализующие стратегию пошагового построения допустимого обхода с помощью простых решающих правил. Вторая группа представлена алгоритмами, определяющими решения оптимизационных задач на графах, которые затем преобразуются в маршрут коммивояжера [2]. В данной работе предлагается способ построения алгоритмов второй группы.

Цель и постановка задачи

Целью данной работы является разработка алгоритма симметричной задачи класса коммивояжера с матрицей стоимости, характеризующейся большим числом одинаковых значений. Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

1. Построение приближенных симметричных задач коммивояжера с матрицей стоимостей, содержащей большое число равных или близких друг другу значений;
2. Разработка алгоритма, благодаря которому открывается возможность за полиномиальное время существенно повысить точность симметричной задачи класса коммивояжера большой размерности.

Каждую задачу типа коммивояжера можно представить как комбинаторную оптимизационную задачу о перестановках, определяемую тройкой (P, X, f), элементы которой обозначают следующие объекты.

1. P – пространство решений: множество всех циклических перестановок (обходов) $\tau=(\ [1], \tau[2], ..., \tau[n])$ множества $\{1, 2,…, n\}$. Обходу τ соответствует маршрут коммивояжера в виде последовательности $(\tau[1], \tau[2], ..., \tau[n], \tau[1])$ различных номеров $\tau[1], \tau[2], ..., \tau[n]$ элементов $1, 2,…, n$.

2. X – пространство параметров, каждый элемент которого x является квадратной матрицей стоимостей $[d_{ij}]_n$ порядка n, $d_{ij} \in R_0^+$, $i \neq j$, $d_{ii} = \infty$, $i, j = \overline{1,n}$, R_0^+ – множество неотрицательных действительных чисел.

3. f – функционал стоимости: f: $P \times X \to R_0^+$, где $f = (\tau, x)$ – стоимость решения τ при значении параметра x.

Оптимальным решением для значения параметра x является решение $\tau^* \in P$, такое, что для всех $\tau \in P$ $f(\tau^*, x) \leq f(\tau, x)$ в случае минимизации функционала f и $f(\tau^*, x) \geq f(\tau, x)$ – в случае его максимизации.

Наличие дополнительных ограничений в условиях задачи сужает пространство решений P, а показатель эффективности f и значение параметра x индуцируют её свойства.

Алгоритм построения приближенного решения симметричной задачи класса коммивояжера большой размерности

Назовем симметричной задачей класса коммивояжера (СЗКК) задачу (P, X, f) с матрицей стоимостей $[d_{ij}]_n$, в которой $d_{ij} = d_{ji} \neq \infty$, $i \neq j$, $d_{ii} = \infty$, $i, j = \overline{1,n}$. Ей отвечает полный взвешенный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин V, $|V| = n$ и множеством ребер E, $|E| = (1/2)n(n \quad 1)$, где ребру $\{i, j\}$ приписан вес $d_{ij} = d_{ji}$.

Основной результат в данной работе получен для симметричной задачи коммивояжера (СЗК), в которой, как известно, минимизируется функционал

$$D(\tau) = \sum_{i=1}^{n} d_{i\tau} . \qquad (1)$$

Сформулируем СЗК в терминах введенных понятий.

Пусть построено дерево $T_v = (V, E_v)$, $v \in \{1, 2, ..., n\}$, в полном взвешенном графе $G = (V, E)$ с весами (стоимостями) ребер $\{i, j\}$, $i, j = \overline{1,n}$, $d_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, $d_{ij} = \infty$. Каждое ребро $\{k, l\}$ дерева T_v представим парой (δ_k, δ_l), где δ_k, δ_l – степени вершин k, l в T_v, $\delta_k \leq \delta_l$, $k, l \in \{1, 2, ..., n\}$. Требуется найти в дереве T_v все такие ребра, замена которых на ребро из G преобразует T_v в маршрут коммивояжера минимальной стоимости, представленный n парами (δ_x, δ_y), $\delta_x = \delta_y = 2$, $x = \overline{1,n}$, $y \in \{1, 2, ..., n\}$, $x \neq y$.

Такая формулировка не приводит к простому и быстрому способу построения оптимального решения. Преобразование дерева T_v в обход минимальной стоимости τ^* в силу полноты рассматриваемой задачи остается в лучшем случае ограниченным перебором множества всех маршрутов коммивояжера *P*. Однако с помощью конечного числа операций 1-замены, определяемого соотношением (1), можно получить приближенное решение τ_v за время, соизмеримое с временем построения T_v.

Обозначим $n(v)$ число висячих вершин в дереве T_v, $v=\overline{1,n}$. Если в результате нахождения дерева T_v построен маршрут коммивояжера, то он является решением СЗК, т.е. в случае $n(v)=0$, $v\in\{1,2,\ldots,n\}$, получим $d(T_v)=D(\tau^*)$, $\tau^*=T_v$.

Алгоритм построения приближенного решения τ_v СЗК состоит из двух стадий, на первой из которых строится дерево T_v. Его стоимость

$$d(T_v)=\sum_{\{i,j\}\in T_v} d_{ij}\,. \qquad (2)$$

На второй стадии выполняется процедура преобразования *v*-дерева $T=(V,E_v)$, соответствующего T_v, в гамильтонов цикл полного графа $G_n=(V,E)$, соответствующего полному взвешенному графу *G*. Стоимость полученного решения τ_v равна сумме весов ребер графа *G*, входящего в гамильтонов цикл графа G_n

$$D(\tau_v)=d(T_v)\quad \sum_{\{i,j\}\in E_v} d_{ij}+\sum_{\{k,l\}\in E_v^+} d_{kl}\,, \qquad (3)$$

где E_v – множество ребер, удаленных из E_v; E_v^+ – множество ребер графа G_n, добавленных к $E_v \quad E_v$, $|E_v^-|=|E_v^+|=n(v)$. Так как в любом градиентном алгоритме построения минимального остовного дерева ребро с наименьшим весом $d_{\min}$ графа *G* включается в T_v, а в результате выполнения второй стадии оно может быть заменено на ребро с наибольшим весом $d_{\max}$ в *G*, то в худшем случае

$$D(\tau_v)=d(T_v)+n(v)(d_{\max}-d_{\min}). \qquad (4)$$

Из (4) следует, что предложенный алгоритм обеспечивает невысокую погрешность СЗК в случае незначительного расхождения между элементами матрицы стоимостей, т.е. тогда, когда применение метода ветвей и границ связано с предельными объемами вычислительных ресурсов.

Можно попытаться улучшить приближенное решение СЗК, полученное изложенным способом, путем построения и преобразования каждого дерева T_i в обход τ_i, $i=\overline{1,n}$. Искомым результатом является решение τ_μ стоимостью

$$D(\tau_\mu)=\min_{1\in i\in n} D(\tau_i)\,. \qquad (5)$$

Его относительная погрешность вычисляется по формуле

$$\Delta=\frac{D(\tau_\mu)\quad d(T_M)}{d(T_M)}\,, \qquad (6)$$

где $d(T_M)=\max_{1<i<n} d(T_i)$.

Выводы

Таким образом, благодаря рассмотренному подходу открывается возможность за полиномиальное время существенно повысить точность СЗКК большой размерности для тех случаев, когда применение точных переборных методов оказывается проблематичным.

Литература

1. Теория расписаний и вычислительные машины / под ред. Э.Г. Кофмана. – М.: Наука, 1984. – 334 с.
2. Панишев А.В. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера / А.В. Панишев, Д.Д. Плечистый // Вестник ЖДТУ. – 2006. – № 1. – С. 298–306.

Рецензент О.П. Алексеев, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 31 октября 2011 г.