

СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

УДК 625.8

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ, ТРЕХМЕРНОЙ, ВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА

В.А. Богомолов, профессор, д.т.н., В.К. Жданюк, профессор, д.т.н.,
С.В. Богомолов, инженер, ХНАДУ

Аннотация. Предложено общее решение 3-D вязкоупругой модели Максвелла, которое может быть использовано в численных методах исследования напряженно-деформированного состояния конструкций с реологическими свойствами материалов.

Ключевые слова: реологическая модель Максвелла, тензор, девиатор, шаровой тензор, напряжения, деформации.

ЗАГАЛЬНЕ РІШЕННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ, ТРИМІРНОЇ, В'ЯЗКОПРУЖНОЇ МОДЕЛІ МАКСВЕЛЛА

В.О. Богомолов, професор, д.т.н., В.К. Жданюк, професор, д.т.н.,
С.В. Богомолов, інженер, ХНАДУ

Анотація. Запропоновано загальне рішення 3-D в'язкопружної моделі Максвелла, що може бути використане в численних методах дослідження пружно-деформованого стану конструкцій з реологічними властивостями матеріалів.

Ключові слова: реологічна модель Максвелла, тензор, девіатор, шаровий тензор, напруги, деформації.

GENERAL SOLUTION FOR LINEAR THREE-DIMENSIONAL VISCOELASTIC MAXWELL MODEL

V. Bogomolov, Professor, Doctor of Technical Science, V. Zhdaniuk, Professor,
Doctor of Technical Science, S. Bogomolov, engineer, KhNAHU

Abstract. A general solution of linear 3-D viscoelastic Maxwell model that can be used in numerical methods of stress-deformation state research of structures with rheological material properties is offered.

Key words: Maxwell rheological model, tensor, deviator, sphere tensor, stress, deformation.

Введение

Из работы [1] известно, что любая линейная реологическая модель может быть приведена к обобщенной модели Максвелла с не более чем двумя вырожденными элементами. Поэтому ключевым звеном для решения 3-D вязкоупругих моделей является именно простейшая модель Максвелла (рис. 1).

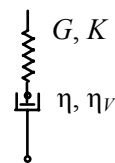


Рис. 1. Вязкоупругая модель Максвелла: G, K , η, η_v – коэффициенты, характеризующие упругие и вязкостные свойства модели

Анализ публикаций

В работе [2] предложен вариант линейной вязкоупругой модели Максвелла, которая может быть записана в виде двух уравнений

$$\frac{\eta}{G} \dot{D}_H + D_H = 2\eta \dot{D}_d; \quad (1)$$

$$\frac{\eta_V}{K} \dot{\sigma}_{sr} + \sigma_{sr} = 3\eta_V \dot{\varepsilon}_{sr}; \quad (2)$$

и в случае одноосного нагружения, например

$$\frac{\eta}{G} \dot{\sigma}_x + \sigma_x = 3\eta \dot{\varepsilon}_x; \quad (3)$$

$$\frac{\eta}{G} \dot{\tau}_{xy} + \tau_{xy} = \eta \dot{\gamma}_{xy}, \quad (4)$$

где $D_H, \dot{D}_H$ – девиаторы напряжений и их скорости изменения; $\dot{D}_d$ – девиатор скорости деформаций; η, η_V – коэффициенты вязкого сопротивления и объемного вязкого сопротивления; $\sigma_{sr}, \dot{\sigma}_{sr}$ – среднее напряжение и его скорость изменения; $\dot{\varepsilon}_{sr}$ – скорость изменения средней деформации; $\sigma_x, \dot{\sigma}_x$ – нормальные напряжения вдоль оси X и скорость их изменения; $\tau_{xy}, \dot{\tau}_{xy}$ – касательные напряжения и скорость их изменения; G – модуль сдвига; K – объемный модуль упругости.

При этом

$$\begin{aligned} \sigma_{sr} &= (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / 3; \\ \varepsilon_{sr} &= (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) / 3, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma_x \dots \sigma_z, \varepsilon_x \dots \varepsilon_z$ – компоненты напряжений и деформаций по соответствующим координатным осям; μ – коэффициент Пуассона.

Если на стадии ползучести принять, что $\dot{\varepsilon}_{sr} = 0$ [3], то выражение (2) вырождается в

$$\sigma_{sr} = \varepsilon_{sr} 3K = \varepsilon_{sr} \frac{2G(1+\mu)}{(1-2\mu)}. \quad (6)$$

Цель и постановка задачи

Таким образом, в принятой постановке необходимо получить восемь решений

$$\text{Из (1)} \quad D_H = f(\dot{D}_d); \quad D_d = f(D_H, \dot{D}_H); \quad (7)$$

$$\text{Из (2)} \quad \sigma_{sr} = f(\dot{\varepsilon}_{sr}); \quad \varepsilon_{sr} = f(\sigma_{sr}, \dot{\sigma}_{sr});$$

$$\text{Из (3)} \quad \sigma_x = f(\dot{\varepsilon}_x); \quad \varepsilon_x = f(\sigma_x, \dot{\sigma}_x); \quad (8)$$

$$\text{Из (4)} \quad \tau_{xy} = f(\dot{\gamma}_{xy}); \quad \gamma_{xy} = f(\tau_{xy}, \dot{\tau}_{xy}).$$

Девиаторы напряжений и деформаций

Для обыкновенного линейного уравнения (1) решение можно искать в виде [4]

$$D_H = D_{H(0)} + D_{H(ch)}, \quad (9)$$

где $D_{H(0)}, D_{H(ch)}$ – решение однородного уравнения и частное.

Последние будем искать в виде [4]

$$D_{H(0)} = C e^{k_0 t}; \quad (10)$$

$$D_{H(ch)} = C_1(t) e^{k_0 t}, \quad (11)$$

где C – зависящая от начальных условий константа;

$$k_0 = -\frac{1}{\tau}; \quad \tau = \frac{\eta}{G}; \quad (12)$$

t – время.

После соответствующих преобразований для начальных условий при $t = 0$; $D_H = D_H^0$, получаем

$$D_H = D_H^0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_0^t 2G e^{-\frac{t-\xi}{\tau}} \dot{D}_d d\xi, \quad (13)$$

где ξ – текущее время.

Из (3), (4) для начальных условий при $t = 0$; $\sigma_x = \sigma_{x0}$; $\tau_{xy} = \tau_{xy0}$ можно получить решения для случаев одноосного нагружения, например

$$\sigma_x = \sigma_{x0} e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_0^t 3G e^{-\frac{t-\xi}{\tau}} \dot{\varepsilon}_x d\xi; \quad (14)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy0} e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_0^t G e^{-\frac{t-\xi}{\tau}} \dot{\gamma}_{xy} d\xi. \quad (15)$$

Аналогичным образом можно получить и решение для девиатора деформаций при начальных условиях $t = 0$; $D_d = D_d^0$, из (1)

$$D_d = D_d^0 + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\dot{D}_H}{G} + \frac{D_H}{\eta} \right) d\xi. \quad (16)$$

В случае одноосных нагружений, из (3), (4)

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \frac{1}{3} \int_0^t \left(\frac{\dot{\sigma}_x}{G} + \frac{\sigma_x}{\eta} \right) d\xi; \quad (17)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + \int_0^t \left(\frac{\dot{\tau}_{xy}}{G} + \frac{\tau_{xy}}{\eta} \right) d\xi. \quad (18)$$

Шаровой тензор напряжений и деформаций

Точно таким же образом для (2) получаем

$$\sigma_{sr} = \sigma_{sr}^0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} + \int_0^t 3K e^{-\frac{t-\xi}{\tau_0}} \dot{\varepsilon}_{sr} d\xi; \quad (19)$$

$$\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{sr}^0 + \frac{1}{3} \int_0^t \left(\frac{\dot{\sigma}_{sr}}{K} + \frac{\sigma_{sr}}{\eta_V} \right) d\xi; \quad (20)$$

где $\tau_0 = \frac{\eta_V}{K}; \quad (21)$

$\sigma_{sr}^0, \varepsilon_{sr}^0$ – начальные условия при $t = 0$.

Выводы

Полученные решения для модели Максвелла впоследствии могут быть использованы:

1. Для анализа более сложных по структуре вязкоупругих моделей.
2. При анализе экспериментальных данных.

Литература

1. Богомолов В.А. Универсальный метод составления линейных вязко-упругих структурных моделей / В.А. Богомолов, В.К. Жданюк, С.В. Богомолов // Автомобильный транспорт. – 2011. – № 28. – С. 125–131.
2. Богомолов В.А. Простейшие звенья линейной пространственной реологической модели асфальтобетона / В.А. Богомолов, В.К. Жданюк, С.В. Богомолов // Автомобильный транспорт. – 2010. – № 27. – С. 157–162.
3. Безухов Н.И. Основы теории упругости пластичности и ползучести / Н.И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1968. – 215 с.
4. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн; пер. со второго американск. перераб. изд-я Н.Г. Арамановича, А.М. Березмана и др. – М.: Наука. Главн. ред. физ.-мат. лит-ры, 1984. – 831 с.

Рецензент: В.В. Филиппов, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 11 мая 2011 г.