Біловол О.В., к.т.н., доцент,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

ВИКОРИСТАННЯ КОРЕЛЯЦІЙ НА МІКРОРІВНІ У ВИГЛЯДІ НЕАНАЛІТИЧНИХ В'ЯЗЕЙ ДЛЯ ОДЕРЖАННЯ РІВНЯНЬ РУХУ РІДИНИ

Розглянемо суцільне середовище як механічну систему. Розіб'ємо середовище на нескінченно малі частки. Між положенням центра мас частки q і положенням n матеріальних точок, з яких вона складається, існує кореляція вигляду

$$r = r(q,t),$$

де r – радіус-вектор у просторі конфігурацій системи точок, а q – радіус-вектор центра мас частки, що визначається за формулою

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{m},$$

де m_i і r_i – відповідно маси матеріальних точок і їх радіус-вектори. Маса частки m визначаться за формулою

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Узагальнений імпульс частки [1]

$$p = G\dot{q} + a,$$

де матриця

$$G = \frac{\partial r}{\partial q} M \frac{\partial r}{\partial q} = mI + G'.$$

Складова mI, де I – одинична матриця, відповідає руху частки як єдиного цілого, а складова G' відповідає її внутрішньому руху, тобто руху матеріальних точок в супутній, пов'язаній з центром мас, системі координат

$$G' = \frac{\partial r'}{\partial q} M \frac{\partial r'}{\partial q},$$

де r' – радіус-вектор у відносному просторі конфігурацій.

Через малі розміри частки у першому наближенні можна вважати, що $G' = 0$. Імпульс частки, пов'язаний з некорельованим рухом матеріальних точок,

$$a = \frac{\partial r}{\partial q} M \frac{\partial r}{\partial t}$$

є стовпчиком, що складається з проекцій на осі системи координат.

Рівняння руху частки середовища у просторі конфігурацій відповідно набуде вигляду [1]

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} - \dot{a}(q).$$

Розділимо рівняння руху на масу частки, одержимо

$$\dot{u} = -\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\dot{a}}{m},$$

де $u = \dot{q}$ – швидкість частки, а V – питомий (в розрахунку на одиницю маси) потенціал.

Потенціал V можна вважати фундаментальним, бо він з'являється природним шляхом при одержанні рівнянь руху.

Слід зауважити, що у випадку суцільного середовища, роль ознаки матеріальності відіграє густина, яка на протилежність нескінченно малій масі часток є кінцевою величиною. Її також можна вважати зарядом або джерелом фундаментальної взаємодії (наприклад, гравітаційного поля), тобто

$$\frac{\partial}{\partial r}F - 4\pi f \rho = 0,$$

де вектор потоку, який можна утворити за допомогою градієнта, є ні чим іншим як питомою силою

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Таким чином, якщо точка знаходиться у середовищі, гравітаційний потенціал задовольняє рівнянню Пуасона

$$\Delta V = -4\pi f \rho,$$

де $\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2$ – оператор Лапласа, а f – гравітаційна стала.

Якщо вважати не тільки потенціал, а й швидкість часток середовища полем, тобто в змінних Єйлера $u = u(r,t)$, то одержимо рівняння руху середовища

$$\dot{u} = -\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\dot{a}}{m}.$$

До нього слід додати рівняння нерозривності, яке виражає закон збереження маси в диференціальному вигляді

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial}{\partial r}u = 0$$

або у випадку сталої густини ρ

$$\frac{\partial}{\partial r}u = 0.$$

Розглянемо в якості субстанції кількість руху середовища, відповідно її густина $f = \rho u$, а рівняння балансу з урахуванням рівняння нерозривності набуде вигляду

$$\rho\dot{u} = \frac{\partial}{\partial r}P + j.$$

де потік субстанції P носить назву тензора напружень.

Використовуючи рівняння руху, одержимо

$$\rho\dot{u} = -\rho\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\rho\dot{a}}{m}.$$

Якщо порівняти праві частини рівнянь, то стає зрозумілим, що інтенсивність джерела

$$j = -\rho\frac{\partial V}{\partial r},$$

а дивергенція тензора напружень або приплив кількості руху частки середовища пов’язаний із зміненням кількості відносного руху на мікроскопічному рівні:

$$\frac{\partial}{\partial r}P = -\frac{\rho\dot{a}}{m}.$$

Ізотропне середовище вважається ідеальним, якщо тензор напружень виражається через одиничний тензор за формулою

$$P = -pI,$$

де p – скалярна функція, що має розмірність сили на одиницю площі, тобто вочевидь є нормальним напруженням.

Дотичні напруження в свою чергу пов’язані з нерівномірністю розподілу швидкостей, тобто тензор напружень для реального середовища повинен мати складову, що залежить від вектора швидкості і вектора градієнта. Найбільш загальний вигляд цього зв’язку у випадку ізотропного середовища по суті співпадає узагальненим законом Ньютона

$$P = \left(-p + \varsigma\frac{\partial}{\partial r}u\right)I + \mu\frac{\partial u}{\partial r},$$

де μ – динамічний коефіцієнт в’язкості, а ς – коефіцієнт об’ємної в’язкості.

Відповідно, рівняння руху реального (в'язкого) середовища

$$\dot{u} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u + \eta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}u\right),$$

де кінематичний коефіцієнт в'язкості

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

а кінематичний коефіцієнт об'ємної в'язкості

$$\eta = \frac{\mu + \varsigma}{\rho}.$$

Таким чином, розглядаючи кореляції між рухом окремих матеріальних точок, з яких складається рідина, як неаналітичні в'язі, можна одержати рівняння руху реальної рідини без використання законів класичної і статистичної механіки.

Литература

1. Беловол А.В. Законы механики и универсальные законы природы // Вестник ХНАДУ / Сб. науч. тр. - 2013. – Вып. 60. – С. 148-153.