

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНКИ СТІЙКОСТІ РУХУ АВТОМОБІЛЯ НА ПЕРЕКИДАННЯ

Поваляєв С. І.<sup>1</sup>, Сараєв О. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Харківський національний автомобільно-дорожній університет

**Анотація.** В роботі розглянуто процес перекидання транспортних засобів в результаті наїзду на нерухому бічну перешкоду в результаті дії інерційних сил. Для складання математичної моделі було використане основне рівняння динаміки для обертального руху. Математична модель перекидання транспортного засобу записана у вигляді нелінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку. Отримано аналітичний розв'язок цього рівняння, яке дозволяє визначити не лише умови перекидання транспортних засобів, а й інші параметри руху транспортного засобу від моменту початку підйому центру мас до моменту його максимального підйому в процесі перекидання. Для конкретного транспортного засобу отримані чисельні результати, які повністю відповідають фізиці процесу перекидання.

**Ключові слова:** дорожньо-транспортна пригода, транспортний засіб, бічна перешкода, перекидання, моделювання.

### Вступ

Кількість дорожньо-транспортних пригод (ДТП), пов'язаних з перекиданням транспортних засобів (ТЗ) у процентному співвідношенні невелике (до 9%), однак тяжкість їхніх наслідків значна, тому що травмування людей і значних ушкоджень ТЗ у цьому випадку неминучі. Перекидання ТЗ може відбуватися при втраті курсової (бічної) стійкості на криволінійній траєкторії руху, на негативних ухилах, внаслідок зіткнення або наїзду на перешкоду. Дослідження таких ДТП пов'язане із труднощами встановлення механізму перекидання, оскільки експертні методики розрахунку не завжди використовують підготовлені математичні моделі.

### Аналіз публікацій

Основними напрямками досліджень ДТП, пов'язаних з перекиданням транспортних засобів є визначення ступеню ризику перекидання транспортних засобів [1, 2] та визначення обставин ДТП, зокрема, визначення параметрів руху кожного транспортного засобу окремо [3, 4].

Протягом багатьох років одним з основних методичних вказівок для аналізу ДТП була робота під загальною редакцією професора Іларіонова В.А [5]. В цій роботі розглянуто випадки перекидання автомобіля при наїзді на бокову перешкоду (рис. 1 [5]) та на криволінійних ділянках дороги (рис. 2 [5]).

Відповідно розроблені математичні моделі призначені для визначення критичної швидкості ТЗ при наїзді на бічну перешкоду:

$$V_{кр} = \sqrt{254 \left( \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + h_{ц}^2} - h_{ц} \right)}; \quad (1)$$

та при русі автомобіля на повороті:

$$V_{кр} = 3,6 \sqrt{\frac{0,5B \pm \text{tg}\beta h_{ц}}{h_{ц} \pm 0,5\text{tg}\beta B} gR}. \quad (2)$$

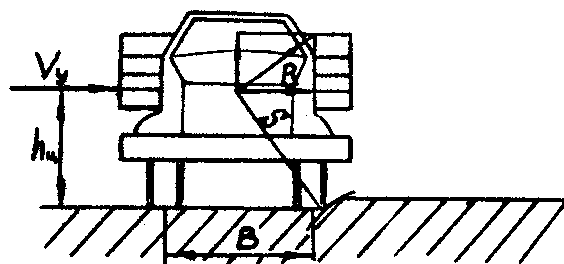


Рис. 1. Наїзд автомобіля на перешкоду

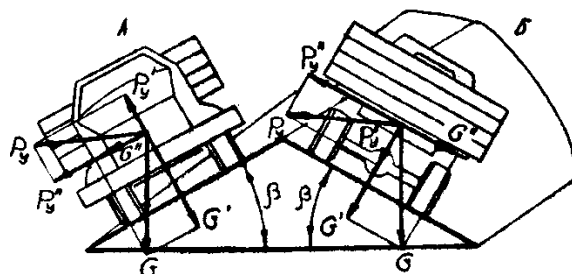


Рис. 2. Рух автомобіля на повороті

Більше сучасним методичним посібником з розслідування й експертизи ДТП є довідник

Євтюкова С.А., Васильєва Я.В. [6], де, зокрема, розглянута класифікація причин і завдань дослідження, пов'язаних з перекиданням ТЗ.

Загальним недоліком відомих експертних методів реконструкції ДТП, пов'язаних з перекиданням ТЗ, є відсутність точних математичних моделей процесу перекидання ТЗ. Моделювання процесу ДТП різко ускладнюється, якщо перекидання відбулося в режимі гальмування ТЗ, оскільки цей випадок потребує необхідності врахування ряду додаткових факторів, що впливають на оцінку параметрів руху ТЗ [7,8], та визначити початкову швидкість перед гальмуванням [9].

### Мета та постановка задачі

Метою дослідження є підвищення точності оцінки параметрів руху ТЗ у процесі розвитку ДТП.

Для досягнення зазначеної мети в роботі необхідно розв'язати такі задачі:

- розробити математичну модель механізму перекидання транспортного засобу;
- отримати чисельні результати для випадку перекидання конкретного транспортного засобу;
- провести аналіз отриманих результатів.

### Моделювання процесу перекидання транспортних засобів

Розглянуто процес перекидання транспортного засобу після бічного наїзду на перешкоду, наприклад, бордюр або колію (рис. 3).

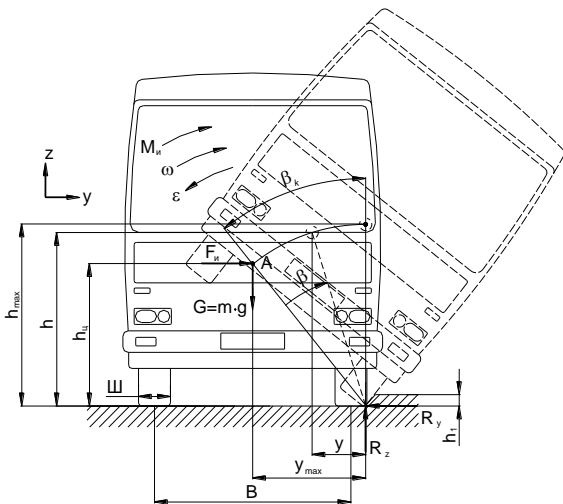


Рис. 3. Розрахункова схема при моделюванні процесу перекидання транспортних засобів

На рис. 3:

$F_{и}$  – сила інерції в бічному напрямку (виникає при наїзді колеса на нерухому бічну перешкоду);

$G$  – сила тяжіння;

$m$  – маса ТЗ, кг;

$M_{и}$  – момент сил інерції;

$R_y, R_z$  – поперечна та вертикальна реакції в плямі контакту колеса з опорною поверхнею (точці перекидання);

$B$  – колія ТЗ;

$\Pi$  – ширина профілю шини колеса;

$h$  – висота центра мас ТЗ при перекиданні (змінюється від значення  $h_{ц}$  до  $h_{max}$ );

$h_1$  – висота бічної перешкоди;

$\omega$  и  $\epsilon$  – кутова швидкість і прискорення (уповільнення) ТЗ;

$\beta$  – кут повороту ТЗ при перекиданні (змінюється від 0 до значення  $\beta_k$ ), який можна визначити за формулою:

$$\beta_k = 90^\circ - \arctg\left(\frac{2 \cdot h_{ц}}{B + \Pi}\right). \quad (3)$$

При перекиданні на ТЗ діють момент сил інерції, що виникає в результаті уповільнення ТЗ, і момент сили тяжіння навколо точки перекидання (дорівнює  $m \cdot g \cdot y$ ). В процесі перекидання плече сили тяжіння змінюється від  $y_{max}$  (початок підйому центра мас транспортного засобу) до 0 (досягнення центром мас ТЗ крайнього верхнього положення [10]).

Мінімальну (критичну) швидкість, при якій відбудеться перекидання ТЗ можна знайти на підставі закону збереження енергії. Відповідно до закону збереження енергії повна енергія ТЗ до перекидання дорівнює повній енергії ТЗ у момент перекидання:

$$\begin{aligned} \frac{m \cdot (V \cos \gamma)^2}{2} + \frac{m \cdot (V \sin \gamma)^2}{2} + m \cdot g \cdot h_{ц} &= \\ = \frac{m \cdot (V \cos \gamma)^2}{2} + m \cdot g \cdot h_{max} + E_{деф.1} + E_{деф.2}, & \end{aligned} \quad (4)$$

де  $V$  – швидкість руху ТЗ перед перекиданням, м/с;

$\gamma$  – кут наїзду ТЗ на бічну перешкоду, рад;

$E_{деф.1}$  – енергія, що поглинена пружною деформацією кузова ТЗ, Дж;

$E_{деф.2}$  – енергія, що поглинена пружною деформацією шин ТЗ, Дж.

Максимальну висоту підйому центра мас ТЗ можна отримати за формулою:

$$h_{\max} = \sqrt{\left(\frac{B + III}{2}\right)^2 + (h_{\text{ц}})^2}. \quad (5)$$

Як правило, енергією, що витрачається на пружну деформацію елементів ТЗ, можна знехтувати. Тоді, з виразу (4) можна отримати критичну швидкість ТЗ при якій відбувається його перекидання внаслідок удару колеса об нерухому бічну перешкоду:

$$V_{\text{кр}} = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot (h_{\max} - h_{\text{ц}})}}{\sin \gamma}. \quad (6)$$

Вираз (6) дозволяє отримати критичну швидкість, при якій настає перекидання ТЗ внаслідок удару об бічну нерухому перешкоду.

Однак реальна швидкість руху ТЗ перед перекиданням може бути значно вище критичної швидкості (6), необхідної для перекидання ТЗ. Для подальшого вивчення механізму перекидання розглянемо механізм перекидання ТЗ від моменту відриву коліс ТЗ до моменту, коли центр ваги ТЗ буде на висоті  $h_{\max}$ .

Якщо записати рівняння динаміки для обертального руху ТЗ щодо точки перекидання, можна одержати математичну модель процесу перекидання ТЗ:

$$J \cdot \frac{d^2 \beta}{dt^2} = -m \cdot g \cdot h_{\max} \cdot \sin(\beta_k - \beta), \quad (7)$$

де  $J$  – момент інерції ТЗ щодо точки перекидання, що може бути виражений через  $J_{\text{ц}}$  – момент інерції ТЗ щодо поздовжньої осі, що проходить через його центр мас:

$$J = J_{\text{ц}} + m \cdot h_{\max}^2. \quad (8)$$

Представимо диференційне рівняння (7) у вигляді:

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} + k \cdot \sin(\beta_k - \beta) = 0, \quad (9)$$

$$\text{де } k = \frac{m \cdot g \cdot h_{\max}}{J}.$$

У результаті розв'язання рівняння (9) при початкових умовах  $d\beta/dt(t=0) = \omega_0$  і  $\beta(t=0) = 0$  можна одержати вираження для визначення кутової швидкості як функції кута повороту у вигляді:

$$\frac{d\beta}{dt} = \sqrt{\omega_0^2 + 2 \cdot k \cdot (\cos \beta_k - \cos(\beta_k - \beta))} = \omega. \quad (10)$$

Вираження (10) дозволяє визначити зміну кутової швидкості в процесі перекидання ТЗ.

Початкову кутову швидкість перекидання ТЗ можна виразити через швидкість руху ТЗ на підставі закону збереження енергії, розглянувши момент переходу від поступального руху центра мас ТЗ до обертального руху ТЗ навколо точки перекидання. Оскільки зміна положення центра мас відсутня, потенційна енергія ТЗ не міняється, а кінетична енергія:

$$\frac{m \cdot (V \sin \gamma)^2}{2} = \frac{J \cdot \omega_0^2}{2}. \quad (11)$$

Звідси початкова кутова швидкість перекидання ТЗ:

$$\omega_0 = V \sin \gamma \sqrt{\frac{m}{J}}. \quad (12)$$

Розв'язання рівняння (9) дозволяє також визначити час перекидання ТЗ як функцію кута повороту:

$$t = \int_0^{\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{\omega_0^2 + 2 \cdot k \cdot (\cos \beta_k - \cos(\beta_k - \beta))}}. \quad (13)$$

Визначення інтеграла в правій частині вираження (13) аналітично приводить до значного ускладнення рішення, тому визначимо його чисельно, застосувавши кусочно-постійну апроксимацію функцій часу [11]:

$$t_n = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta \beta}{\sqrt{\omega_0^2 + 2 \cdot k \cdot (\cos \beta_k - \cos(\beta_k - i \cdot \Delta \beta))}}, \quad (14)$$

де  $\Delta \beta$  – крок дискретизації по куту повороту,  $n=0..N$ ,  $N = \beta_k / \Delta \beta$ .

Вираз (14) дозволяє визначити час, за який відбудеться перекидання ТЗ.

Крім дослідницьких завдань у прямій постановці, таких, як визначення зміни кутової швидкості в процесі перекидання ТЗ (10) і часу, за який відбудеться перекидання ТЗ (14), розроблена математична модель дозволяє вирішувати зворотні завдання:

1. Визначити мінімальне (критичне) зна-

чення швидкості ТЗ, що приведе до його перекидання.

Для цього необхідно розглянути випадок хиткої рівноваги, при якому висота центра мас ТЗ  $h=h_{\max}$ . При цьому  $\beta = \beta_k$ ,  $\omega=0$ . У результаті з вираження (10) одержимо початкову кутову швидкість при перекиданні ТЗ:

$$\omega_0 = \sqrt{2 \cdot k \cdot (1 - \cos \beta_k)}. \quad (15)$$

Звідси з урахуванням (11) критична швидкість руху ТЗ у момент початку перекидання:

$$\begin{aligned} V_{\text{кр}} &= \frac{\sqrt{2 \cdot k \cdot (1 - \cos \beta_k)}}{\sin \gamma} \sqrt{\frac{J}{m}} = \\ &= \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_{\max} \cdot (1 - \cos \beta_k)}}{\sin \gamma}. \end{aligned} \quad (16)$$

З урахуванням того, що  $k=m \cdot g \cdot h_{\max}/J$ ,  $h_{\max} \cdot \cos \beta_k = h_{\text{ц}}$ , виходить тотожна рівність вираження (16) і (6), що підтверджує вірогідність результатів, отриманих різними методами.

2. Знаючи час перекидання ТЗ, визначити його реальну швидкість до перекидання на підставі виражень (14) і (11).

Як приклад для чисельного аналізу математичної моделі процесу перекидання ТЗ розглянемо автобус із наступними основними технічними характеристиками:

- висота центра мас ТЗ -  $h_{\text{ц}}=0,06$  м;
- колія ТЗ  $B=2$  м;
- ширина профілю шини колеса  $\text{Ш}=0,2$  м;
- маса ТЗ у спорядженому стані  $m=18000$  кг;
- момент інерції ТЗ щодо поздовжньої осі, що проходить через його центр мас  $J_{\text{ц}}=13478$  кг·м<sup>2</sup>.

Кут наїзду на нерухому бічну перешкоду прийемо  $\gamma=10^\circ$ .

У результаті чисельного моделювання отримано графіки зміни кутової швидкості від кута повороту  $\beta$  у процесі перекидання ТЗ (рис. 4). Графіки побудовані при початковій швидкості ТЗ 10, 15, 20 і 25 м/с.

Як видно з рис. 4, при збільшенні кута повороту  $\beta$  кутова швидкість перекидання ТЗ зменшується від початкового значення  $\omega_0$  до  $0 \text{ с}^{-1}$ . При цьому за час зменшення кутової швидкості до  $0 \text{ с}^{-1}$  ТЗ повертається на різний кут  $\beta$ . Якщо його величина не перевищує значення  $\beta_k=1,071$  рад, при якому центр мас ТЗ займає крайнє верхнє положення, ТЗ повернеться в початкове положення й перекидання

не відбудеться (криві 1 і 2).

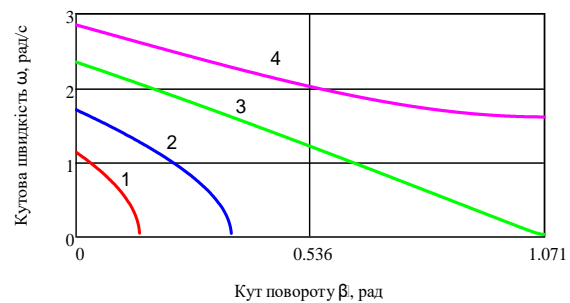


Рис. 4. Зміна кутової швидкості ТЗ при перекиданні

У випадку, якщо за час повороту ТЗ на кут  $\beta=\beta_k$  кутова швидкість не зменшилась до 0, відбудеться перекидання ТЗ (крива 4). Швидкість, при якій за час повороту ТЗ на кут  $\beta=\beta_k$  кутова швидкість зменшилась до 0 є критичною швидкістю ТЗ по перекиданню (крива 3).

Дана математична модель дозволяє також визначити час перекидання ТЗ (час, за який центр мас ТЗ переміщується з початкового положення в крайнє верхнє положення) як функцію швидкості ТЗ (рис. 5).

При збільшенні поздовжньої швидкості в момент початку перекидання ТЗ від 0 до значення критичної швидкості по перекиданню (рис. 5) час перекидання дійсних значень не має (значення інтеграла (13) перебувають у комплексній площині). Фізично це означає, що перекидання ТЗ не відбулося. Після перевищення поздовжньої швидкості ТЗ значення, що відповідає критичній швидкості ТЗ по перекиданню, час перекидання зменшується зі збільшенням поздовжньої швидкості ТЗ.

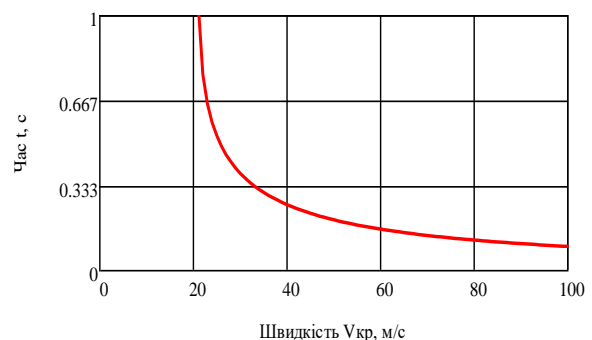


Рис. 5. Час перекидання ТЗ

На рис. 6 показано як залежить критична швидкість ТЗ, що приводить до його перекидання, від величини кута наїзду на бічну перешкоду.

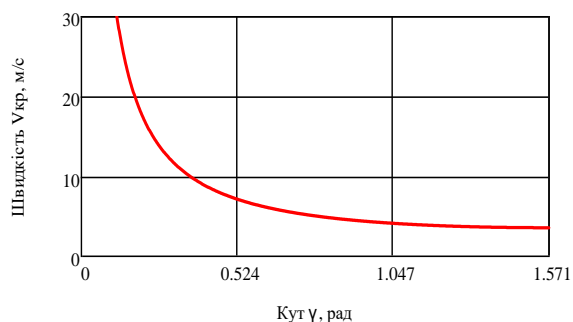


Рис. 6. Критична швидкість ТЗ при перекиданні

Як видно з рис. 6, з ростом величини кута наїзду на бічну перешкоду від 0 до 1,571 рад, що відповідає діапазону від 0 до 90°, мінімальна швидкість ТЗ, що приводить до його перекидання, зменшується.

### Висновки

Таким чином, за допомогою розробленої математичної моделі можна визначити як умови перекидання транспортних засобів, так і дослідити зміну основних параметрів руху транспортних засобів з початку підйому центра мас транспортного засобу до моменту підняття його на максимальну висоту.

Результати розрахунку критичної швидкості відповідно до розробленої математичної моделі повністю узгоджуються з результатами, що отримані на основі закону збереження енергії.

Отримано чисельні результати моделювання процесу перекидання транспортного засобу. Аналіз цих результатів свідчить про їх відповідність фізиці процесу перекидання транспортних засобів.

### Література

1. Li B., Bei S. Research Method of Vehicle Rollover Mechanism Under Critical Instability Condition. *Advances in Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 11(1). P. 1–11. DOI: 10.1177/1687814018821218.
2. Imine H., Benallegue A., Madani T. Rollover risk prediction of heavy vehicle using high-order sliding-mode observer: experimental results. *IEEE T. Veh. Technol.* 2014. Vol. 63. P. 2533–2543.
3. Kurakina E., Evtyukov S., Lukinskiy V., Ushakov A. Methodology for the reconstruction and investigation of causes of accidents in the parameters of vehicle condition and road environment. *Transp. Res. Procedia*. 2017. Vol. 20. P. 185–192. DOI: 10.1016/j.trpro.2017.01.049
4. Viba J., Liberts G., Gonca V. Car rollover collision with pit corner. *Transport*. 2009. Vol. 24(1). P. 76–82. DOI: 10.3846/1648-4142.2009.24.76-82
5. Судебная автотехническая экспертиза: в 2 ч. / под ред. научн. руков. В.А. Иларионова. Ч. 2. Москва: Министерство юстиции СССР,

1980. 490 с.

6. Евтюков С. А., Васильев Я. В. Расследование и экспертиза дорожно-транспортных происшествий. Санкт-Петербург: Издательство ДНК, 2004. 280 с.
7. Saraiev O., Gorb Y. A Mathematical Model of the Braking Dynamics of a Car. *SAE Technical Paper*. 2018-01-1893. P. 1-10.
8. Danez S., Saraiev O. Mathematical modeling of speed change of vehicles at emergency braking. *Technology audit and production reserves*. 2018. Vol. 3/1(41). P. 22–28.
9. Сараев А. В., Данец С. В. Методы исследования дорожно-транспортных происшествий с использованием современных автоматизированных средств. *Наука и техника*. 2019. Т. 18, № 3. С. 256–264. DOI: 10.21122/2227-1031-2019-18-3-256-26
10. Поваляев С.И., Сараев О.В. Моделирование механизма перекидания транспортного засобу в процесі розвитку дорожньо-транспортної пригоди. *Теорія та практика судової експертизи і криміналістики*. 2019. №20. С. 320-328.
11. Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций. Харьков, 2001. 184 с.

### References

1. Li B., Bei S. (2019) Research Method of Vehicle Rollover Mechanism Under Critical Instability Condition. *Advances in Mechanical Engineering*. 11(1). 1–11. DOI: 10.1177/1687814018821218.
2. Imine H., Benallegue A., Madani T. (2014) Rollover risk prediction of heavy vehicle using high-order sliding-mode observer: experimental results. *IEEE T. Veh. Technol.* 63. 2533–2543.
3. Kurakina E., Evtyukov S., Lukinskiy V., Ushakov A. (2017) Methodology for the reconstruction and investigation of causes of accidents in the parameters of vehicle condition and road environment. *Transp. Res. Procedia*. 20. 185–192. DOI: 10.1016/j.trpro.2017.01.049
4. Viba J., Liberts G., Gonca V. (2009) Car rollover collision with pit corner. *Transport*. 24(1). 76–82. DOI: 10.3846/1648-4142.2009.24.76-82
5. (1980) Sudebnaja avtotehnicheskaja ekspertiza [Judicial autotechnical examination]: v 2 ch. / pod red. nauchn. rukov. V.A. Ilarionova. Ch. 2. Moskva: Ministerstvo justicii SSSR [in Russian]
6. Evtjukov S. A., Vasil'ev Ja. V. (2004) Rassledovanie i jekspertiza dorozhno-transportnyh proisshestvij [Investigation and examination of road traffic accidents]. Sankt-Peterburg: Izdatel'stvo DNK. [in Russian]
7. Saraiev O., Gorb Y. (2018) A Mathematical Model of the Braking Dynamics of a Car. *SAE Technical Paper*. 01. 1893. 1-10.
8. Danez S., Saraiev O. (2018) Mathematical modeling of speed change of vehicles at emergency braking. *Technology audit and production reserves*. 3/1 (41). 22–28.

9. Saraev A. V., Danec S. V. (2019) Metody issledovaniya dorozhno-transportnyh proissheshtvij s ispol'zovaniem sovremennyh avtomatizirovannyh sredstv [Methods of research of road traffic accidents with the use of the modern automated tools]. *Nauka i tehnika*. 18(3). 256–264. DOI: 10.21122/2227-1031-2019-18-3-256-26 [in Russian]
10. Povalyayev S.I., Sarayev O.V. (2019) Modelyuvannya mekhanizmu perekydannya transportnoho zasobu v protsesi rozvytku dorozhn'o-transportnoyi pryhody [Modeling of the mechanism of vehicle overturning in the process of development of road traffic accident]. *Teoriya ta praktyka sudovoyi ekspertyzy i kryminalistyky*. 20. 320-328. [in Ukrainian]
11. Janjutin E. G., Janchevskij I. V. (2001) Impul'snye vozdejstviya na uprugodeformiruemye jelementy konstrukcij [Impulse impacts on elastically deformable structural elements]. Har'kov. [in Russian]

**Поваляев Сергей Иванович**<sup>1</sup>, к.т.н., доц. каф. деталей машин і ТММ, [povalyaevsi@ukr.net](mailto:povalyaevsi@ukr.net), тел. +38 097-199-23-31,

**Сарасв Олексій Вікторович**<sup>1</sup>, д.т.н., проф. каф. автомобілів, [sarayev9@gmail.com](mailto:sarayev9@gmail.com), тел. +38 050-275-51-59, <https://orcid.org/0000-0001-6582-560X>

<sup>1</sup>Харківський національний автомобільно-дорожній університет, 61002, Україна, м. Харків, вул. Ярослава Мудрого, 25.

#### Mathematical model for estimation the stability of the vehicle's motion on overturning

**Abstract. Problem.** During the reconstruction of the circumstances of road traffic accidents with vehicles overturning, difficulties arise with determining the parameters of vehicles in the process of their overturning. This is due to the fact that the recommended calculation methods are often simplified. The main focus of such techniques is to determine the minimum speed of vehicles, which leads to their overturning. In fact,

the speed of vehicles before overturning can be significantly higher. **Goal.** This paper is dedicated to developing mathematical model of overturning vehicles that makes possible to determine not only the conditions for overturning vehicles, but also other parameters of the vehicle movement in the process of overturning. **Methodology.** The overturning of the vehicle occurs as a result of the action of inertial forces after collision with an immovable side obstacle. In this case, the moment from the force of gravity of the vehicle keeps it from overturning. In the process of overturning the vehicle, the moment from the force of gravity decreases due to the decrease in the arm of the force of gravity. To compile a mathematical model, the basic equation of dynamics during rotational motion was used. The mathematical model of a vehicle overturning is written in the form of a nonlinear homogeneous second order differential equation. An analytical solution of this equation is obtained. **Results.** Developed mathematical model makes possible to determine not only the conditions for overturning vehicles, but also other parameters of the vehicle movement from the moment the center of mass begins to rise to the moment of its maximum rise in the process of overturning. For a particular case, when the critical speed of a vehicle during its overturning is determined, the developed mathematical model fully corresponds to the mathematical model based on the law of conservation of energy. For a specific vehicle, numerical results were obtained that fully correspond to the physics of the overturning process.

**Key words:** road accident, vehicle, side obstacle, rollover, simulation.

**Povaliaiev Serhii**<sup>1</sup>, Ph.D., Assoc. Prof. of Machine Parts and Theory of Mechanisms and Machines Department, [Povalyaevsi@ukr.net](mailto:Povalyaevsi@ukr.net), tel. 380971992331

**Saraiev Olexii**<sup>1</sup>, professor, Doct. of Science, Vehicle Department, tel. +38 050-275-51-59, <https://orcid.org/0000-0001-6582-560X>

<sup>1</sup>Kharkov National Automobile and Highway University, 25, Yaroslava Mudrogo str., Kharkiv, 61002, Ukraine.