УДК 517.91

ЛЯПУНОВСКИЕ НОРМЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.И. Вербицкий, доц., к.ф.-м.н., ХНАДУ

Аннотация. *Рассматривается применение сжимающих и ляпуновских норм к анализу устойчивости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных дифференциальных уравнений, оценивается область притяжения.*

Ключевые слова: *устойчивость, конвергенция, сжимающая норма, функция Ляпунова, область притяжения.*

ЛЯПУНОВСЬКІ НОРМИ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

В.І. Вербицкий, доц., к.ф.-м.н., ХНАДУ

Анотація. *Розглянуто застосування стискуючих і ляпуновських норм до аналізу стійкості нелінійних систем звичайних дифференциальных диференційних рівнянь, оцінено область притягнення.*

Ключові слова: *стійкість, конвергенція, стискуюча норма, функція Ляпунова, область притягнення.*

LYAPUNOV NORMS FOR NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

V. Verbitsky, Assoc. Prof., Ph. D. (Eng.), KhNAHU

Abstract. *The application of contractive and Lyapunov norms to the stability analysis of ordinary differential systems are considered. The attraction domain is estimated.*

Key words: *stability, convergence, compressive norm, Lyapunov function, domain of attraction.*

Введение

Функции Ляпунова в виду норм используются в ряде работ, посвященных анализу устойчивости нелинейных динамических систем и, в особенности, систем автоматического управления. Представленные ниже результаты получены автором и относятся к анализу устойчивости почти автономных нелинейных систем по первому приближению.

Анализ публикаций

В [1, 2] рассматривались вопросы, связанные со сжимающими и ляпуновскими нормами для нелинейных систем. Были получены условия совместной диссипативности матриц Якоби систем и их приложения к анализу разных видов устойчивости как систем автоматического управления, так и систем химической кинетики.

Основные результаты

В основе работы лежит классическая теорема Х.Л. Массера. Пусть непрерывное отображение f (из пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$) позитивно однородно степени $m > 0$, т.е. для любых $\alpha \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n$ верно

$$f(\alpha x) = \alpha^m \cdot f(x).$$

Если нулевое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

асимптотически устойчиво, то существует такая константа $M > 0$, что для любого отображения $g(t,x)$ (из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$), удовлетворяющего неравенству

$$\|g(t,x)\| \le M\|x\|^m \quad (2)$$

для любого $t \in \mathbb{R}$ в некоторой окрестности начала координат, решение $x \equiv 0$ системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(t,x) \quad (3)$$

равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема Массера может быть перенесена и на случай глобальной асимптотической устойчивости.

Для одного класса динамических систем можно уточнить теорему Массера и дать конструктивную оценку константы *M*.

Будем далее использовать обозначение $N(x,y)$ для функции

$$N(x,y) = \lim_{h \to +0} \frac{\|x+hy\| - \|x\|}{h},$$

где $\| \ \|$ – некоторая норма в пространстве $\mathbb{R}^n$ (вообще говоря, неевклидова).

Лемма 1. Функция $N(x,y)$ полунепрерывна сверху на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Лемма 2. Пусть f – непрерывное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ $\|.\|$ – норма в $\mathbb{R}^n$, $C > 0$ – константа. Если $N(x, f(x)) < 0$ на сфере $\|x\| = C$, то

$$\sup_{\|x\|=C} N(x, f(x) < 0.$$

Теорема 1. Пусть f – непрерывное позитивно однородное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ степени $m > 0$, причем неравенство

$$N(x, f(x) < 0$$

выполняется для всех $x \ne 0$. Пусть также U – окрестность нуля и непрерывное отображение $g(t,x)$ удовлетворяет неравенству (2) для любого $t \in \mathbb{R}, x \in U$ при $M < M_0 = -\sup_{\|x\|=1} N(x, f(x)).$

Тогда решение $x \equiv 0$ системы (3) равномерно асимптотически устойчиво. Каждый шар нормы $\|.\|$, содержащийся в U, входит в область притяжения нулевого решения.

Если $m > 1$, то оценка

$$\|x(t)\| \le (\|x(t_0)\|^{1-m} + (m-1)(M_0 - M)(t - t_0))^{\frac{1}{1-m}}$$

выполняется для любого решения системы (3) при $t \ge t_0$.

Если $m = 1$, то

$$\|x(t)\| \le \exp(M_0 - M)(t - t_0)) \cdot (\|x(t_0)\|$$

для $t \ge t_0$.

Если $m < 1$, то каждое решение достигает начала координат за время, не превосходящее

$$\tau = ((1-m) \cdot (M_0 - M))^{-1} \cdot \|x(t_0)\|^{1-m}.$$

Если $U = \mathbb{R}^n$, то нулевое решение системы (3) равномерно глобально асимптотически устойчиво.

Теорема 1 позволяет также оценивать решения системы (1). Для этого достаточно считать, что $g(t,x) \equiv 0$.

Конкретизируем этот результат для одного класса систем. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \sum\limits_{k=0}^{2s-1} a_k x_1^{2s-k} x_2^k + g_1(t;x_1;x_2); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \sum\limits_{k=0}^{2s-1} b_k x_1^{2s-k-1} x_2^k + g_2(t;x_1;x_2), \end{cases}$$

где $s \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \in \mathbb{R}$ – константы; g_1, g_2

– непрерывные функции.

Введем обозначения

$$\Phi_1(t)\frac{dx_1}{dt}=\sum_{k=0}^{2s-1}a_k t^k;\ \Phi_2(t)\frac{dx_1}{dt}=\sum_{k=0}^{2s-1}b_{2s-1}t^k.$$

Пусть также μ_1, μ_2 – наименьшие модули действительных корней полиномов $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ соответственно.

Если $a_0<0$; $b_{2s-1}<0$; $\mu_1\mu_2>1$, то нулевое решение невозмущенной автономной системы глобально асимптотически устойчиво.

Пусть теперь α – какое-либо число, удовлетворяющее неравенству $\mu_1^{-1}<\alpha<\mu_2$. Если возмущения правых частей удовлетворяют неравенству

$$\max\left\{|g_1(t;x_1;x_2)|;\ \alpha|g_1(t;x_1;x_2)|\right\}\le$$
$$\le M\cdot\max\left\{|x_1|^{2s-1};\ \alpha^{2s-1}\cdot|x_1|^{2s-1}\right\},$$

где $M<M_0=-\max\{\max\limits_{|x_2|\le\alpha^{-1}}\Phi_1(x_2);$ $\max\limits_{|x_1|\le 1}\alpha^{2s-1}\Phi_2\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\}$, то нулевое решение возмущенной системы равномерно глобально асимптотически устойчиво.

Во всех рассмотренных случаях норма играла роль негладкой функции Ляпунова системы. При изучении систем автоматического управления важную роль играет понятие конвергенции. Система называется конвергентной, если существует единственное ограниченное на всей оси решение этой системы, к которому притягиваются все решения системы при $t\to+\infty$.

Приведем одно условие конвергенции, связанное с ляпуновскими нормами.

Теорема 2. Пусть $f(t,x)$ – отображение класса $C^{0,1}$ из $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ (непрерывное по t и гладкое по x) и существует такое $x_0\in\mathbb{R}^n$, что $f(t,x_0)$ ограничено на всей оси.

Пусть также $\Phi(r)$ – непрерывная функция при $r\ge 0$, $\Phi(r)>0$ при $r\ge 0$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\Phi(r)=+\infty$. Если $\gamma(f_x'(t,x))\le-\Phi(\|x\|)$, где $\|\cdot\|$ – некоторая норма в $\mathbb{R}^n$, γ – соответствующая логарифмическая норма, для любых $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$, то система

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$$

конвергентна.

Выводы

Рассмотренные результаты позволяют конструктивно исследовать на устойчивость нелинейные динамические системы и оценивать области притяжения устойчивых решений. Полученные условия достаточно удобны в использовании и конструктивны.

Литература

1. Verbitskii V. Simultaneausly dissipative operators and quasithermodinamicity of the chemical reaction systems / V. Verbitskii, A. Ctorban // Advances in Modelling and Simulation. – 1991. – Vol. 26, no. 1. – P. 13–21.
2. Verbitskii V. On the approach to the analysis of stability of nonlinear systems and differential inclusions / V. Verbitskii // Mathematical modelling in science and technology. – 2014. – Vol. 1. – P. 16–22.

Рецензент: В.М. Колодяжный, профессор, д.ф.-м.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 26 мая 2017 г.