УДК 621.165: 534.1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ. МАТРИЦА МАСС КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

А.В. Погребняк, доц., к.т.н.,
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Аннотация. *Рассмотрена методика расчетов собственных частот и форм колебаний, а также вынужденных колебаний пространственных стержневых конструкций произвольной структуры.*

Ключевые слова: *метод перемещений, стержневая конструкция, матрица масс, конечный элемент.*

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ДИНАМІЧНОГО РОЗРАХУНКУ ПРОСТОРОВОЇ СТЕРЖНЕВОЇ КОНСТРУКЦІЇ. МАТРИЦЯ МАС КІНЦЕВОГО ЕЛЕМЕНТА

А.В. Погребняк, доц., к.т.н.,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. *Розглянуто методику розрахунків власних частот і форм коливань, а також вимушених коливань просторових стержневих конструкцій довільної структури.*

Ключові слова: *метод переміщень, стержнева конструкція, матриця мас, кінцевий елемент.*

THEORETICAL BASICS OF GRID STRUCTURE DYNAMIC ANALYSIS. FINITE ELEMENT MASS MATRIX

A. Pogrebnyak, Assoc. Prof., Cand. Sc. (Eng.),
Kharkiv National Automobile and Highway University

Abstract. *The calculation methods for determining natural frequencies and vibration modes, as well as the forced vibrations of free-form grid structures are considered in the article.*

Key words: *deflection method, grid structure, mass matrix, finite element.*

Введение

Реальная пространственная стержневая конструкция с бесконечным числом степеней свободы заменяется конструкцией с конечным числом степеней свободы. В методе конечных элементов такая дискретизация основана на представлении конструкции в виде совокупности отдельных конечных стержневых элементов, взаимодействующих в конечном числе узловых точек. Соблюдение энергетического баланса исходной конструкции дискретной моделью ведет к получению такой расчетной схемы, которая описывает поведение исходной конструкции.

Анализ публикаций

Анализ публикаций, связанных с этой темой, показывает, что в большинстве случаев, используя для расчетов метод перемещений, не полностью учитывается система линейных неоднородных алгебраических уравнений, а также жесткость амортизаторов и моменты инерции присоединенных к узлам масс. Это не давало возможность учитывать определенные условия заделки, симметрию или асимметрию, если они существует, а также получать полную картину деформаций в рамной конструкции [1, 2]. Исходя из вышеизложенного сформулированы цель и задачи.

Цель и постановка задачи

Объектом расчета является пространственная конструкция из прямолинейных стержней, жестко соединенных друг с другом в так называемых узлах. Узлы расположены в пространстве произвольным образом. От каждого узла может отходить любое количество стержней. Главные оси поперечных сечений этих стержней могут быть ориентированы также произвольно. Учитывается собственный вес стержней, в узлах допускается присутствие сосредоточенных масс, а также учитываются моменты инерции присоединенных к узлам масс. Кроме того, допускается в любых местах конструкции накладывать кинематические абсолютно жесткие или упругие связи, препятствующие всем возможным перемещениям конструкции.

Задача заключается в использовании системы разрешающих уравнений [3], матриц жесткости [4], матриц масс конечного элемента и матриц инерции твердых тел и жесткости амортизатора (рассматривается в данной статье).

В данной статье мы рассмотрим построение матрицы масс конечного элемента, проведем преобразование к общей системе координат, учтем жесткость амортизаторов и построим матрицу инерции твердых тел.

Матрица масс конечного элемента

Как и в случае вывода матрицы жесткости [4], рассмотрим пространственно нагруженный конечный элемент, имеющий 12 степеней свободы – три линейных перемещения и три угла поворота в каждом из двух узлов i и j. Разобъем узловые перемещения на четыре группы, образуя из них матрицы $\{U_a\}$,$\{U_b\}$, $\{U_c\}$ и $\{U_d\}$. Матрица (формула (1)) определяет осевую деформацию стержня [4, рис.1, С. 411].

$$\{U_a\}=\{U_{ix}, U_{jx}\}=\{U_1, U_7\} \qquad (1)$$

Матрицы (формула (2)) соответствуют изгибу элемента в плоскости *XOY и XOZ* [4, рис.1, С. 411]

$$\{U_b\}=\{U_{iy}, \Theta_{iz}, U_{jy}, \Theta_{jz}\}=\{U_2, U_6, U_8, U_{12}\}; \qquad (2)$$

$$\{U_c\}=\{U_{iz}, \Theta_{iy}, U_{jz}, \Theta_{jy}\}=\{U_3, U_5, U_9, U_{11}\},$$

а матрица (формула (3)) определяет кручение элемента

$$\{U_d\}=\{U_{ix}, \Theta_{jx}, U_{jz}, \Theta_{jy}\}=\{U_4, U_{10}\} \qquad (3)$$

Группируя подобным же образом узловые инерционные силы, придем к блочной структуре матрицы масс $[m]_e$ рассматриваемого элемента в местной системе координат [2], имеющей размер 12x12

$$[\mathrm{m}]_e=\begin{bmatrix} [\mathrm{m}_a] & & & \\ & [\mathrm{m}_b] & & [0] \\ [0] & & [\mathrm{m}_c] & \\ & & & [\mathrm{m}_d] \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Методика определения матриц $[m_a]$, $[m_b]$, $[m_c]$ и $[m_d]$ подробно описана в [5, С. 16–23].

Расставив на определенные места полученные элементы, получим матрицу масс $[m]_e$ стержневого конечного элемента (табл. 1).

Преобразование к общей системе координат

После получения матриц жесткости $[\kappa]_e$ и масс $[m]_e$ в местных координатах *XYZ* необходимо выполнить их переход к общей системе координат *X'Y'Z'*. Чтобы получить связь между перемещениями в двух системах координат, необходимо разложить перемещения $\{V'\}$ по направлениям перемещений $\{V\}$. Если перемещения (линейные или угловые) типового узла i в общей системе координат спроектировать на местные координатные оси, то придем к соотношениям, которые в матричной форме имеют вид

$$\{V_i\} = [l] \cdot \{V'_i\}, \qquad (5)$$

где $[l]$ – матрица, составленная из косинусов углов между осями *XYZ и X'Y'Z'* [3, 4]

$$[\mathrm{l}]=\begin{bmatrix} l'_{xx} & l'_{xy} & l'_{xz} \\ l'_{yx} & l'_{yy} & l'_{yz} \\ l'_{zx} & l'_{zy} & l'_{zz} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Таблица 1 Матрица масс $[m]_e$ конечного элемента в местной системе координат

$q_m l/3$	0	0	0	0	0	$q_m l/6$	0	0	0	0	0
0	$13/35\ q_m l$	0	0	0	$11/210\ q_m l^2$	0	$9/70\ q_m l$	0	0	0	$-13/420\ q_m l^2$
0	0	$13/35\ q_m l$	0	$-11/210\ q_m l^2$	0	0	0	$9/70\ q_m l$	0	$13/420\ q_m l^2$	0
0	0	0	$\rho J_p l/3$	0	0	0	0	0	$\rho J_p l/6$	0	0
0	0	$-11/210\ q_m l^2$	0	$1/105\ q_m l^3$	0	0	0	$-13/420\ q_m l^2$	0	$-1/140\ q_m l^3$	0
0	$11/210\ q_m l^2$	0	0	0	$1/105\ q_m l^3$	0	$13/420\ q_m l^2$	0	0	0	$-1/140\ q_m l^3$
$q_m l/6$	0	0	0	0	0	$q_m l/3$	0	0	0	0	0
0	$9/70\ q_m l$	0	0	0	$13/420\ q_m l^2$	0	$13/35\ q_m l$	0	0	0	$-11/210\ q_m l^2$
0	0	$9/70\ q_m l$	*0*	$-13/420\ q_m l^2$	0	0	0	$13/35\ q_m l$	0	$11/210\ q_m l^2$	0
0	0	0	$\rho J_p l/6$	0	0	0	0	0	$\rho J_p l/3$	0	0
0	0	$13/420\ q_m l^2$	0	$-1/140\ q_m l^3$	0	0	0	$11/210\ q_m l^2$	0	$1/105\ q_m l^3$	0
0	$-13/420\ q_m l^2$	0	0	0	$-1/140\ q_m l^3$	0	$-11/210\ q_m l^2$	0	0	0	$1/105\ q_m l^3$

Поскольку в общей системе координат принят тот же порядок нумерации и те же направления для положительных узловых перемещений, то матрица преобразования $[T]_e$ перемещений для элемента из глобальной системы координат в локальную имеет блочно-диагональный вид

$$[\mathrm{T}]_e = \begin{bmatrix} [l] & & & \\ & [l] & & [0] \\ [0] & & [l] & \\ & & & [l] \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Таким образом, можно записать

$$\{V\}_e = [T]_e \cdot \{V'\}_e. \qquad (8)$$

Поскольку направления узловых усилий совпадают с направлениями узловых перемещений, то связь между узловыми усилиями в глобальной $X'Y'Z'$ и местной XYZ системах координат осуществляется с помощью той же матрицы преобразования $[T]_e$, то есть

$$\{P\}_e = [T]_e \cdot \{P'\}_e. \qquad (9)$$

Принимая во внимание, что

$$\{P'\}_e = [\kappa']_e \cdot \{V'\}_e, \qquad (10)$$

и подставляя формулы (8) и (9) в формулу 3 [4, С. 410], разрешим полученное при этом уравнение относительно матрицы $\{R'\}_e$

$$\{P'\}_e = [T]^{-1}{}_e \cdot [\kappa]_e \cdot [T]_e \cdot \{V'\}_e. \qquad (11)$$

Матрица преобразования $[T]_e$ для элемента является ортогональной, то есть

$$[T]^{-1}{}_e = [T]^T{}_e. \qquad (12)$$

Тогда матрица жесткости конечного элемента в глобальной системе координат $X'Y'Z'$ имеет вид

$$[\kappa']_e = [T]^T{}_e \cdot [\kappa]_e \cdot [T]_e. \qquad (13)$$

Формула (13) используется для определения матрицы жесткости конечного элемента при переходе из местной системы координат в глобальную. Аналогично определяется и матрица масс системы

$$[m']_e = [T]^T{}_e \cdot [m]_e \cdot [T]_e. \qquad (14)$$

Учет жесткости амортизаторов

В расчетной схеме пространственной конструкции допускается установка амортизаторов, имеющих оси жесткости, совпадающие с осями глобальной системы координат. Матрица жесткости амортизатора, установленного в i-м узле, имеет вид

$$[C]_i = \begin{bmatrix} C'_x & & & & & \\ & C'_y & & & & \\ & & C'_z & & 0 & \\ & & & C'_y z' & & \\ 0 & & & & C'_z x' & \\ & & & & & C'_x y' \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где $C_{x'}$, $C_{xy'}$, $C_{z'}$ – жесткости амортизатора в направлении осей глобальной системы координат $X'Y'Z'$; $C_{y'z'}$, $C_{z'x'}$, $C_{x'y'}$ – жесткости амортизатора вокруг осей X', Y', Z'. Задание в исходной информации очень высоких значений жесткости позволяет ограничивать перемещения в заданном направлении, что дает возможность учитывать определенные условия заделки, а также симметрию или асимметрию, если они существуют.

Матрица инерции твердых тел

Если в i-м узле присутствует твердое тело с массой M и моментами инерции относительно глобальных осей $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{z'}$, то матрица инерции имеет вид

$$[I] = \begin{bmatrix} M & & & & & \\ & M & & 0 & & \\ & & M & & & \\ & & & J'_x & & \\ & 0 & & & J'_y & \\ & & & & & J'_z \end{bmatrix} \quad (16)$$

Обязательно следует учитывать массовый момент инерции присоединенных масс, если центр тяжести прикрепленного к раме оборудования слишком удален от нейтральной оси стержневого элемента.

Выводы

Таким образом, получены матрицы масс конечного элемента, инерции твердых тел. Проведено преобразование к общей системе координат, учтены амортизаторы в системе. Сформированная система уравнений решается методом квадратного корня. Предлагаемая методика может быть использована для расчета собственных частот, собственных форм, а также вынужденных колебаний пространственных стержневых конструкций произвольной структуры, приводящихся к совокупности стержней.

Литература

1. Постнов В.А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В.А. Постнов, И.Я. Хархурим. – Л.: Судостроение, 1974. – 188 с.
2. Образцов И.Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И.Ф. Образцов. – М.: Высшая школа, 1985. – 202 с.
3. Погребняк А.В. Теоретичні основи динамічного розрахунку просторової стержневої конструкції. Система дозволяючих рівнянь / А.В. Погребняк, А.В. Євтушенко // Вісник національного університету водного господарства та природокористування: зб. наук. праць. – 2015. – Вип. 2(70). – С. 159–164.
4. Погребняк А.В. Теоретичні основи динамічного розрахунку просторової стержневої конструкції. Матриця жорсткості для кінцевого елементу в локальній системі координат / А.В. Погребняк, А.В. Євтушенко // Вісник національного університету водного господарства та природокористування: зб. наук. праць. – 2015. – Вип. 2(70). – С. 409–414.
5. Пространственные стержневые конструкции / ООО «Турбогаз» // Метод расчета собственных и вынужденных колебаний: РД 15878-03-2010. [Введен впервые 15.12.10]. – Х.: ООО «Турбогаз», 2010. – 111 с.

Рецензент: Е.С. Венцель, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 3 марта 2016 г.