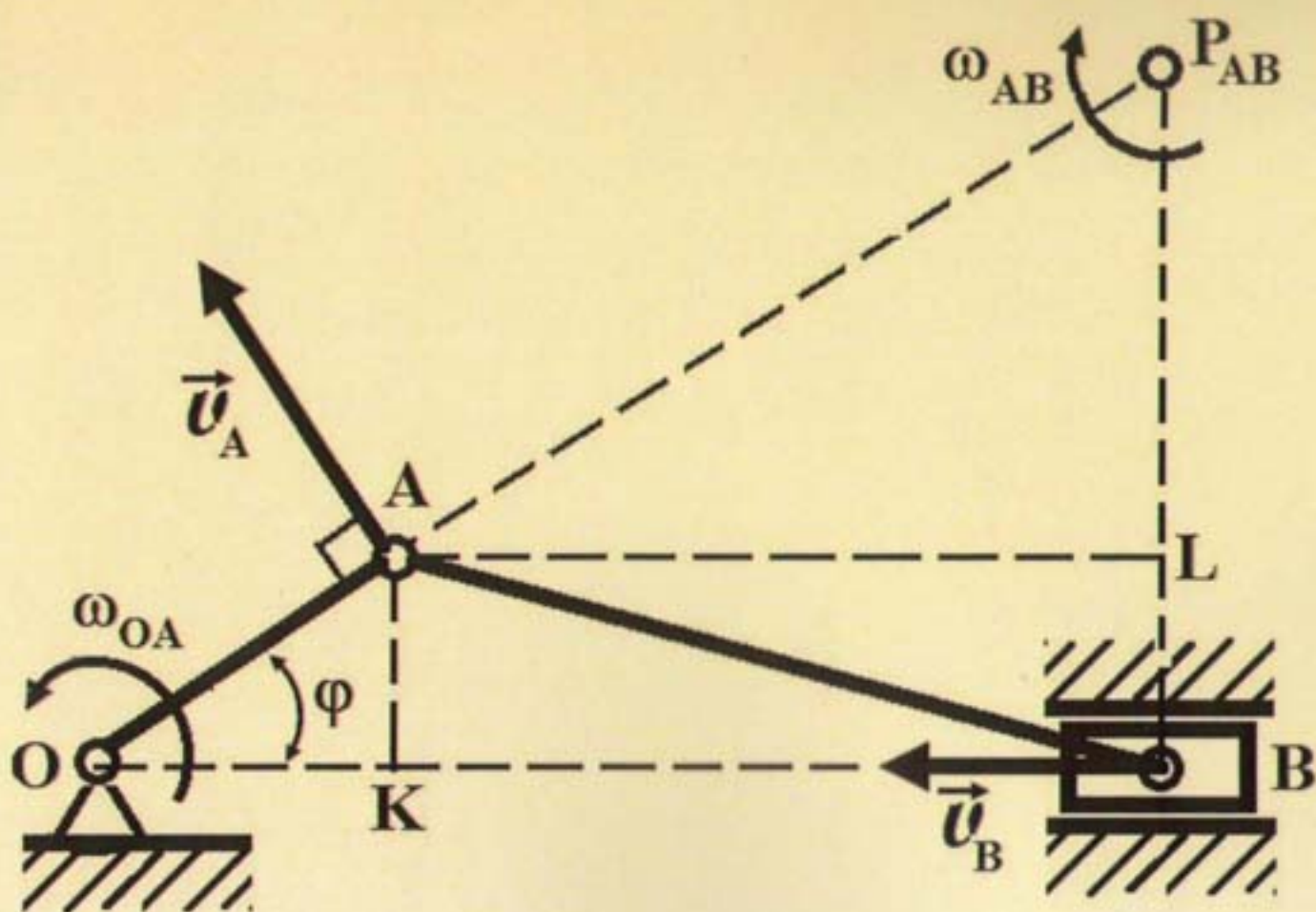


І.В. Міщенко, О.В. Воропай, С.В. Красніков

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

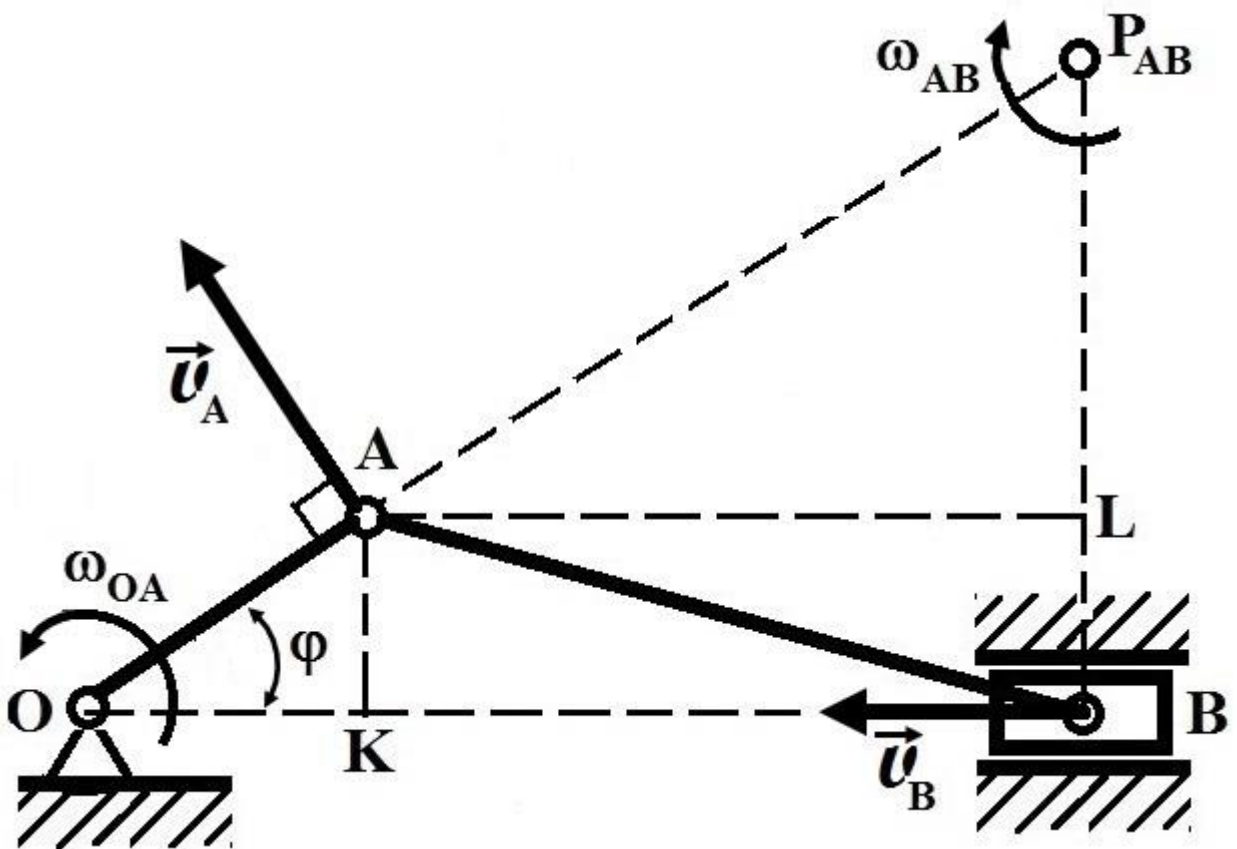
Частина І. Статика. Кінематика



І.В. Міщенко, О.В. Воропай, С.В. Красніков

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Частина І. Статика. Кінематика



Міністерство освіти і науки України
**Харківський національний автомобільно-
дорожній університет**

І.В. Міщенко, О.В. Воропай, С.В. Красніков

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
Частина I. Статика. Кінематика

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Харків 2025

УДК 531
ББК 22.21
М 57

*Рекомендовано до видання рішенням Вченої ради
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету
(Дозвіл № 73/25/4.6 від 23 січня 2025 р.)*

Рецензенти:

Батигін Юрій Вікторович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фізики Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.

Воронін Сергій Володимирович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри машинобудування та технічного сервісу машин Українського державного університету залізничного транспорту;

Ткачук Микола Анатолійович, доктор технічних наук, професор, професор кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин НТУ «ХПІ»;

Баранов Олег Олегович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут».

М 57

Міщенко І.В., Воропай О.В., Красніков С.В. Теоретична механіка. Частина І. Статика. Кінематика: навчальний посібник. Х.: ФОП Бровін О.В., 2025. 158 с. ISBN 978-617-8238-95-7

Навчальний посібник з теоретичної механіки, частина І (Статика. Кінематика) призначено для здобувачів вищої освіти за денною та заочною формами навчання за спеціальностями автомобільного, дорожньо-будівельного та механічного факультетів Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.

У навчальному посібнику послідовно розглянуто основні питання теоретичної механіки з розділів Статика та Кінематика, наведено теоретичний матеріал та приклади розв'язання задач за вказаними розділами.

Викладений матеріал дозволяє опанувати курс теоретичної механіки за офлайн та (або) онлайн формами навчання.

© Міщенко І.В., Воропай О.В.,
Красніков С.В., 2025

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	6
Розділ Статика	8
Глава 1. Основні визначення теоретичної механіки	8
1.1. Основні поняття статички	8
1.2. Основні системи та одиниці вимірювання	10
1.3. Аксиоми статички	13
1.4. В'язі та їх реакції.....	15
Глава 2. Плоска система збіжних сил. Її рівнодійна	19
2.1. Основні задачі статички. Система сил	19
2.2. Геометричний (графічний) спосіб додавання збіжних сил	19
2.3. Аналітичний спосіб додавання збіжних сил	21
2.4. Умови рівноваги збіжної системи сил. Алгоритм аналітичного розв'язання задач на рівновагу	23
Глава 3. Теорія моменту сили відносно центра та осі	25
3.1. Момент сили відносно точки	25
3.2. Момент сили відносно осі	27
3.3. Додавання двох паралельних сил	29
3.4. Момент пари сил	30
Глава 4. Приведення довільної системи сил. Умови рівноваги	33
4.1. Приведення довільної системи сил до даного центру	33
4.2. Обчислення головного вектора та головного моменту. Умови рівноваги просторової системи сил	34
4.3. Умови рівноваги плоскої системи сил	35
4.4. Окремі випадки приведення сил, які довільно розташовані на площині або у просторі	37
4.5. Розподілені навантаження.....	39
4.6. Теорема Варіньона	40
Глава 5. Ферми та методи їх розрахунку	48
5.1. Задача розрахунку ферми. Основні допущення.....	48
5.2. Задача розрахунку ферми. Метод вирізання вузлів.....	51
5.3. Задача розрахунку ферми. Метод Ріттера	54

Глава 6. Центр ваги	61
6.1. Центр паралельних сил	61
6.2. Центр ваги твердого тіла.....	62
6.3. Центр ваги плоскої фігури. Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі	63
6.4. Визначення центру ваги плоскої фігури по центрах ваги її частин. Метод додавання та метод від'ємних площ	64
6.5. Центри ваги найпростіших плоских фігур	65
6.6. Центри ваги об'ємного тіла та стержньової конструкції.....	71
Глава 7. Тертя та його види	73
7.1. Тертя ковзання.....	73
7.2. Реакція шорстких в'язей. Кут і конус тертя	76
7.3. Рівновага тіл за наявності тертя.....	77
7.4. Тертя кочення (опір коченню).....	81
Розділ Кінематика	86
Глава 8. Кінематика точки	86
8.1. Вступ до кінематики. Основні поняття та визначення	86
8.2. Способи завдання руху точки.....	87
8.3. Швидкість точки	90
8.4. Прискорення точки.....	93
8.5. Окремі випадки руху точки.....	97
Глава 9. Типи руху. Основні рухи твердого тіла	100
9.1. Задання руху твердого тіла	100
9.2. Найпростіші рухи твердого тіла.....	101
9.3. Швидкості та прискорення точок тіла, що обертається.....	106
Глава 10. Плоский (плоскопаралельний рух) твердого тіла	112
10.1. Властивості плоского руху твердого тіла. Рух плоскої фігури в її площині	112
10.2. Розклад руху плоскої фігури на поступальний рух разом з полюсом і обертанням навколо цього полюса. Рівняння руху плоскої фігури.....	113
10.3. Швидкості точок тіла при плоскому русі.....	115
10.4. Миттєвий центр швидкостей.....	118
10.5. Різні випадки визначення положення миттєвого центру	120

10.6. Приклади на застосування миттєвого центру швидкостей	122
10.7. Приклади на застосування миттєвого центру швидкостей (кривошипно-повзунний механізм).....	124
10.8. Теорема про прискорення точок плоскої фігури.....	127
10.9. План швидкостей.....	129
10.10. План прискорень точок плоскої фігури.....	133
Глава 11. Складний рух матеріальної точки.....	138
11.1. Основні визначення.....	138
11.2. Теорема про додавання швидкостей.....	139
11.3. Додавання прискорень	142
11.4. Приклад визначення абсолютної швидкості (переносний рух поступальний).....	147
11.5. Приклад визначення абсолютного прискорення (переносний рух поступальний).....	148
11.6. Приклад визначення абсолютної швидкості (переносний рух обертальний в площині рисунку)	149
11.7. Приклад визначення абсолютного прискорення (переносний рух обертальний в площині рисунку)	150
11.8. Приклад розподілу швидкостей (переносний рух обертальний).....	152
11.9. Приклад розподілу прискорень (переносний рух обертальний)	153
ЛІТЕРАТУРА	156

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник «Теоретична механіка» (Частина I. Статика. Кінематика. Частина II. Динаміка) створено на основі багаторічного викладання зазначеної дисципліни у Харківському національному автомобільно-дорожньому університеті (ХНАДУ). В його основу покладено лекції, які читаються майбутнім спеціалістам під час викладання дисципліни «Теоретична механіка».

Теоретична механіка – наука, що вивчає найбільш загальні закони механічного руху, яке визначається переміщенням у просторі та часі одного матеріального об'єкта щодо іншого, а також рівноваги матеріальних тіл і виникаючі між ними взаємодії.

Теоретична механіка – одна з найважливіших наук фізико-математичного профілю (механіка це розділ фізики, рівень викладання якої останнім часом значно знизився як в середній так і в вищій школі), що формує науковий світогляд інженера.

Теоретична механіка є науковим фундаментом для багатьох технічних дисциплін, теорія яких ґрунтується на положеннях і законах теоретичної механіки. Отримані знання будуть в нагоді при подальшому вивченні таких дисциплін: Опір матеріалів, Будівельна механіка, Прикладна механіка, Гідравліка, Теорія механізмів і машин, Деталі машин, та ін. Тому вивчення теоретичної механіки необхідне як для розуміння цих дисциплін, так і для наукового тлумачення явищ природи.

Як фундаментальна наука теоретична механіка була та залишається не тільки однією з дисциплін, яка дає поглиблені знання про природу. Вона є засобом розвитку у майбутніх спеціалістів необхідних творчих навиків до побудови математичних моделей процесів, які відбуваються у природі та техніці, до формування здібностей щодо наукових узагальнень і висновків.

За характером задач, які розглядаються, механіку класично поділяють на три розділи: статику, кінематику та динаміку. У статичі надається вчення про сили та умови рівноваги матеріальних тіл під дією сил. В кінематиці розглядаються загальні геометричні властивості руху тіл (без урахування мас і сил, що викликали цей рух). В динаміці вивчають рух матеріальних тіл під дією сил (і моментів), які викликали

цей рух з урахуванням мас (та моментів інерції). В такому ж порядку та відповідно до навчальних програми з «Теоретичної механіки» викладається дисципліна для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти за автомобільного, дорожньо-будівельного, механічного факультетів та факультету транспортних систем ХНАДУ.

Навчальний посібник поділено на три розділи, в кожному з яких є певна кількість глав. У кінці кожної глави наведено контрольні питання, відповідь на які дозволяє визначити рівень опанування теоретичного матеріалу. Нумерація рисунків і формул є подвійною – перша цифра відповідає номеру глави, друга поточному значенню в межах глави. За потреби наводяться приклади розв'язання задач, які дозволяють проілюструвати застосування теоретичного матеріалу на практиці.

Автори ставили за мету створити такий за обсягом навчальний посібник, який задовольняв вимогам до освітнього компоненту «Теоретична механіка» різних освітніх програм спеціальностей. В той же час, зважаючи на певні відмінності у освітніх програмах спеціальностей, викладач обирає ті глави видання, вивчення яких передбачено робочою програмою навчальної дисципліни «Теоретична механіка».

Даний навчально-методичний посібник складено з метою допомоги студентам в самостійній роботі, при підготовці до занять, контрольних робіт, тестового контролю, заліків та іспитів з теоретичної механіки.

Автори дуже вдячні кафедри деталей машин та теорії механізмів і машин ХНАДУ за надані зауваження технічного та методичного характеру, подолання яких на стадії роботи над виданням сприяло покращенню якості подання матеріалу в навчальному посібнику.

Окремо автори висловлюють щире подяку рецензентам за витрачений час та корисні поради.

Розділ Статика

Глава 1. Основні визначення теоретичної механіки

1.1. Основні поняття статички

Статика – це розділ механіки, в якому вивчаються методи перетворення систем сил в еквівалентні системи та встановлюють умови рівноваги сил, прикладених до твердих тіл.

Під **рівновагою** розуміють стан спокою тіла по відношенню до інших тіл. В курсі механіки розглядають задачі про рівновагу твердих тіл.

Матеріальна точка (МТ) – найпростіша модель матеріального тіла, розмірами якого можна нехтувати. МТ має масу та не здійснює обертальний рух.

Механічною системою називається **будь-яка сукупність матеріальних точок.**

Абсолютно твердим тілом є така механічна система, відстань між будь-якими точками якої не змінюється при довільних взаємодіях.

Сила – кількісна міра механічної взаємодії матеріальних тіл.

Сила є векторною величиною, яка визначається: 1) числовою величиною або модулем сили; 2) напрямом дії; 3) точкою прикладення. Пряма, вздовж якої спрямована сила, називається **лінією дії сили.**

Для знаходження твердого тіла під дією певної системи сил у рівновазі (стані спокою) необхідно, щоб ці сили задовольняли певним умовам рівноваги даної системи сил.

Для сил існують наступні визначення:

1. Тіло, не скріплене з іншими тілами та якому можна надати довільне переміщення у просторі, називається **вільним**. Або іншими словами:

Вільне тіло – якщо його переміщення нічим не обмежені. **Невільне тіло** – якщо його переміщення обмежені іншими тілами.

2. **Сукупність декількох сил**, прикладених до механічної системи, називають **системою сил**. Якщо лінії дії сил системи лежать в

одній площині, то її називають **плоскою**, якщо лінії дії лежать в різних площинах, то систему називають **просторовою**.

3. Якщо одну систему сил, діючих на вільне тверде тіло, можна замінити іншою системою, не змінюючи при цьому стан спокою або руху, в якому знаходиться тіло, то такі дві системи сил називаються **еквівалентними**.

4. Система сил, під дією якої тверде тіло може знаходитися в стані спокою, називається **зрівноваженою** або **еквівалентною до нуля**.

5. Якщо дана система сил еквівалентна одній силі, то ця сила називається **рівнодіючою** даної системи сил. Таким чином, **рівнодіюча – це сила, яка одна замінює дію даної системи сил на тверде тіло**.

Сила, що дорівнює рівнодіючій за модулем, прямо протилежна їй за напрямом і діє вздовж тієї ж прямої називається **зрівноважуючою** силою.

6. Сили, що діють на тверде тіло, поділяються на **зовнішні** та **внутрішні**. **Зовнішні** сили діють на точки даної механічної системи з боку МТ інших систем. **Внутрішні** – це сили взаємодії між МТ даної системи.

7. Сили поділяють на **об'ємні** (гравітаційні, сили інерції, електромагнітні) та **поверхневі**, які за характером поділяють на **зосереджені** та **розподілені**.

Зосереджена – сила, прикладена до тіла в будь-якій одній його точці.

Розподілені – сили, що діють на певну частину поверхні або об'єму тіла і характеризуються інтенсивністю.

8. За способом розташування у просторі розрізняють:

- **систему збіжних сил** (лінії дії сил сходяться в одній точці);
- **плоску систему сил** (сили даної системи розміщені в одній площині);
- **довільну систему сил** (сили даної системи розміщені довільно у просторі);
- **систему паралельних сил** (лінії дії сил даної системи паралельні між собою).

В подальшому під час вивчення теоретичної механіки ми будемо працювати з різними фізичними величинами, тому є доцільним надати відповідний матеріал.

1.2. Основні системи та одиниці вимірювання

Вибір одиниць, необхідних для вимірювань усіх фізичних величин, можна зробити двома шляхами. По-перше, можна скласти набір одиниць, установлюючи кожен одиницю незалежно від усіх інших. По-друге, можна утворити систему одиниць, установлюючи незалежно тільки одиниці невеликого числа величин — так звані основні одиниці, відносячи всі інші до розряду похідних, розмір яких закономірно зв'язаний з розмірами основних одиниць. При сучасному рівні розвитку науки і техніки другий спосіб є єдиноприйнятним. Історично в хронологічному порядку лише найбільш відомими системами були Система Гаусса, Система Британської Асоціації, Система МКГСС, Природна система одиниць Планка, Система МТС, Міжнародна система одиниць — фр. **Le Systeme International d'Unites**, скорочено *SI*, англ. **International System of Units**.

Визначимо поняття фізичної величини та одиниці фізичної величини.

Фізична величина – властивість, загальна в якісному відношенні багатьом фізичним об'єктам (фізичним системам, їхнім станам і процесам, що відбувається в них), але в кількісному відношенні індивідуальна для кожного об'єкта.

Одиниця фізичної величини – фізична величина, якій за визначенням надано значення, що дорівнює одиниці.

На даний час *SI* містить у своїй основі сім основних (еталонних) одиниць і дві додаткові. Зупинимось на трьох, які задіяні в теоретичній механіці.

Основні фізичні величини (використовують в механіці).

1. Фізична величина – довжина (**length**), позначення L , одиниця фізичної величини – метр, скорочене позначення – м.

2. Фізична величина – маса (**mass**), позначення M , одиниця фізичної величини – кілограм, скорочене позначення – кг.

3. Фізична величина – час (**time**), позначення T , одиниця фізичної величини – секунда, скорочене позначення – с.

Решта величин (наводимо для загальної інформації):

4. Фізична величина – сила електричного струму (**electric current**), позначення I , одиниця фізичної величини – ампер (**ampere**), скорочені позначення A і A .

5. Фізична величина – термодинамічна температура (**temperature**), позначення Θ , одиниця фізичної величини – кельвін (**kelvin**), скорочені позначення K і K .

6. Фізична величина – сила світла (**luminous intensity**), позначення J , одиниця фізичної величини – кандела (**candela**), скорочені позначення кд і cd .

7. Фізична величина – кількість речовини (**amount of substance**), позначення N , одиниця фізичної величини – моль (**mole**), скорочені позначення моль і mol .

Поряд із сьома основними одиницями SI прийнято ще користуватися двома додатковими одиницями, досить корисними для розв'язання фізичних задач, але приналежними скоріше до геометрії. Мова йде про радіан і стерадіан.

Додаткові фізичні величини.

Фізична величина – плоский кут (**plane angle**), позначення Ω , одиниця фізичної величини – радіан (**radian**), скорочене позначення рад.

Одиниця плоского кута – **радіан** дорівнює куту між двома радіусами окружності, довжина дуги між якими дорівнює радіусу. В градусному обчисленні радіан дорівнює $57^{\circ}17'44,8''$.

Фізична величина – тілесний кут (**solid angle**), позначення Ω , одиниця фізичної величини – стерадіан (**steradian**), скорочене позначення ср.

Похідні одиниці фізичних величин

Похідні одиниці SI утворюються на підставі законів, що встановлюють зв'язок між фізичними величинами, або на підставі прийнятих визначень відповідних величин. Існують іменні величини на честь видатних вчених, які мали відношення до відповідних галузей науки.

Скорочено ці величини завжди пишуться з великої літери, друга літера (якщо є) мала.

Для розмірності величин уведено позначення **dim** (скорочено від англ. **dimension** – розмірність, розмір). Таким чином, формула розмірності похідної одиниці у теоретичній механіці має вигляд:

$$[z] = \dim z = L^\alpha M^\beta T^\gamma,$$

де α, β, γ – показники степеня, що називаються розмірностями похідних величин щодо відповідних основних одиниць. Якщо фізична величина не залежить від жодної з основних величин, то вона називається безрозмірною величиною. Для того, щоб одержати формулу розмірності якої-небудь похідної одиниці, треба у визначальне рівняння підставити розмірності всіх одиниць фізичних величин, що входять у нього, і зробити необхідні математичні операції.

Таблиця 1.1

Префікс, позначення				Множник	Найменування множника
Українське		Латинське			
тера	Т	tera	T	10^{12}	трильйон
гіга	Г	giga	G	10^9	мільярд
мега	М	mega	M	10^6	мільйон
кіло	к	kilo	k	10^3	тисяча
гекто	г	hecto	h	10^2	сто
дека	да	deca	da	10^1	десять
				$10^0 = 1$	одиниця
деци	д	deci	d	10^{-1}	одна десята
санти	с	centi	c	10^{-2}	одна сота
мілі	м	milli	m	10^{-3}	одна тисячна
мікро	мк	micro	μ	10^{-6}	одна мільйонна
нано	н	nano	n	10^{-9}	одна мільярдна
піко	п	pico	p	10^{-12}	одна трильйонна

В рамках системи *SI* до когерентної системи одиниць додані десяткові кратні та частинні одиниці, які утворюються від вихідної одиниці

множенням або діленням на степінь числа 10. У Таблиці 1.1 наведені відповідні множники, приставки та їхні назви для деяких кратних та частинних одиниць вимірювань.

За необхідності будуть надані розмірності фізичних величин, які будуть введені під час вивчення дисципліни. Продемонструємо зазначений підхід на прикладі визначення розмірності сили (ваги).

Сила F (вага G) (від лат. **Fortis** – сильний, англ. **Force** – сила, **Gravity** – тяжіння, сила тяжіння) вводиться на основі другого закону Ньютона (докладно про це у розділі «Динаміка»). Припускаючи в цьому співвідношенні $m=1$ кг, $a=1$ м/с², одержимо: 1 одиниця сили=(1 кг)•(1 м/с²)=1 кг•м/с². Розмір одиниці дорівнює (1 кг)•(1 м):(1 с)². Найменування цієї одиниці «ньютон», скорочене позначення Н. 1 Ньютон – сила, що надає тілу з масою 1 кг прискорення 1 м/с² у напрямку дії сили. Розмірність одиниці сили

$$[F] = [m] \cdot [a] = LMT^{-2}.$$

1.3. Аксиоми статички

Аксиоми статички – це вихідні положення, які сформульовані на підставі численних дослідів та спостережень над навколишніми об'єктами реального світу, що приймаються без будь-яких доказів.

Аксиома (1) рівноваги системи двох сил (рис. 1.1)

Якщо на вільне абсолютно тверде тіло діють дві сили, то тіло може знаходитися у рівновазі тоді і тільки тоді, коли ці сили рівні за модулем ($F_1 = F_2$) і спрямовані вздовж однієї прямої в протилежному напрямі.

Аксиома (2) про додавання (відкидання) системи сил, яка еквівалентна нулю (рис. 1.2)

Дія даної системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або від неї відкинути систему сил, еквівалентну нулю.

Наслідок з 1-ї та 2-ї аксіом. Дія сили на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо перенести точку прикладення сили вздовж її лінії дії в іншу точку тіла.

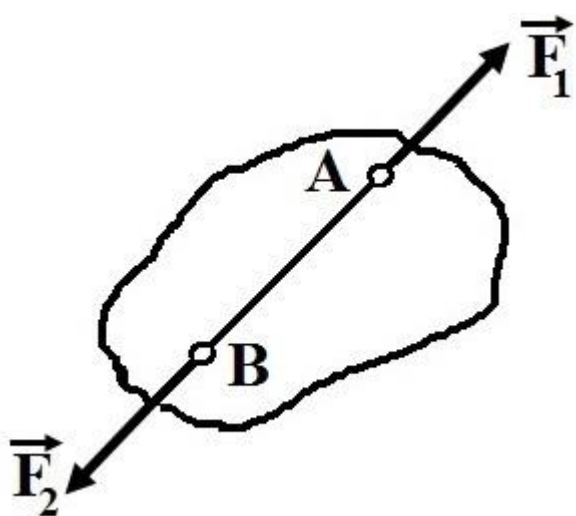


Рисунок 1.1.

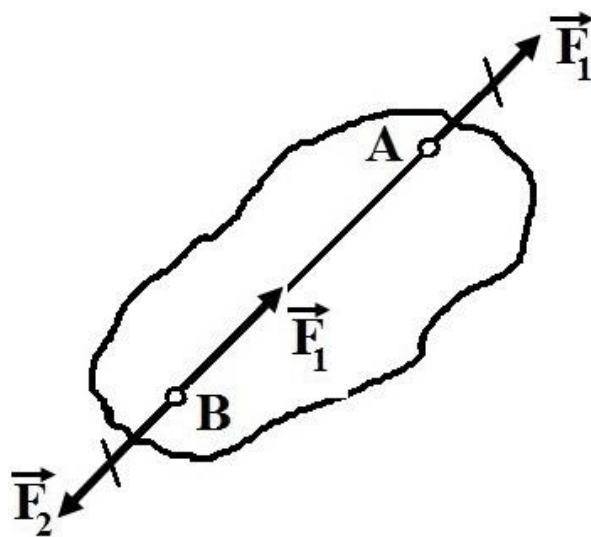


Рисунок 1.2.

Нехай на тверде тіло діє сила \vec{F} , яку прикладено в точці A . На лінії дії цієї сили в точці B прикладемо еквівалентну нулю систему сил \vec{F}_1, \vec{F}_2 (сили однакові за модулем $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}|$, спрямовані в протилежні сторони). Система сил \vec{F} і \vec{F}_2 на підставі Аксіоми (1) еквівалентна нулю і на підставі Аксіоми (2) її можна відкинути. Таким чином, на тіло діє тільки сила \vec{F}_1 . Вектор \vec{F} можна вважати прикладеним в довільній точці на лінії дії цієї сили. Такий вектор називається **КОВЗНИМ**.

Аксіома (3) паралелограма сил (рис. 1.3)

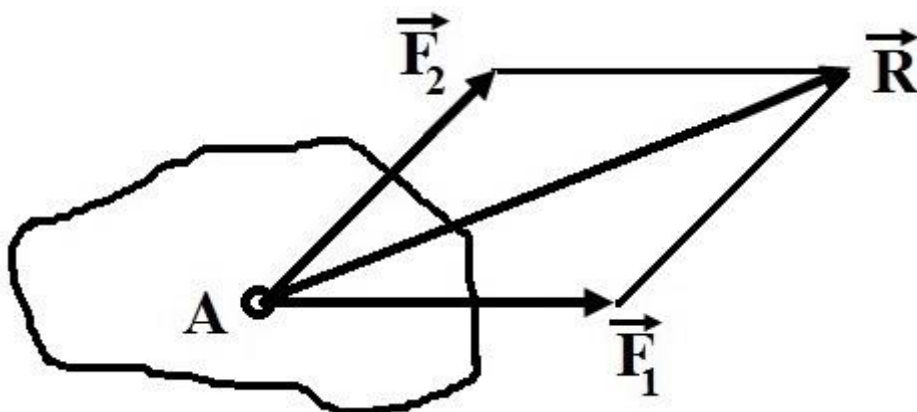


Рисунок 1.3.

Дві сили, що діють в одній точці твердого тіла, можна замінити однією рівнодіючою силою, що дорівнює за величиною і напрямом дії діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах.

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\vec{F}_1, \vec{F}_2)},$$

де (\vec{F}_1, \vec{F}_2) – кут між векторами \vec{F}_1, \vec{F}_2 .

Аксиома (4) дії та протидії (рис. 1.4)

Сили взаємодії двох матеріальних точок однакові за модулем, протилежні за напрямом і діють вздовж однієї прямої, що проходить через ці точки.

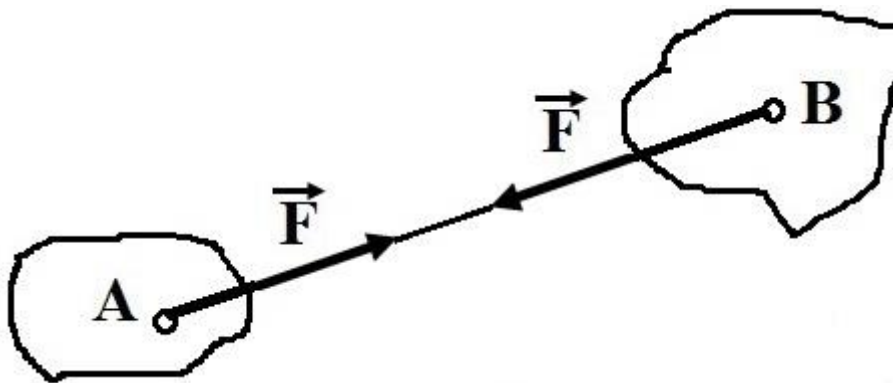


Рисунок 1.4.

Аксиома (5) – принцип тверднення

Рівновага змінного (деформівного) тіла, що знаходиться під дією даної системи сил, не зміниться, якщо тіло вважати затверділим (абсолютно твердим).

Для формулювання останньої аксіоми статички необхідно ввести поняття в'язей і реакцій в'язей.

1.4. В'язі та їх реакції

Все, що обмежує переміщення даного тіла в просторі, називається в'яззю. Сила, з якою дана в'язь діє на тіло, перешкоджаючи тим чи іншим його переміщенням: називається силою реакції (протидії) в'язі або просто реакцією в'язі. Реакція в'язі

спрямована в бік, протилежний тому, куди в'язь не дає переміщуватися тілу.

В механіці приймають наступне положення (**Аксиома (6) – принцип звільнення**)

будь-яке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо дію в'язей замінити їх реакціями, прикладеними до даного тіла.

Конструктивно в'язі можуть бути виконані у вигляді різних опор, шарнірних з'єднань, гнучких елементів тощо. Вважатиме, що в'язі виконані з абсолютно твердих тіл, тертям у місці з'єднання в'язі з основним тілом можна нехтувати. Такі в'язі будемо називати ідеальними. Розглянемо деякі типові види в'язей.

1. **Гладка поверхня або опора.** (рис. 1.5)

Гладка поверхня не перешкоджає пересуванню тіла вздовж площини під дією сил, але не допускає його пересування у напрямі, перпендикулярному до площини. Реакція \vec{N} спрямована за загальною нормаллю до поверхонь стику, має назву нормальної реакції.

2. **Гнучка в'язь (трос, нитка, канат).** (рис. 1.6)

Гнучкі в'язі реалізують за допомогою ниток, шнурків, ланцюгів, канатів, які вважаємо нерозтяжними та невагомими. Реакція \vec{R}_1 (або інші за необхідності, наприклад, \vec{R}_2) спрямована вздовж нитки до точки підвісу.

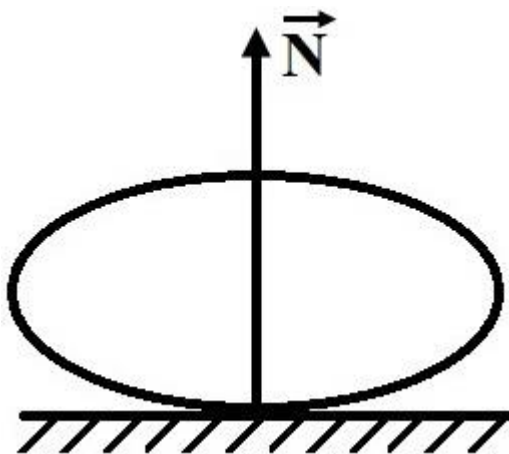


Рисунок 1.5.

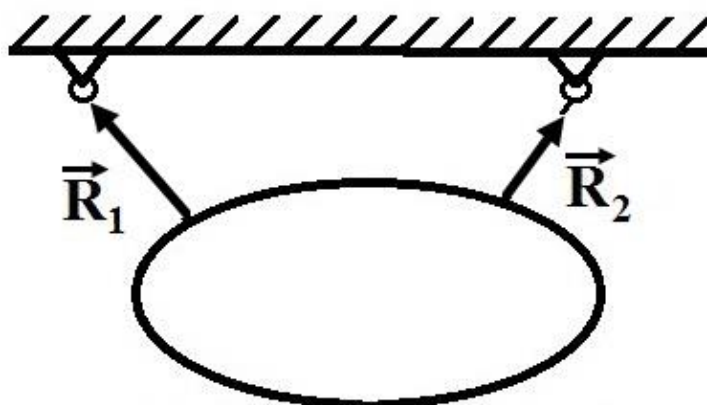


Рисунок 1.6.

3. **Циліндрична шарнірно-нерухома опора.** (рис. 1.7)

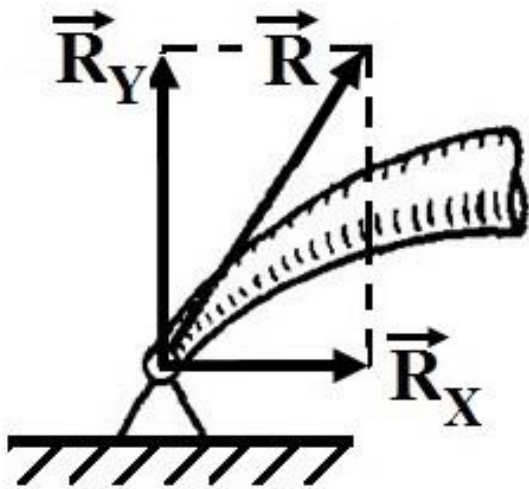


Рисунок 1.7.

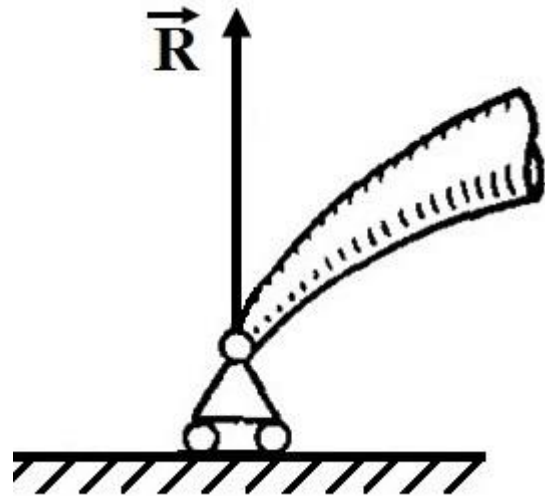


Рисунок 1.8.

Ця опора реалізується за допомогою двох циліндрів, які мають спільну геометричну вісь, спрямовану перпендикулярно до площини рисунку. Реакція такої опори проходить через її вісь, напрям дії може бути довільним в площині, перпендикулярній до осі опори. Реакція \vec{R} має складові \vec{R}_x , \vec{R}_y – розклад на відповідні осі. Шарнірно-нерухома опора (нерухомий шарнір) дозволяє тілу вільно повертатися навколо осі шарніра, але перешкоджає його лінійним переміщенням у всіх напрямках.

4. **Циліндрична шарнірно-рухома опора.** (рис. 1.8)

Перешкоджає переміщенню закріпленої точки тіла за перпендикуляром до площини контакту, відповідно, реакція опори має напрям цього перпендикуляра. Відповідні котки дозволяють переміщувати тіло паралельно до нерухомої опорної поверхні. Шарнірно-рухома опора (рухомий шарнір) дозволяє тілу вільно повертатися навколо осі шарніра.

5. **Жорстке закладення.** (рис. 1.9)

Такий тип в'язі існує за умови нерухомого з'єднання тіла з опорою. Обмежуються лінійні переміщення та повертання тіла в місці закріплення (прямий кут між опорою та тілом залишається незмінним). Реакцію складають реактивна сила \vec{R}_A (розкладається по осях на складові \vec{R}_{Ax} та

\vec{R}_{AY}) та момент \vec{M}_A (іноді позначається \vec{M}_A^R), який зветься **реактивним моментом**. Поняття моменту буде введено у Главі 3.

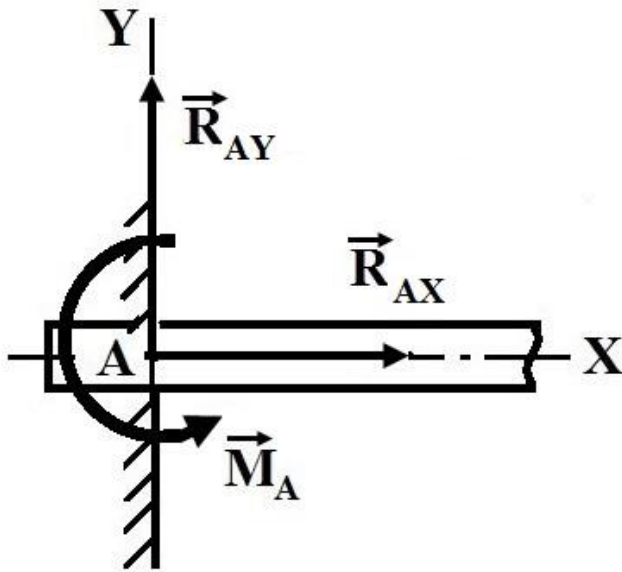


Рисунок 1.9.

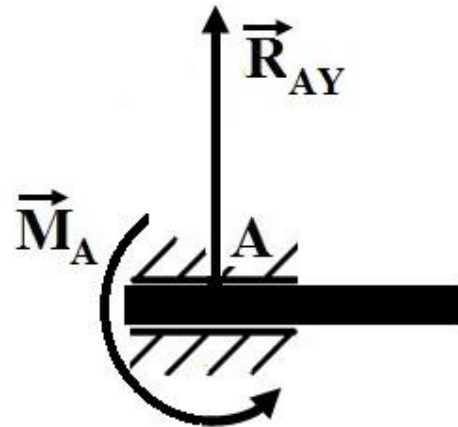


Рисунок 1.10.

6. Ковзаюче закладення (рис. 1.10)

Заборона переміщення в одному напрямі, в іншому ніяких обмежень на переміщення, напрямні опори не дозволяють провертатися стержню, що є причиною виникнення реактивного моменту. Заміна однією реакцією у напрямі, перпендикулярному до напрямних, та реактивним моментом.

Контрольні питання

1. Що називається механікою?
2. Що вивчається у розділі статика? Назвіть дві основні задачі статика.
3. Назвіть основні поняття статика.
4. Які існують аксіоми статика?
5. Які типи в'язей вам відомі? Наведіть приклади.
6. Поясніть фізичний сенс поняття реакції в'язі.

Глава 2. Плоска система збіжних сил. Її рівнодійна

2.1. Основні задачі статики. Система сил

У статичі абсолютно твердого тіла існують дві основні задачі:

- 1) **Перша задача статики, або Задача про приведення системи сил:** як дану систему сил замінити іншою, зокрема, більш простішою, еквівалентною до даної.
- 2) **Друга задача статики, або Задача про рівновагу:** яким умовам повинна задовольняти система сил, прикладена до даного тіла (або МТ), щоб вона була зрівноваженою системою. Встановлені умови рівноваги використовують при розв'язанні задач з визначення відомих активних сил і невідомих реакцій в'язей.

Розв'язують зазначені задачі статики у геометричний або аналітичний способи.

Сукупність сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$, які діють на тіло, називають **системою сил**, які можуть бути збіжними або довільно розташованими.

2.2. Геометричний (графічний) спосіб додавання збіжних сил

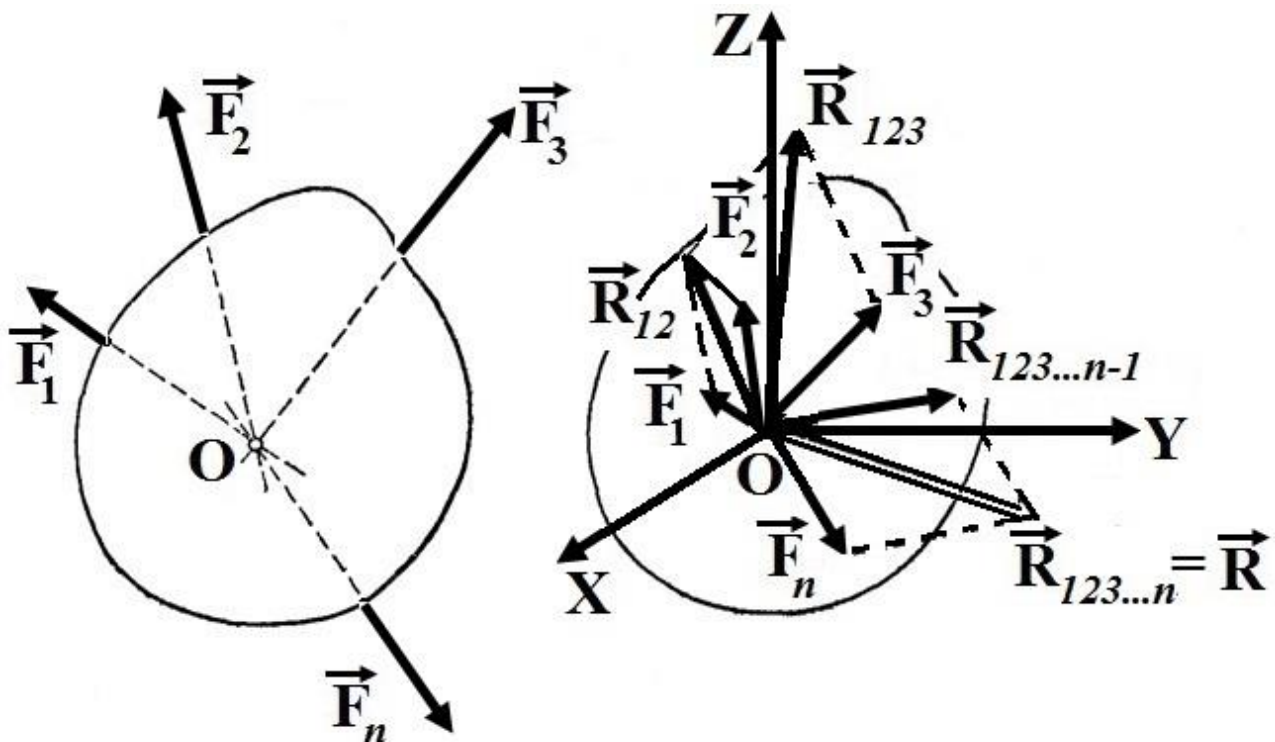


Рисунок 2.1.

Нехай задана система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$, прикладених до абсолютно твердого тіла (рис. 2.1). Перенесемо точки прикладення сил по лініях їх дії в точку перетину цих ліній. Отримуємо систему сил, прикладених в одній точці, що є ознакою **збіжних сил**. На основі Аксиоми 3 проводимо послідовне додавання сил за правилом паралелограма:

$$\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

$$\vec{R}_{123} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

$$\vec{R}_{123\dots n} = \vec{R}_{12\dots n-1} + \vec{F}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

або

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.1)$$

Таким чином, система збіжних сил має рівнодійну, що дорівнює векторній сумі, або **головному вектору**, цих сил і прикладену в точці збігу (рис. 2.1). Побудова рівнодійної може бути спрощена, якщо замість паралелограма побудувати **силовий багатокутник**, для якого від кінця попередньої сили відкладається вектор наступної сили. На рис. 2.2 показано побудову силового багатокутника для тіла під дією 4-х збіжних сил.

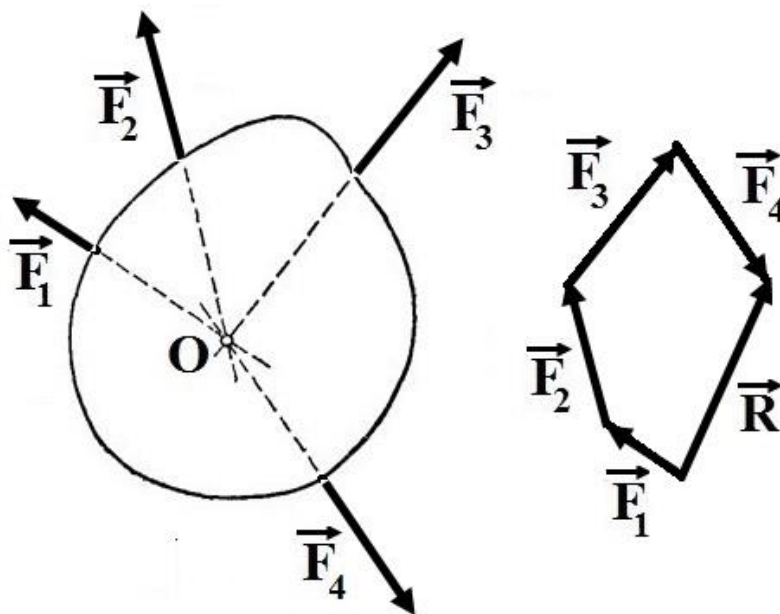


Рисунок 2.2.

2.3. Аналітичний спосіб додавання збіжних сил

Поряд з графічним (геометричним) способом найбільш загальним способом визначення модуля та напрямку рівнодійної є аналітичний спосіб, який витікає з рівняння (2.1) і ґрунтується на понятті про проекцію сили на вісь, а саме: **проекція вектора сили на вісь є алгебраїчна величина, яка дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між додатним напрямком осі і вектором сили.**

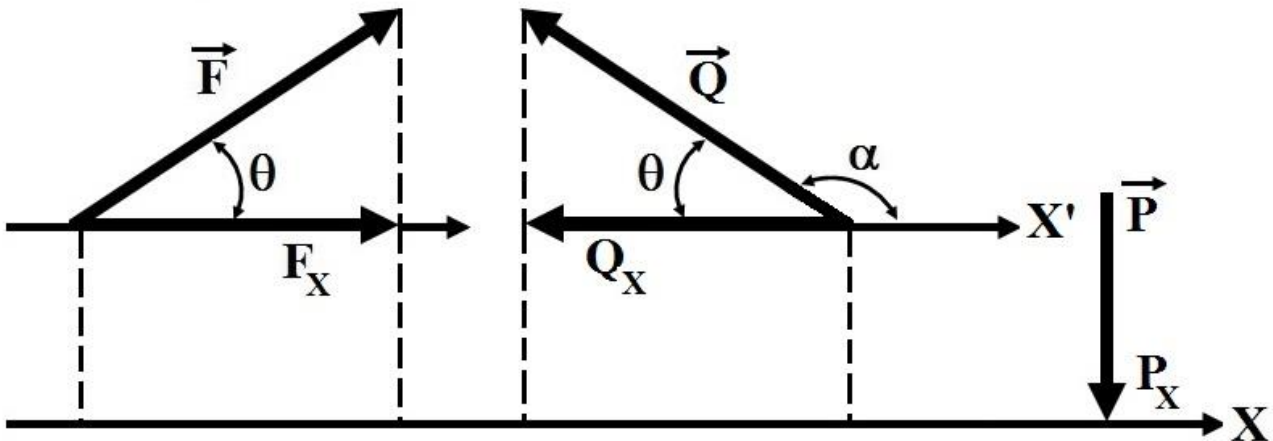


Рисунок 2.3.

Якщо цей кут гострий – проекція є додатною, якщо тупий – від’ємна, за умов перпендикулярності сили до осі – її проекція на цю вісь дорівнює нулю (рис. 2.3). Так, для сил на рис. 2.3 маємо:

$$F_x = F \cos \theta, \quad Q_x = Q \cos \alpha = -Q \cos \theta, \quad P_x = 0. \quad (2.2)$$

Осі X і X' є паралельними, тобто можна проектувати на будь-яку паралельну до обраної вісь.

Проекцією сили на площину називають вектор, який знаходиться між проекціями початку та кінця сили на цю площину (рис. 2.4). Таким чином, на відміну від проекції сили на вісь, проекція сили на площину є величина векторна через наявність числового значення, напрямом і точки прикладання. На рис. 2.4 показано проекцію сили \vec{F} на площину OXY . За модулем $F_{XY} = F \cos \theta$, де θ – кут між напрямом сили \vec{F} і її проекції \vec{F}_{XY} .

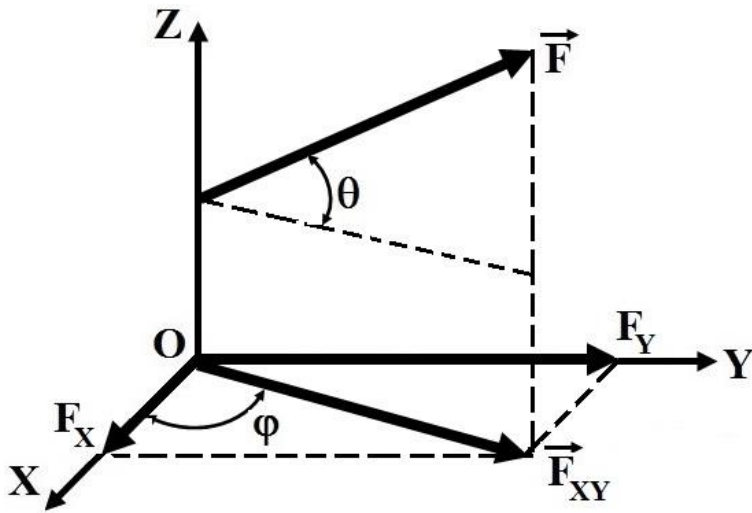


Рисунок 2.4.

У деяких випадках для знаходження проекції сили на вісь зручніше знайти спочатку її проекцію на площину, в якій ця вісь лежить, а потім знайдену проекцію на площину спроектувати на вісь. Для сили на рис. 2.4 знайдемо у такий спосіб:

$$F_X = F_{XY} \cos \varphi = F \cos \theta \cos \varphi, \quad F_Y = F_{XY} \sin \varphi = F \cos \theta \sin \varphi. \quad (2.3)$$

Спроектуємо рівність (2.1) на осі координат:

$$\begin{aligned} R_X &= F_{1X} + F_{2X} + \dots + F_{nX} = \sum_{i=1}^n F_{iX} \\ R_Y &= F_{1Y} + F_{2Y} + \dots + F_{nY} = \sum_{i=1}^n F_{iY}, \\ R_Z &= F_{1Z} + F_{2Z} + \dots + F_{nZ} = \sum_{i=1}^n F_{iZ} \end{aligned} \quad (2.4)$$

де F_{iX} , F_{iY} , F_{iZ} – проекції сили \vec{F}_i на осі, а R_X , R_Y , R_Z – проекції рівнодійної \vec{R} на ті ж осі. Отже:

проекції рівнодійної системи збіжних сил на координатні осі дорівнюють алгебраїчним суммам проекцій цих сил на відповідні осі. За допомогою виразів (2.4) можна знайти модуль рівнодійної та її напрям в прямокутній (декартовій) системі координат:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2} = \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{iX}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iY}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iZ}\right)^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\cos(\vec{R}, X) = \frac{R_X}{R}, \quad \cos(\vec{R}, Y) = \frac{R_Y}{R}, \quad \cos(\vec{R}, Z) = \frac{R_Z}{R}. \quad (2.6)$$

Для плоскої системи змінні, що відповідають осі Z , тотожно дорівнюють нулю, що призводить до спрощення формул (2.4)-(2.6).

2.4. Умови рівноваги збіжної системи сил. Алгоритм аналітичного розв'язання задач на рівновагу

Для рівноваги системи збіжних сил, прикладених до твердого тіла, необхідно та достатньо, щоб їх рівнодійна дорівнювала нулю, або щоб силовий многокутник був замкнений. Останнє означає, що в силовому многокутнику урівноваженої системи збіжних сил кінець останньої сили має збігатися з початком першої. Цю умову зручно використовувати при графічному розв'язанні задач для плоскої системи сил (рис. 2.5).

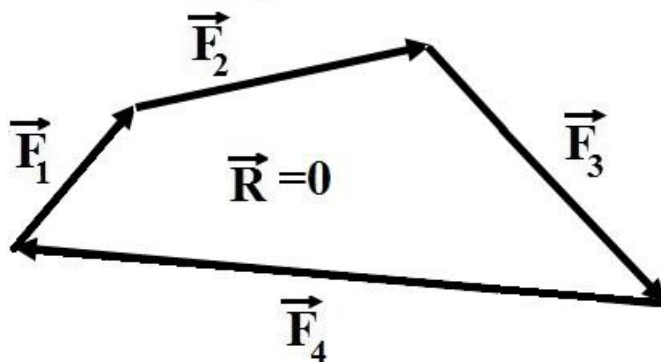


Рисунок 2.5.

Рівність

$$\vec{R} = 0 \quad (2.7)$$

еквівалентна 3-м скалярним рівнянням, які є аналітичною умовою рівноваги:

$$R_X = \sum_{i=1}^n F_{iX} \equiv 0,$$

$$R_Y = \sum_{i=1}^n F_{iY} \equiv 0,$$

$$R_Z = \sum_{i=1}^n F_{iZ} \equiv 0. \quad (2.8)$$

Для плоскої системи сил рівняння для R_Z не потрібно.

Умови рівноваги (як в аналітичній, так і в геометричній формі) дозволяють проконтролювати, чи знаходиться у рівновазі задана система сил.

Задачі, в яких кількість невідомих величин дорівнює кількості рівнянь рівноваги, до яких вони входять, називають **статично визначеними**. Задачі, в яких кількість невідомих перевищує кількість рівнянь рівноваги, до яких вони входять, називають **статично невизначеними**.

Вибір напрямів координатних осей, на які проектуються сили, не має принципового характеру. Під час розв'язання задач доцільно орієнтуватися на діючі на конструкцію активні сили, прямуючи осі координат перпендикулярно до їх напрямів. Це дозволяє скоротити число невідомих у рівняннях рівноваги.

Всі задачі на рівновагу матеріального об'єкта рекомендується розв'язувати за таким алгоритмом:

1. Виділити матеріальний об'єкт (точку, тверде тіло), рівновага якого буде розглядатися.
2. До виділеного об'єкта прикласти всі активні сили.
3. Користуючись принципом звільнення від в'язей, відкинути в'язі, які накладені на об'єкт, замінивши їх дію відповідними реакціями.
4. Вибрати систему координат, якщо в поставленій задачі вона не задана.
5. Для отриманої системи сил, що діють на об'єкт, застосувати умови рівноваги.
6. Розв'язати систему рівнянь рівноваги та визначити невідомі реакції.

Всі розрахунки при розв'язанні задач рекомендовано проводити у загальному вигляді (алгебраїчно). Тоді для шуканих величин мають бути отримані формули, що дають змогу проаналізувати знайдені результати. Обов'язково потрібно провести аналіз розмірностей величин, які при складанні рівняння мають бути однаковими – доданки у виразах не можуть бути різних розмірностей. Числа підставляють тільки в кінцеві вирази.

Контрольні питання

1. Сформулюйте основні задачі статички.
2. Що називають системою сил?
3. У чому полягають векторний та аналітичний способи додавання сил та визначення рівнодійної?
4. Сформулюйте аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил.
5. Поясніть поняття силового многокутника.
6. Як визначаються проекції сили на вісь та площину?
7. Що таке статично визначені та статично невизначені задачі?

Глава 3. Теорія моменту сили відносно центра та осі

3.1. Момент сили відносно точки

Поняття про момент сили є одним з основних понять механіки, яке широко використовують і в теоретичних дослідженнях, і при практичних розрахунках. Введемо поняття моменту сили.

Задана сила \vec{F} , яка зображена у вигляді вектора \overrightarrow{AB} , і прикладена до тіла у точці A . Визначимо момент сили \vec{F} відносно центру O (рис. 3.1).

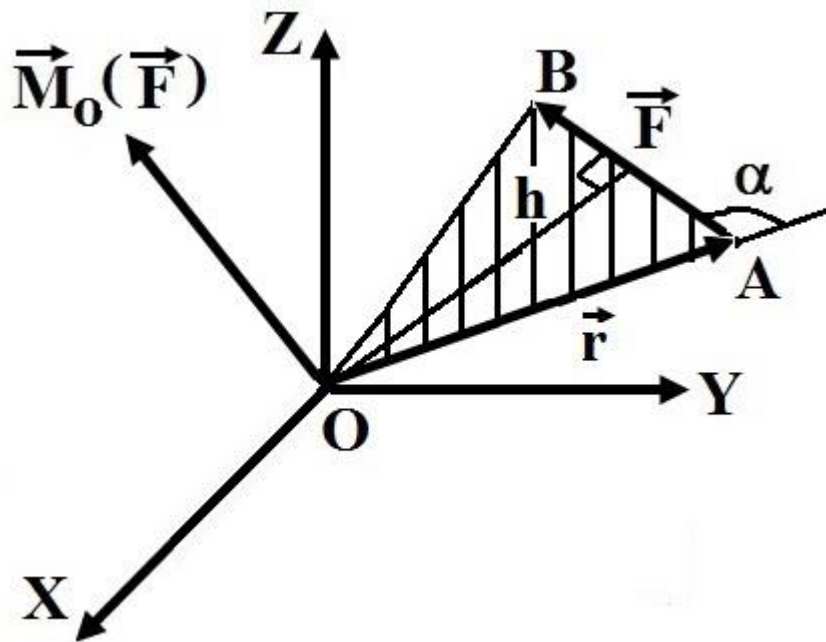


Рисунок 3.1.

Якщо O – точка, відносно якої визначається момент сили \vec{F} , то момент сили позначається символом $\vec{M}_O(\vec{F})$. Позначення M від лат. **Movimentum, Momentum, Movere** – рухати.

Моментом сили відносно будь-якої точки (центру) називається вектор, який чисельно дорівнює добутку модуля сили на плече, тобто на найкоротшу відстань від вказаної точки до лінії дії сили. Ця відстань називається плече. Вектор моменту спрямований перпендикулярно до площини, що проходить через обрану точку та лінію дії сили, в той бік, звідки «обертання» сили навколо точки відбувається проти ходу годинникової стрілки. Момент сили характеризує її обертальну дію.

Якщо точка прикладення сили \vec{F} визначається радіус-вектором \vec{r} відносно O , то справедливе співвідношення:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (3.1)$$

Момент сили дорівнює векторному добутку вектора \vec{r} на вектор \vec{F} . Модуль векторного добутку дорівнює:

$$M_O(\vec{F}) = \pm rF \sin \alpha = \pm Fh, \quad (3.2)$$

де h – плече сили. Для моменту правило знаків:

якщо сила намагається обертати тіло навколо центра проти ходу годинникової стрілки, обираємо знак «плюс», за ходом годинникової стрілки, обираємо знак «мінус» (рис 3.2).

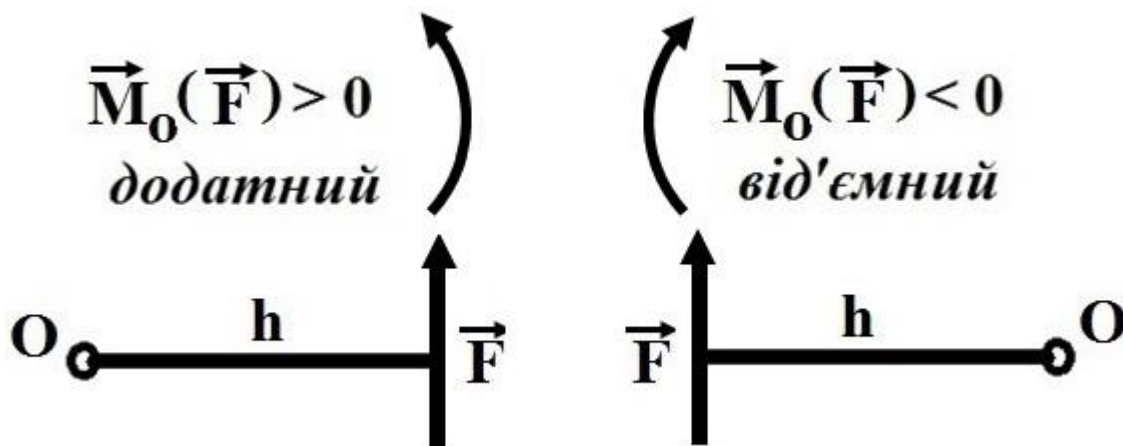


Рисунок 3.2.

Якщо лінія дії сили проходить через центр, то момент сили відносно цього центру буде дорівнювати нулю.

Момент сили відносно точки не змінюється при перенесенні сили вздовж її лінії дії, оскільки незмінним залишається плече сили відносно центру.

За формулою (3.2) визначимо розмірність моменту сили. 1 одиниця моменту сили $= (1 \text{ Н}) \cdot (1 \text{ м}) = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2 \cdot \text{м}$. Розмір одиниці дорівнює $(1 \text{ кг}) \cdot (1 \text{ м})^2 : (1 \text{ с})^2$. Найменування цієї одиниці «ньютон-метр», скорочене позначення Н•м. 1 Ньютон-метр – це момент, який утворює сила 1 Н на важелі довжиною 1 м. Розмірність одиниці моменту сили:

$$[M] = [F] \cdot [h] = L^2MT^{-2}.$$

Нехай x, y, z – координати точки прикладення сили, а F_X, F_Y, F_Z – проекції сили на координатні осі. Тоді, якщо точка O знаходиться у початку координат, момент сили має вигляд ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти координатних осей):

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}) &= \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_X & F_Y & F_Z \end{vmatrix} = \\ &= (yF_Z - zF_Y)\vec{i} + (zF_X - xF_Z)\vec{j} + (xF_Y - yF_X)\vec{k}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

З цього слідує, що проекції моменту сили на координатні осі визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} M_{OX}(\vec{F}) &= yF_Z - zF_Y \\ M_{OY}(\vec{F}) &= zF_X - xF_Z \\ M_{OZ}(\vec{F}) &= xF_Y - yF_X \end{aligned} \quad (3.4)$$

Модуль моменту $\vec{M}_O(\vec{F})$ і косинуси кутів, які він утворює з осями координат, можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned} |\vec{M}_O(\vec{F})| &= \sqrt{(yF_Z - zF_Y)^2 + (zF_X - xF_Z)^2 + (xF_Y - yF_X)^2} \\ \cos(\vec{M}_O, X) &= M_{OX}(\vec{F})/|\vec{M}_O(\vec{F})| \\ \cos(\vec{M}_O, Y) &= M_{OY}(\vec{F})/|\vec{M}_O(\vec{F})|. \\ \cos(\vec{M}_O, Z) &= M_{OZ}(\vec{F})/|\vec{M}_O(\vec{F})| \end{aligned}$$

3.2. Момент сили відносно осі

Нехай до тіла в деякій точці прикладена сила \vec{F} (рис. 3.3).

Проекцією сили на площину називається **вектор**, початок і кінець якого збігаються з проекцією початку та кінця сили на цю площину.

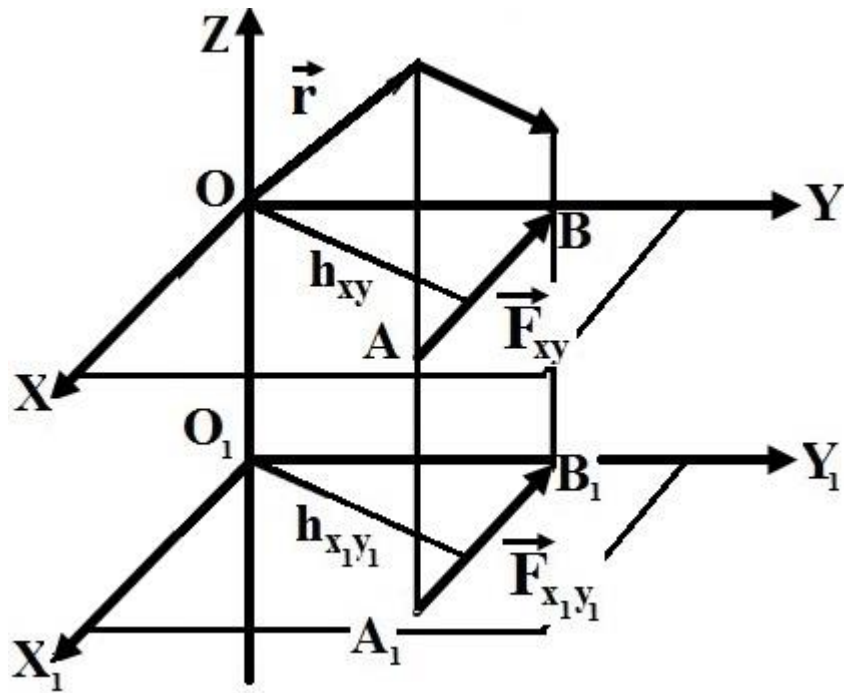


Рисунок 3.3.

Позначимо \vec{F}_{XY} проекцію сили \vec{F} на площину OXY , перпендикулярну до осі Z , h_{XY} – плече проекції моменту $M_{OZ}(\vec{F})$ відносно точки O . Тоді момент сили:

$$M_{OZ}(\vec{F}) = |\vec{F}_{XY}| h_{XY}. \quad (3.5)$$

Очевидно, той самий результат можна отримати, якщо спроектувати силу \vec{F} на площину OX_1Y_1 , перпендикулярну до осі Z з проекцією $\vec{F}_{X_1Y_1}$, $h_{X_1Y_1}$ – плече проекції моменту $M_{O_1Z}(\vec{F})$ відносно точки O_1 . Момент сили за аналогією з (3.5):

$$M_{O_1Z}(\vec{F}) = |\vec{F}_{X_1Y_1}| h_{X_1Y_1}.$$

З рівності проекцій отримуємо:

$$M_{OZ}(\vec{F}) = M_{O_1Z}(\vec{F}) = \pm |\vec{F}_{XY}| h_{XY}, \quad (3.6)$$

тобто проекція моменту сили відносно точки на вісь, що проходить через цю точку, не залежить від вибору точки на осі. Тому в подальшому будемо опускати позначення точки, залишаючи тільки позначення осі, а саме $M_Z(\vec{F})$.

Моментом сили відносно осі називається алгебраїчний момент проекції цієї сили на площину, перпендикулярну осі, відносно точки перетину осі з цією площиною.

Якщо з боку позитивного напрямку осі ми бачимо, що сила намагається повернути тіло проти ходу годинникової стрілки, момент є додатним. Якщо за ходом годинниковою стрілки – від'ємним.

З формули (3.6) слідує, що **момент сили відносно осі дорівнює нулю** у двох випадках:

1. Коли проекція сили на площину, перпендикулярну осі, дорівнює нулю, тобто коли **сила та вісь паралельні**.
2. Коли плече проекції $h = h_{XY} = 0$, тобто коли **лінія дії сили перетинає вісь**.

Фактично, зазначені умови еквівалентні одній умові: **момент сили відносно осі дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли лінія дії сили та вісь знаходяться в одній площині**.

Для обчислення моментів сили відносно осей координат використаємо формули (3.4), відкидаючи позначення O в виразах для проекцій моменту.

3.3. Додавання двох паралельних сил

Для сил, не рівних за модулем, можна визначити рівнодійну. На рис. 3.4 і 3.5 показано варіанти дії сил в одному напрямі та в різних, для яких визначено рівнодійну та місце її знаходження.

Рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих в один бік, паралельна до цих сил, спрямована в той самий бік, що й зазначені сили. Ця рівнодійна дорівнює сумі сил, а лінія її дії поділяє відстань між точками прикладення цих сил внутрішньо на частини, обернено пропорційні до цих сил (рис. 3.4).

Рівнодійна двох паралельних сил, не однакових за модулем та протилежно спрямованих, є паралельною до цих сил, спрямована у бік більшої за модулем сили і дорівнює різниці сил. Лінія її дії проходить через точку, яка лежить зовні відрізка, що поєднує початки векторів сил, з боку більшої за модулем сили та

поділяє відстань між точками прикладення сил зовнішньо на відрізки, обернено пропорційні до модулів сил. (рис. 3.5).

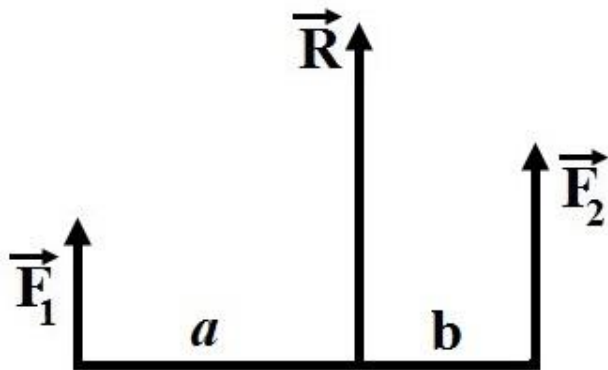


Рисунок 3.4.

$$R = F_2 + F_1, \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{a}{b}$$

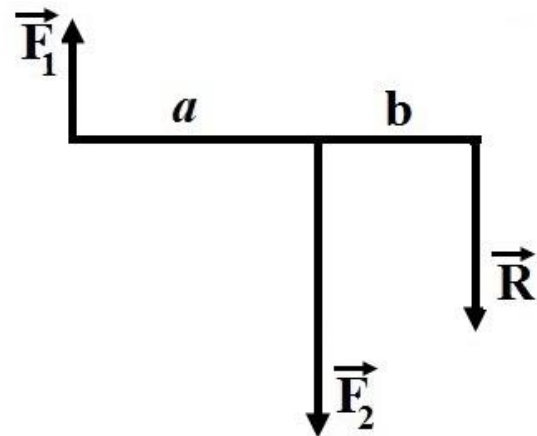


Рисунок 3.5.

$$R = F_2 - F_1, \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{a+b}{b}$$

Якщо є сили, рівні за модулем і спрямовані протилежно одна до одній, то формально в такому випадку рівнодійна дорівнює нулю, однак тіло під дією такої системи сил не буде знаходитись у рівновазі (наприклад, різноспрямований рух лівої та правої рук, що утримують кермо автомобіля, і, як наслідок, обертання керма).

Цей випадок особливий, оскільки такі дві сили є якісно новим елементом статички, який називається **парою сил**.

3.4. Момент пари сил

Парою сил називається система двох рівних за модулем, паралельних і спрямованих в протилежні боки сил, діючих на абсолютно тверде тіло. Пара сил – це особлива міра механічної взаємодії тіл. Система сил \vec{F}, \vec{F}^* , яка утворює пару, не знаходиться у рівновазі, не має рівнодійної (рис. 3.6).

Площина, що проходить через лінії дії пари сил, називається **площиною дії пари**. Відстань d між лініями дії сил пари називається **плечем пари**.

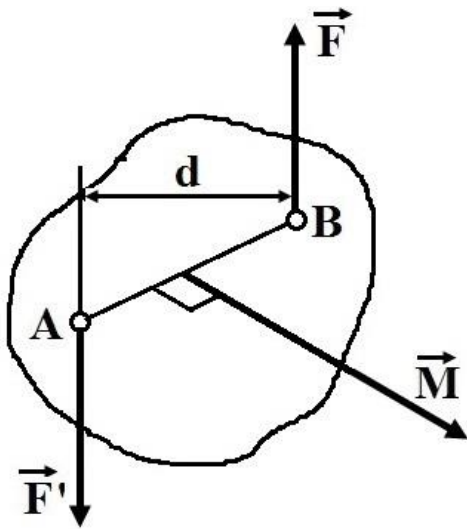


Рисунок 3.6.

Дія пари сил на тверде тіло зводиться до деякого обертального ефекту, який характеризується величиною, що називається **моментом пари** \vec{M} . Цей момент визначається:

- 1) модулем $M = \pm Fd$;
- 2) положенням у просторі площини дії пари;
- 3) напрямом повороту пари у цій площині.

Вектор-момент пари спрямовують відповідно до поняття векторного добутку перпендикулярно до площини дії пари так, щоб з його кінця було видно намагання пари сил обертати тіло проти ходу годинникової стрілки (рис. 3.7).

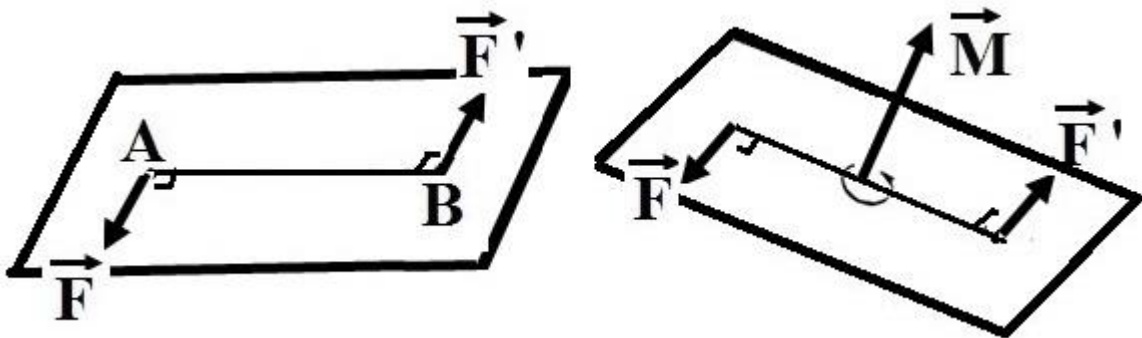


Рисунок 3.7.

Домовимося вважати момент **додатним**, якщо пара намагається повернути тіло проти ходу годинникової стрілки, та **від'ємним**, якщо за ходом годинникової стрілки (рис. 3.8).

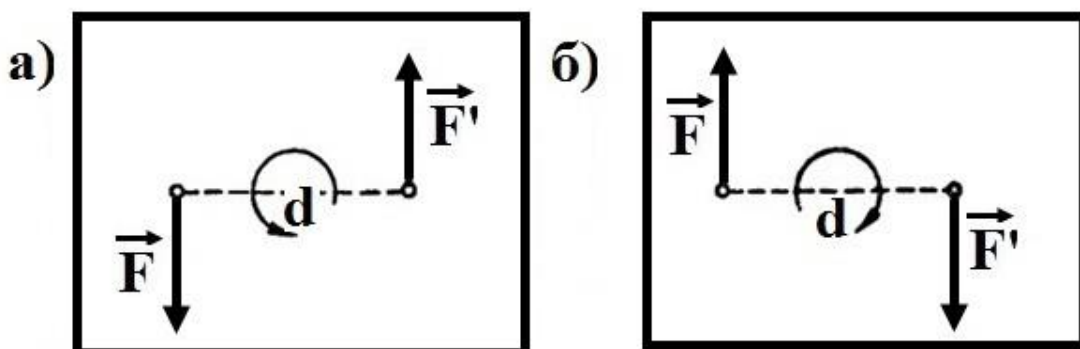


Рисунок 3.8.

Оскільки момент пари сил не залежить від вибору центру моментів сил пари, то можна допустити, що вектор-момент пари сил можна прикладати в будь-якій точці простору, тобто вважати його вільним вектором. Таким чином, задану пару сил, не змінюючи її дії на тверде тіло, можна переносити куди завгодно в площині дії пари.

З формули для модуля M моменту \vec{M} пари сил слідує, що дві пари сил, які мають однакові за величиною моменти, є **еквівалентними**, тобто діють на тіло однаково. Це означає, що дві пари сил, незалежно від того, де кожна з них розташована в даній площині (або паралельних площинах) і чому дорівнюють модулі їх сил та їх плечі, будуть еквівалентними за умов однаковості модуля M .

Контрольні питання

1. Що називається моментом сили відносно точки та відносно осі? Сформулюйте правило знаків для нього.
2. Як спрощується система двох паралельних сил?
3. Що називається парою сил?
4. У чому полягає еквівалентність двох пар?

Глава 4. Приведення довільної системи сил. Умови рівноваги

4.1. Приведення довільної системи сил до даного центру

Головна теорема статички:

Довільна система сил, що діють на тверде тіло, може бути приведена до даного центру, тобто замінена іншою, їй еквівалентною, але значно простішою, яка складається тільки з однієї сили та однієї пари.

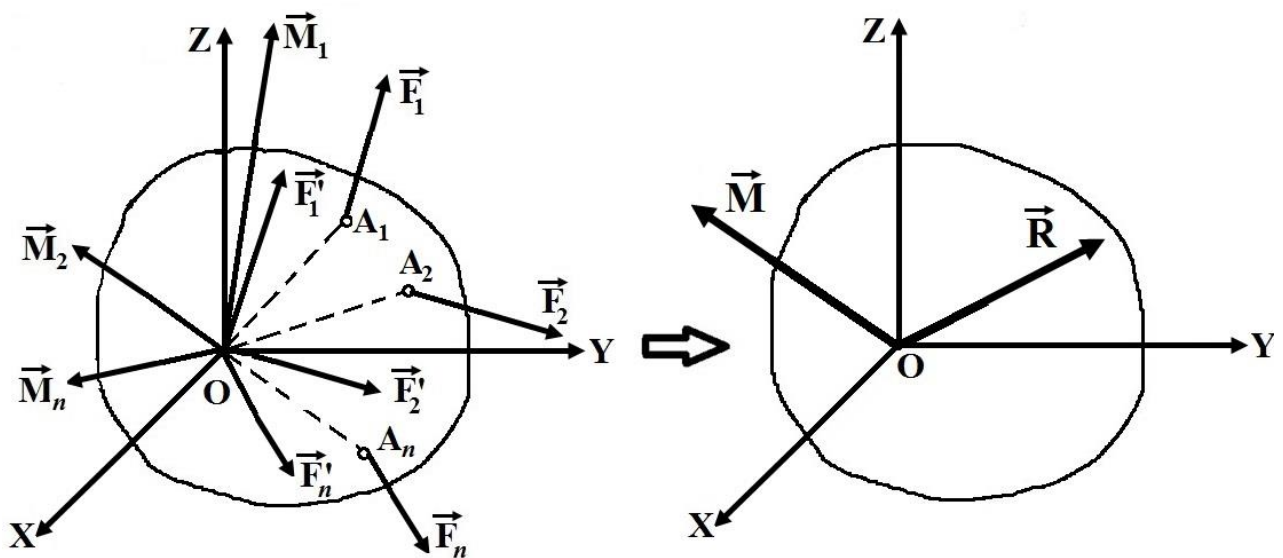


Рисунок 4.1.

Нехай на тіло діє довільна система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$. Обираємо довільну точку O за центр приведення та перенесемо всі сили до неї, приєднуючи при цьому відповідні пари. Тоді на тіло буде діяти система сил:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}'_1, \vec{F}_2 = \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}_n = \vec{F}'_n, \quad (4.1)$$

прикладених в центрі O , і система пар, моменти яких:

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1), \vec{M}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2), \dots, \vec{M}_n = \vec{M}_O(\vec{F}_n). \quad (4.2)$$

Систему збіжних сил, прикладених в точці O , замінюють однією силою:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (4.3)$$

Систему приєднаних пар замінимо однією еквівалентною парою, додаючи вектори моментів кожної пари:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i). \quad (4.4)$$

Одержану збіжну систему сил і систему пар сил можна замінити однією силою \vec{R} і однією парою сил з моментом \vec{M}_O (рис. 4.1). Як відомо, величина \vec{R} , яка дорівнює геометричній сумі всіх сил, називається **головним вектором системи сил**; величина \vec{M}_O , яка дорівнює геометричній сумі моментів всіх сил відносно центра O , називається **головним моментом системи сил** відносно цього центра.

В даному випадку сила \vec{R} не є рівнодійною даної системи сил через те, що вона замінює систему сил тільки разом з парою. Головний вектор не залежить, а головний момент залежить від вибору центру приведення.

4.2. Обчислення головного вектора та головного моменту. Умови рівноваги просторової системи сил

За формулами (4.3), (4.4) у проекціях на осі декартових координат отримуємо:

$$R_X = \sum_{i=1}^n F_{iX}, \quad R_Y = \sum_{i=1}^n F_{iY}, \quad R_Z = \sum_{i=1}^n F_{iZ}; \quad (4.5)$$

$$M_{OX} = \sum_{i=1}^n M_{OX}(\vec{F}_i), \quad M_{OY} = \sum_{i=1}^n M_{OY}(\vec{F}_i),$$

$$M_{OZ} = \sum_{i=1}^n M_{OZ}(\vec{F}_i), \quad (4.6)$$

звідки знайдемо величини головного вектора та головного моменту:

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2}, \quad M_O = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2}.$$

Напрямок \vec{R} і \vec{M}_O визначається косинусами кутів.

Основна теорема статички розв'язує першу основну задачу статички – спрощення довільної системи сил, її приведення до найпростішого вигляду.

З основної теореми статички впливають умови рівноваги системи сил, діючих на тверде тіло. Згідно з аксіомами статички, система перебуває у рівновазі, коли вона еквівалентна нулю, тобто для рівноваги довільної системи сил, діючих на тверде тіло, необхідно та достатньо, щоб головний вектор і головний момент відносно довільної точки дорівнювали нулю:

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O = 0. \quad (4.7)$$

Умови (4.7) називають **умовами рівноваги довільної просторової системи сил у векторній формі**. Якщо при рівновазі системи сил головний вектор дорівнює нулю, то його проєкції на координатні осі також дорівнюють нулю. Це стосується також і головного моменту. Це відповідає шести алгебраїчним рівнянням, які виражають **умови рівноваги системи сил в аналітичній формі**. Отже, маємо шість умов:

$$\begin{aligned} R_X = 0, \quad R_Y = 0, \quad R_Z = 0; \\ M_{OX} = 0, \quad M_{OY} = 0, \quad M_{OZ} = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} F_{iX} = 0, \quad \sum_{i=1} F_{iY} = 0, \quad \sum_{i=1} F_{iZ} = 0; \\ \sum_{i=1} M_{OX}(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1} M_{OY}(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1} M_{OZ}(\vec{F}_i) = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Таким чином, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно та достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на три координатні осі та алгебраїчна сума їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю. Якщо ці умови містять невідомі (наприклад, реакції в'язей), то вони називаються рівняннями рівноваги твердого тіла.

4.3. Умови рівноваги плоскої системи сил

Систему сил, лінії дії яких довільно розташовані в одній площині, називають довільною плоскою системою сил. Така система є окремим випадком довільної просторової системи сил. Оскільки достатньо багато практичних задач зводиться до цього випадку, зупинимось далі на аналізі довільної плоскої системи сил.

Розглянемо в площині OXY довільне тіло, яке навантажено системою сил (рис. 4.2). Обираємо центром приведення точку O цієї площини. Згідно з головною теоремою статички задана система сил зведеться до однієї сили \vec{R} , яка є головним вектором і її визначають за формулою (4.3), і до пари сил, момент якої \vec{M}_O дорівнює головному моменту і його визначають за формулою (4.4).

Оскільки всі сили заданої системи розташовані в одній площині, то сила \vec{R} теж лежить у цій площині. Крім того, зводячи сили до центру O , дістанемо пари, які теж розташовані у той самій площині. Тоді і результуюча пара лежить у цій площині, а вектор-момент \vec{M}_O спрямований перпендикулярно до неї. Для довільної плоскої системи сил головний вектор і головний момент взаємно перпендикулярні.

Головний вектор \vec{R} довільної плоскої системи сил дорівнює геометричній сумі всіх сил системи та лежить у площині дії сил, а головний момент її відносно деякого центру дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил системи відносно того ж центру.

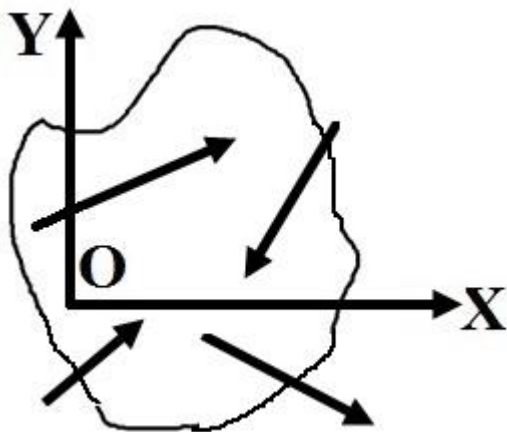


Рисунок 4.2.

Введемо в площині дії системи сил систему координат OXY . Умова

$$\sum_{i=1} F_{iZ} = 0$$

є тотожністю. Оскільки кожна з сил розміщена в площині з осями X і Y , моменти сил відносно цих осей дорівнюють нулю, тобто умови

$$\sum_{i=1} M_{OX}(\vec{F}_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1} M_{OY}(\vec{F}_i) = 0$$

також тотожності. Залишаються тільки 3 умови:

$$\sum_{i=1} F_{iX} = 0, \quad \sum_{i=1} F_{iY} = 0, \quad \sum_{i=1} M_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (4.10)$$

Моменти сил відносно осі Z , перпендикулярної площині дії сил, дорівнюють алгебраїчним моментам цих сил відносно точки O :

$$\sum_{i=1}^n M_{OZ}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i) = 0.$$

Рівняння (4.10) є основною формою умов рівноваги для плоскої системи сил.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно та достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на дві координатні осі, що лежать у площині дії сил, і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільної точки цієї площини дорівнювали нулю.

Існують ще еквівалентні форми умов рівноваги.

Друга форма умов рівноваги: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно та достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно довільних трьох точок, які не лежать на одній прямій в площині дії сил, дорівнювали нулю. Цю умову ще називають теоремою про три моменти.

Третя форма умов рівноваги: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно та достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно довільних двох точок та алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на вісь, яка не перпендикулярна до прямої, що проходить через обрані точки, дорівнювали нулю.

4.4. Окремі випадки приведення сил, які довільно розташовані на площині або у просторі

Під час приведення сил, які довільно розташовані на площині, залежно від рівності або нерівності нулю головного вектора та головного моменту можливі наступні випадки (центром приведення головного моменту є точка O , яка завжди має бути указана – за зміною положення центру приведення головний момент буде змінюватися).

1. $\vec{R} = 0, \vec{M}_O = 0$. Якщо головний вектор системи дорівнює нулю та її головний момент відносно центру приведення також дорівнює нулю, то сили взаємно урівноважуються (тіло знаходиться у рівновазі).
2. $\vec{R} = 0, \vec{M}_O \neq 0$. Якщо головний вектор системи дорівнює нулю та її головний момент відносно центру приведення не дорівнює нулю, то сили приводяться до пари сил (тіло буде обертатися). Момент цієї пари дорівнює головному моменту відносно центру приведення. В цьому випадку головні моменти даної системи відносно всіх точок площини рівні за величиною та збігаються за знаком.
3. $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O = 0$. Якщо головний вектор системи сил не дорівнює нулю, а головний момент відносно центру приведення дорівнює нулю, то сили приводяться до рівнодійної, лінія дії якої проходить через центр приведення (тіло буде рухатися прискорено у напрямі дії сили \vec{R}).
4. $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0$. Якщо головний вектор системи сил не дорівнює нулю, та головний момент відносно центру приведення не дорівнює нулю, то сили приводяться до однієї сили – рівнодійної.

Зважаючи на вищесказане, можна зробити наступний висновок: Якщо сили, довільно розташовані на площині, не урівноважуються, то їх можна привести або до однієї сили, або до пари сил.

Під час приведення сил, які довільно розташовані у просторі, залежно від рівності або нерівності нулю головного вектора та головного моменту можливі наступні випадки (центром приведення головного моменту є точка O), причому, випадки 1-3 є ідентичними до розглянутих для сил на площині. Перейдемо до інших випадків.

4. $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{R} \perp \vec{M}_O$. Якщо головний вектор перпендикулярний до головного моменту відносно центру приведення, то сили приводяться до рівнодійної, лінія дії якої не проходить через центр приведення.
5. $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{R}$ не перпендикулярний до \vec{M}_O . Якщо головний вектор не перпендикулярний до головного моменту відносно центру приведення, то сили приводяться до двох сил, які схрещуються, або до

силового гвинта (динамі), тобто до сукупності сили та пари сил, площина дії якої перпендикулярна до сили.

4.5. Розподілені навантаження

В інженерних розрахунках часто є навантаження, розподілені за об'ємом тіла, поверхнею або вздовж деякої лінії. Такі навантаження називають розподіленими. Систему розподілених навантажень характеризують своєю інтенсивністю q , тобто величиною сили, що приходить на одиницю об'єму, площі чи довжини навантаженого тіла. Інтенсивність розподілених об'ємних сил вимірюють у $[Н/м^3]$, поверхневих сил у $[Н/м^2]$, розподілених вздовж лінії – у $[Н/м]$.

Розглянемо деякі прості приклади розподілених сил, які лежать в одній площині.

1. Сили, рівномірно розподілені вздовж відрізка прямої (рис. 4.3, а). Для такої системи сил інтенсивність q є величиною постійною. Для статичних розрахунків цю систему можна замінити рівнодієюною силою \vec{Q} , модуль якої дорівнює $Q = qa$. Сила \vec{Q} прикладена посередині відрізка, на якому діє розподілене навантаження.

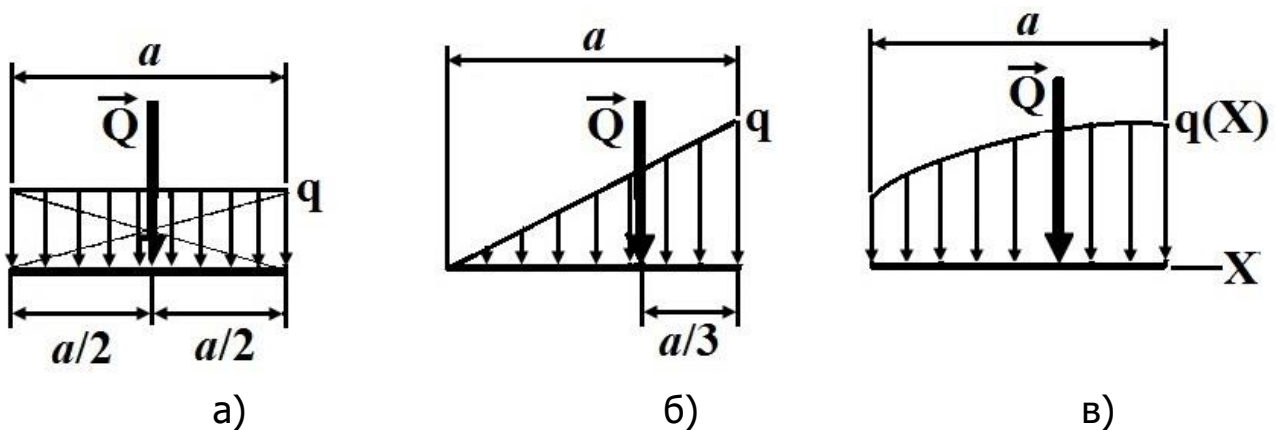


Рисунок 4.3.

2. Сили, розподілені вздовж відрізка прямої за лінійним законом. Прикладом такого розподілу є тиск рідини на вертикальну або нахилену прямолінійну поверхню (рис. 4.3, б). За модулем рівнодіяна $Q = qa/2$, а точкою прикладання є координата центру ваги трикутника, тобто

рівнодійна сила \vec{Q} розташована на відстані $a/3$ від бокової сторони трикутника.

3. Сили, розподілені вздовж відрізка прямої за довільним законом (рис. 4.3, в). За модулем рівнодійна Q дорівнює площі фігури, яка відображає закон зміни інтенсивності q , а лінія дій рівнодійної проходить через центр ваги вказаної фігури.

4.6. Теорема Варіньона

Відома властивість дистрибутивності (розподільний закон) векторного добутку, який полягає в тому, що:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c} + \dots) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}) + \dots,$$

виражає стосовно просторової сукупності збіжних сил **теорему Варіньона**:

Момент рівнодійної просторової збіжної сукупності сил відносно довільної точки дорівнює векторній сумі моментів складових сил відносно тієї точки.

Якщо сукупність сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 4.4) збігається у точці A , то її рівнодійна має вигляд сили:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

яка прикладається у точці A .

Візьмемо довільну точку O і позначимо через \vec{r} радіус-вектор точки A відносно точки O . Тоді за визначенням моменту рівнодійної і властивості дистрибутивності запишемо:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{R}) &= \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \\ &= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n = \\ &= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n), \end{aligned}$$

що доводить теорему.

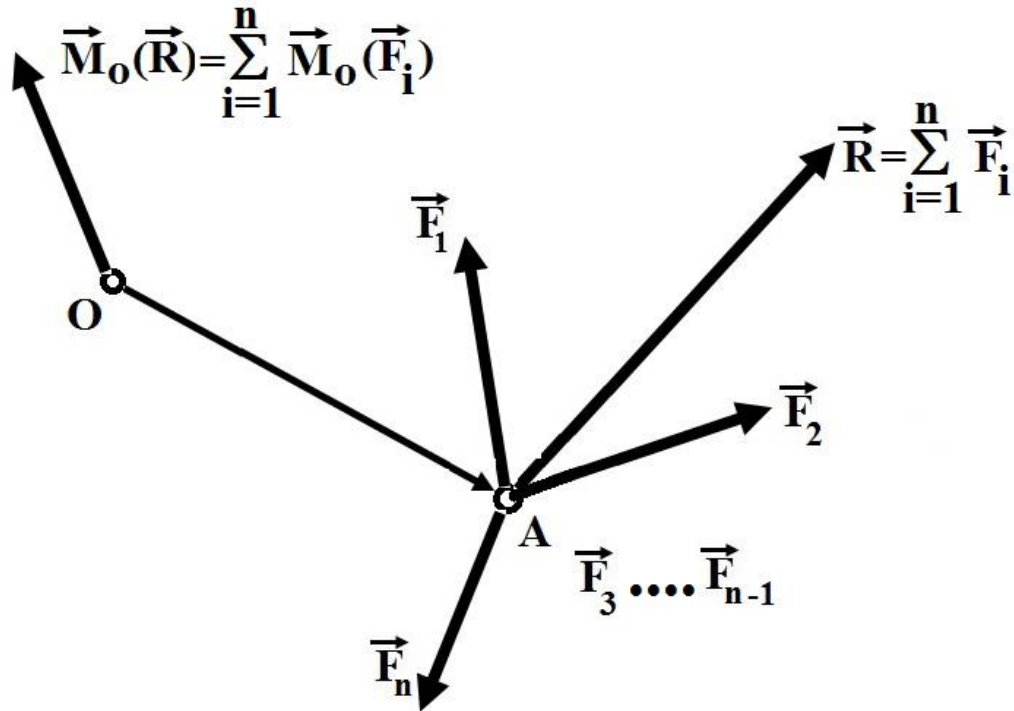


Рисунок 4.4.

Слід зазначити, що теорема Варіньона вірна тільки для збіжних сил, а також, і для сукупності сил з паралельними один до одного лініями дії.

Приклад 1. Визначення реакцій опор твердого тіла.

Дано:

$$F = 6 \text{ кН}, M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}, q = 1 \text{ кН/м}, \alpha = 45^\circ$$

Визначити: опорні реакції R_A, R_B .

Розв'язання:

Для розв'язання задачі скористуємось алгоритмом, який наведено у розділі 2.3.

Уводимо систему координат, прямуючи додатний напрям осі X праворуч, а осі Y вгору (рис. 4.5).

Звільнимо балку від в'язей і замінюємо їх відповідними реакціями в точках A і B . Опорою в точці A є нерухомий шарнір, який замінюється реакцією R_A . В свою чергу реакція розкладається на дві взаємно перпендикулярні складові, які позначаємо R_{AX} і R_{AY} . Прямуюмо реакції у додатних напрямках осей координат.

В точці B рухомий шарнір, який замінюється реакцією \vec{R}_B , спрямованою уздовж нормалі до площини, на яку він спирається. Загалом кількість незалежних невідомих 3, що означає статично визначену задачу.

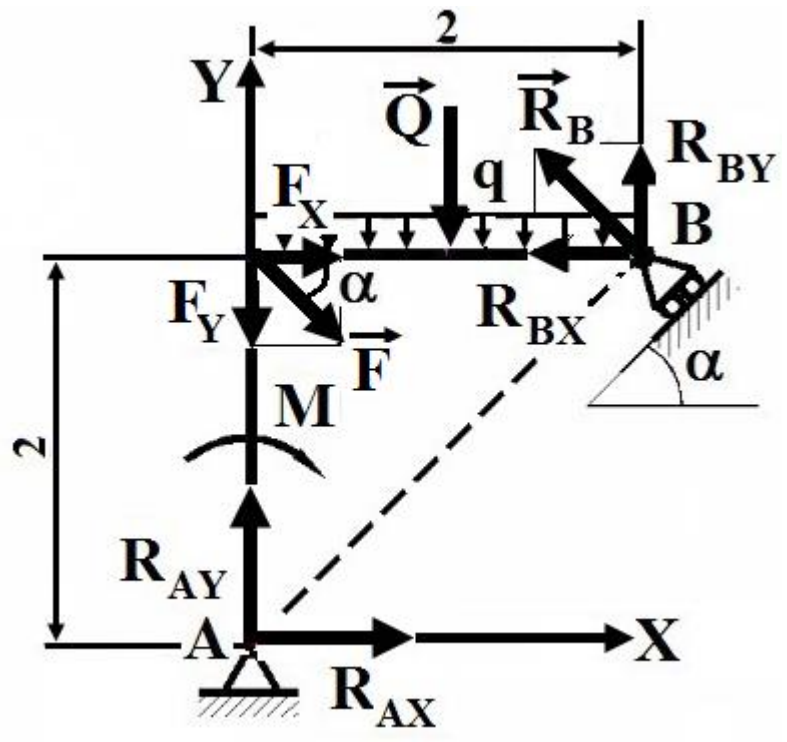


Рисунок 4.5.

Замінюємо розподілене навантаження еквівалентною зосередженою силою Q , яка прикладається посередині ділянки, на якій діє:

$$Q = 2 \cdot q = 2 \cdot 1 = 2 \text{ кН.}$$

Розкладаємо силу \vec{F} по осях X і Y , отримуючи відповідні проекції F_X і F_Y :

$$F_X = F \cos \alpha = F \cos 45^\circ = 6 \cdot 0,707 = 4,242 \text{ кН,}$$

$$F_Y = F \sin \alpha = F \sin 45^\circ = 6 \cdot 0,707 = 4,242 \text{ кН.}$$

Рівняння рівноваги тіла для плоскої системи сил згідно з (4.10) мають вигляд:

$$\sum_{i=1} F_{iX} = 0, \quad \sum_{i=1} F_{iY} = 0, \quad \sum_{i=1} M_O(\vec{F}_i) = 0,$$

що потребує визначення відповідних проекцій сил і визначення моментів відносно точки A . Зазначимо, що рівняння моментів можна складати відносно будь-якої точки, але бажано брати точку, в якій знаходяться найбільша кількість невідомих реакцій.

Запишемо систему рівнянь рівноваги для конкретного випадку:

$$\begin{cases} \sum_{i=1} F_{iX} = R_{AX} + F_X - R_B \cos 45^\circ = 0 \\ \sum_{i=1} F_{iY} = R_{AY} - F_Y - Q + R_B \sin 45^\circ = 0 \\ \sum_{i=1} M_A(\vec{F}_i) = -M - F_X \cdot 2 - Q \cdot 1 + R_B \cdot \frac{2}{\sin 45^\circ} = 0 \end{cases}.$$

В першому рівнянні системи 2 невідомих – R_{AX} і R_B , у другому рівнянні також 2 невідомих – R_{AY} і R_B , а в третьому всього одна невідома, що дозволяє отримати безпосередньо значення реакції:

$$R_B = \frac{(M + F_X \cdot 2 + Q \cdot 1)}{2\sqrt{2}} = 5,475 \text{ кН.}$$

Зважаючи на додатне значення реакції R_B , попередній її напрям було обрано вірно. Відповідно, розклад реакції R_B по осях X і Y показано на рисунку, а за величинами за умови $\alpha = 45^\circ$ горизонтальна та вертикальна складові дорівнюють:

$$R_{BX} = R_{BY} = R_B \cos 45^\circ = R_B \sin 45^\circ = 5,475 \cdot 0,707 = 3,871 \text{ кН.}$$

Визначення величини R_B дозволяє визначити з рівнянь рівноваги реакції R_{AX} і R_{AY} :

$$R_{AX} = -P_X + R_B \cos 45^\circ = -4,242 + 3,871 = -0,371 \text{ кН;}$$

$$R_{AY} = F_Y + Q - R_B \sin 45^\circ = 4,242 + 2 - 3,871 = 2,371 \text{ кН.}$$

Знак «-» означатиме, що дійсний напрям відповідної реакції спрямований у протилежний бік.

Для перевірки бажано скласти рівняння моментів відносно іншої точки, наприклад, точки B :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} M_B(\vec{F}_i) &= R_{AX} \cdot 2 - R_{AY} \cdot 2 - M + F_Y \cdot 2 + Q \cdot 1 = \\ &= -0,371 \cdot 2 - 2,371 \cdot 2 - 5 + 4,242 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Повна реакція в опорі A дорівнює:

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2} = \sqrt{(-0,371)^2 + 2,371^2} = 2,4 \text{ кН.}$$

Відповідь: $R_{AX} = -0,371$ кН, $R_{AY} = 2,371$ кН, $R_A = 2,4$ кН,
 $R_B = 5,475$ кН.

Приклад 2. Визначення реакцій опор складеної конструкції (система двох тіл).

Дано: $F_1 = 14$ кН; $F_2 = 20$ кН; $M = 28$ кН·м; $q = 7$ кН/м; $\alpha_1 = 60^\circ$.

Визначити: опорні реакції в точках A і C , а також в з'єднанні B .

Розв'язання:

Для розв'язання задачі скористуємось алгоритмом, який наведено у розділі 2.3.

Вводимо систему координат, прямуючи додатний напрям осі X праворуч, а осі Y вгору (рис. 4.6).

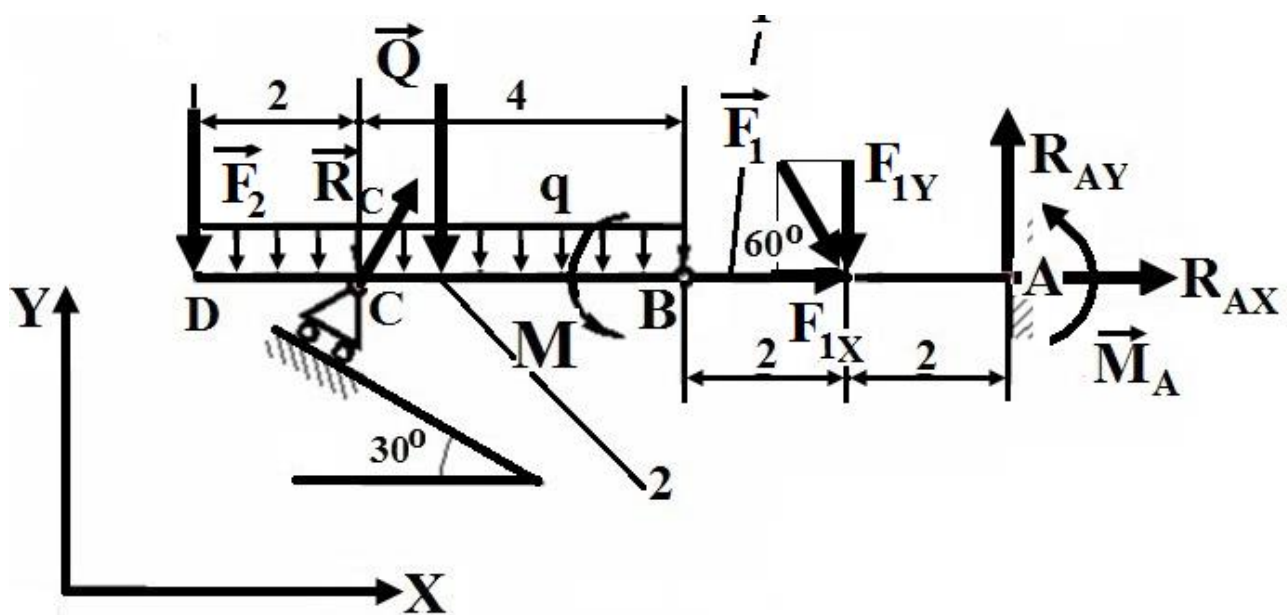


Рисунок 4.6.

Звільнимо балку від в'язей і замінюємо їх відповідними реакціями в точках A і C . Опорою в точці A є жорстке закладення, яке замінюється двома реакціями R_{AX} і R_{AY} , а також реактивним моментом \vec{M}_A . Прямую реакції у додатних напрямках осей координат, а напрям дії моменту проти ходу годинникової стрілки. В точці C рухомий шарнір, який замінюється реакцією \vec{R}_C , спрямованою вздовж нормалі до площини, на яку він

спирається. Загалом кількість незалежних невідомих 4, що означає статично невизначену задачу при аналізі конструкції як одне тіло.

Замінюємо розподілене навантаження еквівалентною зосередженою силою Q , яка прикладається посередині ділянки, на якій діє:

$$Q = 6 \cdot q = 6 \cdot 7 = 42 \text{ кН.}$$

Розкладаємо силу \vec{F}_1 по осях X і Y , отримуючи відповідні проекції F_{1X} і F_{1Y} :

$$F_{1X} = F_1 \cos \alpha = F_1 \cos 60^\circ = 14 \cdot 0,5 = 7,0 \text{ кН,}$$

$$F_{1Y} = F_1 \sin \alpha = F_1 \sin 60^\circ = 14 \cdot 0,866 = 12,124 \text{ кН.}$$

В подальшому можливо потрібне розкладання реакції \vec{R}_C по проекціях на осі X і Y , що з урахуванням кута нахилу поверхні до осі X (в задачі кут 30°) не викликає проблем.

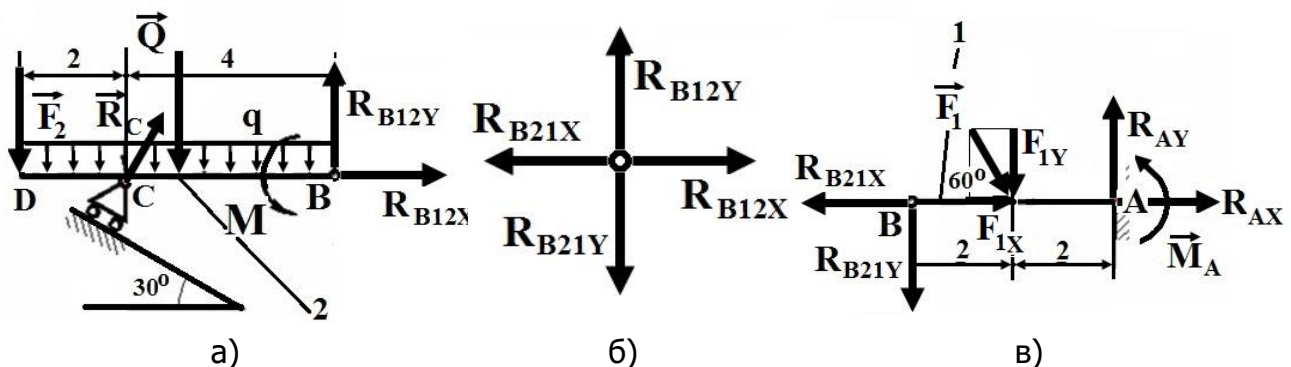


Рисунок 4.7.

Шарнірне з'єднання в точці B поєднує умовно ліву (тіло 1) і праву (тіло 2) частини конструкції. Розглянемо окремо вказані частини, подумки відокремлюючи їх одну від одної та замінюючи відповідними реакціями в точці B . Заміна шарніра здійснюється уведенням двох взаємно перпендикулярних реакцій для однієї частини та другої. Напрямок відповідних реакцій в точці B має бути протилежним, щоб за формального поєднання відбувалось їх взаємне знешкодження (рис. 4.7, б).

Рівняння рівноваги тіла для плоскої системи сил згідно з (4.10) мають вигляд:

$$\sum_{i=1} F_{iX} = 0, \quad \sum_{i=1} F_{iY} = 0, \quad \sum_{i=1} M_O(\vec{F}_i) = 0,$$

що потребує визначення відповідних проекцій сил по осях і визначення моментів відносно центру O . Зазначимо, що рівняння моментів можна складати відносно будь-якої точки, але бажано брати точку, в якій знаходяться найбільша кількість невідомих реакцій.

Розглянемо рівновагу кожного тіла окремо.

Тіло 2 (рис. 4.7, а). Для складання рівняння моментів обираємо точку B , записуючи систему рівнянь рівноваги для конкретного випадку:

$$\begin{cases} \sum_{i=1} F_{iX} = R_{CX} + R_{B12X} = 0 \\ \sum_{i=1} F_{iY} = R_{CY} - F_2 - Q + R_{B12Y} = 0 \\ \sum_{i=1} M_B(\vec{F}_i) = M + F_2 \cdot 6 + Q \cdot 3 - R_C \cos 30^\circ \cdot 4 = 0 \end{cases} .$$

З третього рівняння системи можна безпосередньо визначити величину реакції \vec{R}_C . Тоді:

$$R_C = \frac{M + F_2 \cdot 6 + Q \cdot 3}{\cos 30^\circ \cdot 4} = \frac{28 + 20 \cdot 6 + 42 \cdot 3}{0,866 \cdot 4} = 79,099 \text{ кН.}$$

Відповідно з урахуванням $R_{CX} = R_C \sin 30^\circ = 79,099 \cdot 0,5 = 39,55$ кН та $R_{CY} = R_C \cos 30^\circ = 79,099 \cdot 0,866 = 68,5$ кН знаходимо реакції і з перших двох рівнянь системи:

$$R_{B12X} = -R_{CX} = -39,55 \text{ кН,}$$

$$R_{B12Y} = -R_{CY} + F_2 + Q = -68,5 + 20 + 42 = -6,5 \text{ кН.}$$

Знак «-» означатиме, що дійсний напрям відповідної реакції спрямований у протилежний бік. Не змінюючи напрями таких реакцій, які було введено під час розв'язання задачі, переходимо до складання рівнянь рівноваги для тіла 1 з урахуванням $R_{B12X} = R_{B21X}$ і $R_{B12Y} = R_{B21Y}$.

Тіло 1 (рис. 4.7, в). Для складання рівняння моментів обираємо точку A , записуючи систему рівнянь рівноваги для конкретного випадку:

$$\begin{cases} \sum_{i=1} F_{iX} = F_{1X} - R_{B21X} + R_{AX} = 0 \\ \sum_{i=1} F_{iY} = -F_{1Y} - R_{B12Y} + R_{AY} = 0 \\ \sum_{i=1} M_B(\vec{F}_i) = R_{B21Y} \cdot 4 + F_{1Y} \cdot 2 + M_A = 0 \end{cases} .$$

Остаточо маємо:

$$R_{AX} = -F_{1X} + R_{B21X} = -7 - 39,55 = -46,55 \text{ кН};$$

$$R_{AY} = F_{1Y} + R_{B12Y} = 12,124 - 6,5 = 5,624 \text{ кН};$$

$$M_A = -R_{B21Y} \cdot 4 - F_{1Y} \cdot 2 = 6,5 \cdot 4 - 12,124 \cdot 2 = 1,752 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для перевірки правильності визначених реакцій складемо рівняння моменту для всієї конструкції відносно точки C :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} M_C(\vec{F}_i) &= F_2 \cdot 2 - Q \cdot 1 + M - F_{1Y} \cdot 6 + R_{AY} \cdot 8 + M_A = \\ &= 20 \cdot 2 - 42 \cdot 1 + 28 - 12,124 \cdot 6 + 5,624 \cdot 8 + 1,752 = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: $R_{AX} = -46,55 \text{ кН}$, $R_{AY} = 5,624 \text{ кН}$, $M_A = 1,752 \text{ кН}\cdot\text{м}$,
 $R_C = 79,099 \text{ кН}$, $R_{BX} = -39,55 \text{ кН}$, $R_{BY} = -6,5 \text{ кН}$.

Контрольні питання

1. Сформулюйте головну теорему статички.
2. Дайте визначення головного вектора системи сил та головного моменту системи сил.
3. Як обчислюються головний вектор системи сил та головний момент системи сил?
4. Сформулюйте умови рівноваги довільної системи сил (просторової та плоскої).
5. Що стверджує теорема Варіньона про момент рівнодійної?

Глава 5. Ферми та методи їх розрахунку

5.1. Задача розрахунку ферми. Основні допущення

Подальшим розвитком стержньових конструкцій є **ферми** – це **геометрично незмінні конструкції, що складаються з великої кількості прямолінійних стержнів, які зв'язані між собою шарнірами** (рис. 5.1).

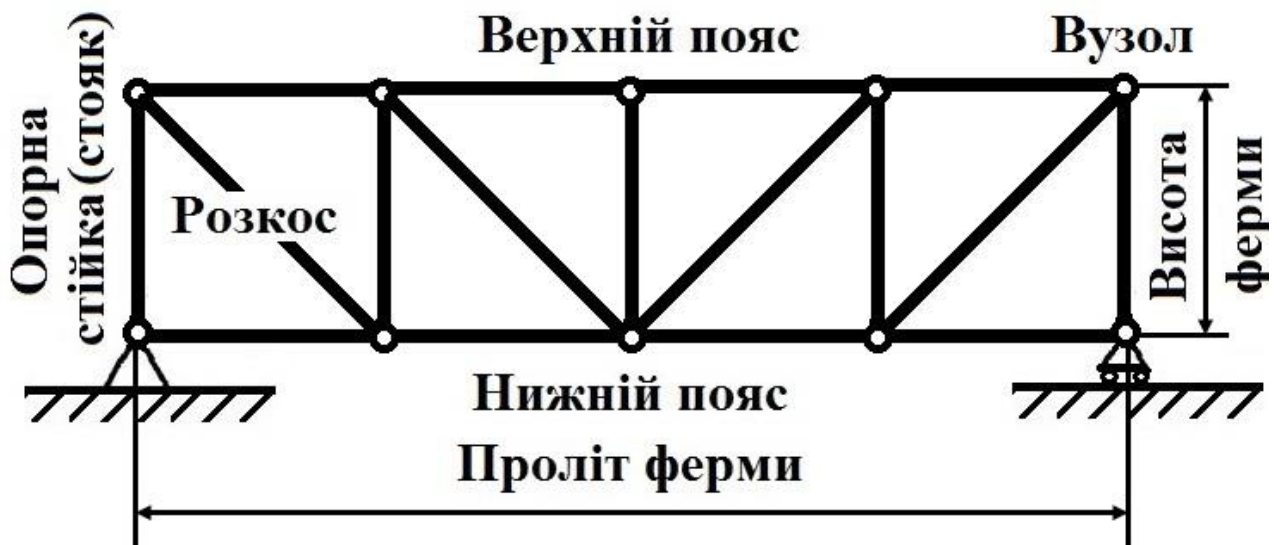


Рисунок 5.1.

Якщо осі усіх стержней ферми лежать в одній площині, то її називають **плоскою фермою**. Точки, в яких зходяться осі стержнів, називаються **вузлами ферми**, а ті вузли, якими ферма спирається на основу, називаються **опорними вузлами**.

Ферми застосовуються в будівництві та машинобудуванні, зокрема, стріли підйомних кранів, залізничні мости тощо. Місця з'єднання стержнів називають вузлами, вертикальні стержні – стійками (стояками), нахилені – розкосами. Стержні, які розташовані на зовнішньому контурі ферми, утворюють верхній і нижній пояси.

Важливою частиною інженерного розрахунку ферм є визначення зусиль, які виникають в стержнях під дією заданого навантаження на ферму. При цьому зазвичай виходять з наступних спрощень:

- 1) зовнішні сили прикладені тільки у вузлах ферми;
- 2) стержні вважаються невагомими;

3) вузли є ідеальними шарнірами, тобто сили тертя в них не виникають. Реакція кожного з опорних стержнів спрямована вздовж осі цього стержня.

З усього класу геометрично незмінних ферм без зайвих стержнів виділимо прості ферми. Їх побудова відбувається наступним чином: розглядається основний трикутник, до нього двома стержнями приєднується новий шарнір (вузол) тощо. В подальшому розглядаються виключно плоскі ферми.

Існує три основних методи визначення зусиль у стержнях статично визначених ферм: метод вирізання вузлів, метод Ріттера й графічний метод побудови діаграми Максвелла-Кремони.

Розглянемо визначення зусиль в стержнях ферми за способом вирізання вузлів. Цей спосіб полягає в тому, що подумки послідовно вирізають вузли ферми, прикладають до них відповідні зовнішні сили та реакції стержнів, записують систему (2 рівняння рівноваги) для збіжних сил, які прикладені до кожного вузла. Оскільки на початку розрахунку ферми невідомо, які стержні розтягнуті, то вважають, що всі стержні розтягнуті. Тому реакції стержнів направляємо від вузлів. Якщо отримують реакцію зі знаком мінус, це означатиме стискання. Знайдені реакції стержнів за модулем дорівнюють внутрішнім зусиллям у стержнях.

Метод вирізання вузлів застосовують для визначення зусиль в усіх стержнях ферми. Його перевагою є простота, недоліком – громіздкість і можливе накопичення помилок. Застосування попередніх розрахунків зусиль в подальшому може призвести до суттєвих помилок.

Методом вирізання вузлів вигідно користуватися тоді, коли потрібно знайти зусилля у всіх стержнях ферми. А для знаходження зусиль лише в одному або декількох стержнях доцільно використовувати метод Ріттера. За цим методом рекомендується така послідовність дій:

1. Визначають опорні реакції, розглядаючи рівновагу ферми як твердого тіла, що знаходиться під дією плоскої системи сил.
2. Розрізають подумки ферму, до якої прикладені всі зовнішні сили, на дві частини таким чином, щоб кількість розрізаних стержнів не перевищувала трьох, і замінюють дію відкинутої частини шуканими зусиллями стержнів, приймаючи всі стержні розтягнутими.

3. Для кожного перерізу записують систему з 3 рівнянь, що приводить до складання рівняння рівноваги для частини ферми так, щоб у кожне рівняння входило одне невідоме зусилля. Для цього використовують рівняння моментів відносно точок Ріттера, де перетинаються лінії дії двох невідомих зусиль. Якщо два стержні паралельні, то складають рівняння проєкцій на вісь, перпендикулярну до цих стержнів, до якого увійде одне невідоме зусилля.

4. Розв'язуючи кожне зі складених рівнянь, знаходять шукане зусилля у стержнях. Знак «мінус» у відповіді означатиме стискання стержня.

Зусилля в окремих стержнях навантаженої ферми може бути рівними нулю, такі стержні називаються **нульовими**. Нижче наведено леми, користуючись якими можна визначити нульові стержні плоскої ферми, не проводячи їх розрахунку.

Лема 1. Якщо в ненавантаженому вузлі плоскої ферми сходяться два стержні, то зусилля в цих стержнях дорівнюють нулю.

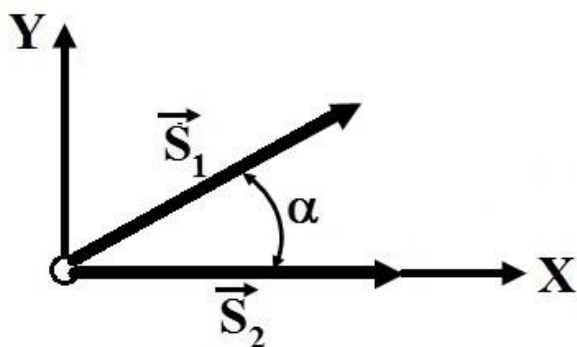


Рисунок 5.2.

Складемо рівняння рівноваги для цих сил:

$$\begin{cases} S_2 + S_1 \cos \alpha = 0 \\ S_1 \cos(90^\circ - \alpha) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Отже, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$.

Лема 2. Якщо в ненавантаженому вузлі плоскої ферми сходяться три стержні, два з яких розташовані на одній прямій, то зусилля в третьому стержні дорівнює нулю. Зусилля в перших двох стержнях рівні між собою.

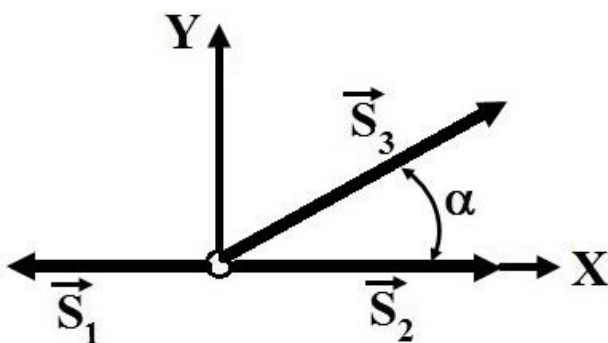


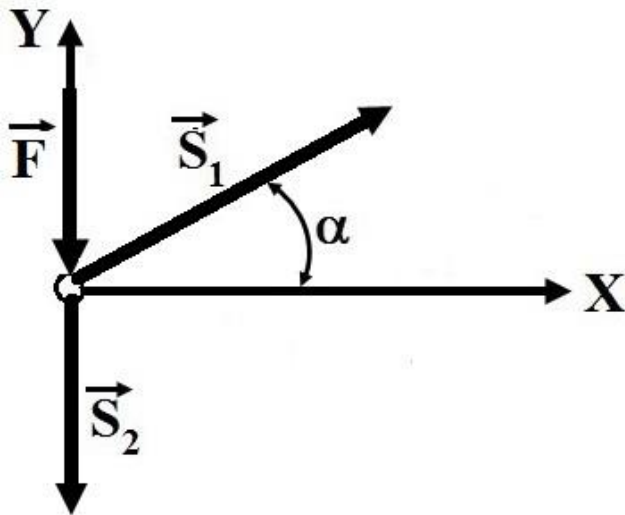
Рисунок 5.3.

Запишемо рівняння рівноваги сил, діючих на вузол (плоска система збіжних сил):

$$\begin{cases} -S_1 + S_2 + S_3 \cos \alpha = 0 \\ S_3 \cos(90^\circ - \alpha) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Отже, $S_3 = 0$, $S_1 = S_2$.

Лема 3. Якщо у вузлі плоскої ферми сходяться два стержні і до вузла прикладена зовнішня сила, лінія дії якої збігається з віссю одного з стержнів, то зусилля в цьому стержні дорівнює за модулем прикладеній силі, а зусилля в іншому стержні дорівнює нулю.



Рівняння рівноваги сил, діючих на вузол:

$$\begin{cases} S_1 \cos \alpha = 0 \\ -F - S_2 + S_1 \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Отже, $S_1 = 0$, $S_2 = -F$.

Рисунок 5.4.

5.2. Задача розрахунку ферми. Метод вирізання вузлів

Приклад.

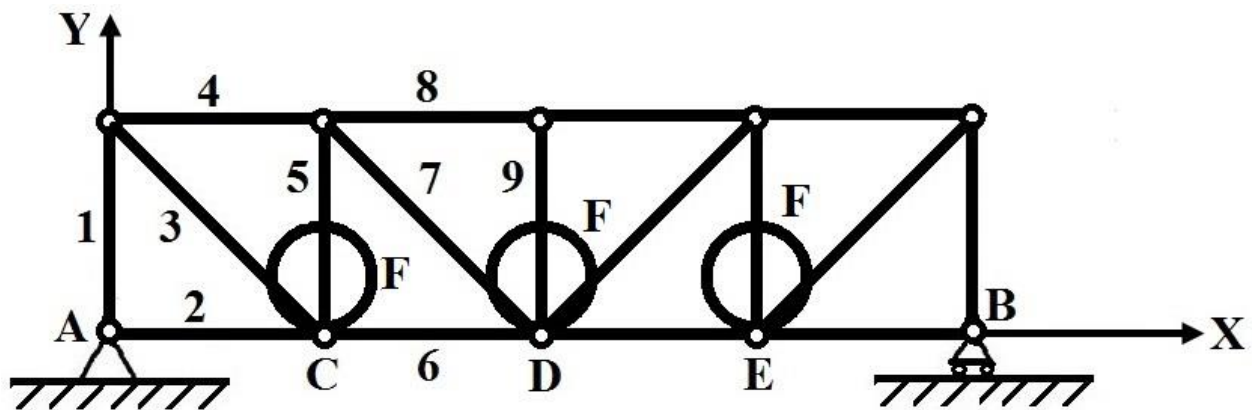


Рисунок 5.5.

На мостовій фермі, що зображена на рис. 5.5, вузли C , D , E завантажені однаковим навантаженням $F = 100$ кН. Нахилені стержні складають кут 45° з горизонтом. Знайти зусилля в стержнях 1, 2, 3, ..., 9.

Розв'язання. Розглянемо ферму в цілому. Знайдемо опорні реакції R_{AX} , R_{AY} , R_B , для цього складемо рівняння рівноваги (в проекціях на горизонтальну X і вертикальну Y осі та для моментів відносно точки A):

$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_B + R_{AY} - 3F = 0 \\ -F \cdot a - F \cdot 2a - F \cdot 3a + R_B \cdot 4a = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Отже,

$$R_B = \frac{6F}{4} = \frac{600}{4} = 150 \text{ кН}, \quad R_{AY} = 3F - R_B = 150 \text{ кН}.$$

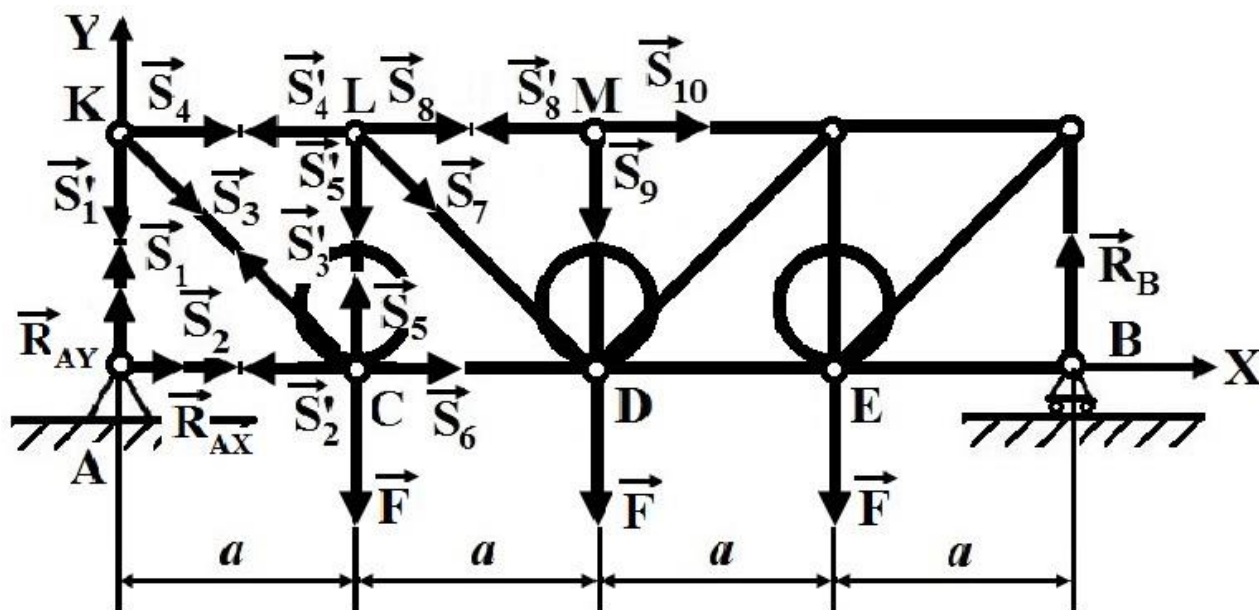
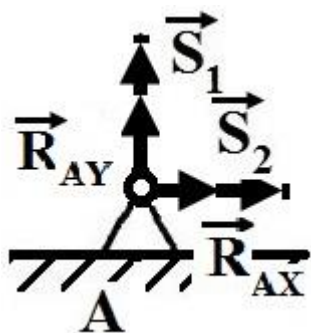


Рисунок 5.6.

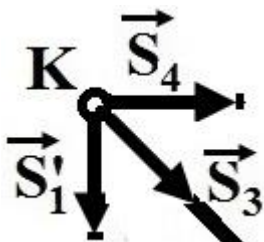
Далі послідовно пройдемо всі вузли, в яких потрібно знайти зусилля, склавши відповідні умови рівноваги.

Виріжемо вузол A і складемо рівняння рівноваги (в проекціях на осі):



$$\begin{cases} R_{AX} + S_2 = 0 \\ R_{AY} + S_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_2 = -R_{AX} \\ S_1 = -R_{AY} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} S_2 = 0 \\ S_1 = -150 \text{ кН} \end{cases}$$

Виріжемо вузол K і складемо аналогічні рівняння рівноваги:

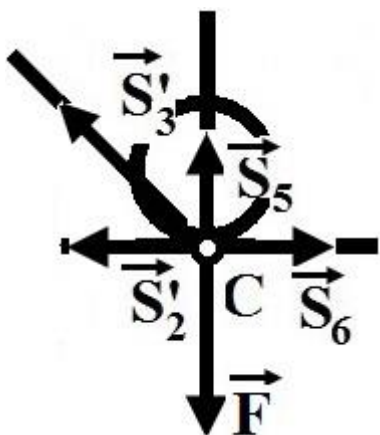


$$\begin{cases} S_4 + S_3 \cos 45^\circ = 0 \\ -S_1' - S_3 \cos 45^\circ = 0 \end{cases}$$

$$S_3 = -\frac{S_1}{\cos 45^\circ} = \frac{150}{0,707} = 212 \text{ кН},$$

$$S_4 = -S_3 \cos 45^\circ = -150 \text{ кН}.$$

Виріжемо вузол C і знайдемо зусилля S_5 і S_6 , склавши рівняння рівноваги:

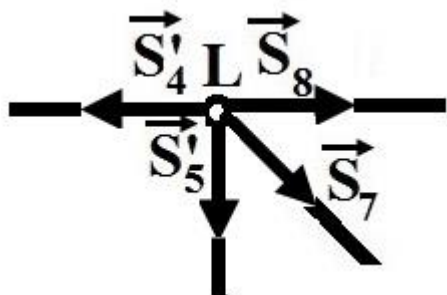


$$\begin{cases} -S_2' + S_6 - S_3 \cos 45^\circ = 0 \\ S_3' \cos 45^\circ - F + S_5 = 0 \end{cases}$$

$$S_6 = S_3 \cos 45^\circ = 212 \cdot 0,707 = 150 \text{ кН},$$

$$S_5 = F - S_3 \cos 45^\circ = 100 - 212 \cdot 0,707 = -50 \text{ кН}$$

Виріжемо вузол L і знайдемо зусилля S_8 і S_7 , склавши умови рівноваги:

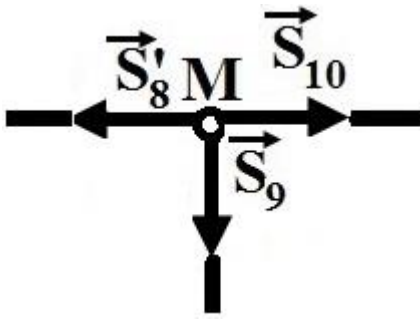


$$\begin{cases} -S_4' + S_8 + S_7 \cos 45^\circ = 0 \\ -S_5' - S_7 \cos 45^\circ = 0 \end{cases}$$

$$S_7 = -\frac{S_5'}{\cos 45^\circ} = \frac{50}{0,707} = 71 \text{ кН},$$

$$S_8 = S_4' - S_7 \cos 45^\circ = -150 - 50 = -200 \text{ кН}.$$

Виріжемо вузол M і знайдемо зусилля S_9 , записавши рівняння рівноваги в проекціях на вертикальну вісь:



$$S_9 = 0$$

Остаточню, відповідь:

$$S_1 = -150 \text{ кН}; S_2 = 0; S_3 = 212 \text{ кН}; S_4 = -150 \text{ кН};$$

$$S_5 = -50 \text{ кН}; S_6 = 150 \text{ кН}; S_7 = 71 \text{ кН}; S_8 = -200 \text{ кН}; S_9 = 0.$$

В подальшому стержні, в яких стискання, через значне, на рівні порядку, співвідношення між довжиною та розмірами поперечного перерізу необхідно розраховувати на стійкість, що вивчається в курсі опору матеріалів.

5.3. Задача розрахунку ферми. Метод Ріттера

Приклад.

Дано: $F_1 = 10 \text{ кН}$; $F_2 = 40 \text{ кН}$; $F_3 = 10 \text{ кН}$; $F_4 = 20 \text{ кН}$; $a = 3 \text{ м}$;
 $h = 3,5 \text{ м}$.

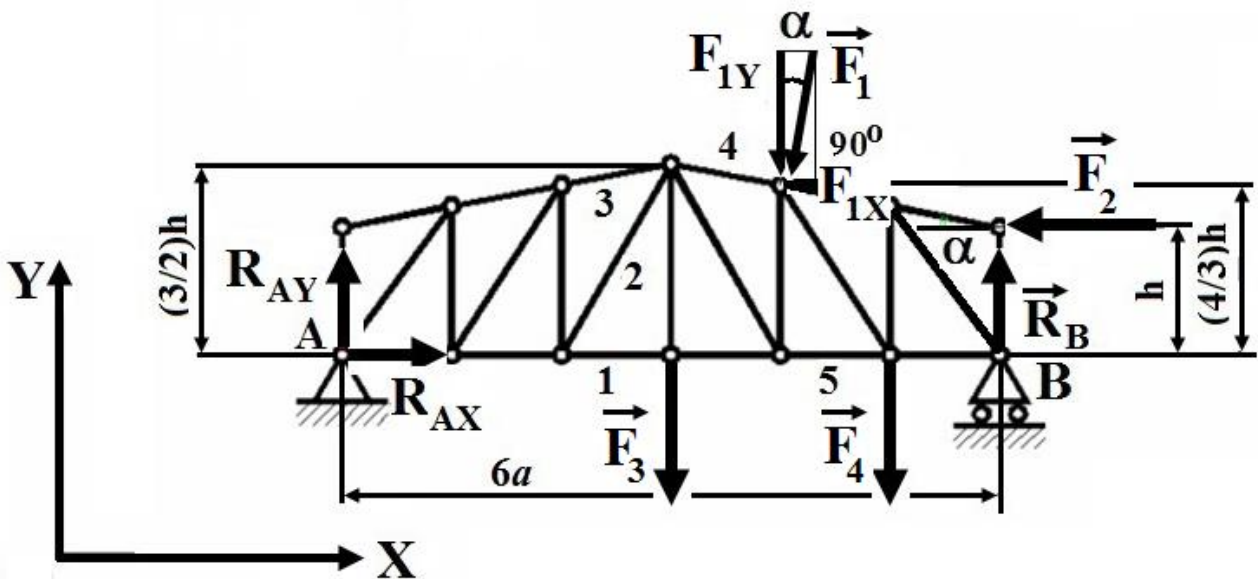


Рисунок 5.7.

Визначити: опорні реакції в точках A і B , а також зусилля в стержнях S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 .

Розв'язання:

Для розв'язання задачі скористуємось алгоритмом, який наведено у розділі 2.3.

Уводимо систему координат, прямуючи додатний напрям осі X праворуч, а осі Y вгору (рис. 5.7).

Звільнимо балку від в'язей і замінюємо їх відповідними реакціями в точках A і B . Опорою в точці A є нерухомий шарнір, який замінюється двома реакціями R_{AX} і R_{AY} . Прямуємо реакції у додатних напрямках осей координат. В точці B рухомий шарнір, який замінюється реакцією \vec{R}_B , спрямованою вздовж нормалі до площини, на яку він спирається. Загалом кількість незалежних невідомих 3, що означає статично визначену задачу.

Визначимо кут α : $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{6a} = \frac{3,5}{6 \cdot 3} = 0,194$, звідки $\alpha = 11,0035^\circ$ або у радіанах $\alpha = 0,192$ рад.

Розкладаємо силу \vec{F}_1 по осях X і Y , отримуючи відповідні проекції F_{1X} і F_{1Y} :

$$F_{1X} = F_1 \sin \alpha = F \sin 11,0035^\circ = 1,9087 \text{ кН},$$

$$F_{1Y} = F_1 \cos \alpha = F \cos 11,0035^\circ = 9,8162 \text{ кН}.$$

Спочатку розглядаємо ферму як тверде тіло. Рівняння рівноваги для всієї ферми згідно з (4.10) мають вигляд:

$$\sum_{i=1} F_{iX} = 0, \quad \sum_{i=1} F_{iY} = 0, \quad \sum_{i=1} M_A(\vec{F}_i) = 0,$$

що потребує визначення відповідних проекцій сил по осях і визначення моментів відносно точки A . Відповідно до рисунку:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1} F_{iX} = R_{AX} - F_{1X} - F_2 = 0 \\ \sum_{i=1} F_{iY} = R_{AY} - F_3 - F_{1Y} - F_4 + R_B = 0 \\ \sum_{i=1} M_A(\vec{F}_i) = R_B \cdot 6a - F_3 \cdot 3a - F_{1Y} \cdot 4a + F_{1X} \cdot \frac{4}{3}h - \\ \quad - F_4 \cdot 5a + F_2 \cdot h = 0 \end{array} \right.$$

З першого рівняння можна безпосередньо визначити реакцію R_{AX} :

$$R_{AX} = F_{1X} + F_2 = 1,9087 + 40 = 41,9087 \text{ кН.}$$

З третього рівняння можна безпосередньо визначити реакцію R_B :

$$R_B = \frac{F_3 \cdot 3a + F_{1Y} \cdot 4a - F_{1X} \cdot \frac{4}{3}h + F_4 \cdot 5a - F_2 \cdot h}{6a} =$$
$$= \frac{10 \cdot 3 \cdot 3 + 9,8162 \cdot 4 \cdot 3 - 1,9087 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,5 + 20 \cdot 5 \cdot 3 - 40 \cdot 3,5}{6 \cdot 3} = 19,9382 \text{ кН.}$$

Тепер з другого рівняння можна визначити реакцію R_{AY} :

$$R_{AY} = F_3 + F_{1Y} + F_4 - R_B =$$
$$= 10 + 9,8162 + 20 - 19,9382 = 19,878 \text{ кН.}$$

Загальна реакція в опорі A :

$$R_A = \sqrt{(R_{AX})^2 + (R_{AY})^2} = \sqrt{41,9087^2 + 19,878^2} = 46,4308 \text{ кН.}$$

Для перевірки правильності визначених реакцій складемо рівняння моменту для всієї конструкції відносно точки B :

$$\sum_{i=1} M_B(\vec{F}_i) = F_2 \cdot h - R_{AY} \cdot 6a + F_3 \cdot 3a +$$
$$+ F_{1Y} \cdot 2a + F_{1X} \cdot \frac{4}{3}h + F_4 \cdot a =$$
$$= 40 \cdot 3,5 - 19,878 \cdot 6 \cdot 3 + 10 \cdot 3 \cdot 3 + 9,8162 \cdot 2 \cdot 3 +$$
$$+ 1,9087 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,5 + 20 \cdot 3 = 0$$

Використання методу перерізів Ріттера. Визначення зусиль у стержнях 1, 2 і 3 ферми

Як було сказано вище, застосування способу вирізання вузлів потребує послідовного проходження всіх вузлів із визначенням зусиль у всіх стержнях. Це призводить до накопиченню похибок як об'єктивного

характеру через округлення з певною точністю отриманих величин, так і можливих впливів зроблених помилок через людський фактор.

За методом Ріттера визначення зусиль проводиться безпосередньо у певних стержнях із застосуванням рівнянь рівноваги.

Для визначення зусиль у стержнях 1, 2, 3 ферми скористаємось отриманими величинами опорних реакцій (рис. 5.8). Всі стержні вважаємо розтягнутими. Знак «—» у визначених зусиллях вказує на те, що стержень стиснутий.

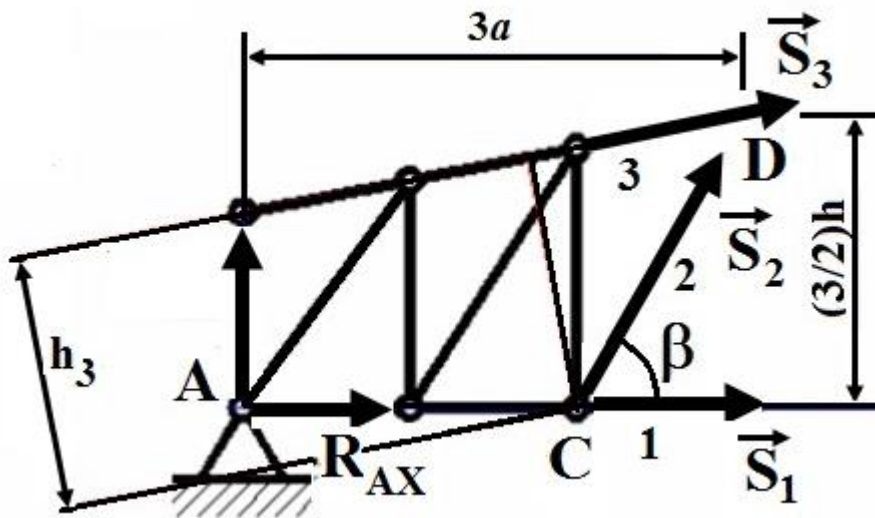


Рисунок 5.8.

За способом Ріттера кожне невідоме зусилля має бути визначено з окремого рівняння та не має виражатися через зусилля в інших стержнях. Для цього складається рівняння моментів відносно точок, де перетинаються лінії дії двох невідомих зусиль. Якщо два стержні паралельні, то складається рівняння проекцій на вісь, перпендикулярну до цих стержнів, до якого також увійде одне невідоме зусилля.

Складемо, уводячи зусилля у стержнях \vec{S}_1 , \vec{S}_2 , \vec{S}_3 , рівняння моментів відносно точок D і C :

$$\sum_{i=1} M_D(\vec{F}_i) = S_1 \cdot \frac{3}{2} h + R_{AX} \cdot \frac{3}{2} h - R_{AY} \cdot 3a = 0;$$

$$S_1 = \frac{R_{AY} \cdot 2a}{h} - R_{AX} = \frac{19,878 \cdot 2 \cdot 3}{3,5} - 41,9087 = -7,8321 \text{ кН.}$$

$$\sum_{i=1} M_C(\vec{F}_i) = -S_3 \cdot h_3 - R_{AY} \cdot 2a = 0.$$

В останньому виразі уводиться нова величина h_3 , яку з урахуванням величини кута α і довжини стержня $\frac{4}{3}h$, що спирається на точку C , визначимо:

$$h_3 = \frac{4}{3}h \cdot \cos\alpha = \frac{4}{3} \cdot 3,5 \cdot \cos 11,0035^\circ = 4,581 \text{ м.}$$

$$S_3 = \frac{-R_{AY} \cdot 2a}{h_3} = \frac{-19,878 \cdot 2 \cdot 3}{4,581} = -26,0354 \text{ кН.}$$

Для подальших розрахунків потрібно визначити кут β :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{2}h/a = \frac{3}{2} \cdot 3,5/3 = 1,75,$$

звідки в радіанах $\beta = 1,0517$ рад або в градусах $\beta = 60,2551^\circ$.

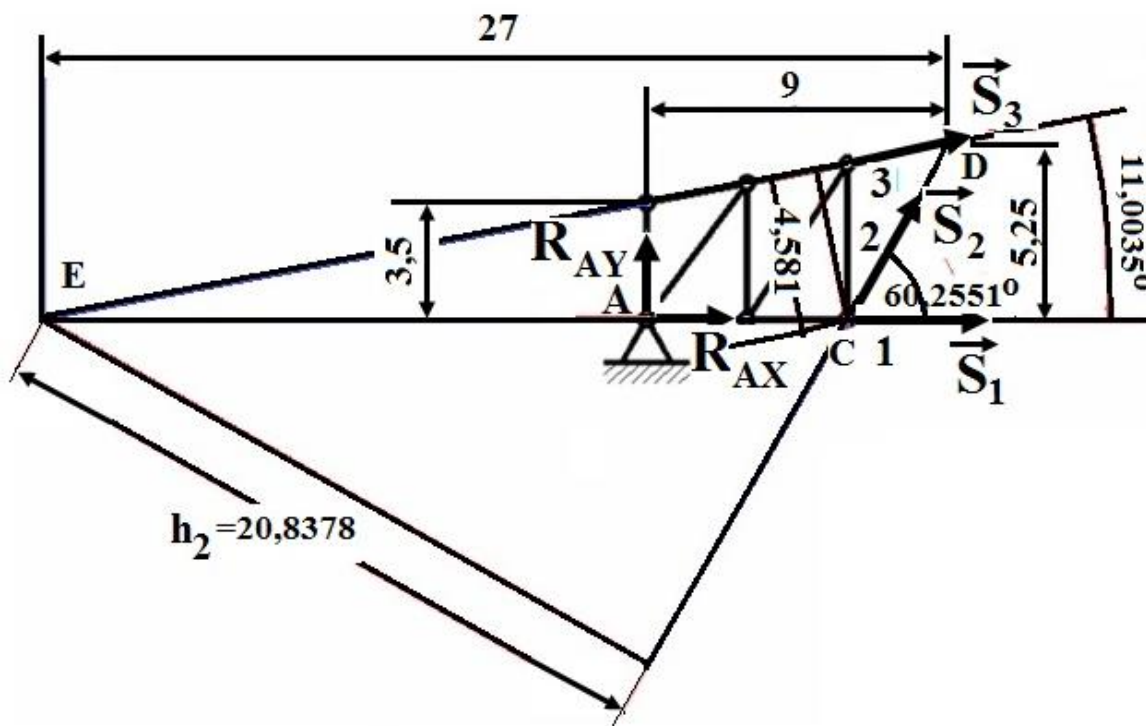


Рисунок 5.9.

Для визначення зусилля \vec{S}_2 (рис. 5.9) складаємо рівняння моментів відносно точки, яка була не задіяна у попередніх визначеннях, наприклад, введемо точку E . Вона знаходиться на перетині продовження нахиленої частини ферми з віссю X . Довжина $EC = 27 - a = 24$ м. Тоді:

$$\sum_{i=1} M_E(\vec{F}_i) = S_2 \cdot EC \cdot \sin \beta + R_{AY} \cdot AE = 0,$$

$$S_2 = \frac{-R_{AY} \cdot AE}{EC \cdot \sin \beta} = \frac{-19,878 \cdot 18}{24 \cdot \sin 60,2551^\circ} = \frac{-19,878 \cdot 18}{20,8378} = -17,1711 \text{ кН.}$$

Для перевірки складемо рівняння рівноваги у проекціях сил на вісь:

$$\sum_{i=1} F_{iY} = R_{AY} + S_2 \cdot \sin \beta + S_3 \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$19,878 + (-17,1711) \sin 60,2551^\circ + (-26,0354) \cdot \sin 11,0035^\circ = 0.$$

**Використання методу перерізів Ріттера.
Визначення зусиль у стержнях 4 і 5 ферми**

Для визначення зусиль у стержнях 4 і 5 ферми скористаємось отриманими величинами опорних реакцій (рис. 5.10).

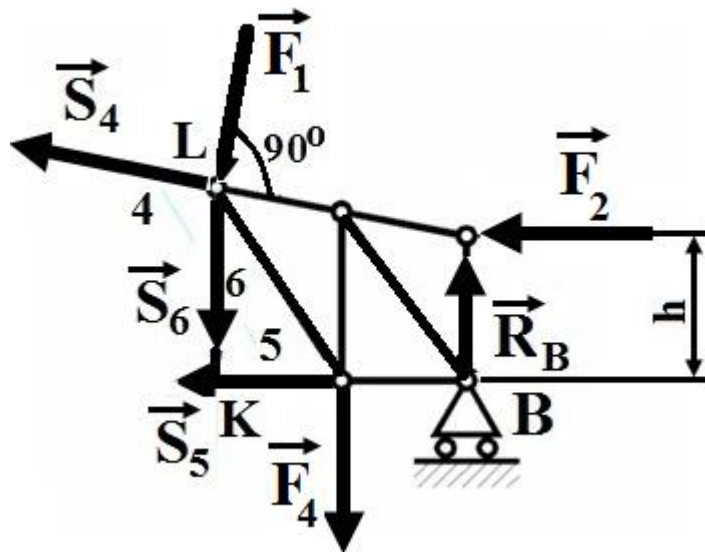


Рисунок 5.10.

Складемо рівняння моментів відносно точок K і L:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} M_K(\vec{F}_i) &= S_4 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{4}{3} h + R_B \cdot 2a + F_{1X} \cdot \frac{4}{3} h + \\ &+ F_2 \cdot h - -F_4 \cdot a = 0 \\ S_4 &= \frac{-R_B \cdot 2a - F_{1X} \cdot \frac{4}{3} h - F_2 \cdot h + F_4 \cdot a}{\cos \alpha \cdot \frac{4}{3} h} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-19,9382 \cdot 2 \cdot 3 - 1,9087 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,5 - 40 \cdot 3,5 + 20 \cdot 3}{\cos 11,0035^\circ \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,5} = -45,5233 \text{ кН.}$$

$$\sum_{i=1} M_L(\vec{F}_i) = -S_5 \cdot \frac{4}{3} h + R_B \cdot 2a - F_2 \cdot \frac{h}{3} - F_4 \cdot a = 0$$

$$S_5 = \frac{R_B \cdot 2a - F_2 \cdot \frac{h}{3} - F_4 \cdot a}{\frac{4}{3} h} =$$

$$= \frac{19,9382 \cdot 2 \cdot 3 - 40 \cdot \frac{3,5}{3} - 20 \cdot 3}{\frac{4}{3} \cdot 3,5} = 2,777 \text{ кН.}$$

Перевірка величин отриманих зусиль:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} F_{iX} &= -S_5 - S_4 \cdot \cos \alpha - F_{1X} - F_2 = \\ &= -2,7777 - (-45,5233 \cdot \cos 11,0035^\circ) - 1,9087 - 40 = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: реакції в опорах A і B та зусилля у стержнях:

$$R_{AX} = 41,9087 \text{ кН}, \quad R_{AY} = 19,878 \text{ кН}, \quad R_A = 46,4308 \text{ кН},$$

$$R_B = 19,9382 \text{ кН},$$

$$S_1 = -7,8321 \text{ кН}, \quad S_2 = -17,1711 \text{ кН}, \quad S_3 = -26,0354 \text{ кН},$$

$$S_4 = -45,5233 \text{ кН}, \quad S_5 = 2,777 \text{ кН.}$$

Контрольні питання

1. Що називається фермою у механіці? Назвіть основні елементи ферми.
2. Які припущення приймають при розрахунку ферм?
3. Які існують основні способи розрахунку ферм?
4. Сформулюйте леми, які застосовують при розрахунку ферм.
5. В чому полягають переваги та недоліки методів розрахунку ферм?

Глава 6. Центр ваги

6.1. Центр паралельних сил

З паралельними силами ми часто зустрічаємось при розв'язанні задач механіки. Сили ваги, що діють на тіло, спрямовані паралельно одна одній, сила тиску рідини на поверхню спрямовані також паралельно.

Розглянемо систему паралельних сил, які приводяться до рівнодійної. Умовою приведення системи паралельних сил до рівнодійної є нерівність нулю головного вектора системи.

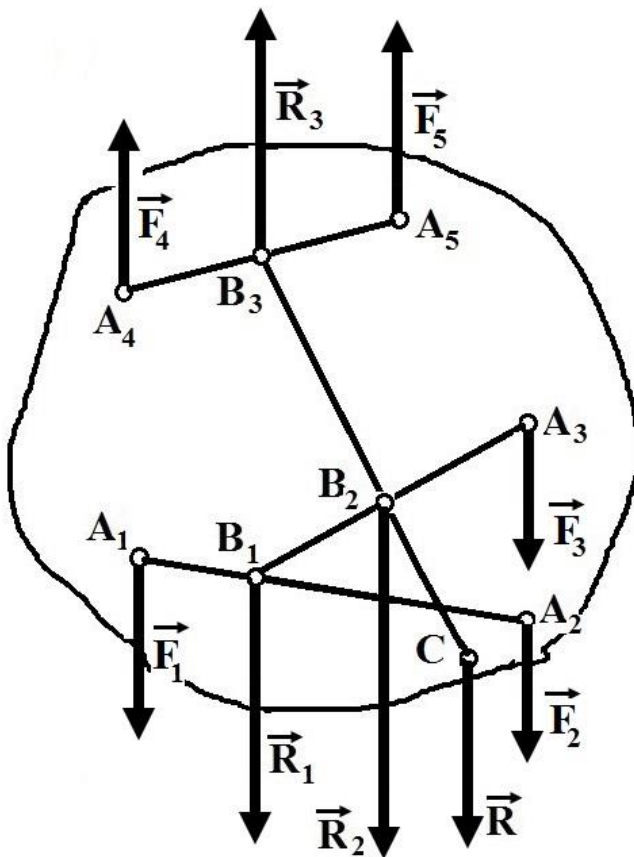


Рисунок 6.1.

Припустимо, що до твердого тіла в точках A_1, A_2, \dots, A_5 прикладені паралельні сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_5$, з яких сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ спрямовані в один бік, а сили \vec{F}_4, \vec{F}_5 в інший (рис. 6.1).

Додаємо сили \vec{F}_1, \vec{F}_2 за правилом складання двох паралельних сил, спрямованих в один бік, з рівнодійною:

$$R_1 = F_1 + F_2,$$

$$A_1B_1/A_2B_1 = P_2/P_1. \quad (6.1)$$

Для сили \vec{R}_1 знаходимо точку прикладення B_1 . Далі додаємо силу \vec{F}_3 і силу \vec{R}_1 , знаходимо точку прикладення B_2 . Далі послідовно додаємо сили, отримуючи дві протилежно спрямовані паралельні сили \vec{R}_2 і \vec{R}_3 в точках B_2 і B_3 .

Залежно від модулів і точок прикладення цих сил можливі наступні випадки:

1. Сили \vec{R}_2 і \vec{R}_3 не рівні за модулем, причому $R_2 > R_3$. Тоді \vec{R} рівнодійна заданих сил має модуль $R = R_2 - R_3$ і спрямована у бік більшої сили \vec{R}_2 .

Точка C знаходиться на продовженні відрізка B_2B_3 за точкою прикладення більшої сили. Ця точка називається **центром паралельних сил**. Через цю точку обов'язково проходить лінія дії рівнодійної заданої системи паралельних сил.

2. Сили \vec{R}_2 і \vec{R}_3 рівні за модулем, але їхні лінії дії не збігаються. В такому випадку задані сили приводяться до пари сил.

3. Сили \vec{R}_2 і \vec{R}_3 рівні за модулем, та їхні лінії дії збігаються. В такому випадку задані сили взаємно урівноважуються.

6.2. Центр ваги твердого тіла

Сили тяжіння окремих частинок тіла до Землі спрямовані приблизно до центру Землі. Ці сили можна вважати паралельними. Рівнодійна цих сил, яка дорівнює їхній сумі, є вага тіла, а точка, в якій вона прикладена, називається **центром ваги тіла**.

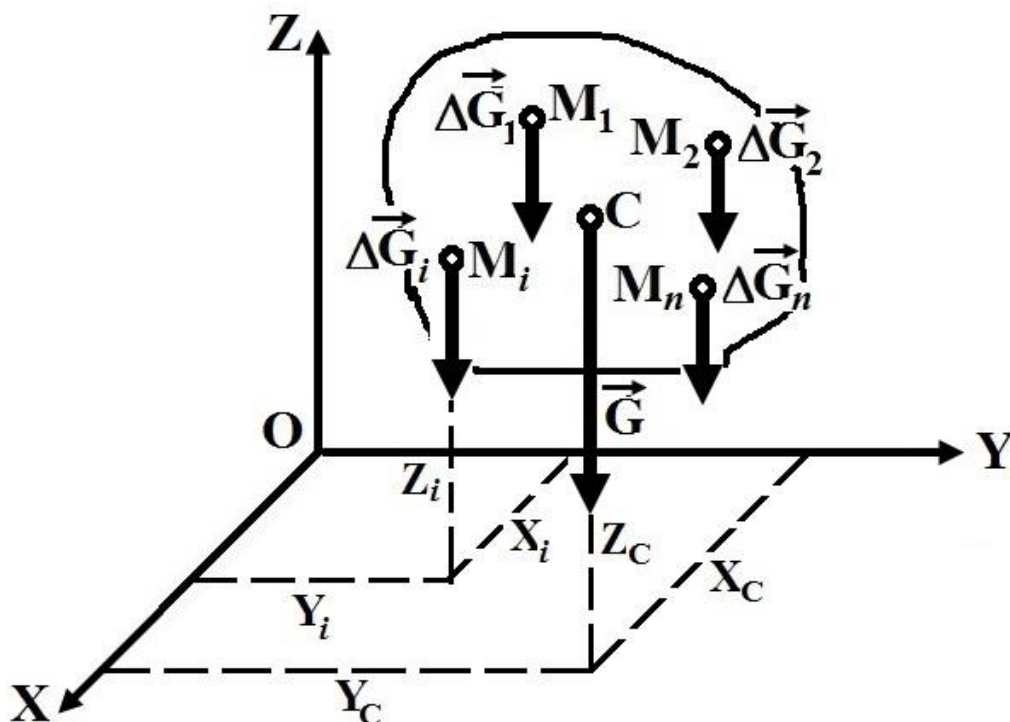


Рисунок 6.2.

Позначимо сили тяжіння окремих частинок тіла $\Delta\vec{G}_1, \Delta\vec{G}_2, \dots, \Delta\vec{G}_n$, вагу тіла \vec{G} , координати його центру ваги x_C, y_C, z_C , а координати довільної частини тіла x_i, y_i, z_i (рис. 6.2). Тоді для центру ваги:

$$\begin{cases} x_C = \sum x_i \Delta G_i / G \\ y_C = \sum y_i \Delta G_i / G \\ z_C = \sum z_i \Delta G_i / G \end{cases} \quad (6.2)$$

6.3. Центр ваги плоскої фігури. Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі

Існують різні експериментальні методи знаходження центру ваги, до яких можна віднести метод підвісу, метод часткового зважування та метод симетрії.

Положення центру ваги за методом підвісу визначають так: підвішують тіло на нитці у довільній точці тіла та продовжують напрям нитки в тілі (прорисовують лінію на поверхні тіла); підвішують тіло на нитці в іншій точці і знову визначають на тілі продовження нитки. Точка перетину продовжених напрямків нитки й буде центром ваги тіла. Цей метод дозволяє визначити центр ваги неоднорідного тіла складної конфігурації.

Метод зважування використовують для знаходження центру ваги складних тіл значної ваги.

Розглянемо аналітичний спосіб визначення центру ваги, який базується на обчисленні статичних моментів плоскої фігури.

Сума добутків елементарних площин, які входять до складу фігури, на алгебраїчні значення їхніх відстаней до деякої осі називається статичним моментом площі плоскої фігури відносно цієї осі.

Центром ваги площі вважають центр ваги однорідної тонкої пластини однакової товщини, основа якої займає дану площу. Положення центру ваги плоскої фігури визначається двома координатами x_C і y_C (рис. 6.3).

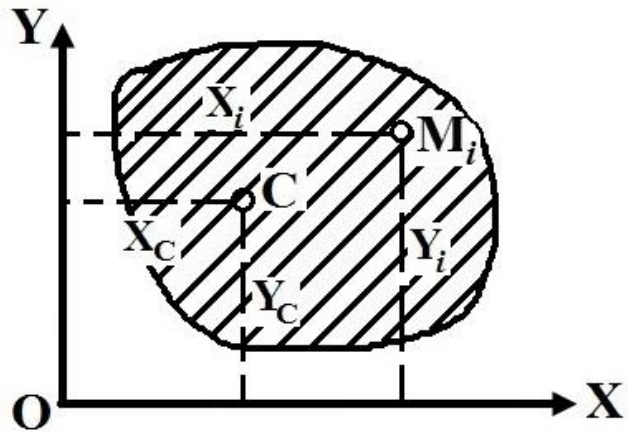


Рисунок 6.3.

Позначаючи S_X та S_Y статичні моменти площі плоскої фігури відносно осей X і Y , маємо:

$$S_X = \sum y_i \Delta A_i = Ay_C,$$

$$S_Y = \sum x_i \Delta A_i = Ax_C. \quad (6.3)$$

де A – площа плоскої фігури. Тоді:

$$x_C = \frac{S_Y}{A}, \quad y_C = \frac{S_X}{A}. \quad (6.4)$$

Очевидно, що статичний момент площі плоскої фігури відносно осі, що проходить через центр ваги фігури, дорівнює нулю. Така вісь називається **центральною**. Стосовно позначень, площа фігури позначається через A (від англ. **Area** – площа), щоб не плутати з позначенням статичного моменту площі S .

Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр геометричної симетрії, то центр ваги цього тіла лежить у площині, на осі або у центрі симетрії.

6.4. Визначення центру ваги плоскої фігури по центрах ваги її частин. Метод додавання та метод від'ємних площ

Нехай потрібно визначити положення центру ваги деякої плоскої фігури, що складається з трьох частин, положення центрів ваги якої відомо (рис. 6.4).

Площі частин відповідно дорівнюють A_1, A_2, A_3 , а координати центрів ваги C_1, C_2, C_3 будуть x_1 і y_1, x_2 і y_2, x_3 і y_3 . Статичні моменти площі плоскої фігури відносно осей координат дорівнюють сумам статичних моментів площин окремих її частин, які можна визначити:

$$S_Y = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3, \quad S_X = A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3.$$

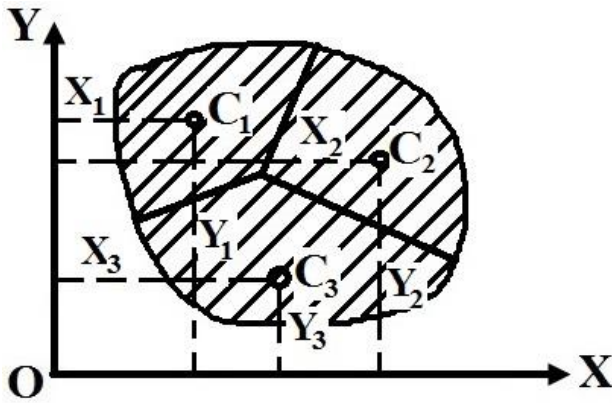


Рисунок 6.4.

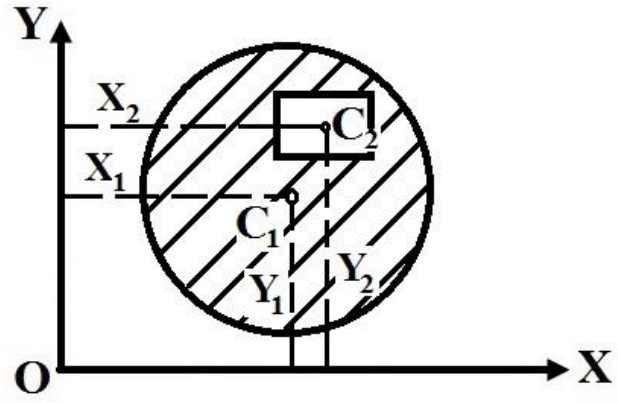


Рисунок 6.5.

Тоді для координат x_C і y_C маємо з урахуванням (6.4):

$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A}, \quad y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A}. \quad (6.5)$$

Цей спосіб можна використовувати і для плоскої фігури площею A_1 , з якої вирізана деяка частина площею (рис. 6.5), приймаючи площу вирізаної фігури від'ємною. Площа частини, що залишилась, дорівнює $A_1 - A_2$, а статичний момент – різниці статичних моментів фігур. Тоді:

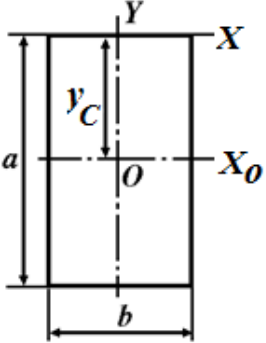
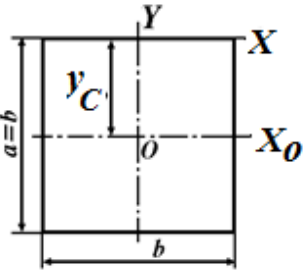
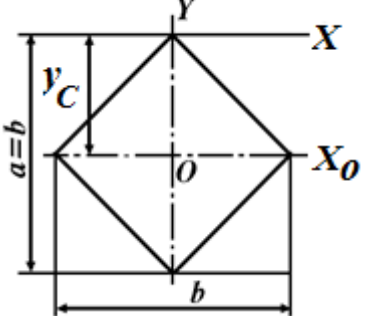
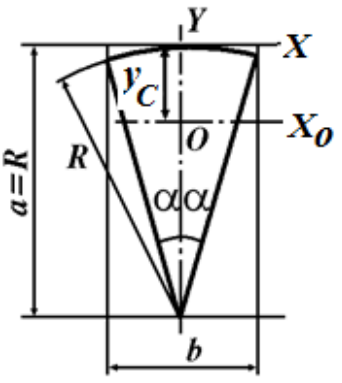
$$x_C = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2}{A_1 - A_2}, \quad y_C = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2}. \quad (6.6)$$

Цей спосіб має назву способу від'ємних площ.

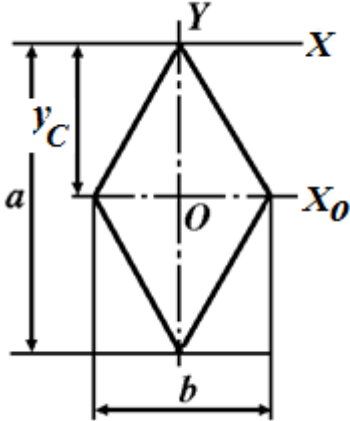
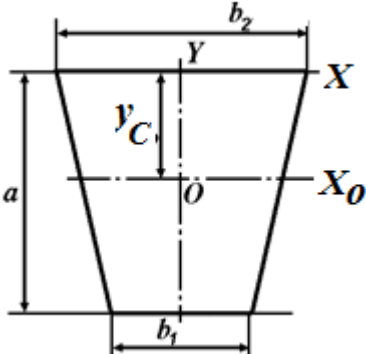
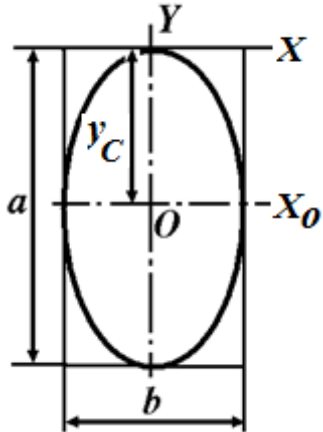
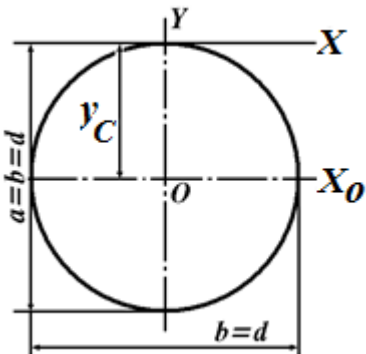
6.5. Центри ваги найпростіших плоских фігур

Застосовуючи метод додавання або від'ємних площ для плоских фігур, часто отримують прості плоскі фігури, для яких необхідно визначити площу та координати центрів ваги. У Табл. 6.1. наведено площі перерізу A , координати центру ваги (точка O) y_C для деяких типових плоских фігур, які мають вісь симетрії Y , вісь X_0 є центральною віссю фігури. Відлік координати y_C показано від осі X , за умов іншого положення цієї осі потрібно в формули для y_C внести відповідні зміни.

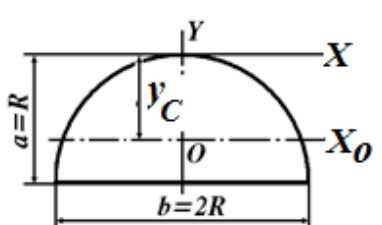
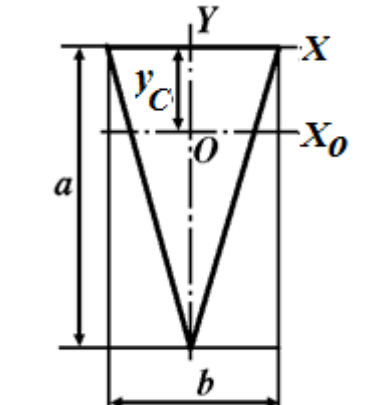
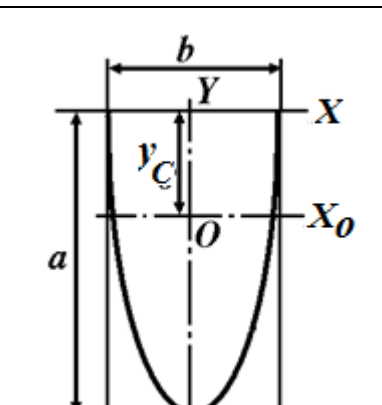
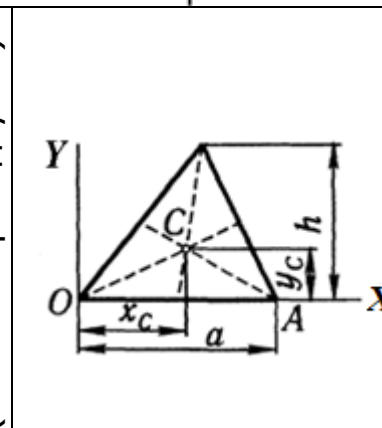
Таблиця 6.1. Площа, координата центру ваги для деяких плоских фігур за наявності осі симетрії

Форма перерізу		Площа перерізу A , координата центру ваги y_C	
Прямокутник		$A = ab$	$y_C = \frac{a}{2}$
Квадрат		$A = ab = b^2$	$y_C = \frac{b}{2}$
Квадрат на ребрі		$A = \frac{ab}{2} = \frac{b^2}{2}$	$y_C = \frac{b}{2}$
Круговий сектор		$A = \alpha R^2,$ $\alpha = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ}$ (α – кут у радіанах, α° – кут у градусах)	$y_C = R \left(1 - \frac{2 \sin \alpha}{3\alpha} \right)$

Таблиця 6.1. Площа, координата центру ваги для деяких плоских фігур за наявності осі симетрії (продовження)

Форма перерізу		Площа перерізу A , координата центру ваги y_C	
Ромб		$A = \frac{ab}{2}$	$y_C = \frac{a}{2}$
Трапеція		$A = \frac{a}{2}(b_1 + b_2)$	$y_C = \frac{a}{3} \cdot \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2}$
Еліпс		$A = \frac{\pi ab}{4}$	$y_C = \frac{a}{2}$
Коло		$A = \pi \frac{d^2}{4}$	$y_C = \frac{d}{2}$

Таблиця 6.1. Площа, координата центру ваги для деяких плоских фігур за наявності осі симетрії (продовження)

Форма перерізу		Площа перерізу A , координата центру ваги y_C	
Півколо		$A = \pi \frac{R^2}{4}$	$y_C = R \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)$
Трикутник		$A = \frac{ab}{2}$	$y_C = \frac{a}{3}$
Півеліпс		$A = \pi \frac{ab}{4}$	$y_C = \frac{4}{3\pi} a$
Довільний трикутник (вісь симетрії відсутня)		$A = \frac{1}{2} ah$ $y_C = \frac{1}{3} h$ $x_C = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3)$	

Таблиця 6.1. Площа, координата центру ваги для деяких плоских фігур за наявності осі симетрії (продовження)

Форма перерізу		Площа перерізу A (для дуги довжина L), координата центру ваги y_C	
Дуга		$L = 2\alpha R$ $(\alpha - \text{кут у радіанах})$	$y_C = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
Круговий сегмент		$A = \frac{1}{2} R^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)$ $y_C = \frac{4}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$ $(\alpha - \text{кут у радіанах})$	
Однорідний сектор кругового кільця		$A = 2\alpha(R^2 - r^2)$ $y_C = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{2\alpha} \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}$ $(\alpha - \text{кут у радіанах})$	

Приклад.

Визначити положення центру ваги однорідного диска з круглим отвором, якщо радіус диска r_1 , радіус отвору r_2 , і центр цього отвору знаходиться на відстані $r_1/2$ від центру диска (рис. 6.6).

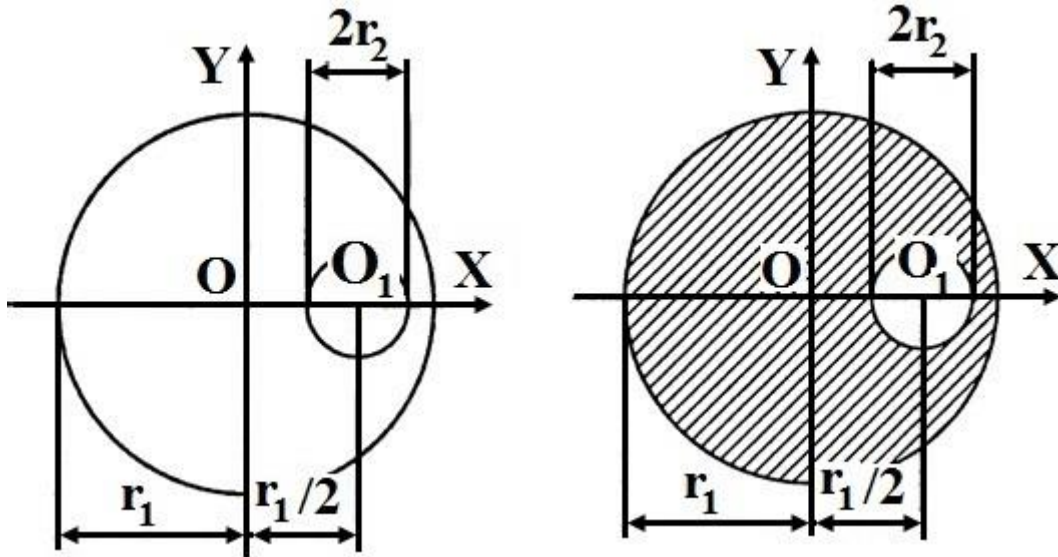


Рисунок 6.6.

Розв'язання.

Скористаємось правилом симетрії для знаходження положення центра ваги фігури. Вісь X проходить через центри кола та отвору, тому центр ваги фігури буде розташований на неї. Диск без вирізу позначимо фігурою 1 з площею A_1 , з центром ваги $C_1 = O$, отвір фігурою 2 з площею A_2 , з центром ваги $C_2 = O_1$. Тоді маємо:

$$A_1 = \pi r_1^2, \quad x_{C_1} = OO = 0; \quad A_2 = \pi r_2^2, \quad x_{C_2} = OO_1 = \frac{r_1}{2}$$

$$x_C = \frac{A_1 \cdot x_{C_1} - A_2 \cdot x_{C_2}}{A_1 - A_2} = -\frac{\pi r_2^2 \cdot \frac{r_1}{2}}{\pi r_1^2 - \pi r_2^2} = -\frac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}$$

Відповідь. $x_C = -\frac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}$.

6.6. Центри ваги об'ємного тіла та стержньової конструкції

Для визначення координат центру ваги об'ємного тіла та стержньової конструкції можна також користуватися методами додавання та відняття. Звичайно, для стержньових конструкцій другий метод не має сенсу.

Скористуємось виразами (6.2), тоді для об'ємного тіла за умови його однорідності можна замінити вагу на об'єм:

$$\begin{cases} x_C = \sum x_i \Delta V_i / V \\ y_C = \sum y_i \Delta V_i / V. \\ z_C = \sum z_i \Delta V_i / V \end{cases} \quad (6.7)$$

Для стержньової конструкції за умови однакової погонної маси у виразах (6.2) потрібно замінити вагу на довжину стержнів:

$$\begin{cases} x_C = \sum x_i \Delta l_i / l \\ y_C = \sum y_i \Delta l_i / l. \\ z_C = \sum z_i \Delta l_i / l \end{cases} \quad (6.8)$$

Очевидно для складних фігур для визначення координат центру ваги необхідно застосовувати формули у інтегральному вигляді, беручи інтеграли за об'ємом (для об'ємного тіла), за поверхнею (для пластин) і за довжиною (для стержнів довільної форми).

Координати центру ваги однорідного тіла (центр ваги об'єму) з об'ємом V визначаються за формулами:

$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dx dy dz \\ y_C = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y dx dy dz. \\ z_C = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dx dy dz \end{cases} \quad (6.9)$$

Координати центру ваги плоскої фігури (або центр ваги будь-якої поверхні) з площею A визначаються за формулами:

$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{A} \iint_{(A)} x dA \\ y_C = \frac{1}{A} \iint_{(A)} y dA \\ z_C = \frac{1}{A} \iint_{(A)} z dA \end{cases} \quad (6.10)$$

Для плоскої однорідної фігури отримуємо:

$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{A} \iint_{(A)} x dx dy \\ y_C = \frac{1}{A} \iint_{(A)} y dx dy \end{cases} \quad (6.11)$$

Координати центру ваги однорідного стержня (центр ваги лінії), криволінійного або прямолінійного, з довжиною L визначаються за формулами:

$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl \\ y_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dl \\ z_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} z dl \end{cases} \quad (6.12)$$

Формули, за якими визначають координати центрів ваги однорідних тіл, можна знайти в численних технічних довідниках.

Контрольні питання

1. Які сили називають паралельними?
2. Що називається центром ваги тіла?
3. Що називається статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі?
4. Як знайти координати центру ваги?
5. В чому полягає метод додавання та метод від'ємних площ?

Глава 7. Тертя та його види

Тертя явно чи приховано завжди присутнє у практичній діяльності людини й відіграє при цьому як корисну, так і шкідливу роль. Основна властивість тертя – чинити опір будь-якому переміщенню тіла і це, як допомагає рухатися тілу, так і є джерелом витрат енергії.

Залежно від руху тіла по поверхні розрізняють тертя **ковзання** (відповідає поступальному руху стичних тіл одне відносно одного), **кочення** (наприклад, колеса по рейці), **крутіння** (наприклад, у підп'ятнику). На перших двох зупинимось докладно.

При **терті ковзанні** (тертя першого роду) спостерігається відносна лінійна швидкість тіл, що труться, має постійну величину по всій поверхні контакту (по плямі контакту).

При **терті коченні** (терті другого роду) відносна лінійна швидкість тіл, що труться, відсутня по всій плямі контакту.

Якщо одночасно відбувається і ковзання і кочення тіл, що труться, тоді прийнято говорити про **комбіноване тертя**.

7.1. Тертя ковзання

Перші досліді з вивчення тертя ковзання були зроблені Кулоном і потім були повторені генералом Мореном. Виникає необхідність розрізняти два випадки тертя ковзання: 1) тертя у стані спокою і, зокрема, тертя на початку руху; 2) тертя у стані руху.

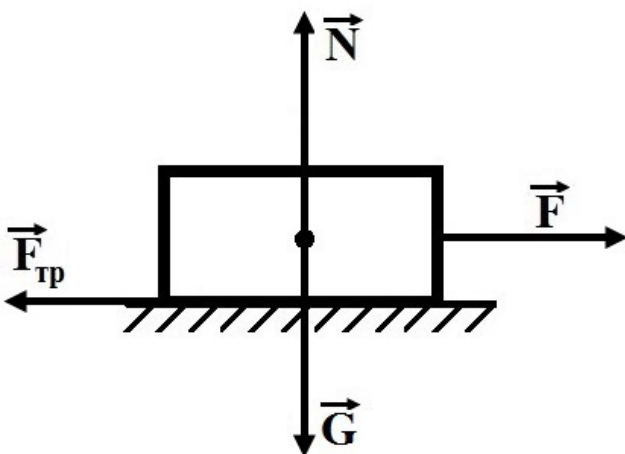


Рисунок 7.1.

Розглянемо тіло вагою \vec{G} , що лежить на шорсткій горизонтальній поверхні (рис. 7.1). Якщо до цього тіла прикласти горизонтальну силу \vec{F} , то на тіло окрім двох урівноважених сил \vec{N} , \vec{G} і сили \vec{F} буде діяти сила, що виникає між стичними поверхнями і яка буде спрямована протилежно до сили \vec{F} .

Позначимо цю силу $\vec{F}_{\text{тр}}$ (також використовують позначення \vec{F}_{fr} , від англ. **Friction** – тертя), яка буде чинити опір руху тіла вздовж шорсткої поверхні і в межах модуля сили \vec{F} буде її урівноважувати. Силу $\vec{F}_{\text{тр}}$ називають **силою тертя ковзання (тертя першого роду)**. В даному випадку реалізується **зовнішнє тертя** – явище опору відносному переміщенню, що виникає між притиснутими один до одного тілами в зонах стику поверхонь за дотичною до них, і яке супроводжується дисипацією енергії.

В інженерних розрахунках виходять з низки встановлених дослідним шляхом закономірностей, які з достатньою для практики точністю відображають основні особливості явища тертя. Ці закономірності можна сформулювати наступним чином.

1. При намаганні посунути одне тіло по поверхні іншого в площині стику тіл виникає сила тертя (або сила зчеплення), яка може приймати значення від нуля до $F_{\text{тр}}$ – **граничної сили тертя**.

2. Гранична сила тертя чисельно дорівнює добутку статичного коефіцієнта тертя на нормальний тиск або нормальну реакцію:

$$F_{\text{тр}} = fN. \quad (7.1)$$

Це співвідношення має назву **закону Амонтона-Кулона**. Коефіцієнт пропорційності f називається **коефіцієнтом тертя ковзання**, або **динамічним коефіцієнтом тертя ковзання**, і визначається дослідним шляхом, його значення залежно від матеріалу тіла та поверхні руху наведено у довідниках. Залежно від виду тертя і від типів матеріалів, які труться, коефіцієнт f змінюється в межах приблизно від 1 (в окремих випадках – навіть від кількох одиниць) до 0,0001.

Вищесказане відноситься до тертя ковзання для стану спокою, для якого можна ввести коефіцієнт тертя спокою f_0 . **Статичний коефіцієнт тертя f_0** – величина безрозмірна, визначається дослідним шляхом і залежить від матеріалу тіл, які стикаються та утворюють певну пару, наприклад, метал/метал, метал/деревина тощо, та стану поверхонь (характер обробки, шорсткість, температура, вологість тощо). Коефіцієнт

$f_0 > f$. Коефіцієнт f залежить від швидкості руху тіла, однак в елементарних розрахунках ця залежність часто не враховується.

Отже, **сила тертя ковзання – це сила опору, яка виникає при переміщенні або намаганні переміщення одного тіла по поверхні іншого**. Досліди показали, що максимальне значення сили тертя пропорційне нормальній реакції поверхні тіла, а величина сили тертя спокою обмежена нерівністю:

$$F_{\text{тр}}(v = 0) \leq F_{\text{трmax}} = f_0 N, \quad (7.2)$$

Для будь-якого положення, де виконується нерівність (7.2), можна вважати $F_{\text{тр}} = kN$, $k < f_0$. За $k = 0$ або $f_0 = 0$ отримуємо положення рівноваги, коли в'язь є гладкою (ідеальною).

Існує значна різниця між тертям за початку руху та динамічним коефіцієнтом тертя ($f_0 > f$), а також зменшення відповідних коефіцієнтів за наявності змащення.

Залежно від наявності або відсутності у контакті третіх речовин прийнято розрізняти такі різновиди тертя ковзання:

1. **Тертя без мастила** (застарілий термін – **сухе тертя**).

2. **Граничне тертя** – тертя повзуна та напрямної, покритих найтоншою плівкою залишку змащення, яка через невелику товщину придбала характеристику твердого тіла і не може бути видалена інакше, як тільки спеціальними прийомами знежирення.

3. **Напівсухе тертя** – суміш граничного тертя та тертя без змащення (через прорив найтоншої плівки мастила в окремих місцях контакту при високих питомих тисках).

4. **Напіврідинне тертя** – суміш граничного тертя та тертя, при якому повзун та напрямна частково розділені шаром мастила достатньої товщини з характеристиками рідини.

5. **Рідинне тертя** – тертя повзуна та напрямної, повністю розділених прошарком рідкого мастила (у тому числі, іноді як мастило застосовується вода, або якийсь газ, або навіть просто повітря під тиском).

7.2. Реакція шорстких в'язей. Кут і конус тертя

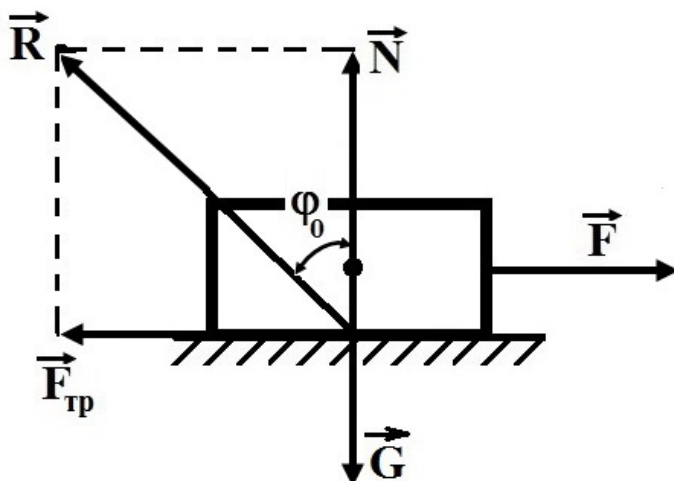


Рисунок 7.2.

Реакція реальної (шорсткої) в'язі складається з двох чинників: нормальної реакції \vec{N} та перпендикулярної до неї сили тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 7.2).

Повна реакція \vec{R} буде відхилена від нормалі до поверхні на деякий кут.

За зміною сили тертя від нуля до $F_{\text{тр}}$ модуль сили \vec{R} змінюється (зростає) до деякого граничного значення, що визначається кутом φ_0 , який визначається:

$$\text{tg}\varphi_0 = F_{\text{тр}}/N.$$

Найбільший кут φ_0 називається **кутом тертя**. З урахуванням (7.1) знаходимо зв'язок між кутом тертя та статичним коефіцієнтом тертя:

$$\text{tg}\varphi_0 = f_0. \quad (7.3)$$

За рівноваги повна реакція \vec{R} залежно від сили \vec{F} може проходити у довільному місці всередині кута тертя. Коли рівновага стає граничною, реакція буде відхилена на кут φ_0 . Цей кут визначається дослідним шляхом з використанням нахиленої поверхні.

Залежно від дії активних сил напрям граничної реакції може змінюватися. Геометричне місце усіх можливих напрямів граничної реакції \vec{R} утворює конічну поверхню – **конус тертя** або **конус зчеплення** (рис. 7.3). Якщо коефіцієнт тертя в усіх напрямках однаковий, то конус тертя буде круговим. Поверхня конуса тертя є геометричним місцем максимальних реакцій опорної поверхні. Простір усередині конуса тертя є сукупність можливих положень реакцій опорної поверхні у стані спокою.

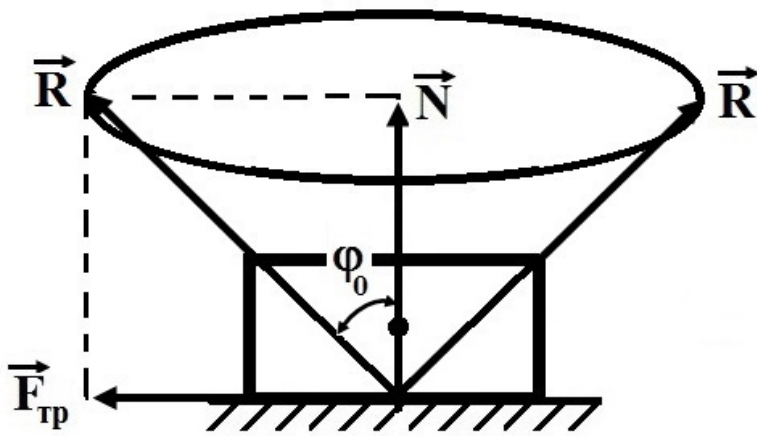


Рисунок 7.3.

Інакше кажучи, якщо прикладена до тіла сила буде нахилена до нормалі на кут, менший φ_0 , то, незважаючи на величину цієї сили, тіло залишиться у рівновазі. Це пояснює найменування цього кута кутом тертя.

Для плоского випадку конус перетворюється у трикутник, а для просторового, коли тіло може пересуватися в будь-якому напрямі, конус має кут при вершині $2\varphi_0$.

Наявність області тертя у вигляді конуса пояснює явище заклинювання, коли ніякою прикладеною усередині конуса силою не вдається посунути з місця відповідну частину машини. Прикладена сила збільшує нормальну реакцію, це в свою чергу приводить до зростання сили тертя, і прикладена сила є недостатньою для подолання опору тертя.

7.3. Рівновага тіл за наявності тертя

Вивчення рівноваги тіл за наявності тертя ковзання можна звести до розгляду граничної рівноваги, яка має місце, коли сила тертя дорівнює $F_{\text{трmax}}$.

Нехай потрібно визначити кут нахилу площини α , за якого вантаж, який лежить на ній, залишається у рівновазі, якщо коефіцієнт тертя f_0 .

У граничному положенні на вантаж діє сила ваги \vec{G} , нормальна реакція \vec{N} та гранична сила тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$, яка за модулем дорівнює $F_{\text{трmax}}$ (рис. 7.4). Будуючи замкнений трикутник, находимо $F_{\text{трmax}} = N \text{tg} \alpha_{\text{гр}}$.

З іншого боку, $F_{\text{трmax}} = f_0 N$, що приводить до:

$$\text{tg} \alpha_{\text{гр}} = f_0.$$

Якщо в отриманій рівності зменшувати f_0 , то значення $\alpha_{\text{гр}}$ теж буде зменшуватися. Звідси висновок, що рівновага можлива за будь-якого кута $\alpha \leq \alpha_{\text{гр}} = \varphi_0$, тобто найбільший кут, за якого вантаж, який лежить на нахиленій поверхні, залишається у рівновазі, дорівнює куту тертя.

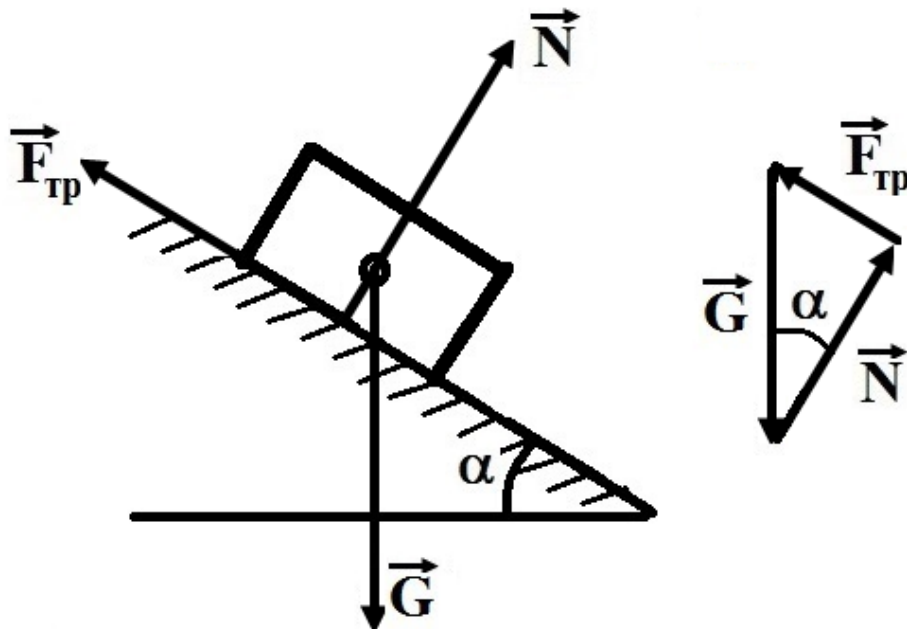


Рисунок 7.4.

Всі задачі на рівновагу твердого тіла за наявності сил тертя рекомендується розв'язувати за таким алгоритмом (перші чотири пункти наведено у розділі 2.4):

1. Виділити матеріальний об'єкт (точку, тверде тіло), рівновага якого буде розглядатися.
2. До виділеного об'єкта прикласти всі активні сили.
3. Користуючись принципом звільнення від в'язей, відкинути в'язі, які накладені на об'єкт, замінивши їх дію відповідними реакціями.
4. Вибрати систему координат, якщо в поставленій задачі вона не задана.
5. Зіставити число невідомих величин і число незалежних рівнянь рівноваги, які мають бути однаковими для статично визначених задач; при цьому до рівнянь рівноваги твердого тіла слід додати залежність сили тертя від нормального тиску.
6. Скласти систему рівнянь рівноваги для сил, прикладених до твердого тіла або до системи твердих тіл.

7. Розв'язуючи систему рівнянь рівноваги, визначити шукані величини. Розглянемо рівновагу сил, які діють на брус, і який спирається на дві шорсткі поверхні (рис. 7.5). В точках A і B виникають реакції опор, лінія дії яких не виходять за межі конусів кутів тертя. Проводячи лінії $A - I$, $A - II$, $B - III$, $B - IV$, що складають кути тертя φ_{01} і φ_{02} з перпендикулярами, відновленими в точках A і B до опорних площин, отримуємо границі конусів тертя.

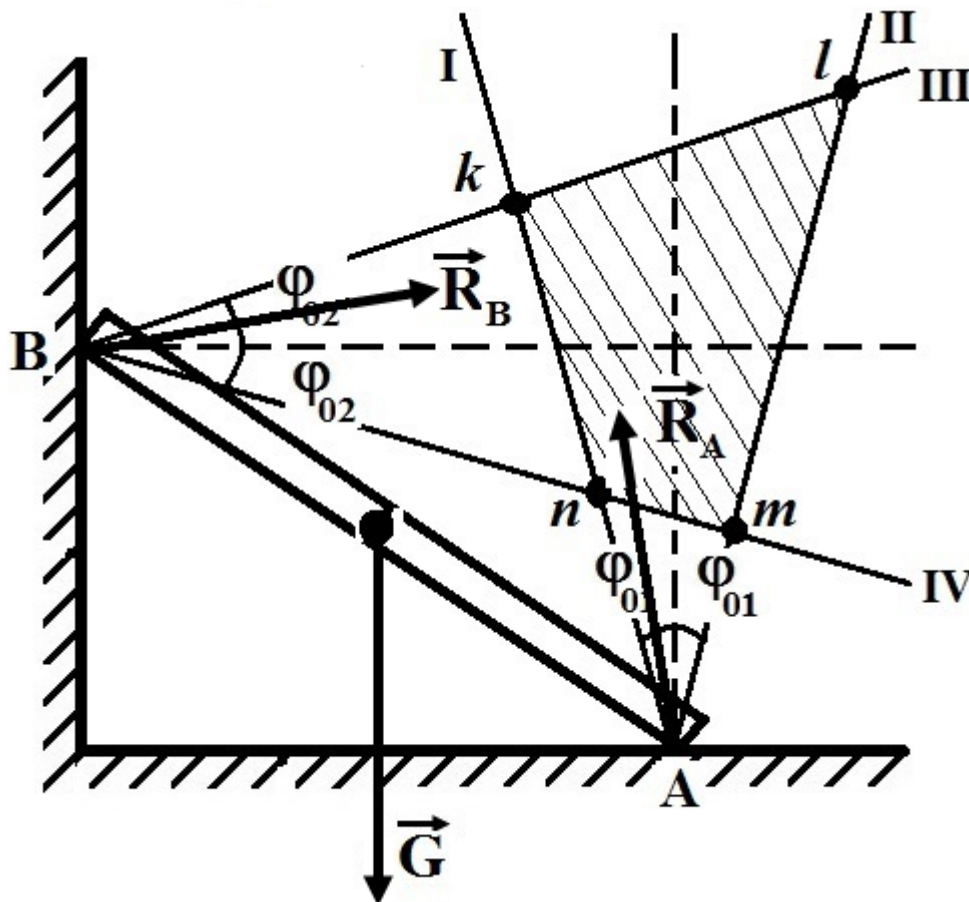


Рисунок 7.5.

Чотирикутник $klmn$, утворений цими лініями, всередині якого можуть перетинатися лінії дії реакцій опор \vec{R}_A і \vec{R}_B , називається **областю рівноваги**. Брус AB знаходиться під дією трьох сил: ваги \vec{G} і двох реакцій опор \vec{R}_A і \vec{R}_B . За рівноваги лінії дії всіх сил перетинаються в одній точці.

Через те, що довільна точка ділянки $klmn$ може бути точкою перетину ліній дій реакцій опор, то брус знаходиться в стані спокою, якщо

лінія дії сили ваги перетинає область рівноваги. Брус не утримується в стані спокою, якщо лінія дії сили ваги поза межами області рівноваги, як це показано на рис. 7.5.

При наближенні точки центру ваги бруса до опори B рівновага порушується, а при наближенні до опори A рівновага забезпечується навіть за малого коефіцієнту φ_{01} .

Якщо на брус діє декілька сил і вони приводяться до рівнодійної, встановленим вимогам має задовольняти ця рівнодійна.

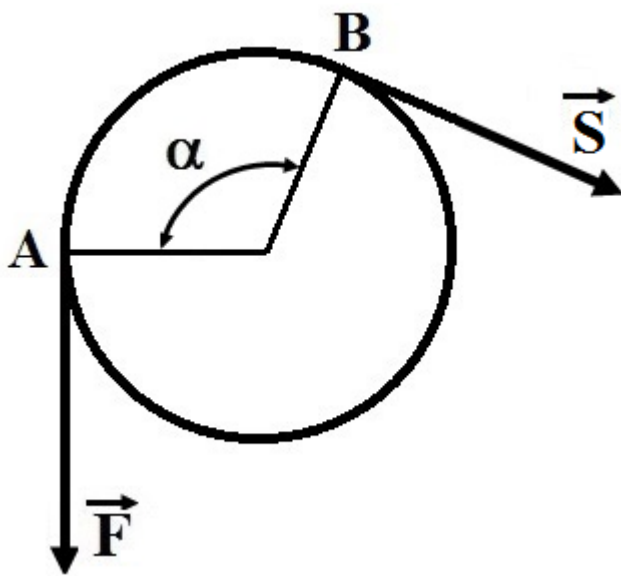


Рисунок 7.6.

Розглянемо рівновагу твердих тіл за наявності тертя гнучких тіл. Нехай на нерухомий циліндр навита нить, до одного кінця якої прикладена сила \vec{F} (рис. 7.6). Кут охоплення циліндра ниттю дорівнює α . Коефіцієнт тертя ниті по шорсткій поверхні циліндра дорівнює f .

Тоді найменше значення сили \vec{S} , необхідної для урівноваження сили \vec{F} , визначається за формулою Ейлера (без виводу формули):

$$S = F \cdot e^{-f\alpha} = F \cdot \exp(-f\alpha). \quad (7.4)$$

Таким чином, сила \vec{S} не залежить від діаметру циліндру та є функцією кута охоплення і коефіцієнту тертя.

Досвід показує, що завдяки тертю сила \vec{S} може бути у багато разів меншою, ніж сила \vec{F} . Більш докладно про це йдеться у дисциплінах «Деталі машин» і «Теорія механізмів і машин», зокрема, в останній слід зазначити тему «Тертя в кінематичних парах».

7.4. Тертя кочення (опір коченню)

Крім тертя ковзання розглянемо ще один вид тертя, що виникає при коченні тіл – тертя кочення. У теоретичній механіці тертям кочення цікавляться лише з зору визначення реакцій опори.

За абсолютно жорстких круглого котка та горизонтальної поверхні сила тертя кочення дорівнює нулю, в чому можна переконатися, склавши рівняння рівноваги у статичній постановці.

На рис. 7.7 показано абсолютно жорсткий (непружний) круглий коток 1 радіусом r та вагою \vec{G} , який котиться по абсолютно жорсткій горизонтальній поверхні 0 з постійною швидкістю $\vec{v}_{1-0} = const$.

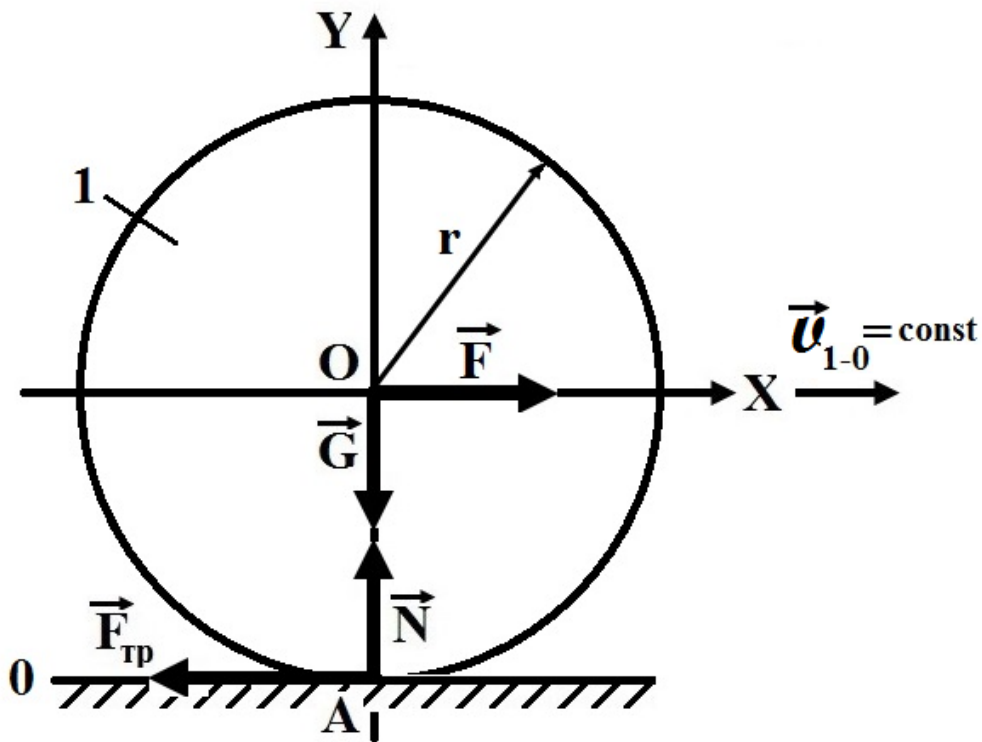


Рисунок 7.7.

Для підтримки швидкості $\vec{v}_{1-0} = const$ необхідно прикласти до котка горизонтальну силу \vec{F} . З боку поверхні 0 на коток будуть діяти (за аналогією з тертям ковзання) дві складові повної сили реакції: нормальна реакція \vec{N} , спрямована вздовж нормалі до поверхні у точці контакту A , та $\vec{F}_{тр}$, спрямована вздовж дотичної до поверхні у точці контакту A . Силу $\vec{F}_{тр}$ прийнято називати **силою тертя кочення**.

Скористаємось рівняннями рівноваги статки, справедливими за дотримання умови $\vec{v}_{1-0} = \text{const}$.

З рівняння проєкцій на вісь X $\sum_i \vec{F}_{iX} = 0$ знаходимо $\vec{F}_{\text{тр}} = \vec{F}$.

З рівняння проєкцій на вісь Y $\sum_i \vec{F}_{iY} = 0$ знаходимо $\vec{N} = \vec{G}$.

З рівняння моментів відносно точки O $\sum_i \vec{M}_{iO} = 0$ знаходимо добуток $\vec{F}_{\text{тр}} \cdot r = 0$. Через неможливість рівності радіуса котка нулеві $r \neq 0$, остаточно $\vec{F}_{\text{тр}} = \vec{F} = 0$.

Приходимо до висновку, що без урахування деформацій тіл кочення величину сили тертя кочення $\vec{F}_{\text{тр}}$ визначити неможливо. Водночас напрошується також наступний висновок: чим вищою буде жорсткість тіл кочення, тим менша сила тертя кочення. Це підтверджується досвідом.

Наприклад, на залізничному (рейковому) транспорті, де застосовуються жорсткі сталеві колеса та жорсткі сталеві рейки, сили тертя кочення невеликі.

Розглянемо випадок, коли вздовж жорсткої поверхні пересувається пружній коток (рис. 7.8)

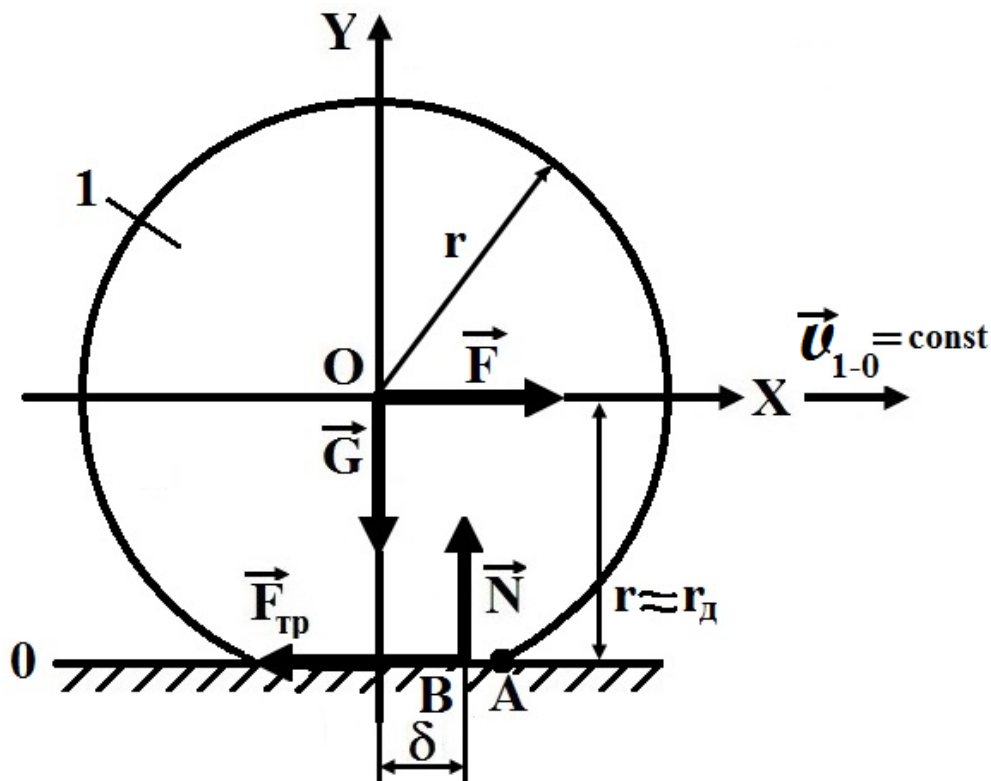


Рисунок 7.8.

За умови пружного деформування котка виникає пляма контакту. У стані спокою еюра питомих сил тиску в контактї має симетричну еліптичну форму. Коли коток рухається зі швидкістю $\vec{v}_{1-0} = \text{const}$, до нього прикладається сила \vec{F} , а у площині контакту виникає сила тертя другого роду \vec{F} .

У процесі кочення еюра питомих тисків стає несиметричною, результуюча нормальна сила \vec{N} пройде в цьому випадку через центр тяжіння фігури еюри питомих тисків у точці B на деякій відстані δ спереду від вертикальної центрної лінії.

Відповідно до рівнянь статки і в цьому випадку сила $\vec{N} = \vec{G}$, а сила $\vec{F}_{\text{тр}} = \vec{F}$. З рівняння $\sum_i \vec{M}_{iO} = 0$, з урахуванням відносно малих деформацій $r \approx r_d$ (r_d – динамічний радіус котка, залежить від його деформації під навантаженням, r – статичний радіус котка за відсутності навантаження), прирівнявши моменти зазначених пар, можна отримати вираз для визначення коефіцієнта тертя кочення:

$$Fr = G\delta \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{Fr}{G}. \quad (7.5)$$

Плече δ зміщення вектора нормальної реакції \vec{N} вперед за ходом руху названо **коефіцієнтом тертя другого роду**.

На відміну від коефіцієнту тертя ковзання, який є безрозмірною величиною, коефіцієнт тертя кочення має розмірність довжини, і, зазвичай, вимірюється у сантиметрах.

У довідковій літературі можна знайти таблицю орієнтовних значень коефіцієнта δ для різних пар тіл кочення. Наприклад, для тіл кочення із незагартованої сталі $\delta \approx 0,005$ см, для тіл кочення зі загартованої сталі $\delta \approx 0,001$ см, для тіл кочення з дерева $\delta \approx 0,05$ см.

Розглянемо випадок, коли вздовж пружної поверхні пересувається жорсткий коток (рис. 7.9). Цей варіант достатньо схожий за передумовами розподілу сил до попереднього випадку.

Нехай до круглого котка радіусом r (рис. 7.9) прикладена горизонтальна сила \vec{F} . Крім того, на коток діє вага \vec{G} . Через деформацію горизонтальної опори поверхні точка контакту перетворюється у пляму контакту, нормальна \vec{N} реакції опори зміститься у точку B на певну відстань δ , яка визначається за виразом (7.5).

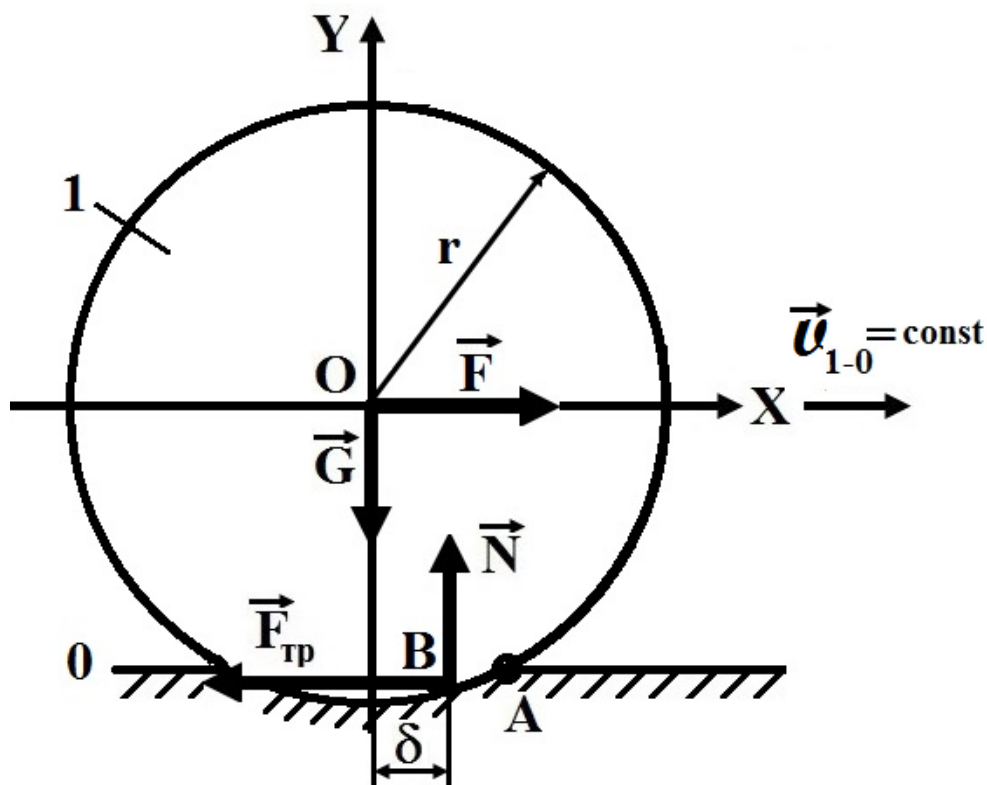


Рисунок 7.9.

Очевидно, збільшення твердості стичних поверхонь значно зменшує величину δ , що в свою чергу зменшує величину зусиль, необхідних для кочення вантажів. Експериментами встановлено, що величина коефіцієнта тертя кочення δ залежить насамперед від матеріалу тіл кочення і мало залежить від кривизни котка.

Якщо враховувати деформації не лише котка, а й основи, а особливо, якщо основа зазнає пластичні деформації (коток у цьому випадку залишає колію), тоді опис явища кочення котка суттєво ускладнюється. З'являються пружні деформації не тільки вертикального, а також горизонтального напрямку, попереду котка може виникати валик спученої опорної поверхні. Опір коченню різко зростає.

Все ж таки і в цьому випадку запропонована вище модель кочення катка може бути використана, тільки плече δ зміщення нормальної складової \vec{N} від повної реакції \vec{R} основи на коток необхідно визначити експериментально в умовах, близьких до реальних.

За ковзання твердого тіла по нерухомій твердій поверхні його сповільнює сила тертя fN . За кочення обертання гальмує момент сили δN . Для рівномірного ковзання до тіла потрібно прикласти силу, яка урівноважує силу тертя. Рівномірне кочення круглого тіла можна підтримувати за допомогою сили F^* , момент якої урівноважує гальмуючий момент сили тертя кочення.

Порівняємо витрати енергії, необхідні для підтримки ковзання та кочення за однакових швидкостей двох тіл, які з однаковою силою N тиснуть на поверхню стику. Поняття кутової швидкості та потужності буде розглянуто у Розділах II (Кінематика) і III (Динаміка), але ми використаємо ці поняття для визначення відношення потужностей:

$$\frac{\text{потужність (ковзання)}}{\text{потужність (кочення)}} = \frac{fNv}{\delta N\omega} = \frac{fR}{\delta} \quad (7.6)$$

Так, для колеса радіусом $R = 50$ см за $f = 0,5$ та $\delta = 0,05$ см співвідношення (7.6) дорівнює 500. Це означає, що підтримувати кочення у 500 разів легше, ніж тягти тіло. Цей фактор реалізований у техніці, зокрема, у принципі дії підшипників.

Контрольні питання

1. Поясніть природу тертя ковзання та тертя кочення.
2. Дайте визначення статичного і динамічного коефіцієнтів тертя.
3. Що називають кутом і конусом тертя?
4. Що називають конусом тертя?
5. За яких умов виникає тертя кочення?
6. Як визначається коефіцієнт тертя другого роду?

Розділ Кінематика

Глава 8. Кінематика точки

8.1. Вступ до кінематики. Основні поняття та визначення

Кінематикою називається розділ механіки, в якому вивчаються геометричні властивості руху тіл без урахування їх інертності (маси) та діючих на них сил. Це означає, що основною задачею кінематики є встановлення законів механічного руху та визначення й обчислення кінематичних величин (параметрів), які характеризують рух тіла загалом і рух кожної його точки зокрема.

Кінематика є тією частиною теоретичної механіки, яка класифікує різні види механічного руху матеріальних тіл і майже повністю розв'язує першу задачу теоретичної механіки, бо за встановленим законом руху визначають необхідні кінематичні величини, які в подальшому в динаміці будуть безпосередньо зв'язані з силами, що діють на матеріальні тіла та призводять до їх руху.

З іншого боку кінематика має і самостійне значення, як теоретична база для загальноінженерних і спеціальних дисциплін (зокрема, «Теорія механізмів і машин», в яких розв'язують задачі кінематичного аналізу та синтезу різноманітних механізмів і машин).

Рух – зміна протягом часу положення даного тіла в просторі по відношенню до інших тіл. **Законом механічного руху будь-якого тіла і зокрема точки називають функціональну залежність положення тіла або точки від часу.**

Для визначення положення твердого тіла – ТТ (або матеріальної точки – МТ), що рухається, у різні моменти часу з тілом, відносно якого вивчається рух, жорстко зв'язують будь-яку систему координат, яка утворює разом з цим тілом **систему відліку**. Зазвичай, систему відліку зображують у вигляді трьох координатних осей, які утворюють прямокутну декартову систему координат – $OXYZ$ з центром у точці O .

За одиницю довжини при вимірюванні відстані приймається 1 м, за одиницю часу – 1 с. Час є незалежною змінною, яка неперервно

змінюється. Решта змінних (відстань, швидкість, прискорення тощо) вважається як змінні з часом, тобто функціями часу t .

Відлік часу починається з деякого **початкового моменту** $t = 0$, вибір якого має бути встановлено для кожного випадку. Різниця між будь-якими двома послідовними моментами часу називається **проміжком часу**. Для розв'язання задач кінематики необхідно, щоб рух, який вивчається, був якимось чином заданий.

Кінематично задати рух або закон руху МТ або ТТ означатиме задати положення МТ або ТТ відносно заданої системи координат в довільний момент часу.

Вивчення кінематики починається з вивчення руху найпростішого об'єкту – МТ, а потім переходимо до вивчення кінематики ТТ.

Неперервна лінія, яку описує рухома точка відносно даної системи координат, називається **траєкторією** точки. Якщо траєкторія є пряма лінія, рух називається **прямолінійним**, якщо крива – **криволінійним**.

8.2. Способи завдання руху точки

Для завдання руху МТ можна застосовувати один з трьох способів: 1) векторний; 2) координатний; 3) натуральний.

1. Векторний спосіб завдання руху МТ.

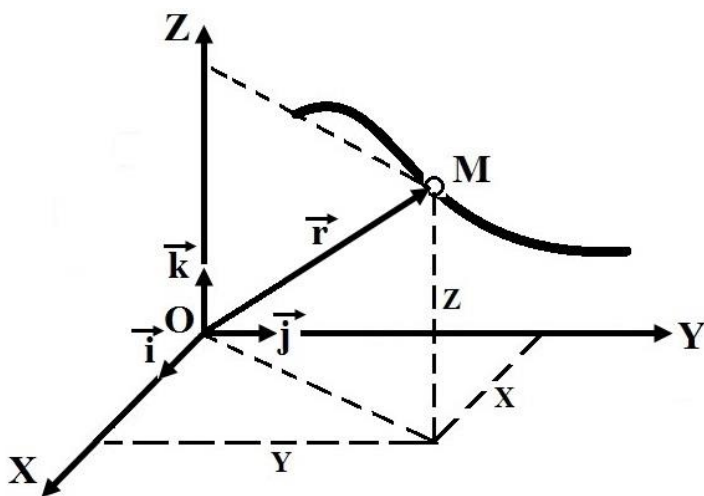


Рисунок 8.1.

Нехай точка M рухається по відношенню до деякої системи відліку $OXYZ$. Положення цієї точки в будь-який момент часу можна визначити, якщо задати радіус-вектор \vec{r} , проведений з початку координат O до точки M (рис. 8.1).

Під час руху точки M вектор \vec{r} буде протягом часу змінюватися і за модулем, і за напрямом. Отже, $\vec{r}(t)$ є змінним вектором (вектором-функцією), залежним від аргументу t , і є однозначною функцією часу:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (8.1)$$

Рівність (8.1) визначає закон руху МТ у векторній формі, тому що воно дозволяє у будь-який момент часу побудувати відповідний вектор \vec{r} і знайти положення рухомої точки.

Геометричне місце кінців вектора \vec{r} , тобто **годограф** цього вектора, визначає траєкторію рухомої точки. Аналітично вектор задається його проєкціями на координатні осі. В прямокутних координатах для вектора \vec{r} буде: $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$. Тоді після введення одиничних векторів (ортів) \vec{i} , \vec{j} і \vec{k} запишемо для \vec{r} :

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (8.2)$$

Вектор може бути заданий своїм модулем та кутами з осями або проєкціями на осі інших систем координат.

2. Координатний спосіб завдання руху МТ.

З урахуванням (8.2) можна сказати, що залежність $\vec{r}(t)$ буде відома, коли будуть задані координати x , y , z точки як функції часу. Ці координати з часом будуть змінюватися. Знати закон руху МТ, тобто знати положення МТ, означає знати величини координат:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (8.3)$$

Рівняння (8.3) є рівнянням руху МТ в прямокутних декартових координатах. За умов руху в одній площині маємо два рівняння руху:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t). \quad (8.4)$$

Нарешті, при прямолінійному русі МТ, якщо вздовж її руху спрямувати координатну вісь X , рух буде визначатися одним рівнянням (**законом прямолінійного руху МТ**):

$$x = f(t). \quad (8.5)$$

Рівняння (8.3) і (8.4) є водночас рівняння траєкторії МТ в параметричній формі, де роль параметра грає час t . Виключивши з рівнянь руху час, можна знайти рівняння траєкторії у звичайній формі.

Приклад. Нехай $x = 2t$, $y = 12t^2$. З першого рівняння $t = x/2$ і, підставляючи у друге рівняння, $y = 12(x/2)^2 = 3x^2$. Отже, траєкторією є парабола.

3. **Натуральний спосіб завдання руху МТ.**

Натуральним (або траєкторним) способом завдання руху зручно користуватися в тих випадках, коли траєкторія рухомої точки відома заздалегідь (наприклад, при вивченні складного руху МТ). Рух точки у цьому випадку розглядають відносно деякої умовно нерухомої системи відліку.

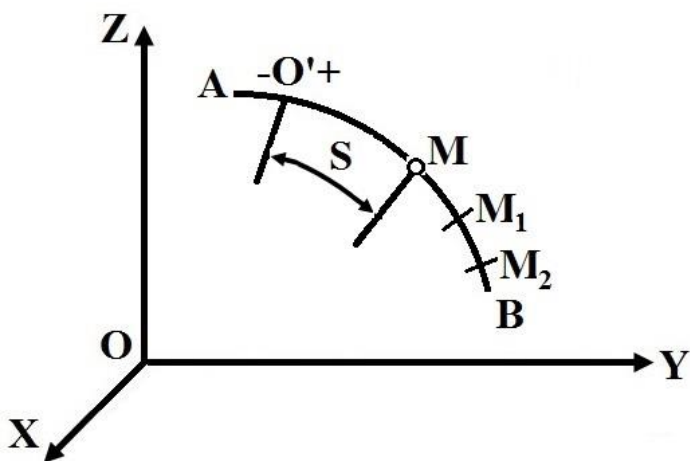


Рисунок 8.2.

Нехай крива AB є траєкторією точки M при русі в системі координат $OXYZ$. Вибираємо на ній нерухому точку O' , яку приймаємо за початок відліку, встановимо додатний і від'ємний напрями відліку.

Тоді положення точки M при її русі буде однозначно визначатися криволінійною координатою S , яка дорівнює відстані від точки O' до точки M та вимірюється вздовж дуги траєкторії і узяті з відповідним знаком.

Щоб знати положення точки M на траєкторії у будь-який час, необхідно знати залежність:

$$S = f(t). \quad (8.6)$$

Рівняння (8.6) і виражає **закон руху МТ вздовж траєкторії**.

8.3. Швидкість точки

Однією з основних кінематичних характеристик руху МТ є векторна величина, яка називається **швидкістю**.

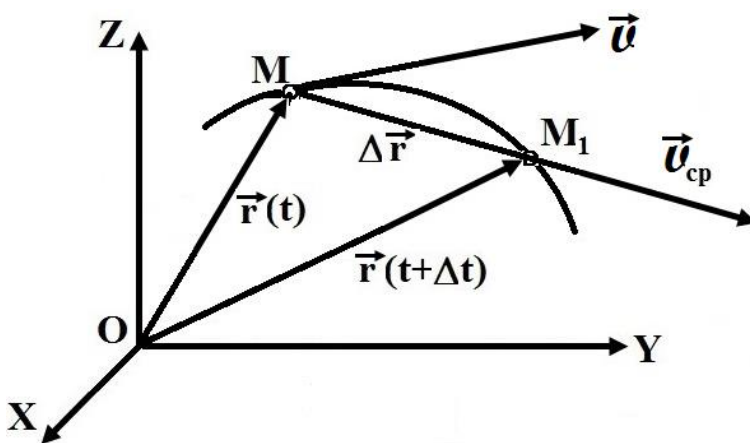


Рисунок 8.3.

Нехай в момент часу t положення МТ визначається радіус-вектором $\vec{r}(t)$, а в момент часу $t + \Delta t$ радіус-вектором $\vec{r}(t + \Delta t)$ (рис. 8.3). Вектор

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

будемо називати вектором переміщення МТ за час Δt .

Відношення вектора $\Delta \vec{r}$ до проміжку часу Δt називається **середньою швидкістю точки за проміжок часу**:

$$\vec{v}_{cp} = \Delta \vec{r} / \Delta t.$$

Позначається літерою v (від англ. **Velocity** – швидкість).

Швидкістю в даний момент часу називається границя відношення переміщення точки до проміжку часу, за який відбулося це переміщення, коли цей проміжок часу прагне до нуля, тобто:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (8.7)$$

З виразу (8.7) бачимо, що швидкість точки дорівнює похідній радіус-вектора точки за часом.

Швидкість МТ при координатному способі задання руху. При заданні руху в декартовій системі координат (8.3)

$$x = f_1(t) = x(t), \quad y = f_2(t) = y(t), \quad z = f_3(t) = z(t)$$

і за умов постійності одиничних векторів, на основі (8.7) маємо:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = v_X \vec{i} + v_Y \vec{j} + v_Z \vec{k}. \quad (8.8)$$

На рис. 8.4 показано розподіл швидкості на складові по осях системи координат $OXYZ$.

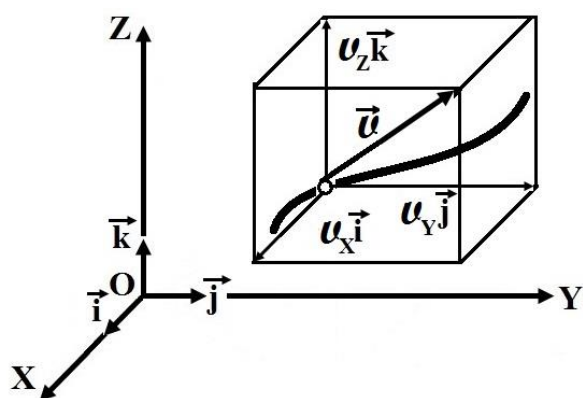


Рисунок 8.4.

В подальшому будемо використовувати позначення:

$$v_X = \dot{x}, \quad v_Y = \dot{y}, \quad v_Z = \dot{z}. \quad (8.9)$$

Модуль швидкості визначається за формулою:

$$v = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2} =$$

$$= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (8.10)$$

а напрям швидкості – напрямними косинусами. Якщо модуль швидкості не змінюється за часом, то рух називається **рівномірним**.

Швидкість МТ при натуральному способі задання руху.

Нехай дуга $\overline{MM_1} = \Delta S$ (рис. 8.5). З урахуванням (8.7) можна записати:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

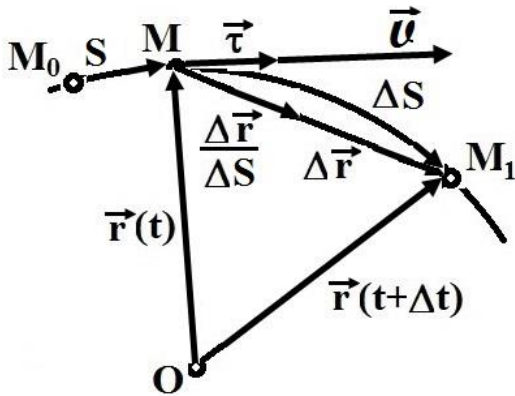
Введемо $\vec{\tau}$ – одиничний вектор дотичної до кривої, спрямований у додатний бік відліку дуги. Тоді:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} = \frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{\tau}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \dot{S}.$$

Остаточно:

$$\vec{v} = \frac{dS}{dt} = v_{\tau} \vec{\tau}. \quad (8.11)$$

а) $\Delta S > 0$



б) $\Delta S < 0$

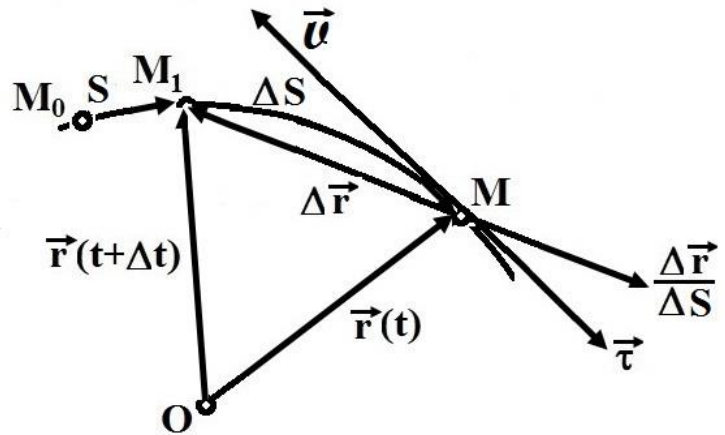


Рисунок 8.5.

Очевидно, $v_{\tau} = v$, якщо рух відбувається у бік додатного відліку дуги, і $v_{\tau} = -v$, якщо рух відбувається у протилежний бік. Через те, що шлях, що проходить МТ, завжди додатний, то елемент шляху

$$dS = |dS|,$$

і модуль швидкості можна визначити за формулою:

$$v = \left| \frac{dS}{dt} \right| = \frac{dS}{dt}. \quad (8.12)$$

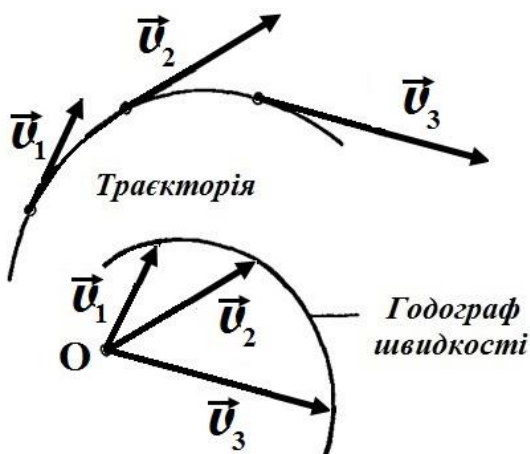


Рисунок 8.6.

Для швидкості, як і для траєкторії, можна побудувати **годограф** – криву, яку викреслює кінець вектора швидкості при русі точки, якщо вектор швидкості проводити з однієї точки (рис. 8.6).

8.4. Прискорення точки

Нехай в момент часу t швидкість точки дорівнює $\vec{v}_1 = \vec{v}(t)$, а в момент часу $t + \Delta t$ буде $\vec{v}_2 = \vec{v}(t + \Delta t)$ (рис. 8.7). Зміну вектора швидкості за проміжок часу Δt знайдемо як різницю векторів \vec{v}_2 і \vec{v}_1 , якщо паралельно перенесемо вектор \vec{v}_2 в точку M_1 . Отриманий вектор

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$$

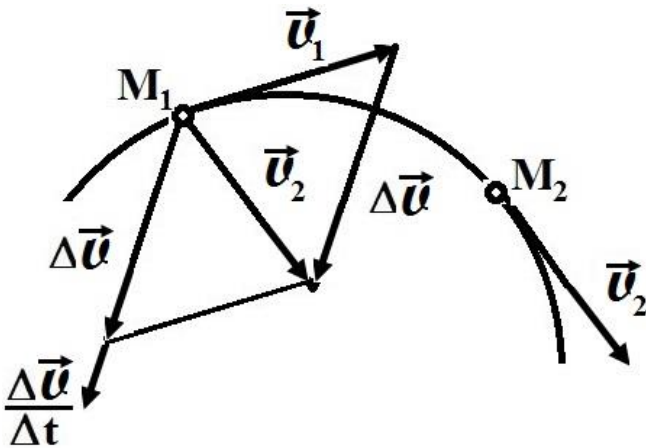


Рисунок 8.7.

є прирістом вектора швидкості за проміжок часу Δt .

Відношення вектора $\Delta \vec{v}$ до проміжку часу Δt називається **середнім прискоренням** точки за проміжок часу Δt :

$$\vec{a}_{cp} = \Delta \vec{v} / \Delta t.$$

Прискоренням \vec{a} точки в даний момент часу називається **границя відношення приросту швидкості $\Delta \vec{v}$ до приросту часу Δt за умови, що останнє прагне до нуля**, тобто:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (8.13)$$

Можна використовувати наступну форму запису через похідні за часом:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}.$$

Позначається літерою a (від англ. **Acceleration** – прискорення).

Отже, прискорення точки в даний момент часу дорівнює **першій похідній за часом від вектора швидкості точки або другій похідній за часом від радіус-вектора точки**.

Прискорення МТ при координатному способі задання руху.

Нехай рух точки задано у вигляді (8.3), і з урахуванням (8.8) маємо:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

a_x, a_y, a_z – проекції прискорення на відповідні координатні осі. Тоді:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}, \quad (8.14)$$

тобто **проекція прискорення точки на будь-яку координатну вісь дорівнює першій похідній за часом від відповідної проекції швидкості точки.**

Вирази (8.14) можна переписати:

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}, \quad (8.15)$$

що дає ще одне визначення - **проекція прискорення точки на будь-яку координатну вісь дорівнює другій похідній за часом від відповідної координати точки.**

Модуль прискорення визначається за формулою:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad (8.16)$$

а напрям прискорення – напрямними косинусами.

Використовуючи співвідношення між декартовими та полярними координатами, можна отримати відповідні вирази для швидкості та прискорення у полярних координатах.

Прискорення МТ при натуральному способі задання руху.

Перед викладанням матеріалу ознайомимся з необхідними поняттями з диференціальної геометрії.

Розглянемо просторову криву, де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор **дотичної** до кривої, спрямований у додатний бік відліку дуги (рис. 8.8).

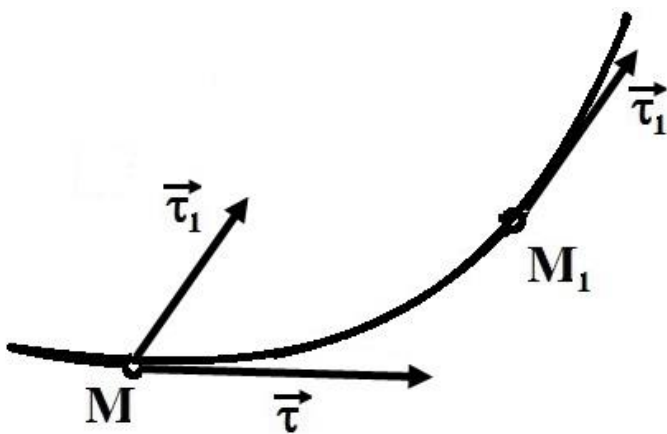


Рисунок 8.8.

Модуль орта $\vec{\tau}$ дорівнює одиниці, є константою, але напрям орта змінюється при переміщенні точки вздовж кривої, тобто орт $\vec{\tau}$ є змінним вектором. Візьмемо на кривій точки M і M_1 , близьку до неї. Паралельно перенесемо вектор $\vec{\tau}_1$ в точку M і проведемо площину через вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$, прикладені в точці M .

При спрямуванні точки M_1 до точки M ця площина займе певне положення і таку площину називають **стичною** (рис. 8.9).

Площина, проведена через точку M перпендикулярно до дотичної, зветься **нормальною** площиною. Лінія перетину зазначених площин визначає **головну нормаль** до кривої в точці M .

Площина, яка проведена через точку M і перпендикулярна до головної нормалі, зветься **спрямляючою** площиною.

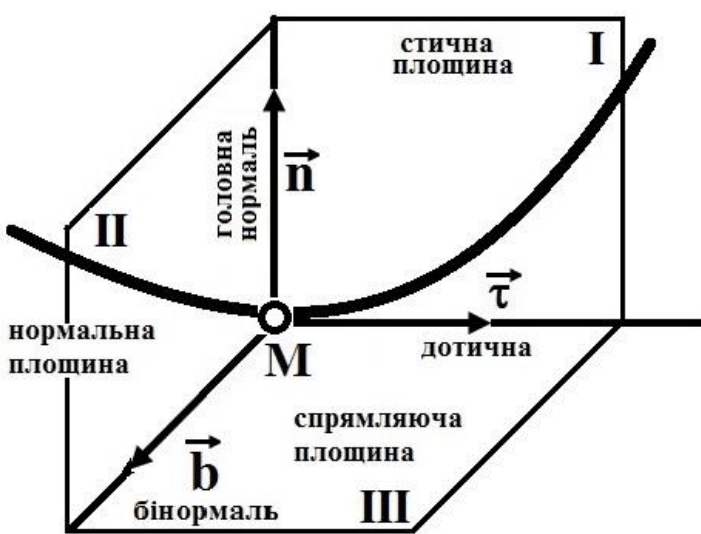


Рисунок 8.9.

На рис. 8.9 стична, нормальна та спрямляюча площини позначені цифрами I, II, III.

Лінія перетину спрямляючої і нормальної площин визначає **бінормаль** до кривої. Таким чином, в кожній точці кривої можна указати три взаємноперпендикулярних напрями:

дотичної, головної нормалі та бінормалі, для яких можна ввести відповідні одиничні вектори: $\vec{\tau}$, \vec{n} , \vec{b} .

Отриманий тригранник, який складається із зазначених площин, зветься **природнім тригранником** з одиничними векторами $\vec{\tau}$, \vec{n} , \vec{b} . Вивчаючи рух точки за заданої траєкторії будемо вважати, що орт $\vec{\tau}$ спрямований у бік зростання дугової координати точки, орт \vec{n} спрямований завжди у бік увігнутості траєкторії, а орт \vec{b} спрямований за правилом векторного добутку $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$.

Для дуги $\overline{MM_1} = \Delta S$ (рис. 8.5, 8.8) отримуємо залежність:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{1}{\rho} \vec{n},$$

де ρ – радіус кривизни кривої в точці M . Зауважимо, що радіус кривизни прямої дорівнює нескінченності, для окружності він дорівнює радіусу окружності в будь-якій точці.

Використовуючи вирази (8.11) і (8.13)

$$\vec{v} = \frac{dS}{dt} = v_\tau \vec{\tau}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

маємо:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v_\tau \vec{\tau}) = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \\ &= \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \end{aligned} \quad (8.17)$$

З іншого боку, вектор \vec{a} можна розкласти по натуральних осях:

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} + a_b \vec{b}. \quad (8.18)$$

Порівнюючи результати в (8.17) і (8.18), маємо:

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0.$$

Оскільки бінормальна складова прискорення завжди дорівнює нулю, вектор \vec{a} лежить у стичній площині. Проекція прискорення на напрям $\vec{\tau}$:

$$a_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \quad (8.19)$$

називається **дотичним (тангенційним)** прискоренням. Проекція прискорення на головну нормаль:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (8.20)$$

називається **нормальним** прискоренням. Отже, прискорення \vec{a} має дві складові, кожна з яких відповідає за відповідну зміну швидкості – за величиною або за напрямом. Щодо тангенційного прискорення \vec{a}_{τ} слід зауважити, що це прискорення може бути спрямовано у бік швидкості або у протилежний їй бік залежно від того, однакові чи різні в них знаки.

Дотичне прискорення характеризує зміну модуля швидкості (величину), а нормальне прискорення характеризує зміну швидкості за напрямом.

Модуль вектора прискорення дорівнює:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_{\tau}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (8.21)$$

Дотичне прискорення дорівнює нулю при русі точки з постійною за модулем швидкістю, а нормальне – при русі по прямій.

8.5. Окремі випадки руху точки

Прямолінійний рух.

Якщо траєкторія точки є прямою лінією, то, спрямувавши одну з осей, наприклад, вісь X , вздовж цієї прямої, ми повністю визначимо положення точки $x = x(t)$. Тоді за (8.9) і (8.15):

$$v_x = \dot{x}, \quad a_x = \ddot{x}.$$

Модулі швидкості та прискорення відповідно будуть:

$$v = |\dot{x}|, \quad a = |\ddot{x}|.$$

Якщо $v_x > 0$, то рух точки відбувається у бік додатного напрямку осі X . Якщо при цьому $a_x > 0$, то рух прискорений; якщо $a_x < 0$, то рух сповільнений.

Якщо $v_x < 0$, то рух точки відбувається у бік від'ємного напрямку осі X . Якщо при цьому $a_x > 0$, то рух сповільнений; якщо $a_x < 0$, то рух прискорений.

Рух точки по колу.

При русі точки по колу зручно задати її рух у полярних координатах, при цьому координата r є постійною величиною, яка дорівнює радіусу R окружності.

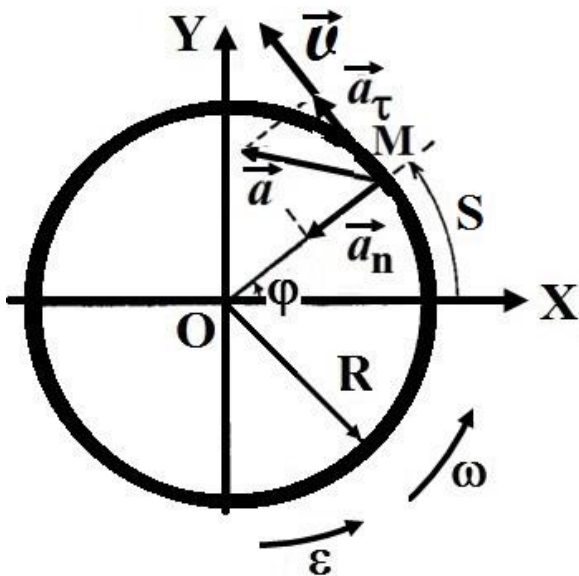


Рисунок 8.10.

Положення точки визначається кутом φ . За умови $r = R$ проекція швидкості на радіальний напрям дорівнює нулю. На дотичну проекція буде:

$$v = R\dot{\varphi} = R\omega.$$

Якщо обрати додатний напрям відліку дуги проти годинникової стрілки (рис. 8.10), то дотичне прискорення (його ще називають **обертальним**)

$$a_\tau = R\ddot{\varphi} = R\varepsilon,$$

а нормальне (його ще називають **доцентровим**)

$$a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}.$$

У цих формулах ω – кутова швидкість, а ε – кутове прискорення.

Модуль прискорення:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Контрольні питання

1. Що вивчає кінематика?
2. Які існують способи завдання руху?
3. Дайте визначення швидкості.
4. Як визначаються швидкості матеріальної точки за різних способів завдання руху?
5. Дайте визначення прискорення.
6. Як побудовано природній тригранник?
7. Як визначаються прискорення матеріальної точки за різних способів завдання руху?
8. Що визначають нормальне та дотичне прискорення?
9. Назвіть окремі випадки руху точки.

Глава 9. Типи руху. Основні рухи твердого тіла

9.1. Задання руху твердого тіла

Під час руху твердого тіла (далі тіла) окремі його точки рухаються у загальному випадку за різними траєкторіями і мають в кожний момент часу різні швидкості та прискорення. Разом з цим, є кінематичні характеристики, однакові для всіх точок тіла.

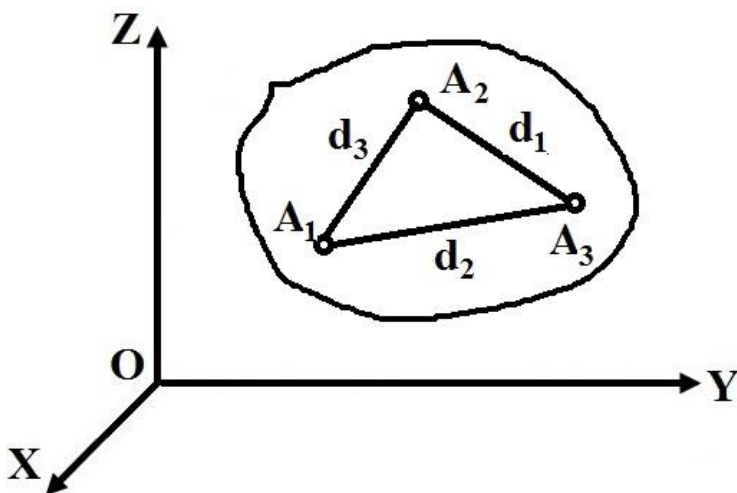


Рисунок 9.1.

Основними задачами кінематики твердого тіла є встановлення способу задання його руху та вивчення кінематичних характеристик тіла, а також визначення траєкторій, швидкостей і прискорень всіх точок тіла.

Положення тіла у загальному випадку визначається заданням шести незалежних параметрів. Для цього візьмемо три точки A_1, A_2, A_3 , що не лежать на одній прямій (рис. 9.1), координати яких:

$$x_k = x_k(t), \quad y_k = y_k(t), \quad z_k = z_k(t), \quad (k = 1, 2, 3) \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= d_3^2 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 &= d_1^2. \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 &= d_2^2 \end{aligned} \quad (9.2)$$

Через незмінність відстаней d_1, d_2, d_3 кількість незалежних змінних зменшується з дев'яти до шести. Пояснимо останнє.

Вільна точка має три степені вільності, бо її положення і рух визначаються трьома незалежними координатами x, y, z ; точка на поверхні має дві степені вільності, бо її координати повинні задовольняти рівнянню поверхні, і тільки дві можуть бути незалежними (будь-яке

обмеження руху зменшує на одиницю число степенів вільності). Вільне тіло в просторі має шість степенів вільності, бо його положення в декартовій системі визначається положенням будь-яких трьох точок, що не лежать на одній прямій. Проте дев'ять координат трьох точок повинні задовольняти трьом рівнянням, які вимагають незмінність відстаней між точками твердого тіла. Тому тільки шість координат є незалежними. В подальшому цими координатами будуть три лінійних переміщення та три кути повороту навколо осей.

Кількість незалежних параметрів, задання яких однозначно визначає положення тіла у просторі, називається **числом степенів вільності** тіла. **Числом степенів вільності твердого тіла (або будь-якої механічної системи) називають число незалежних параметрів, які однозначно визначають положення тіла відносно даної системи відліку.**

Показаний варіант задання руху тіла не є оптимальним, існують більш зручні параметри, що визначають положення тіла у просторі.

9.2. Найпростіші рухи твердого тіла

Існують п'ять видів руху твердого тіла:

- 1) поступальний;
- 2) обертальний;
- 3) плоский, або плоскопаралельний;
- 4) сферичний;
- 5) загальний випадок руху твердого тіла.

Поступальний і обертальний є найпростішими видами руху.

Поступальний рух твердого тіла.

Поступальним рухом твердого тіла називається такий рух, при якому довільна пряма, проведена у тілі, залишається у весь час руху паралельною своєму початковому положенню.

Нехай тіло рухається поступально відносно системи координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 9.2), \vec{r}_A – радіус-вектор точки A , \vec{r}_B – радіус-вектор точки B , а \vec{r} – радіус-вектор, який визначає положення точки B в рухомій

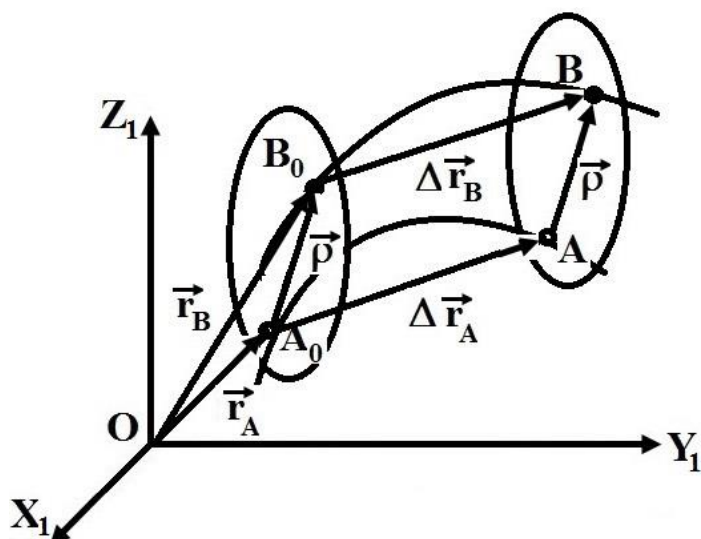


Рисунок 9.2.

системі координат $AXYZ$, яка жорстко пов'язана з тілом (на рисунку ця система не показана).

Тіло вважається абсолютно твердим і його рух поступальний, тому вектор $\vec{\rho}$ при русі тіла не змінює модуля та напрямку. З розгляду рис. 9.2 слідує:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \quad (9.3)$$

Нехай в момент часу t тіло займало положення I , а в момент часу $t + \Delta t$ – положення II . Тоді $\Delta \vec{r}_A$ буде вектором переміщення точки A , $\Delta \vec{r}_B$ – вектором переміщення точки B за проміжок часу Δt .

Під час руху вектор $\vec{\rho}$ не змінюється, тому відрізки A_0B_0 і AB рівні та паралельні, через те фігура A_0B_0AB – паралелограм. Таким чином,

$$\Delta \vec{r}_A = \Delta \vec{r}_B,$$

тобто при поступальному русі абсолютно твердого тіла переміщення всіх його точок геометрично рівні між собою.

З рівності (9.3) і умови постійності вектора $\vec{\rho}$ також слідує, що **траєкторії точок тіла, що рухається поступально, однакові, їх отримують одну з одної паралельним зміщенням.**

Продиференціюємо вираз (9.3) за часом:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}, \quad (9.4)$$

але $\vec{\rho} = const$ і $\dot{\vec{\rho}} = 0$, отже,

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \quad \text{або} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A, \quad (9.5)$$

тобто **при поступальному русі твердого тіла швидкості всіх його точок в кожний момент часу рівні між собою.**

Диференціюємо отриманий вираз за часом:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} \quad \text{або} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A, \quad (9.6)$$

тобто **прискорення всіх точок в кожний момент часу рівні між собою.** Очевидно, що для визначення руху тіла, що рухається поступально, немає необхідності розглядати рух всіх точок тіла, достатньо розглянути рух однієї точки.

Тільки при поступальному русі:

- кутова швидкість твердого тіла дорівнює нулю;
- мають сенс наступні вирази – швидкість тіла, прискорення тіла, траєкторія тіла.

Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому будь-які дві точки, що належать до тіла (або незмінно з ним пов'язані), залишаються у весь час руху нерухомими.

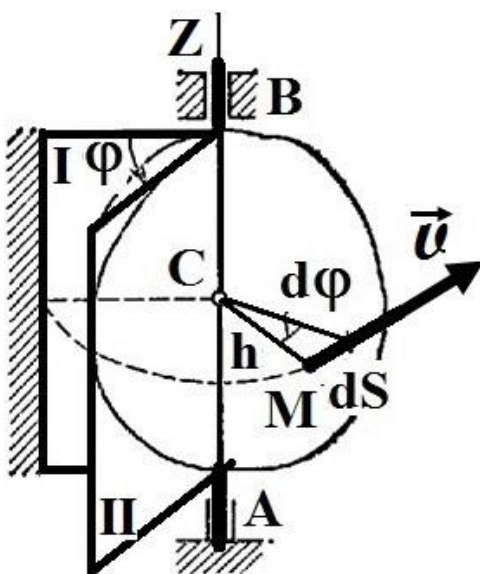


Рисунок 9.3.

Пряма AB , яка проходить через нерухомі точки A і B , називається **віссю обертання**. Очевидно, що точки на цій прямій будуть нерухомі, а решта точок будуть описувати окружності, площини яких перпендикулярні до осі обертання, а центри лежать на осі AB .

Для визначення положення тіла, що обертається, проведемо через вісь обертання напівплощину I – нерухому, і напівплощину II, яка врізана в само тіло та яка обертається разом з ним (рис. 9.3).

Тоді положення тіла в довільний момент часу однозначно визначиться узятим з відповідним знаком кутом φ між цими напівплощинами (має один степінь вільності), і який зветься **кутом повороту тіла**. Вважаємо кут додатним, якщо він відкладається від нерухомої напівплощини проти ходу годинникової стрілки, і від'ємним, коли за ходом годинникової стрілки. Кут повороту визначається у радіанах.

Знати положення тіла у будь-який момент часу означає знати залежність кута за часом:

$$\varphi = f(t). \quad (9.7)$$

Рівняння (9.7) виражає **закон обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі**.

Основними кінематичними характеристиками обертального руху тіла є його кутова швидкість ω і кутове прискорення ε .

Кутова швидкість.

Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ тіло повертається на кут $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то чисельно середньою кутовою швидкістю тіла за цей проміжок часу буде:

$$\omega_{cp} = \Delta\varphi / \Delta t.$$

Гранично при $\Delta t \rightarrow 0$ маємо:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \omega = \dot{\varphi}. \quad (9.8)$$

Таким чином, **числове значення кутової швидкості тіла в даний момент часу дорівнює першій похідній від кута повороту за часом**.

Так само, $\omega > 0$ при обертанні проти ходу годинникової стрілки, і $\omega < 0$, коли за ходом годинникової стрілки.

Розмірність кутової швидкості рад/с, або 1/с.

Кутову швидкість тіла можна показати у вигляді вектора $\vec{\omega}$, модуль якого дорівнює $|\omega|$ і спрямований у той бік, звідки обертання видно проти ходу годинникової стрілки.

У техніці часто за рівномірного обертання тіла використовують позасиситемну розмірність – **число обертів за хвилину** (об/хв). Залежність між кутовою швидкістю та числом обертів за хвилину визначається за наступною формулою:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ (1/с)},$$

де n – число обертів за хвилину.

Кутове прискорення.

Кутове прискорення характеризує зміну протягом часу кутової швидкості тіла. Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ кутова швидкість зміниться на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то числове значення середнього кутового прискорення тіла за цей проміжок часу буде $\varepsilon_{cp} = \Delta\omega/\Delta t$. Гранично при $\Delta t \rightarrow 0$ маємо:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{або} \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (9.9)$$

Таким чином, **числове значення кутового прискорення тіла в даний момент часу дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту за часом.**

Розмірність кутового прискорення рад/с² або 1/с².

Якщо модуль кутового прискорення з часом зростає, обертання називається прискореним, якщо зменшується – уповільненим.

Як і для кутової швидкості, корисно увести вектор кутового прискорення, який можна показати у вигляді вектора $\vec{\varepsilon}$, який спрямований вздовж осі обертання (рис. 9.4).

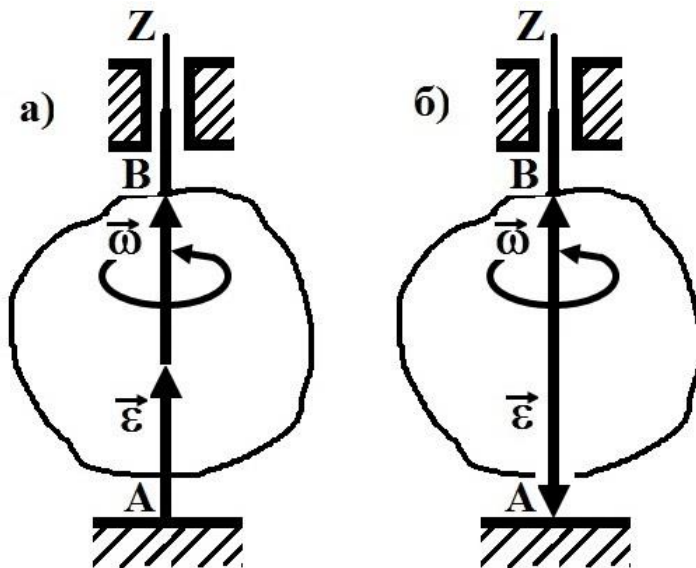


Рисунок 9.4.

Напрями векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\epsilon}$ однакові за прискореного руху тіла, різні за уповільненого.

У розділі 9.3. буде надано математичне обґрунтування введенню векторів кутової швидкості та кутового прискорення.

9.3. Швидкості та прискорення точок тіла, що обертається

Встановивши характеристики руху тіла в цілому, перейдемо до вивчення руху окремих його точок.

1. Швидкості точок тіла.

Повертаючись до рис. 9.3, розглянемо довільну точку M тіла, яка знаходиться на відстані h від осі обертання. При обертанні тіла точка M буде описувати окружність радіуса h , площина якої перпендикулярна до осі обертання, а центр C лежить на самій осі. Якщо за час dt відбувається елементарний поворот тіла на кут $d\varphi$, то точка M при цьому здійснює вздовж своєї траєкторії елементарне переміщення $ds = h \cdot d\varphi$. Тоді числове значення швидкості точки буде дорівнювати відношенню ds до dt , тобто:

$$v = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{або} \quad v = h\omega. \quad (9.10)$$

Швидкість v на відміну від кутової швидкості називають **лінійною** або **окружною** швидкістю точки M .

Таким чином, **числове значення швидкості точки тіла, що обертається, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань від цієї точки до осі обертання.**

Спрямована швидкість за дотичною до окружності, яку описує точка, або перпендикулярно до площини, яка проходить через вісь обертання та точку M .

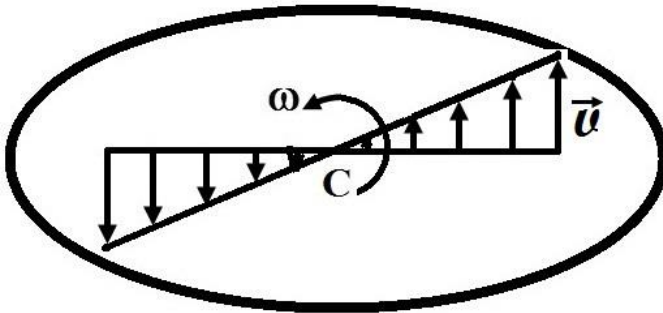


Рисунок 9.5.

Для всіх точок тіла кутова швидкість є постійною, то з виразу (9.10) слідує, що **модулі швидкості тіла, яке обертається, пропорційні їх відстаням від осі обертання.** Поле швидкостей тіла, яке обертається, показано на рис. 9.5.

2. Прискорення точок тіла.

Для визначення прискорення точки M скористаємось формулами для дотичного (тангенційного або обертального) $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ (8.19), та

нормального (доцентрового) $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ (8.20) прискорень з попередньої

глави.

Для нашого випадку $\rho = h$. Підставляючи значення v з виразу (9.10) у вирази для a_τ та a_n , отримуємо:

$$a_\tau = h \frac{d\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{h^2 \omega^2}{h},$$

або остаточно:

$$a_\tau = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2. \quad (9.11)$$

Модуль обертального прискорення a_τ точки твердого тіла дорівнює добутку відстані від точки обертання на модуль кутового прискорення тіла.

Модуль доцентрового прискорення a_n точки твердого тіла дорівнює добутку відстані від точки обертання на квадрат кутової швидкості тіла.

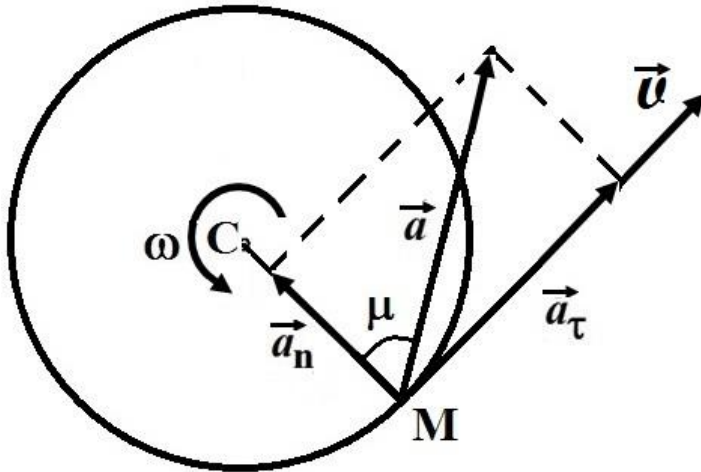


Рисунок 9.6.

Дотична складова прискорення \vec{a}_τ спрямована за дотичною до траєкторії (у бік руху за прискореного обертання та у зворотній бік за сповільненого); нормальна складова \vec{a}_n завжди спрямована за радіусом обертання до осі обертання (рис. 9.6).

Повне прискорення точки буде $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ або:

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (9.12)$$

Відхилення вектора повного прискорення від радіуса окружності визначається кутом μ , який обчислюється за формулою $\text{tg}\mu = a_\tau/a_n$.

Підставляючи сюди значення a_τ і a_n з виразу (9.11), маємо:

$$\text{tg}\mu = \varepsilon/\omega^2. \quad (9.13)$$

Через те, що ω і ε мають в даний момент часу для всіх точок тіла однакове значення, то з формул (9.12) і (9.13) слідує, що модулі прискорення всіх точок тіла, що обертається, пропорційні їх відстаням від осі обертання та утворюють в даний момент часу однаковий кут μ з радіусами окружностей, що описуються.

Поле прискорень такого тіла має вигляд (рис. 9.7).

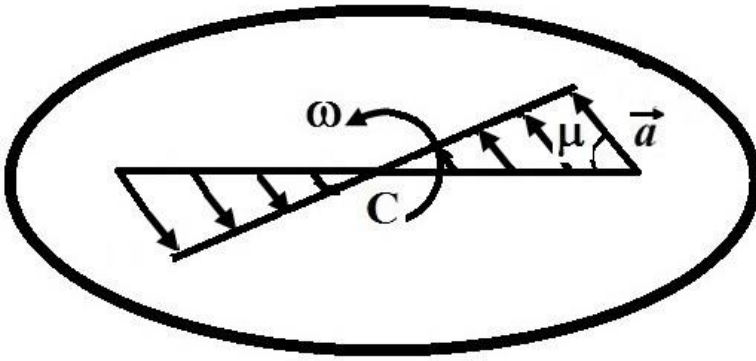


Рисунок 9.7.

За рівномірного обертання $\omega = const$, $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$, і $a_\tau = 0$.

Повне прискорення дорівнює доцентровому і спрямовано до центру обертання.

3. Вектори швидкості та прискорення точок тіла.

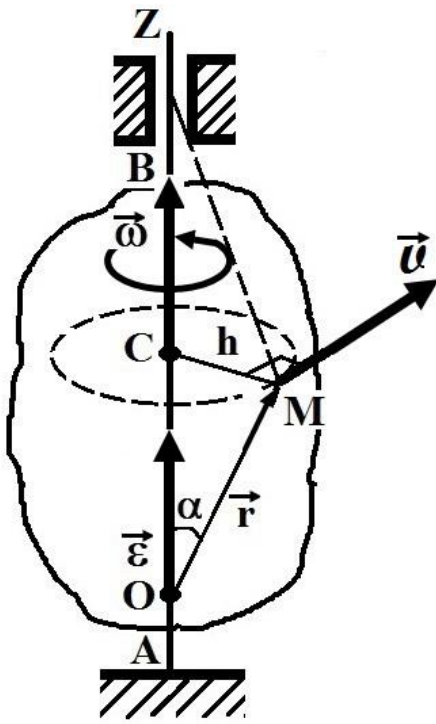


Рисунок 9.8.

Введемо поняття векторів кутової швидкості $\vec{\omega}$ і кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$.

Для знаходження виразів безпосередньо для векторів \vec{v} і \vec{a} , проведемо з довільної точки O осі AB радіус-вектор \vec{r} точки M (рис. 9.8). Тоді $h = r \sin \alpha$ і за формулою (9.10):

$$|v| = |\omega|h = |\omega|r \sin \alpha \quad \text{або}$$

$$|v| = |\vec{\omega} \times \vec{r}|.$$

Таким чином, модуль векторного добутку $\vec{\omega} \times \vec{r}$ дорівнює модулю швидкості точки M .

Напрями векторів $\vec{\omega} \times \vec{r}$ і \vec{v} також збігаються (вони обидва перпендикулярні площині OMB) і їх розмірності однакові. Отже:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (9.14)$$

тобто **вектор швидкості довільної точки тіла, яке обертається, дорівнює векторному добутку кутової швидкості тіла на радіус-вектор цієї точки**. Формулу (9.14) називають формулою Ейлера.

Беручи від обох частин рівності (9.14) похідні за часом, маємо:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right),$$

або

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{v}). \quad (9.15)$$

Формула (9.15) визначає вектор прискорення довільної точки тіла, яке обертається.

Вектор $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ спрямований, як і вектор $\vec{\omega} \times \vec{r}$, тобто за дотичною до траєкторії точки M , а $|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon r \sin \alpha = \varepsilon h$. Вектор $\vec{\omega} \times \vec{v}$ спрямований вздовж MC , тобто за нормаллю до траєкторії точки M , а

$$|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v \sin 90^\circ = \omega^2 h$$

з урахуванням $v = \omega h$. Враховуючи ці результати, а також формули (9.11), находимо, що обертальне прискорення $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}_\tau$ і доцентрове прискорення $\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_n$.

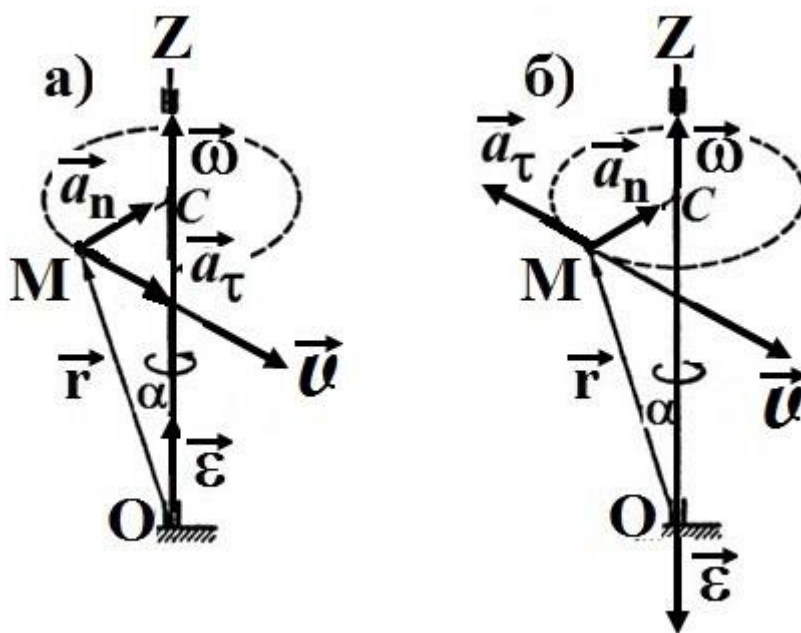


Рисунок 9.9.

Насправді, вектори, напрям яких залежний від обраної системи координат, мають назву **псевдовектори**, або ковзні вектори. Прикладами псевдовекторів, окрім $\vec{\omega}$ і $\vec{\epsilon}$ є також момент сили відносно точки і момент пари сил.

На рис. 9.9, а показано напрями прискорень \vec{a}_τ і \vec{a}_n для випадку прискореного руху, а на рис. 9.9, б – для випадку сповільненого обертання.

Контрольні питання

1. Які існують види руху твердого тіла?
2. Що називають поступальним рухом твердого тіла? Що його характеризує?
3. Що називають обертальним рухом твердого тіла? Що його характеризує?
4. Як задається обертальний рух твердого тіла? Як визначають кутову швидкість та кутове прискорення?
5. Як визначають швидкості точок тіла?
6. Які вектори мають назву псевдовекторів?

Глава 10. Плоский (плоскопаралельний рух) твердого тіла

10.1. Властивості плоского руху твердого тіла. Рух плоскої фігури в її площині

Раніше були розглянуті основні рухи твердого тіла – поступальний та обертальний. Основними, а також й найпростішими, рухами їх називають тому, що всі інші рухи твердого тіла можуть бути складені з цих двох рухів. Перейдемо до вивчення одного з таких складних рухів – плоскопаралельного.

Плоским або плоскопаралельним рухом твердого тіла називають такий рух, при якому кожна точка тіла рухається у площині, паралельній до деякої нерухомої площини.

Плоский рух достатньо розповсюджений у техніці, бо приблизно 90 % всіх механізмів є плоскими і багато з них мають ланки, які рухаються плоскопаралельно.

Плоска фігура, яка утворена перерізом тіла цією нерухомою площиною Q , увесь час руху залишається в цій площині (рис. 10.1). Встановимо властивості плоского руху твердого тіла.

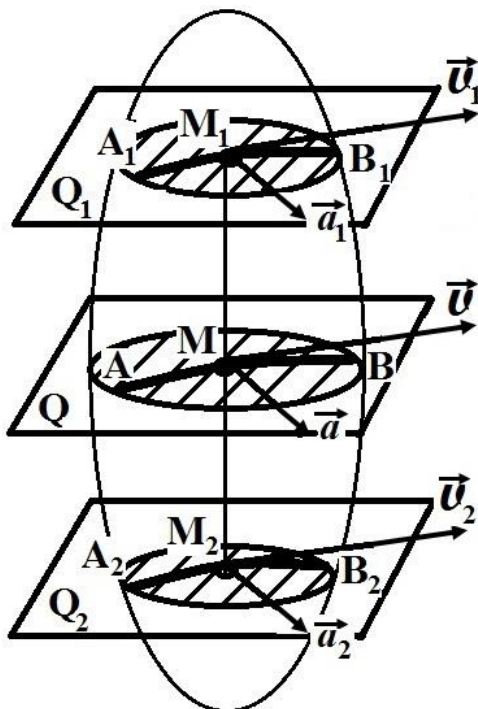


Рисунок 10.1.

Розглянемо рух точок тіла, розташованих на одному перпендикулярі до нерухомої площини Q . Точка M_1 рухається у площині Q_1 , а точка M_2 – у площині Q_2 ; обидві площини паралельні нерухомій площині Q .

Під час руху відрізок M_1M_2 залишається перпендикулярним площині Q , тобто залишається паралельним своєму початковому положенню.

Це означає, що всі точки цього перпендикуляра, аналогічно до точок тіла, яке рухається поступально, описують тотожні і паралельні між собою траєкторії і в кожний момент часу мають геометрично рівні швидкості та прискорення.

Інакше, траєкторії A_1B_1 , A_2B_2 , AB точок тіла M_1 , M_2 , M тотожні і паралельні, їхні швидкості $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$ і прискорення $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$ також рівні.

Ґрунтуючись на цій властивості плоского руху твердого тіла, встановлюємо, що рух кожної точки плоскої фігури в нерухомій площині Q визначає собою рух всіх точок твердого тіла, розташованих на перпендикулярі до площини Q , який проведено в цій точці. Це дозволяє звести вивчення плоского руху твердого тіла до вивчення руху плоскої фігури в її площині.

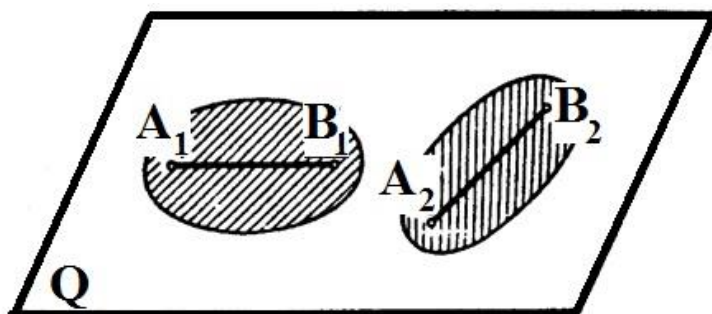


Рисунок 10.2.

Через те, що положення плоскої фігури на площині повністю визначається положенням 2-х її точок або положенням відрізка, що з'єднує ці точки, рух плоскої фігури в її площині можна вивчати як рух прямолінійного відрізка в цій площині (рис. 10.2).

Будемо вважати, що рух плоскої фігури відбувається в площині рисунку, відповідно, рисунок є натуральним зображенням фігури.

10.2. Розклад руху плоскої фігури на поступальний рух разом з полюсом і обертанням навколо цього полюса. Рівняння руху плоскої фігури

Нехай $A(x_{1A}, y_{1A})$ і $B(x_{1B}, y_{1B})$ – дві точки плоскої фігури, яка знаходиться у площині OX_1Y_1 (рис. 10.3).

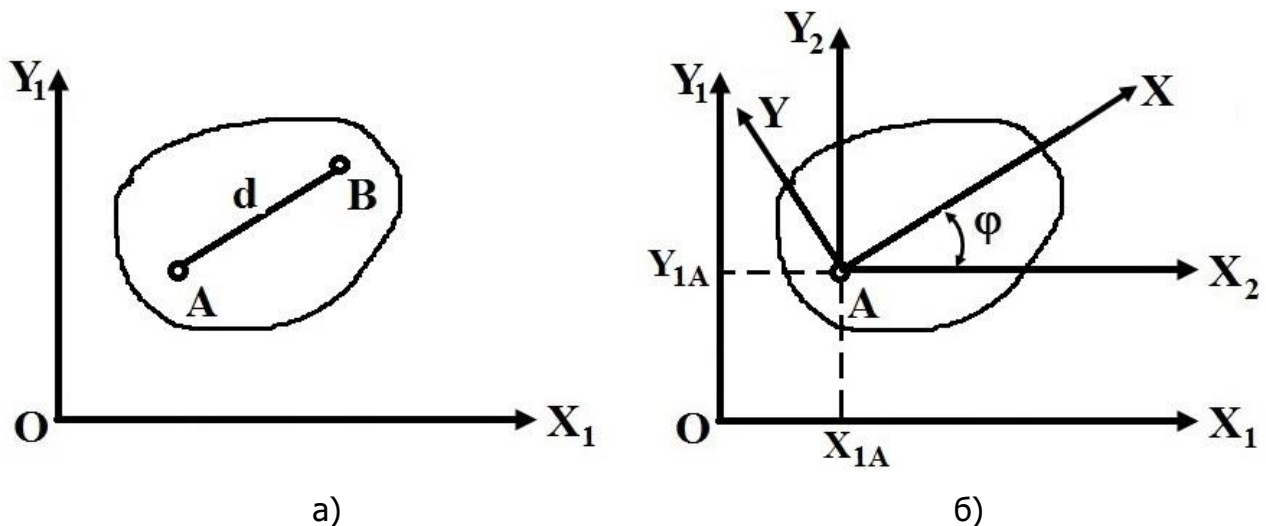


Рисунок 10.3.

Відстань d між цими точками залишається незмінною:

$$(x_{1A} - x_{1B})^2 + (y_{1A} - y_{1B})^2 = d^2,$$

тому з чотирьох координат незалежними є тільки три (рис. 10.3, а). Приєднання третьої точки $C(x_{1C}, y_{1C})$ не збільшує числа невідомих координат, дві нові координати x_{1C} і y_{1C} мають задовольняти двом рівностям, що виражають незмінність відстаней до раніше обраних точок A і B . Таким чином, для опису плоского руху тіла потрібно знати три незалежних координати як функції часу.

Зв'яжемо жорстко з плоскою фігурою систему координат AXY , а разом з нею і положення плоскої фігури відносно системи координат OX_1Y_1 буде визначено заданням координат x_{1A} і y_{1A} точки A і куту φ між осями X_2 і X (рис. 10.3, б) (осі X_2 і Y_2 відповідно паралельні осям X_1 і Y_1 і переміщуються при русі фігури поступально). Отже, три функції часу:

$$x_{1A} = x_{1A}(t), \quad y_{1A} = y_{1A}(t), \quad \varphi = \varphi(t) \quad (10.1)$$

визначають положення плоскої фігури у будь-який момент часу. Рівності (10.1) називають **рівняннями руху плоскої фігури** або **рівняннями плоского руху твердого тіла**. Точку A , за допомогою якої визначають положення плоскої фігури, називають **полюсом**.

10.3. Швидкості точок тіла при плоскому русі

Знайдемо формули, що дозволяють при заданих функціях (10.1) визначити координати довільної точки плоскої фігури. Нехай система координат OX_1Y_1 є нерухомою системою, а система координат AX_2Y_2 , яка має початок у довільно обраній точці A плоскої фігури, рухається поступально.

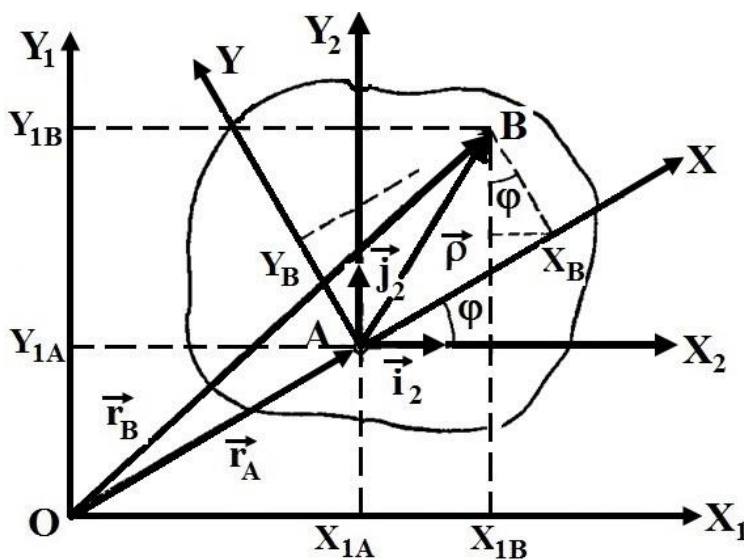


Рисунок 10.4.

Радіус-вектор \vec{r}_B , який визначає положення точки B відносно нерухомої системи координат OX_1Y_1 (рис. 10.4), можна задати за допомогою двох векторів: \vec{r}_A , який визначає положення точки A в системі відліку OX_1Y_1 , і $\vec{\rho}$,

який визначає положення точки B в системі відліку AX_2Y_2 ,

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \quad (10.2)$$

Знаючи координати x_{1A} і y_{1A} точки A і координати x_B і y_B точки B в системі координат AX_2Y_2 , а також кут φ між осями X_2 і X , можна визначити координати x_{1B} і y_{1B} точки B за формулами:

$$\begin{aligned} x_{1B}(t) &= x_{1A}(t) + x_B \cos \varphi(t) - y_B \sin \varphi(t), \\ y_{1B}(t) &= y_{1A}(t) + x_B \sin \varphi(t) + y_B \cos \varphi(t). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Нагадуємо, що координати x_B і y_B – постійні величини. Продиференціюємо за часом x_{1B} і y_{1B} , знайдемо проекції швидкості точки B на координатні осі:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1B} &= \dot{x}_{1A} - x_B \dot{\varphi} \sin \varphi - y_B \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{y}_{1B} &= \dot{y}_{1A} + x_B \dot{\varphi} \cos \varphi - y_B \dot{\varphi} \sin \varphi.\end{aligned}\quad (10.4)$$

До цього результату можна дістатися через диференціювання виразу (10.2):

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}.\quad (10.5)$$

В цьому виразі $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B$, $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$. Щодо $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$, то це є швидкість точки B відносно рухомої системи координат Ax_2y_2 , тобто відносна швидкість. Введемо для неї позначення:

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Рух тіла відносно системи координат Ax_2y_2 є обертанням тіла навколо осі Z_2 , спрямованої перпендикулярно площині рисунку на спостерігача. Таким чином, швидкість \vec{v}_{BA} є швидкість точки B при обертанні тіла навколо осі Z_2 . Для визначення цієї швидкості є формула:

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_A \times \vec{\rho},$$

де $\vec{\omega}_A$ – кутова швидкість обертання фігури навколо точки A (навколо осі Z_2), яку в подальшому будемо називати **ПОЛЮСОМ**.

Формула (10.5) набуває вигляду:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA},\quad (10.6)$$

тобто швидкість довільної точки B плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса A і швидкості точки B при обертанні плоскої фігури навколо полюса A .

Кутова швидкість обертання фігури не залежить від вибору полюса, тому $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}$ без збереження індексу полюса. Можна записати:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \quad (10.7)$$

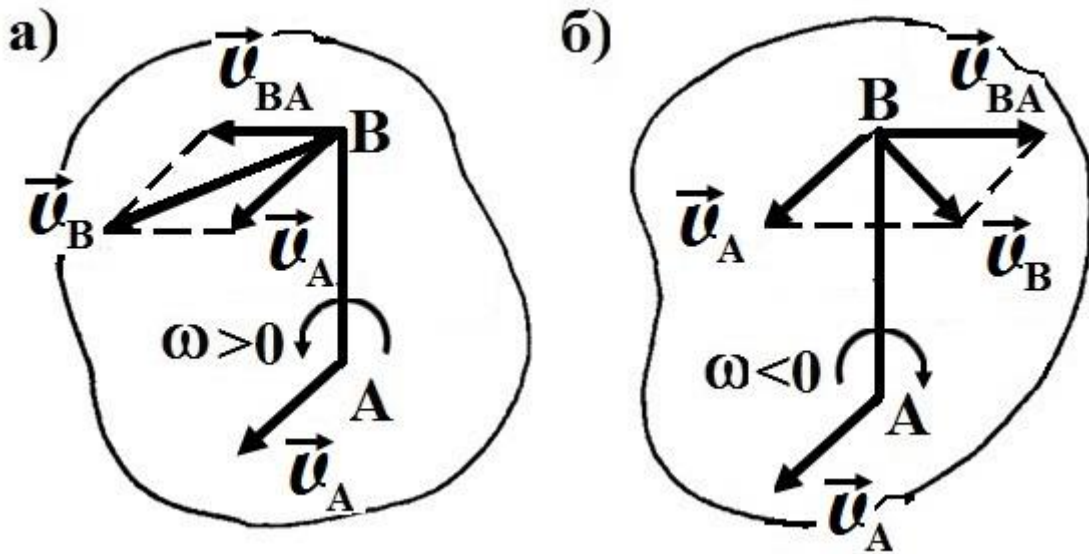


Рисунок 10.5.

На рис. 10.5 показано, як, знаючи швидкість точки A – полюса, знайти швидкість точки B при $\omega > 0$ і $\omega < 0$.

З формули (10.7) слідує одна корисна теорема (правило проєкцій швидкостей):

при плоскому русі проєкції швидкостей двох точок тіла на вісь, що проходить через ці точки, рівні між собою.

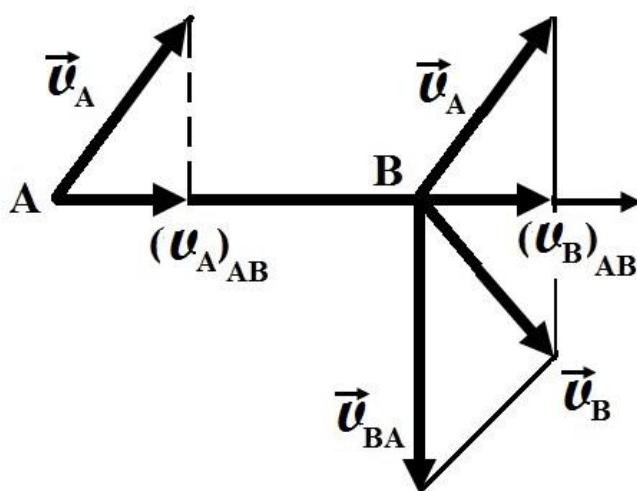


Рисунок 10.6.

Обираємо додатний напрям для осі AB (рис. 10.6). Скористаємось формулою (10.7)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

Проектуючи цю рівність на відрізок AB (або його продовження у вигляді прямої), отримуємо:

$$(v_B)_{AB} = (v_A)_{AB} + (v_{BA})_{AB}.$$

Останній доданок в цьому виразі дорівнює нулю, тому що вектор $\vec{v}_{BA} \perp AB$. Остаточно:

$$(v_B)_{AB} = (v_A)_{AB}.$$

У випадку, коли вектори \vec{v}_A і \vec{v}_B перпендикулярні до прямої AB , ця теорема не дає результату і слід застосовувати інші методи.

10.4. Миттєвий центр швидкостей

Миттєвим центром швидкостей (МЦШ) називається точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Якщо кутова швидкість плоскої фігури відмінна від нуля, то МЦШ існує.

При будь-якому непоступальному русі плоского тіла існує точка, пов'язана з тілом, швидкість якої в певний момент часу дорівнює нулю. Поле швидкостей у тілі, яке здійснює плоский рух, кожної миті таке, начебто тіло обертається навколо нерухомого миттєвого центра.

Швидкості точок тіла при його плоскому русі розподілені так само, як і при обертальному русі. Роль нерухомої осі відіграє миттєва вісь, яка проходить через МЦШ перпендикулярно площині руху. Таким чином, швидкості всіх точок фігури перпендикулярні відрізкам, які з'єднують ці точки з МЦШ, а модулі швидкостей пропорційні відстаням до МЦШ.

Слід зазначити, що певне положення МЦШ існує тільки в цю мить, в іншу – положення змінюється. Знаючи положення МЦШ, можна знайти швидкості всіх точок плоскої фігури, якщо відома швидкість будь-якої її точки. При цьому швидкість довільної точки плоского тіла перпендикулярна до радіус-вектора, який з'єднує цю точку з МЦШ, і спрямована у бік обертання тіла, а за величиною пропорційна відстані точки від МЦШ.

Визначимо швидкості точок A, B, K плоскої фігури (рис. 10.7), прийнявши за полюс МЦШ точку P . Загальноприйнятне, точка МЦШ позначається великою літерою.

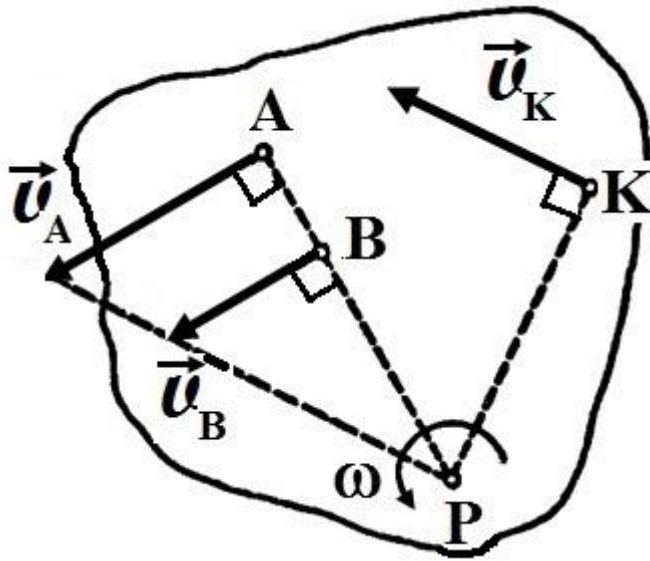


Рисунок 10.7.

За формулою (10.6) отримуємо:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{PA},$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{PB},$$

$$\vec{v}_K = \vec{v}_P + \vec{v}_{PK}.$$

Але швидкість точки P в даний момент часу дорівнює нулю, тобто вектор $\vec{v}_P = 0$. Тоді швидкості точок визначають за формулами:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{PA}, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_{PB}, \quad \vec{v}_K = \vec{v}_{PK}, \quad (10.8)$$

швидкість будь-якої точки плоскої фігури в даний момент часу є оберальною швидкістю цієї точки навколо МЦШ. З цього слідує:

$$\begin{aligned} v_A &= PA \cdot \omega, & \vec{v}_A &\perp PA \\ v_B &= PB \cdot \omega, & \vec{v}_B &\perp PB. \\ v_K &= PK \cdot \omega, & \vec{v}_K &\perp PK \end{aligned} \quad (10.9)$$

Швидкість будь-якої точки плоскої фігури кожної миті має модуль, який дорівнює добутку кутової швидкості фігури на довжину відрізка, що з'єднує точку з МЦШ, і спрямована перпендикулярно до цього відрізка у бік обертання фігури.

З виразів (10.9):

$$v_B/v_A = PB/PA, \quad v_K/v_A = PK/PA \text{ тощо.} \quad (10.10)$$

Для визначення швидкості точок плоскої фігури за допомогою МЦШ необхідно знати положення МЦШ і кутову швидкість фігури. Зазначимо, що це положення весь час змінюється, цим пояснюється назва цієї точки.

10.5. Різні випадки визначення положення миттєвого центру швидкостей

Використовуючи основні властивості МЦШ, можна визначити його положення для різних випадків. Розглянемо деякі з них.

1. Нехай відомі прямі, вздовж яких спрямовані швидкості двох точок A і B плоскої фігури (рис. 10.8). Тоді МЦШ фігури визначиться як точка перетину перпендикулярів до цих прямих, відновлених у точках A і B .

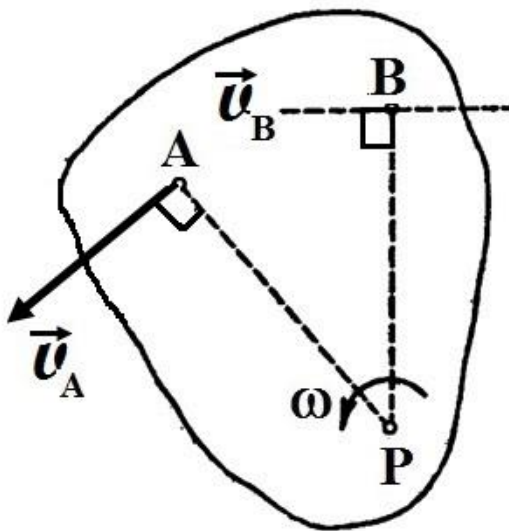


Рисунок 10.8.

Знаючи модуль швидкості точки A і визначив відстань PA між цією точкою та полюсом P , знаходимо кутову швидкість фігури згідно з (10.9):

$$\omega = v_A / PA.$$

Модуль швидкості точки B можна визначити з пропорційності (10.10):

$$v_B = v_A \cdot PB / PA$$

$$\text{або } v_B = PB \cdot \omega.$$

Швидкість будь-якої іншої точки визначається аналогічно.

2. Якщо швидкості точок A і B плоскої фігури паралельні між собою і перпендикулярні AB , то для визначення положення МЦШ мають бути відомі модулі швидкостей обох точок (рис. 10.9, а, б).

3. Швидкості пропорційні їхнім відстаням від МЦШ $v_B / v_A = PB / PA$, отже кінці швидкостей точок A і B лежать на прямій, що проходить через МЦШ. Перетин цієї прямої з прямою AB визначає положення МЦШ.

Якщо швидкості точок A і B рівні, паралельні між собою і перпендикулярні AB , то МЦШ знаходиться у нескінченності ($AP = \infty$) (рис. 10.9, в), а кутова швидкість фігури

$$\omega = v_A/AP = v_A/\infty = 0.$$

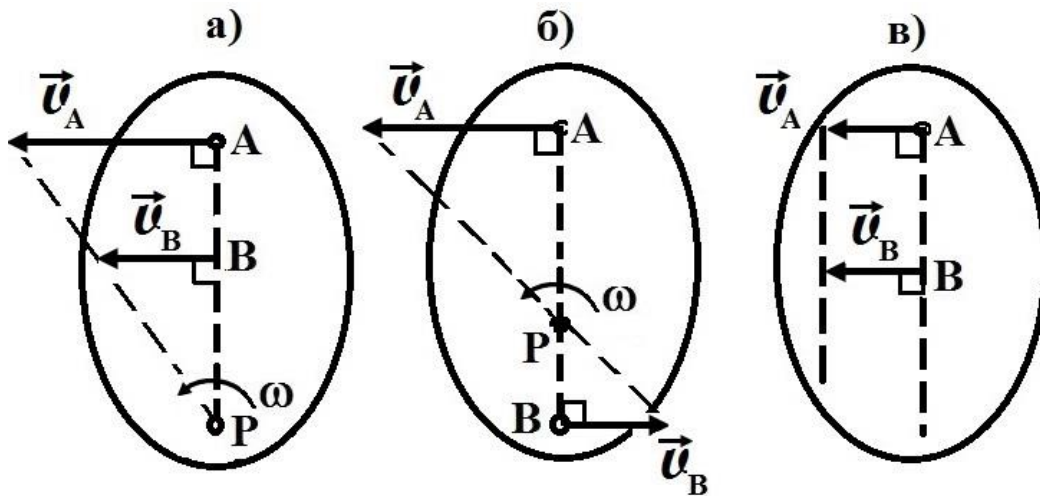


Рисунок 10.9.

Якщо швидкості точок A і B рівні, паралельні між собою і не перпендикулярні AB , то МЦШ знаходиться у нескінченності ($AP = \infty$) (рис. 10.10), а кутова швидкість фігури також дорівнює нулю.

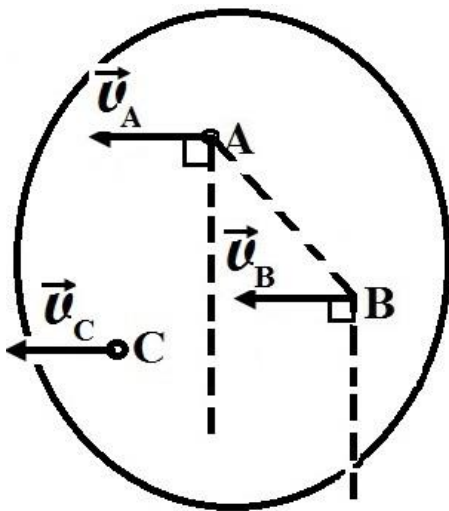


Рисунок 10.10.

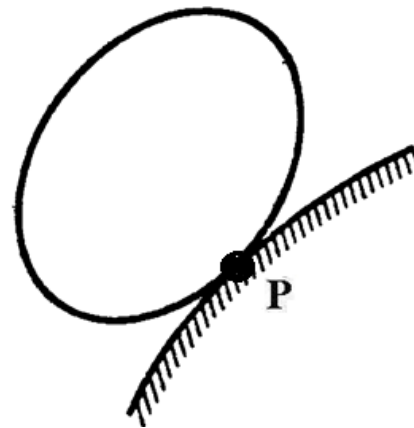


Рисунок 10.11.

Швидкості точок тіла в цей момент часу однакові

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \dots.$$

Тіло за цієї умови відсутності обертання здійснює **МИТТЄВО** **поступальний рух**.

4. Часто на практиці відбувається рух плоскої фігури, за якого вона котиться без ковзання по деякій нерухомій лінії (рис. 10.11). В цьому

випадку МЦШ знаходиться у точці контакту з лінією. Дійсно, за відсутності ковзання швидкість точки стикання плоского тіла по відношенню до нерухомої кривої дорівнює нулю, тобто ця точка і є МЦШ.

Для дослідження руху механізмів, тобто систем, які складаються з декількох тіл (ланок), миттєві центри швидкостей та кутові швидкості треба визначати окремо для кожного тіла, яке рухається плоскопаралельно.

10.6. Приклади на застосування миттєвого центру швидкостей

1. Колесо радіусом R котиться без ковзання по горизонтальній поверхні (рис. 10.12, а). Швидкість центра колеса в даний момент часу v_C .

Визначити швидкості точок A, B, D, E колеса, розташованих на кінцях взаємно перпендикулярних діаметрів.

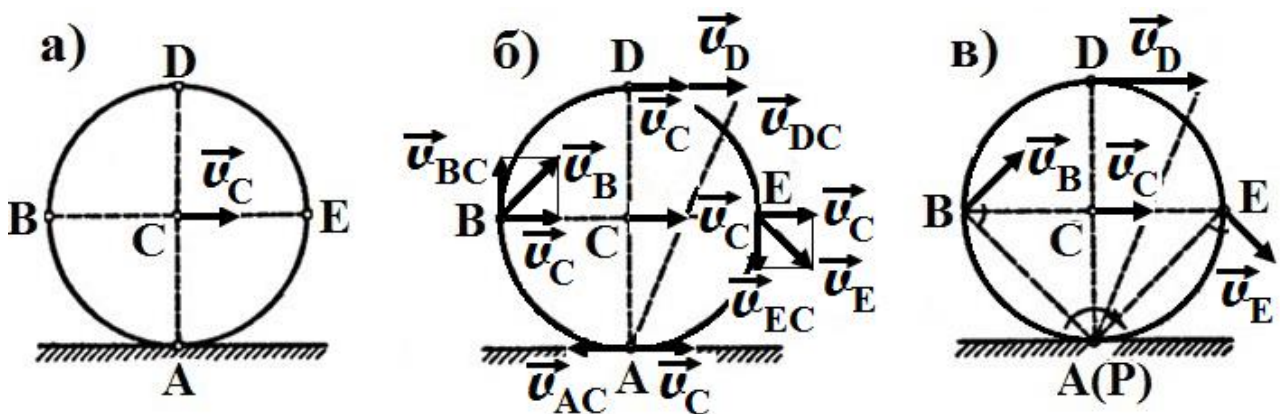


Рисунок 10.12.

Розв'язання (1-й спосіб). Приймаємо за полюс центр колеса C (рис. 10.12, б). Тоді швидкість довільної точки колеса дорівнює геометричній сумі швидкості полюса та швидкості обертання цієї точки навколо полюса. Колесо котиться без ковзання, тоді швидкість точки A контакту з поверхнею дорівнює нулю, $v_A = 0$. Точка $A \in$ МЦШ. В цій точці швидкість обертання v_{AC} навколо полюса і швидкість полюса v_C рівні за модулем і протилежні за напрямом.

Відстані від точок A, B, D, E до полюса C однакові. Отже, і обертальні швидкості точок навколо полюса теж однакові

$$v_{AC} = v_{BC} = v_{DC} = v_{EC} = v_C.$$

Відкладаючи у кожній точці швидкість полюса v_C і обертальну швидкість, перпендикулярну відповідному радіусу, складаємо їх геометрично, а потім знаходимо модулі швидкості.

Розв'язання (2-й спосіб). Приймаємо МЦШ за полюс (точка A) (рис. 10.12, в). Тоді швидкості усіх точок колеса визначаються як обертальні швидкості навколо МЦШ. Модулі швидкостей всіх точок знайдемо з пропорційності швидкостей їх відстаням від МЦШ ($PB = PE = R\sqrt{2}$):

$$v_D = v_C \cdot PD/PC = v_C \cdot 2, \quad v_B = v_C \cdot PB/PC = v_C \cdot \sqrt{2},$$

$$v_E = v_C \cdot PE/PC = v_C \cdot \sqrt{2}.$$

Знайдені швидкості перпендикулярні відповідним відріzkам у бік обертання колеса. Аналогічний розподіл швидкостей має місце при коченні колеса без ковзання по будь-якій поверхні.

2. Кривошип OC (рис. 10.13) обертається навколо осі O з кутовою швидкістю ω_{OC} . Визначити модулі та напрями швидкостей точок A, B, D, E рухомої шестерні, а також її кутову швидкість ω .

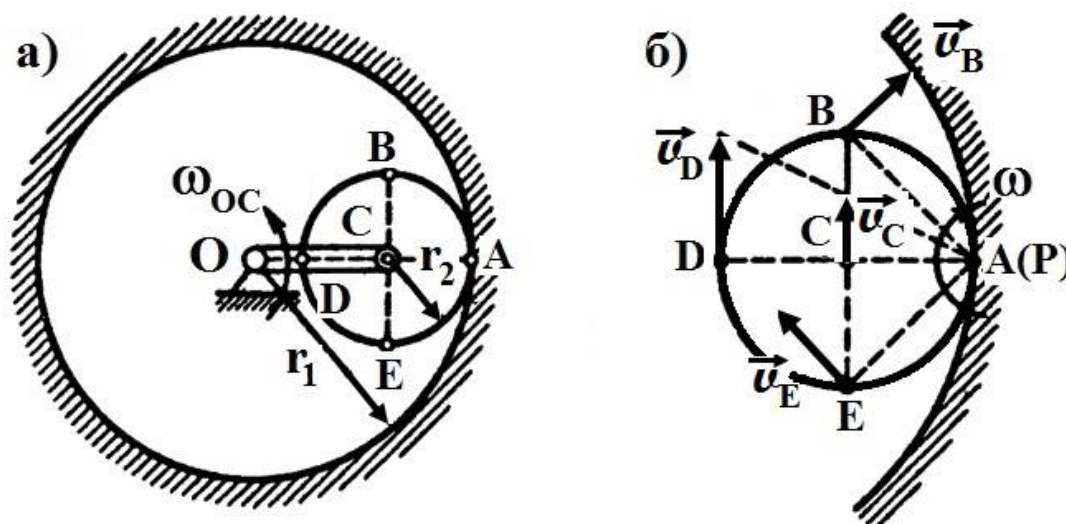


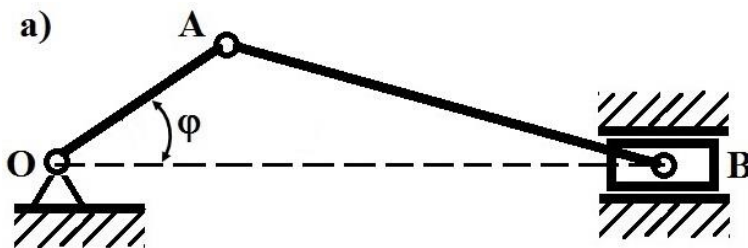
Рисунок 10.13.

Розв'язання. Проводиться аналогічно до попередньої задачі. Визначається положення МЦШ – точка контакту циліндру з нерухомою поверхнею, далі швидкість точки C , потім кутова швидкість ω .

10.7. Приклади на застосування миттєвого центру швидкостей (кривошипно-повзунний механізм)

Кривошип OA кривошипно-повзунного механізму обертається навколо осі, що проходить через точку O і перпендикулярна до площини рисунку, з кутовою швидкістю ω_{OA} . Розміри $l_{OA} = r$ і $l_{AB} = l$. Визначити кутову швидкість шатуна AB і швидкість повзуна B для моменту часу, коли кривошип OA складає з віссю напрямних повзуна кут φ (рис. 10.14, а).

Розв'язання. Проаналізуємо рух кожної ланки механізму.



Кривошип здійснює обертальний рух навколо центру O , шатун здійснює плоский рух навколо полюса A , повзун здійснює поступальний рух вздовж своїх напрямних.

Рисунок 10.14, а

Знаючи кутову швидкість кривошипу та його довжину, визначимо модуль лінійної швидкості пальця кривошипу A (точки поєднання кривошипу та шатуна):

$$v_A = l_{OA} \cdot \omega_{OA} = r \cdot \omega_{OA}.$$

Швидкість пальця кривошипа A спрямована перпендикулярно до OA , а швидкість повзуна B – за прямою OB (рис. 10.14, б). Точка A

належить водночас до кривошипу та шатуна, цю властивість використовуємо при визначенні кутової швидкості обертання шатуна навколо потенційно існуючого МЦШ (як показано на рис. 10.9, в, МЦШ може не існувати). Будуємо в точках A і B перпендикуляри до напрямів їхніх швидкостей.

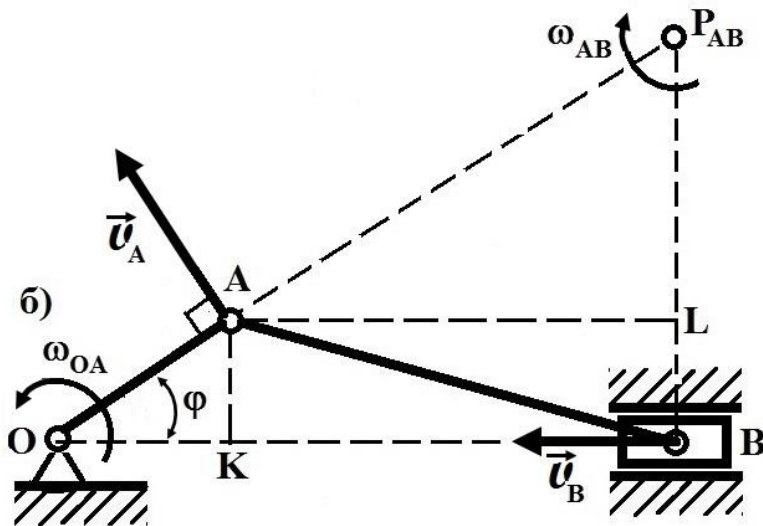


Рисунок 10.14, б

Точка перетину цих перпендикулярів визначає положення МЦШ шатуна – полюса P_{AB} . Зазвичай, точка МЦШ позначається великою літерою.

Обчислимо відстань від точки A до МЦШ:

$$P_{AB}A = AL / \cos \varphi.$$

Підставимо вираз для AL :

$$P_{AB}A = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} / \cos \varphi.$$

Кутова швидкість шатуна AB :

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{P_{AB}A} = \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \omega_{OA}.$$

Напрямок кутової швидкості визначається напрямом обертання навколо МЦШ швидкості v_A .

Для визначення швидкості повзуна B знайдемо $P_{AB}B$:

$$P_{AB}B = (P_{AB}A + r) \sin \varphi = \left(\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} / \cos \varphi + r \right) \sin \varphi.$$

Тоді швидкість повзуна B :

$$v_B = P_{AB}B \cdot \omega_{AB}.$$

Швидкість довільної точки шатуна AB можна визначити як обертальну швидкість навколо МЦШ. Однак визначення відстаней від точок до МЦШ призводить до громіздких розрахунків, в практичних розрахунках ці відстані доцільно визначати графічно за кресленням механізму, який виконано в масштабі, або користуватися побудовою плану швидкостей.

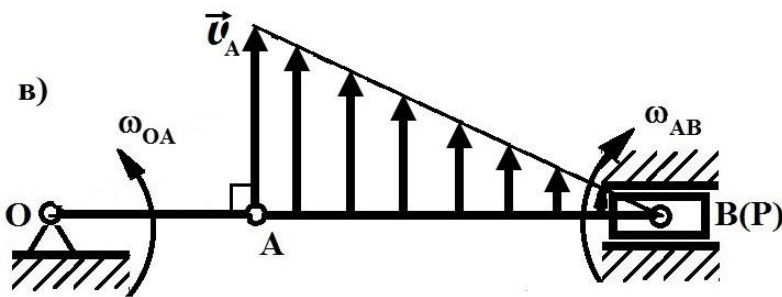


Рисунок 10.14, в

При $\varphi = 0$ (механізм витягується у пряму лінію) МЦШ шатуна (точка P) збігається з точкою B і швидкості всіх точок шатуна є обертальними навколо точки B (рис. 10.14, в).

Кутова швидкість шатуна:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA}$$

Швидкість точки B $v_B = 0$.

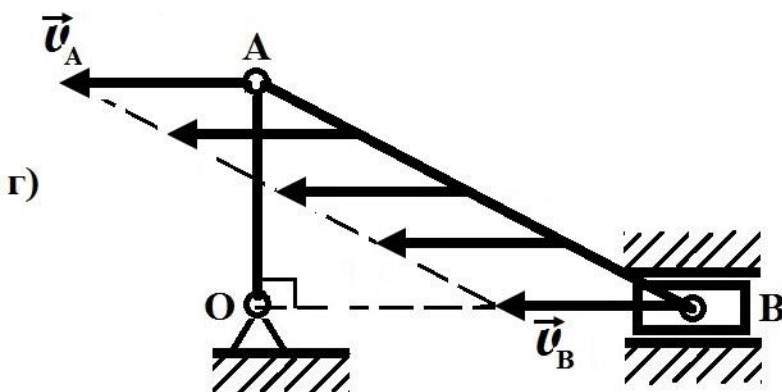


Рисунок 10.14, г

При $\varphi = 90^\circ$ швидкості точки A і повзуна B паралельні, тому МЦШ шатуна AB знаходиться у нескінченності (рис. 10.14, г).

У цей момент часу всі точки шатуна AB мають однакові швидкості, які дорівнюють, $\vec{v}_A = 0$, $\omega_{AB} = 0$. Це так званий миттєво поступальний рух шатуна.

10.8. Теорема про прискорення точок плоскої фігури

Для визначення прискорення точки плоскої фігури продиференціюємо рівняння (10.7) за часом:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}.$$

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (10.11)$$

В цьому співвідношенні $\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{a}_B$, $\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A$ – відповідно прискорення точок B і A , $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ – вектор кутового прискорення, $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_{BA}$. Вектор $\vec{\varepsilon}$, як і вектор $\vec{\omega}$, спрямований перпендикулярно до площини фігури та визначається за формулою:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \vec{k}) = \ddot{\phi} \vec{k}.$$

Таким чином, прискорення точок A і B пов'язані між собою співвідношенням:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}. \quad (10.12)$$

Два останніх доданки в (10.12) визначають прискорення точки B при закріпленій точці A (за умови $\vec{a}_A = 0$). Тому їхня сума:

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA} = \vec{a}_{BA}$$

дає прискорення точки B у обертальному русі навколо центру A .

Під час вивчення обертального руху ми визначили, як спрямовані складові вектору прискорень \vec{a}_{BA} . Легко переконатися, користуючись правилом векторного добутку, що $\vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}$ має напрям, який збігається з відрізком BA (від точки до полюсу), а $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}$ перпендикулярно до BA . Зберігаючи назви доцентрового та обертального прискорень, запишемо:

$$\vec{a}_{BA}^n = \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}, \quad \vec{a}_{BA}^\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}.$$

Модулі цих складових будуть:

$$\vec{a}_{BA}^n = \omega^2 \rho = \omega^2 \cdot AB, \quad \vec{a}_{BA}^\tau = \varepsilon \rho = \varepsilon \cdot AB. \quad (10.13)$$

На рис. 10.15 геометрично складено три вектори та визначено прискорення точки B за формулою:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n. \quad (10.14)$$

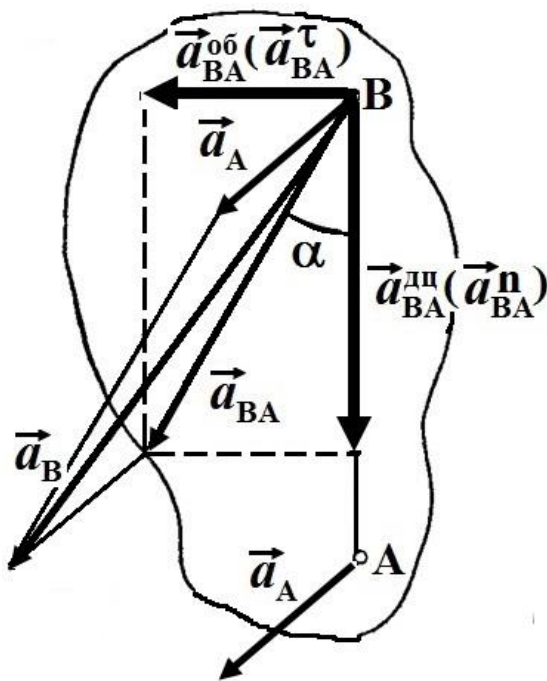


Рисунок 10.15

Таким чином, **прискорення довільної точки B в плоскій фігурі геометрично складається з прискорення полюсу та доцентрового і обертального прискорень у обертальному русі фігури відносно полюсу.**

Зауважимо, що при розв'язанні задач, перед використанням формули (10.14), необхідно обчислити кутову швидкість тіла, його кутове прискорення та обрати полюс. За полюс зазвичай обирається така точка, прискорення якої легко знаходиться за умовою задачі.

З (10.13) знайдемо кут, який складає вектор \vec{a}_{BA} з напрямом на полюс (рис. 10.16),

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\vec{a}_{BA}^{\tau}}{\vec{a}_{BA}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Звідси видно, що цей кут, по-перше, не залежить від вибору полюсу, по-друге, для всіх точок за фіксованого часу є однаковим.

Модуль прискорення точки при обертанні фігури навколо полюса також знаходиться з рівності (10.13):

$$a_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (10.15)$$

Зазначимо, що використовують також позначення «обертальне» і «доцентрове», які прив'язані до руху за окружністю. У цих термінах формула (10.14) записується:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\text{ДЦ}} + \vec{a}_{BA}^{\text{ОБ}}. \quad (10.16)$$

В більш загальному випадку руху за криволінійною траєкторією доцільно використовувати терміни «тангенційне» і «нормальне» прискорення.

10.9. План швидкостей

10.9.1. Загальні відомості про побудову плану швидкостей.

План швидкостей – це графічна картина розподілу швидкостей плоскої фігури. Цей спосіб застосовується в теорії механізмів і машин, в даному курсі наведемо принцип побудови плану швидкостей покажемо на прикладі кривошипно-повзунного механізму, який складається з кривошипу OA , повзуна B , шатуна AB . Кінематичний аналіз механізму зробимо на прикладі схеми (рис. 10.16, а) з наступними вихідними даними:

$$l_{OA} = 0,5 \text{ м}, \quad l_{AB} = 0,9 \text{ м}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ рад}, \quad \omega_1 = 35 \text{ с}^{-1}.$$

Будуємо кінематичну схему механізму згідно з вихідними даними в масштабі . Обираємо масштаб схеми μ_l , який показує, скільком одиницям розміру відповідає відрізок 1 мм на плані швидкостей і прискорень.

Для механізмів з твердими та жорсткими ланками план швидкостей будують на основі теорії плоско-паралельного руху твердого тіла та теорії складного руху. Кривошип OA здійснює обертальний рух (рівномірний), повзун B – поступальний, шатун AB – плоскопаралельний рух. Визначальною при цьому є швидкість повзуна \vec{v}_B . Вона дорівнює геометричній сумі швидкості \vec{v}_A точки A кривошипу OA та швидкості \vec{v}_{BA} точки B шатуна AB відносно точки A і визначається за формулою (10.6):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA},$$

за якою і здійснюють вказану побудову. В якості полюса плану швидкостей p_v можна взяти будь-яку точку твердого тіла, до якого мають бути прив'язані всі побудови.

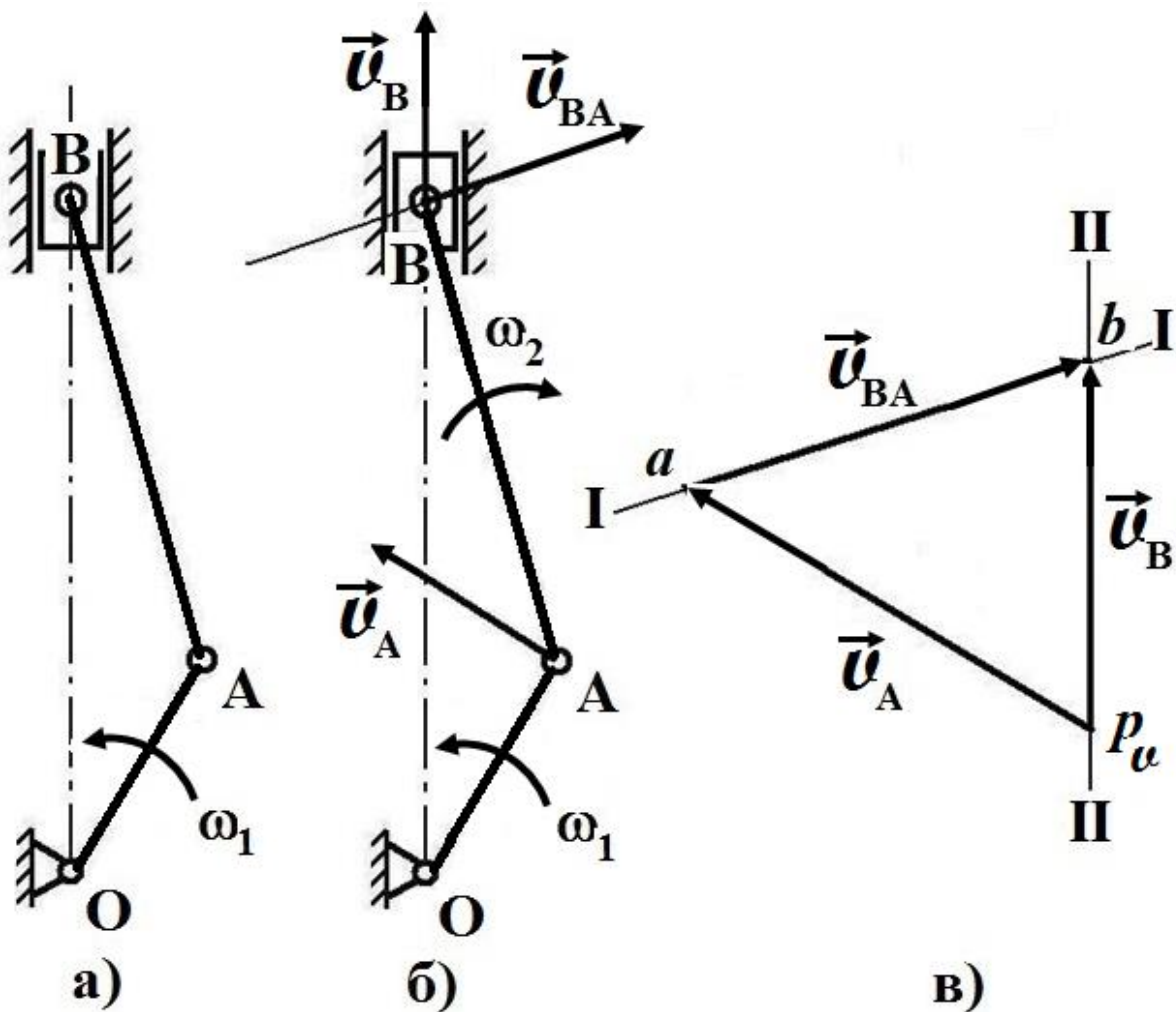


Рисунок 10.16.

Будемо використовувати наступні правила:

1. Кожний з відрізків, який з'єднує вершини плану швидкостей, геометрично дорівнює відносній швидкості відповідної точки фігури навколо іншої точки як навколо полюса.
 2. Вектори, що йдуть від полюса p_v , виражають абсолютні швидкості відповідних точок.
 3. Швидкість обертання ланки механізму спрямована перпендикулярно до відрізка, що зображує відповідну ланку, в бік обертання цієї ланки.
- Абсолютними є швидкості \vec{v}_A , \vec{v}_B . Відносною є швидкість \vec{v}_{BA} (має відношення до полюса A).

10.9.2. Визначення швидкості \vec{v}_A точки A .

Точка A здійснює обертальний рух, тому

$$v_A = \omega_1 \cdot l_{OA} = 35 \cdot 0,5 = 17,5 \text{ м/с.}$$

Вектор \vec{v}_A спрямований перпендикулярно до відрізка OA , у бік кутової швидкості ω_1 , $\vec{v}_A \perp OA$. Обираємо масштаб плану швидкостей μ_v , який показує, скільком одиницям швидкості певної точки відповідає відрізок 1 мм на плані швидкостей.

Знаходимо довжину відрізка ($p_v a$), який зображує вектор швидкості \vec{v}_A на плані:

$$|p_v a| = \frac{v_A}{\mu_v}, \text{ мм.}$$

З полюса плану швидкостей p_v відкладаємо даний відрізок перпендикулярно до OA в напрямі кутової швидкості ω_1 .

10.9.3. Визначення обертальної швидкості \vec{v}_{BA} та швидкості \vec{v}_B .

Напрями та величини швидкостей \vec{v}_{BA} і \vec{v}_B невідомі. Єдиною достовірною інформацією є лінія дії вказаних векторів – вектор \vec{v}_B діє вздовж лінії OB , а вектор \vec{v}_{BA} за нормаллю до ланки AB , проходячи

через точку B . Відрізки $(p_v a)$ і (ab) , які зображують відповідно вектори швидкостей \vec{v}_{BA} та \vec{v}_B , знаходимо безпосередньо з плану швидкостей. Через полюс p_v проводимо лінію II-II, паралельну лінії дії вектора \vec{v}_B , через точку a проводимо лінію I-I, паралельну лінії дії вектора \vec{v}_{BA} . На перетині двох проведених ліній отримуємо точку b . Вимірюючи довжину відрізків $|p_v b|$, мм, і $|ab|$, мм, помножаємо на масштаб μ_v та обчислюємо швидкості:

$$v_{BA} = |ab| \cdot \mu_v, \text{ м/с,}$$

$$v_B = |p_v b| \cdot \mu_v, \text{ м/с.}$$

Вектор \vec{v}_{BA} спрямований так, що шатун обертається навколо точки A за ходом годинникової стрілки.

10.9.4. Визначення кутової швидкості ω_2 шатуна AB .

Шатун обертається навколо точки A , тому кутова швидкість цієї ланки:

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{AB}, \text{ с}^{-1}.$$

Для визначення напрямку ω_2 переносимо вектор \vec{v}_{BA} в точку B шатуна та дивимось, як вона рухається відносно точки A . Напрямок цього руху відповідає ω_2 . При напрямі кутової швидкості ω_1 проти ходу годинникової стрілки (Рис. 10.16, б) напрям кутової швидкості ω_2 буде протилежним.

10.10. План прискорень точок плоскої фігури

Для побудови плану прискорень використовують план швидкостей і вихідні дані задачі, яка була розглянута у розділі 10.9, рис. 10.16.

Кінематичний аналіз механізму робимо на прикладі схеми з наступними вихідними даними:

$$l_{OA} = 0,5 \text{ м}, \quad l_{AB} = 0,9 \text{ м}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ рад} \quad \omega_1 = 35 \text{ с}^{-1}.$$

10.10.1. Загальні відомості про побудову плану прискорень

Для механізмів з твердими та жорсткими ланками план прискорень будують на основі теорії плоско-паралельного руху твердого тіла та теорії складного руху. План прискорень будуємо за рівнянням з урахуванням (10.16) $\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^\tau$ ($\vec{a}^n \perp \vec{a}^\tau$)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau,$$

де \vec{a}_B – прискорення повзуна, \vec{a}_A – прискорення точки A (в якості полюса можна обрати будь-яку точку твердого тіла), \vec{a}_{BA}^n і \vec{a}_{BA}^τ – відповідно нормальне та дотичне (тангенційне) прискорення точки B відносно точки A . Всі побудови мають бути прив'язані до полюса плану прискорень p_a .

Вихідними даними для побудови плану прискорень механізму є відомі геометричні розміри ланок механізму, кінематичні параметри, що задані або були визначені.

10.10.2. Визначення прискорення \vec{a}_A точки A

В загальному вигляді прискорення $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$, де \vec{a}_A^n – нормальне, а \vec{a}_A^τ – дотичне (тангенційне) прискорення. Перше з вказаних відповідає за зміну напрямку руху тіла, а друге – за зміну величини швидкості. На плані прискорень вектору \vec{a}_A^n відповідає вектор $\overrightarrow{p_a n_1}$,

вектору \vec{a}_A^τ – вектор $\overline{n_1 a}$, а вектору \vec{a}_A – вектор $\overline{p_a a}$, що приводить до виразу:

$$\overline{p_a a} = \overline{p_a n_1} + \overline{n_1 a}.$$

Через постійність $\omega_1 = const$ тангенційна складова прискорення відсутня $\vec{a}_A^\tau = 0$, тому $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n$, що на плані прискорень дає $\overline{p_a a} = \overline{p_a n_1}$ з тотожністю точок $n_1 \equiv a$. Зазвичай, на плані прискорень кінцівку вектора, який відповідає нормальному прискоренню точки відповідної за номером ланки, позначають літерою n з відповідним до ланки номером. Для позначення нормального прискорення точки A кривошипа (ланка 1) на рис. 10.17, в такую точку є точка n_1 .

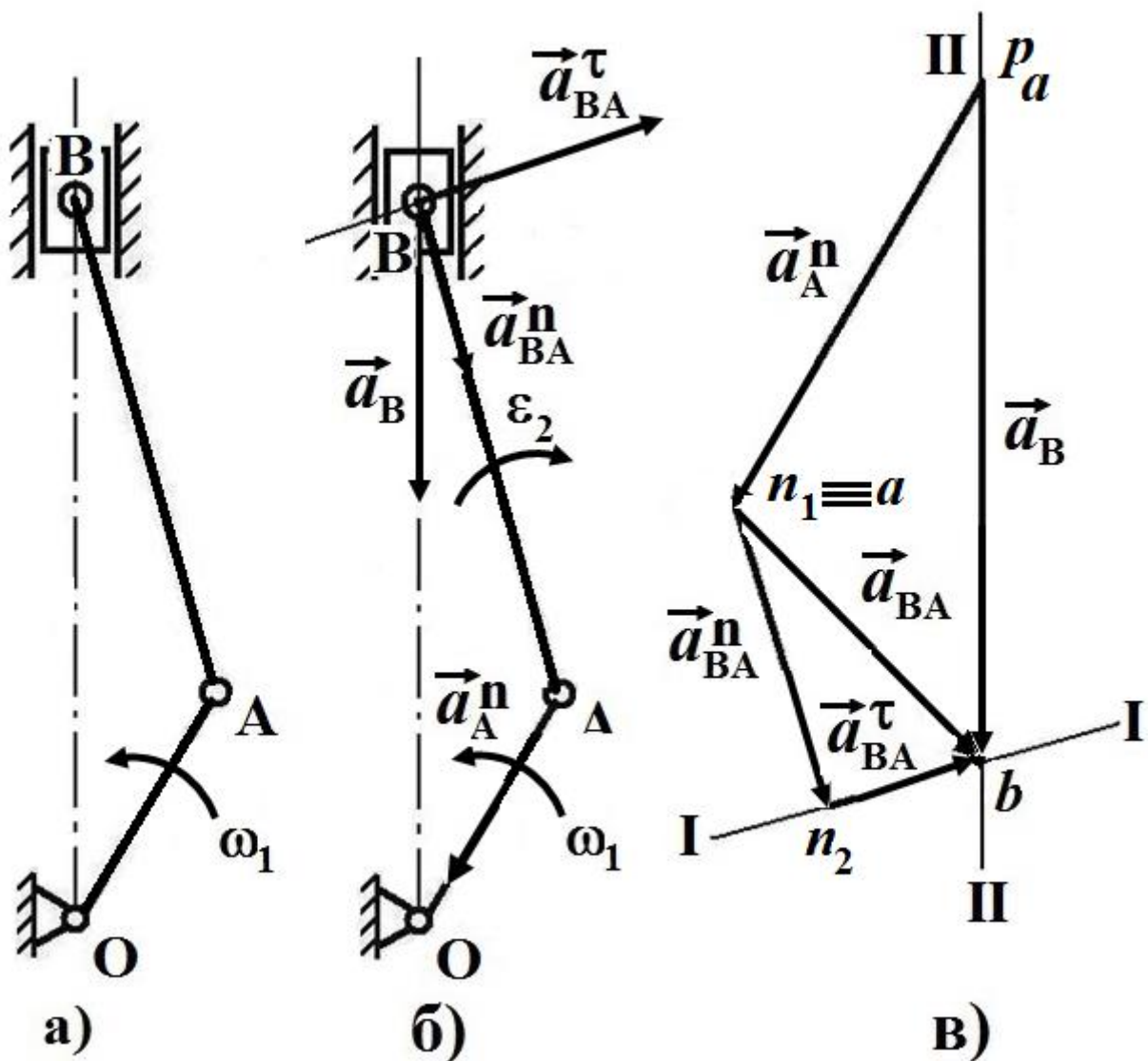


Рисунок 10.17.

Нормальне прискорення $a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}$, вектор \vec{a}_A^n спрямований за радіусом OA до центру обертання O і $\vec{a}_A^n \parallel OA$.

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA} = 35^2 \cdot 0,5 = 428,75 \text{ м/с}^2.$$

Обираємо масштаб плану прискорень $\mu_a = 5 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$, який показує, скільком одиницям прискорення певної точки відповідає відрізок 1 мм на плані прискорень.

Знайдемо довжину відрізка ($p_a a$), який зображує вектор $\overline{p_a a}$ прискорення \vec{a}_A на плані:

$$|p_a a| = |p_a n_1| = \frac{a_A^n}{\mu_a} = \frac{428,75}{5} = 85,75 \text{ мм.}$$

З полюса плану прискорень p_a відкладаємо вказаний відрізок у напрямі, паралельному OA .

10.10.3. Визначення прискорення \vec{a}_B повзуна та прискорення \vec{a}_{BA} точки B шатуна AB

Вектор прискорення шатуна (ланка 2) \vec{a}_{BA} розкладаємо на нормальну та дотичну складові $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$ ($\vec{a}_{BA}^n \perp \vec{a}_{BA}^\tau$). На плані прискорень вектору \vec{a}_{BA}^n відповідає вектор $\overline{an_2}$, вектору \vec{a}_{BA}^τ – вектор $\overline{n_2 b}$, а вектору \vec{a}_{BA} – вектор \overline{ab} , що приводить до виразу:

$$\overline{ab} = \overline{an_2} + \overline{n_2 b}.$$

Нормальне прискорення дорівнює

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB = 17,45^2 \cdot 0,9 = 274,05 \text{ м/с}^2$$

і спрямовано від точки B до точки A вздовж лінії шатуна AB . Визначимо довжину відрізка (an_2):

$$|an_2| = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{274,05}{5} = 54,8 \text{ мм.}$$

Від точки a у напрямі, паралельному лінії AB , відкладаємо відрізок (an_2) .

Величина дотичного прискорення \vec{a}_{BA}^τ невідома, лінія дії проходить через точку B перпендикулярно до шатуна AB , тому на плані прискорень проводимо через точку n_2 лінію I – I, перпендикулярну відрізку (an_2) .

Величина прискорення повзуна невідома, лінія дії вектора \vec{a}_B спрямована вздовж лінії OB , через полюс плану p_a проводимо лінію II – II, паралельну вказаній лінії. Перетин прямих I – I та II – II визначає точку b , відрізок (n_2b) зображує в прийнятому масштабі дотичне прискорення \vec{a}_{BA}^τ точки B , відрізок (p_ab) – прискорення \vec{a}_B . Їхні довжини $|n_2b| = 29 \text{ мм}$, $|p_ab| = 117 \text{ мм}$. Напрямок прискорення повзуна протилежний напрямку швидкості \vec{v}_B , тому в дійсності величина a_B є від'ємною, тобто рух уповільнений.

Для знаходження величин невідомих прискорень необхідно довжини відповідних відрізків помножити на масштаб:

$$a_{BA}^\tau = |n_2b| \cdot \mu_a = 29 \cdot 5 = 145 \text{ м/с}^2$$

$$a_B = |p_ab| \cdot \mu_a = 115 \cdot 5 = 575 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення точки B відносно точки A визначається:

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^\tau)^2} = \sqrt{274,05^2 + 145^2} = 310,05 \text{ м/с}^2$$

на рис. 10.17 його зображує відрізок (ab) , що дозволяє скористатися ще одним варіантом запису:

$$a_{BA} = |ab| \cdot \mu_a.$$

10.10.4. Визначення кутового прискорення ε_2 шатуна AB

За планом прискорень можна визначити кутове прискорення відповідної ланки. Для цього слід скористатися відомими співвідношеннями між дотичним і кутовим прискореннями:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{145}{0,9} = 161,1 \text{ рад/с}^2.$$

Для визначення напрямку ε_2 переносимо вектор \vec{a}_{BA}^τ в точку B шатуна і дивимось його напрям руху відносно точки A . В даному випадку кутове прискорення ε_2 спрямовано за ходом годинникової стрілки.

Більш детально побудови планів швидкостей і прискорень для різних механізмів розглядається у дисципліні «Теорія механізмів і машин».

Контрольні питання

1. Що називається плоским рухом твердого тіла?
2. Як можна розкласти рух плоскої фігури? Сформулюйте рівняння руху плоскої фігури.
3. Як визначають швидкості при плоскому русі?
4. Що називають миттєвим центром швидкостей?
5. Наведіть приклади визначення положення миттєвого центру швидкостей?
6. Що називають миттєво поступальним рухом?
7. Наведіть приклади визначення швидкостей точок кривошипно-повзунного механізму для різних його положень.
8. Як визначається прискорення точок плоскої фігури?
9. Що таке доцентрове та обертальне прискорення?
10. Що таке план швидкостей?
11. Що таке план прискорень?

Глава 11. Складний рух матеріальної точки

11.1. Основні визначення

В рамках попередніх тем ми вивчали рух точки або тіла по відношенню до однієї системи відліку. Однак у деяких випадках під час розв'язання задач механіки є доцільним розглядати рух точки або тіла одночасно по відношенню до двох систем відліку, одна з яких вважається основною або умовно нерухомою, а друга певним чином рухається по відношенню до першої.

Будемо називати **складним** або «**абсолютним**» рухом точки її рух по відношенню до системи координат, яка обрана як основна. Часто кінематичні параметри такого руху позначаються a (**absolutus**).

Наприклад, кулька, яка котиться по палубі корабля, який рухається, здійснює складний рух по відношенню до берега. Воно складається з кочення по відношенню до палуби (рухома система відліку) та рух разом з палубою по відношенню до берега (нерухома система відліку). Таким шляхом складний рух кульки розкладається на два більш простих і більш легких для дослідження рухів.

Рух точки по відношенню до рухомої системи координат будемо називати **відносним**. В подальшому кінематичні параметри відносного руху позначаються індексом r (**relative, relativus**).

Під **переносним** рухом будемо розуміти рух рухомої системи координат відносно нерухомої. В подальшому кінематичні параметри переносного руху позначаються індексом e (**entainer**).

Розглянемо точку M , яка рухається по відношенню до рухомої системи відліку $OXYZ$. Остання в свою чергу якимось чином рухається відносно іншої системи відліку $O_1X_1Y_1Z_1$, яку назвемо основною або умовно нерухомою (рис. 11.1). Рух довільної точки M можна вивчати як по відношенню до основної, так і по відношенню до рухомої систем координат за методами, які були викладено раніше.

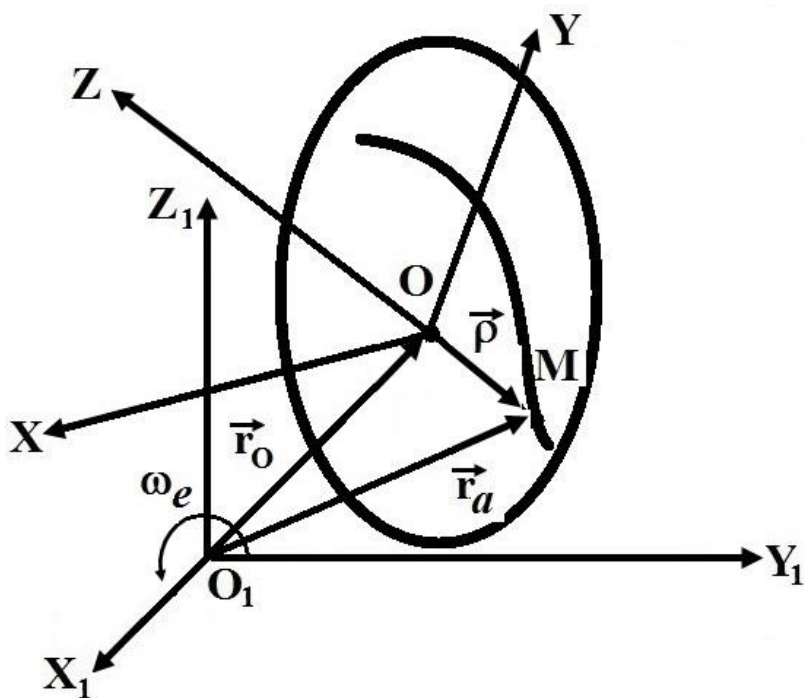


Рисунок 11.1.

Якщо радіус-вектор $\vec{r}_a = \vec{r}_a(t)$ визначає положення точки M по відношенню до системи координат $O_1X_1Y_1Z_1$, радіус-вектор

$$\vec{r}_o = \vec{r}_o(t)$$

визначає положення початку координат $OXYZ$ в системі $O_1X_1Y_1Z_1$, а радіус-вектор $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$

визначає положення точки M в системі координат $OXYZ$, то маємо:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_o + \vec{\rho}. \quad (11.1)$$

Тут:

\vec{r}_a , і в подальшому \vec{v}_a – абсолютна швидкість, \vec{a}_a – абсолютне прискорення;

$\vec{\rho}$, і в подальшому \vec{v}_r – відносна швидкість, \vec{a}_r – відносне прискорення;

\vec{r}_o , і в подальшому \vec{v}_e і $\vec{\omega}_e$ – переносна лінійна та кутова швидкість, \vec{a}_e і $\vec{\epsilon}_e$ – переносне лінійне та кутове прискорення.

11.2. Теорема про додавання швидкостей

Доведемо теорему про складання швидкостей точки, яка здійснює складний рух.

Припустимо, що точка M рухається по відношенню до системи координат $AXYZ$, яка жорстко пов'язана з тілом, яке переміщується поступально по відношенню до нерухомої системи координат $O_1X_1Y_1Z_1$.

Положення точки відносно нерухомої системи координат визначається радіус-вектором (рис. 11.2):

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho},$$

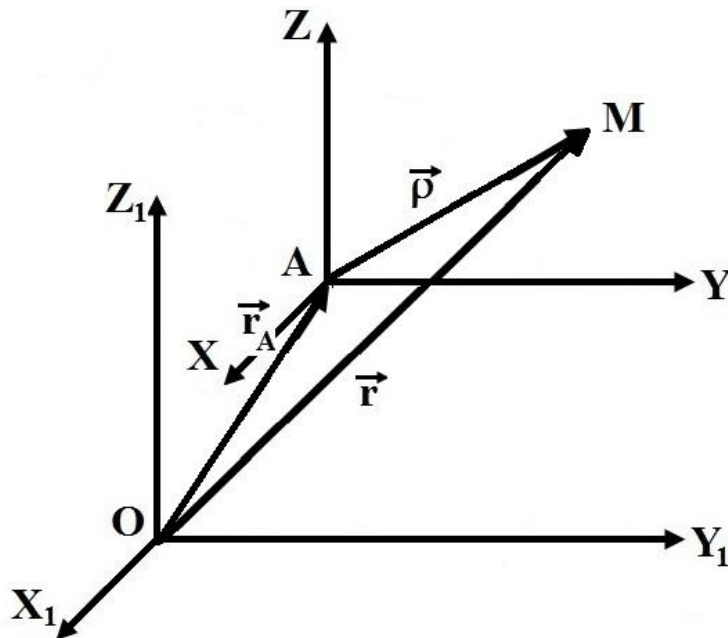


Рисунок 11.2.

де \vec{r}_A – радіус-вектор початку рухомої системи координат, $\vec{\rho}$ – радіус-вектор, який визначає положення точки M в рухомій системі координат.

За визначенням, абсолютна похідна радіус-вектора за часом буде абсолютною швидкістю точки. Продиференціюємо цю рівність за часом:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (11.2)$$

Проаналізуємо кожний з доданків наведеного виразу. В цій рівності $\frac{d\vec{r}}{dt}$ є швидкістю точки відносно нерухомої системи координат, яка називається **швидкістю точки в складному русі** або **абсолютною швидкістю точки** і позначається \vec{v}_a .

Перший доданок в правій частині рівності $\frac{d\vec{r}_A}{dt}$ – швидкість точки A .

Через те, що система координат $AXYZ$ рухається, це водночас буде швидкістю тієї точки тіла, з якою в даний момент часу збігається рухома точка M і позначається \vec{v}_e .

З'ясуємо сенс похідної $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$. Вектор $\vec{\rho}$ визначений у рухомій системі координат, тому:

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де x, y, z – координати точки M в системі координат $AXYZ$, а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори цих осей.

Через поступальність руху рухомої системи координат вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – постійні, їх похідні за часом дорівнюють нулю, тому:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \quad (11.3)$$

Ця рівність визначає швидкість точки по відношенню до рухомої системи координат і називається відносною швидкістю точки M . Ця швидкість позначається \vec{v}_r . Остаточно маємо, переходячи до позначень швидкості:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (11.4)$$

Отримана рівність виражає теорему про складання швидкостей: **абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній (векторній) сумі переносної та відносної швидкостей.**

Для визначення відносної швидкості точки слід подумки зупинити переносний рух і обчислити відносну швидкість за правилами кінематики точки.

Для визначення переносної швидкості точки достатньо подумки зупинити відносний рух і шукати переносну швидкість за правилами кінематики точки як швидкість тієї точки рухомої системи координат, з якою збігається в даний момент часу рухома точка.

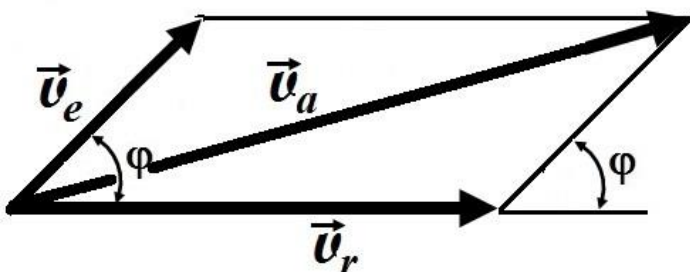


Рисунок 11.3.

Застосовуючи теорему про складання швидкостей, визначаємо шукану абсолютну швидкість точки.

За геометричною інтерпретацією (рис. 11.3)

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e \cos(180^\circ - \varphi)} \quad \text{або}$$

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos \varphi}. \quad (11.5)$$

Розв'язання задач, таким чином, зводиться до побудови трикутника або паралелограма швидкостей і визначенню елементів, сторін і кутів цих геометричних фігур. Це можна зробити або тригонометричним шляхом, або проектуванням геометричної рівності (11.4) на декартові осі координат. Обираючи відповідні осі X і Y і проектуючи на них, отримуємо:

$$\begin{aligned} v_{aX} &= v_{eX} + v_{rX} \\ v_{aY} &= v_{eY} + v_{rY}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

За величиною абсолютна швидкість:

$$v_a = \sqrt{v_{aX}^2 + v_{aY}^2}. \quad (11.7)$$

11.3. Додавання прискорень

Залежність між прискореннями точки в абсолютному, відносному та переносному рухах визначається **теоремою додавання прискорень**, або **теоремою Коріоліса**:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_{\text{кор}}. \quad (11.8)$$

Згідно з цією теоремою **абсолютне** прискорення точки \vec{a}_a дорівнює геометричній сумі **переносного** прискорення \vec{a}_e , відносного прискорення \vec{a}_r та **прискорення Коріоліса** (або коріолісово прискорення, або поворотне прискорення) $\vec{a}_{\text{кор}}$ (як варіант, використовують позначення \vec{a}_c).

Таким чином, абсолютне прискорення визначається тією стороною багатокутника, яка його замикає. Також, за деяких видів рухів прискорення Коріоліса відсутнє, що спрощує вираз (11.8) і дозволяє визначити абсолютне прискорення як діагональ паралелограма, який будується на двох прискореннях.

Для визначення **відносного** прискорення точки слід подумки відволіктися від переносного руху та обчислити відносне прискорення за правилами кінематики точки. Відносне прискорення характеризує зміну відносної швидкості у відносному русі точки.

Для визначення **переносного** прискорення точки слід подумки зупинити відносний рух точки та обчислити переносне прискорення за правилами кінематики точки як прискорення тієї точки рухомої системи координат, з якою збігається в даний момент часу рухома точка. Переносне прискорення характеризує зміну переносної швидкості у переносному русі точки.

Прискорення Кориоліса визначається за формулою:

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r, \quad (11.9)$$

де $\vec{\omega}_e$ – вектор кутової швидкості переносного руху, \vec{v}_r – вектор відносної швидкості точки. За величиною кориолісово прискорення дорівнює:

$$a_{\text{кор}} = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}). \quad (11.10)$$

Напрямок цього прискорення визначається за правилом векторного добутку.

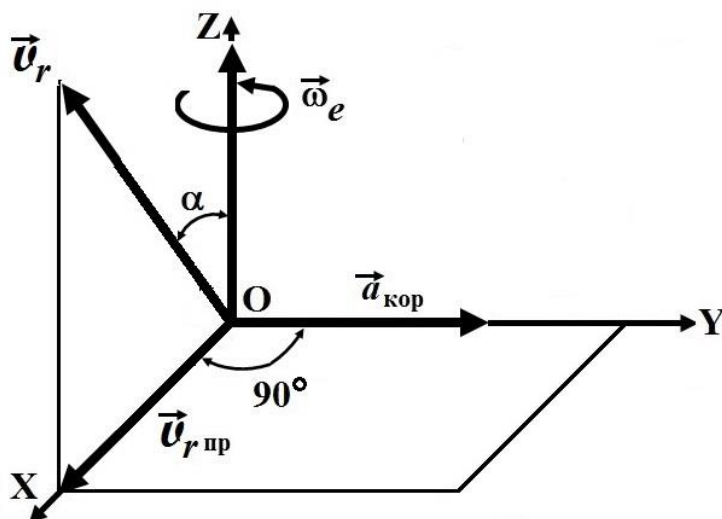


Рисунок 11.4.

Прискорення Кориоліса $\vec{a}_{\text{кор}}$ спрямовано перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{\omega}_e$ і \vec{v}_r , в той бік, щоб спостерігач по напрямку вектора $\vec{a}_{\text{кор}}$ бачив поворот від вектора $\vec{\omega}_e$ до вектора \vec{v}_r на найменший кут проти годинникової стрілки (рис. 11.4).

Поряд з визначенням напрямку прискорення Коріоліса як векторного добутку $\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ існує та застосовується для знаходження напрямку цього прискорення **правило Жуковського**:

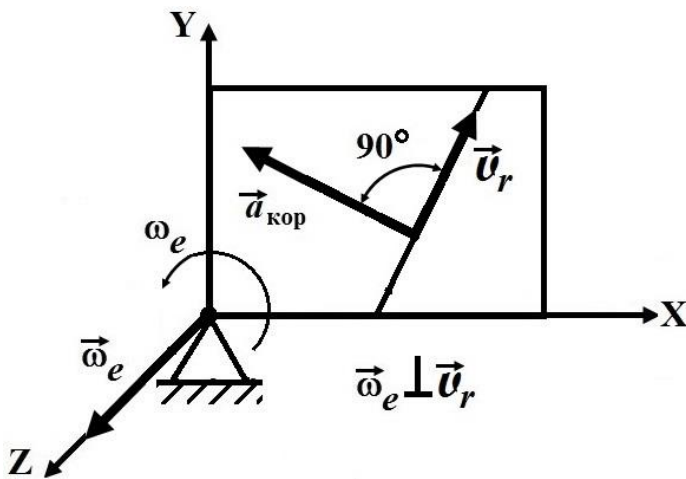


Рисунок 11.5.

Спроектуємо вектор відносної швидкості \vec{v}_r на площину, перпендикулярну до вектора кутової швидкості $\vec{\omega}_e$, і повернемо проекцію в цій площині на кут 90° у бік обертання, який визначається напрямом $\vec{\omega}_e$, – це і буде напрямом прискорення Коріоліса (рис. 11.5).

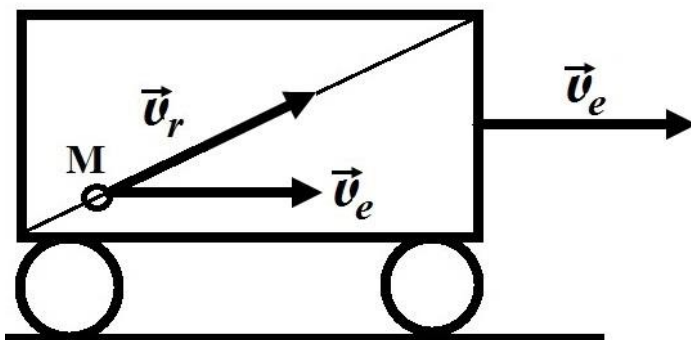


Рисунок 11.6.

Слід зауважити, що у випадку переносного поступального руху (рис. 11.6) кутова швидкість цього руху $\omega_e = 0$ і згідно з формулою (11.10) прискорення Коріоліса теж дорівнює нулю.

Теорема додавання прискорень (11.8) при переносному поступальному русі спрощується:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r. \quad (11.11)$$

Також прискорення Коріоліса дорівнює нулю, якщо кутова швидкість переносного руху паралельна відносній швидкості (рис. 11.7). Прискорення Коріоліса дорівнює нулю і в моменти часу, коли $\omega_e = 0$ або $v_r = 0$.

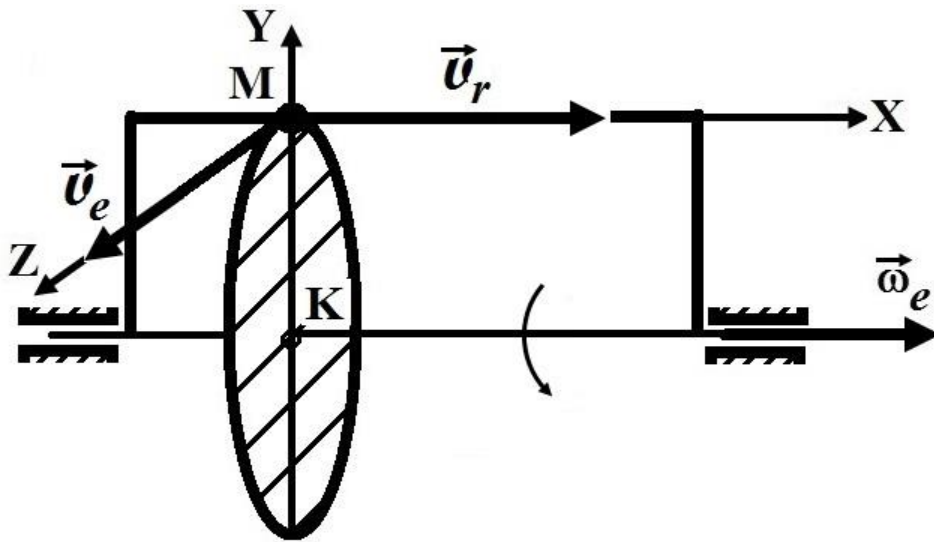


Рисунок 11.7.

Прискорення Коріоліса мають всі точки (тіла), що рухаються по поверхні Землі, наприклад, частинки води у ріках, потяги, автомобілі тощо.

Для тіл, які рухаються по поверхні Землі, її обертання навколо осі є переносним рухом, рух самого тіла – відносним.

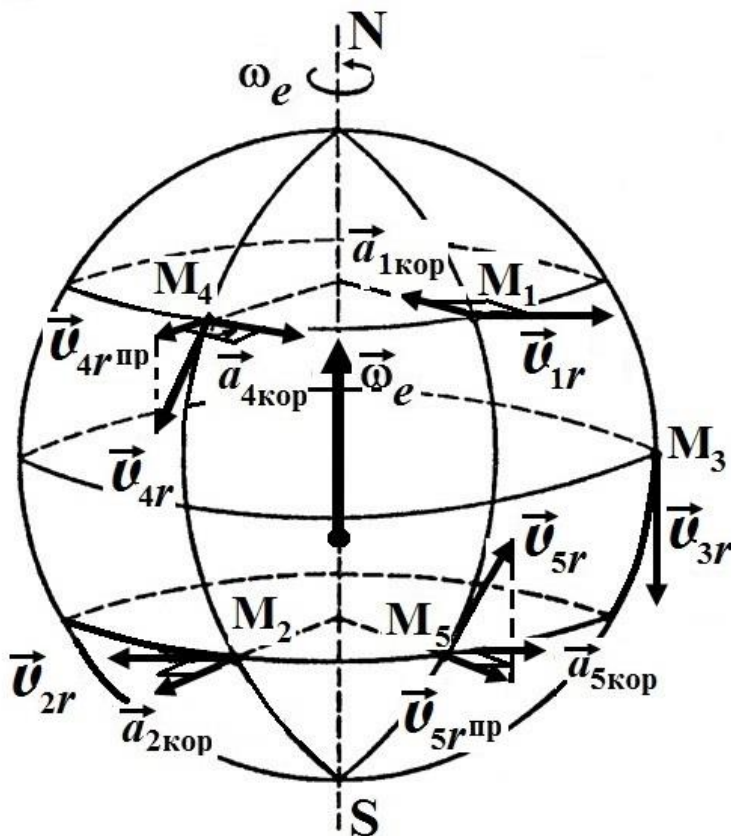


Рисунок 11.8.

Визначимо за правилом Жуковського прискорення Коріоліса точок M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 , які рухаються по поверхні Землі у напрямках, вказаних на рис. 11.8. Через те, що точки M_1, M_2 рухаються у площинах, перпендикулярних до осі обертання Землі, то модулі їх коріолісових прискорень визначають за формулами:

$$a_{1\text{кор}} = 2\omega_e v_{1r} \text{ і}$$

$$a_{2\text{кор}} = 2\omega_e v_{2r}.$$

Напряма цих прискорень отримуємо поворотом відносних швидкостей у бік обертання Землі.

Відносна швидкість точки M_3 , яка рухається вздовж меридіану, в момент проходження через екватор стає паралельною осі обертання Землі і $\sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_{3r}}) = 0$, тому $a_{3\text{кор}} = 0$.

Модулі прискорень Коріоліса точок M_4, M_5 , які рухаються вздовж меридіанів, знаходимо за формулами:

$$a_{4\text{кор}} = 2\omega_e v_{4r} \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_{4r}}) \text{ і } a_{5\text{кор}} = 2\omega_e v_{5r} \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_{5r}}).$$

Тут $\sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}) = \sin \varphi$, де φ – широта точки Землі. Напрями цих прискорень також визначаємо за правилом Жуковського.

Якщо траєкторії точок рухомої системи координат не є прямолінійними та відносний рух точки також є криволінійним, то доцільно обчислювати переносне прискорення як геометричну (векторну) суму нормального та дотичного переносних прискорень, а відносне прискорення як геометричну (векторну) суму нормального та дотичного відносних прискорень. При цьому формула (11.8) записується у вигляді:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_{\text{кор}}, \quad (11.12)$$

де \vec{a}_e^n, \vec{a}_r^n – відповідно нормальні прискорення у переносному та відносному рухах, $\vec{a}_e^\tau, \vec{a}_r^\tau$ – відповідно дотичні прискорення у переносному та відносному рухах. При русі за окружністю можна нормальне прискорення називати доцентровим, а тангенційне – обертальним.

Знаючи вектори швидкостей \vec{v}_e і $\vec{\omega}_e$ переносного руху з радіусом кривизни R та \vec{v}_r відносного руху з радіусом кривизни ρ , можна визначити прискорення за відомими формулами :

1) для переносного руху:

кутове прискорення $\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} = \vec{\varepsilon}_e$, з урахуванням якого тангенційне

прискорення $a_e^\tau = R\varepsilon_e$; нормальне прискорення $a_e^n = R\omega_e^2$;

2) для відносного руху:

тангенційне прискорення $\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r^\tau$; нормальне прискорення $a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho}$.

3) Прискорення Кориоліса $a_{\text{кор}} = 2\omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r})$

При використанні теореми додавання прискорень можна застосовувати метод проєкцій. Обираючи нерухому систему координат $OXYZ$ і проєктуючи рівність (11.12) на кожну з цих осей, знаходимо:

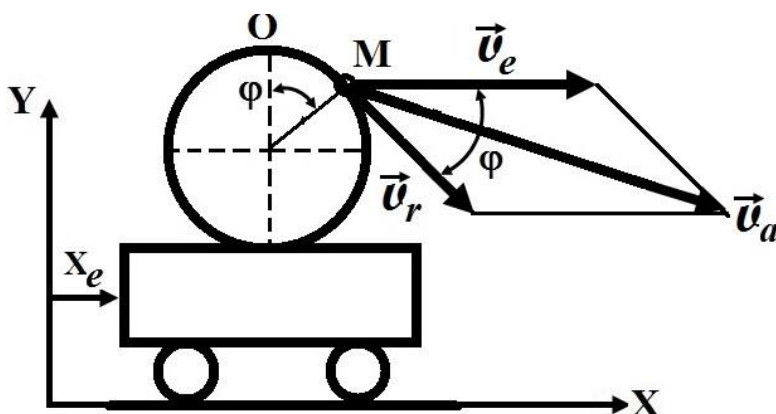
$$\begin{aligned} a_{aX} &= a_{eX}^n + a_{eX}^\tau + a_{rX}^n + a_{rX}^\tau + a_{\text{кор}X} \\ a_{aY} &= a_{eY}^n + a_{eY}^\tau + a_{rY}^n + a_{rY}^\tau + a_{\text{кор}Y} \\ a_{aZ} &= a_{eZ}^n + a_{eZ}^\tau + a_{rZ}^n + a_{rZ}^\tau + a_{\text{кор}Z} \end{aligned} \quad (11.13)$$

Модуль абсолютного прискорення визначаємо за формулою:

$$a_a = \sqrt{a_{aX}^2 + a_{aY}^2 + a_{aZ}^2}. \quad (11.14)$$

Далі на прикладах ми проаналізуємо рух точки (визначення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки M), яка рухається відносно тіл, що здійснюють різний переносний рух – поступальний або обертальний.

11.4. Приклад визначення абсолютної швидкості (переносний рух поступальний)



Дано:

$$OM = s_r = 0,9\pi t^2 \text{ м};$$

$$x_e = \sin(\pi t);$$

$$R = 0,3 \text{ м}.$$

Визначити: v_a при $t =$

$$1/3 \text{ с}.$$

Розв'язання. Визначимо положення точки M :

$$\varphi = \frac{OM}{R} = \frac{0,9\pi t^2}{0,3} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Визначимо відносну, переносну та абсолютну швидкості точки M :

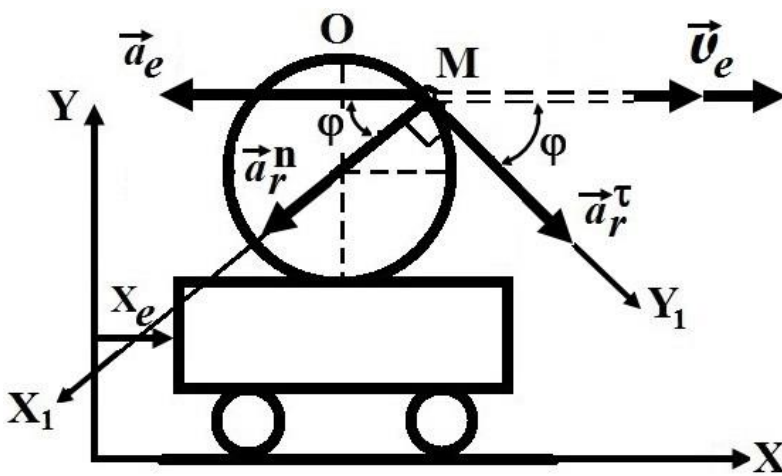
$$v_r = \dot{s}_r = 1,8\pi t \approx 1,89 \text{ м/с}; \quad v_e = \dot{x}_e = \pi \cos(\pi t) \approx 1,57 \text{ м/с}.$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e, \quad v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos\varphi} \Rightarrow v_a \approx 3 \text{ м/с}.$$

11.5. Приклад визначення абсолютного прискорення (переносний рух поступальний)

Розв'язання. Вирази для визначення відносної та переносної швидкостей відповідно у вигляді:

$$v_r = \dot{s}_r = 1,8\pi t; \quad v_e = \dot{x}_e = \pi \cos(\pi t).$$



Загальний вигляд виразу для абсолютного прискорення точки M – векторна сума відносного, переносного та прискорення Кориоліса, яке в даному випадку переносного руху дорівнює нулю.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{\text{кор}}, \quad a_{\text{кор}} = 0.$$

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n.$$

Визначимо тангенційну та нормальну складові відносного прискорення, а також переносне прискорення точки M :

$$a_r^\tau = \dot{v}_r = \ddot{s}_r = 1,8\pi = 5,66 \text{ м/с}^2,$$

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{(1,8\pi t)^2}{R} = 11,91 \text{ м/с}^2.$$

$$a_e = \dot{v}_e = \ddot{x}_e = -\pi^2 \sin(\pi t) = -8,55 \text{ м/с}^2.$$

Величина a_e від'ємна, тому необхідно замінити попередньо обраний напрям дії прискорення на протилежний, в подальшому для розрахунків беручи значення $a_e = 8,55 \text{ м/с}^2$.

Вводимо осі координат, пов'язані з відносним рухом точки M , знаходимо проєкції абсолютного прискорення на відповідні осі, а потім остаточно визначаємо абсолютне прискорення точки M :

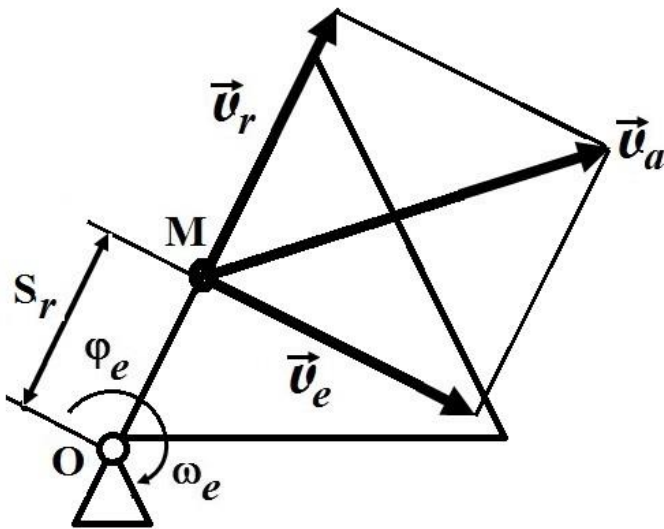
$$a_{aX_1} = a_r^n + a_e \sin \varphi = 19,31 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{aY_1} = a_r^{\tau} + a_e \cos \varphi = 1,39 \text{ м/с}^2.$$

$$a_a = \sqrt{a_{aX_1}^2 + a_{aY_1}^2} = 19,36 \text{ м/с}^2.$$

11.6. Приклад визначення абсолютної швидкості (переносний рух обертальний у площині рисунку)

Вважаємо, що площина рисунку збігається з площиною механізму.



Дано: трикутник обертається за законом $\varphi_e = 0,9\pi t^2$. Точка M рухається за законом $s_r = 1,2\sin(\pi t)$.

Визначити: v_a при $t = 1/6$ с.

Розв'язання. Визначимо положення точки M :

$$OM = s_r = 1,2\sin(\pi t) = 1,2\sin \frac{\pi}{6} = 0,6 \text{ м.}$$

Відносна швидкість, кутова та лінійна швидкості у переносному русі точки M :

$$v_r = \dot{s}_r = 1,2\pi \cos(\pi t) = 3,27 \text{ м/с.}$$

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e = 1,8\pi t = 0,9 \text{ с}^{-1}.$$

$$v_e = \omega_e \cdot OM = 0,9 \cdot 0,6 = 0,54 \text{ м/с}.$$

За умови від'ємних значень ω_e (це свідчить про інший напрям обертання відповідно до відліку кута повороту φ_e) або v_r , потрібно змінити напрями відповідних векторів швидкостей на протилежні.

Абсолютна швидкість точки M як векторна сума відносної та переносної швидкостей:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e, \quad v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 3,31 \text{ м/с}.$$

Слід зазначити, що у даному випадку руху вектори \vec{v}_e , \vec{v}_r , \vec{v}_a лежать в одні площині.

11.7. Приклад визначення абсолютного прискорення (переносний рух обертальний в площині рисунку)

Визначити: a_a при $t = 1/6$ с.

Розв'язання. Загальний вигляд виразу для абсолютного прискорення точки M – векторна сума відносного, переносного та прискорення Кориоліса:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e = 1,8\pi t = 0,9 \text{ с}^{-1}.$$

Кутове прискорення у переносному русі:

$$\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = \ddot{\varphi}_e = 1,8\pi = 5,66 \text{ с}^{-2}.$$

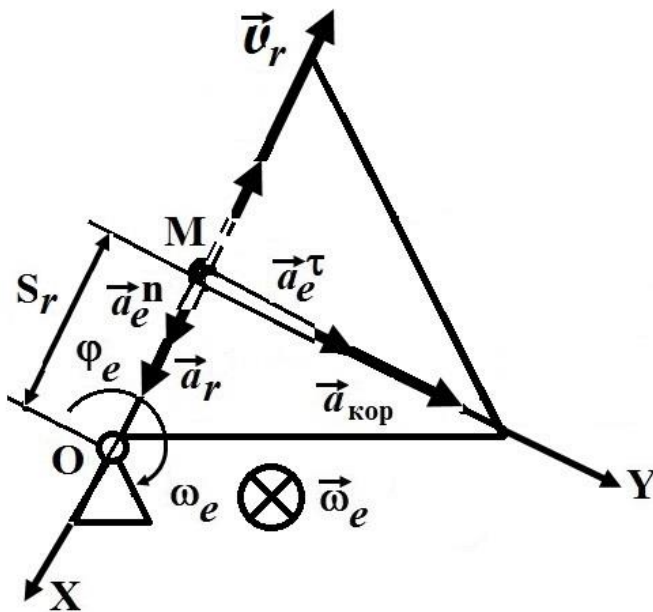
За умови переносного руху механізму у площині рисунку вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{\varepsilon}_e$ завжди спрямовані перпендикулярно до цієї площини. Їх напрям, умовно «до нас» або «від нас», зумовлений напрямом обертання механізму та його пришвидшенням або гальмуванням. Уводячи подумки вісь Z перпендикулярно до координатних осей XY , вказані вектори прямують вздовж напрямку осі Z . Таким чином, між вектором відносної швидкості \vec{v}_r і вектором переносної кутової швидкості $\vec{\omega}_e$ завжди буде

прямий кут, синус якого дорівнює одиниці, що приводить до відповідного зникнення множника у виразі для прискорення Кориоліса $a_{\text{кор}}$.

Прискорення у відносному русі, причому для вказаного руху нормальна складова відносного прискорення дорівнює нулю (відносний рух прямолінійний), дорівнює:

$$a_r = a_r^{\tau} = \dot{v}_r = \ddot{s}_r = -1,2\pi^2 \sin(\pi t) = -5,92 \text{ м/с}^2,$$

$$a_r^n = 0 \text{ м/с}^2.$$



Величина a_r від'ємна, тому необхідно замінити попередньо обраний напрям дії прискорення на протилежний, в подальшому для розрахунків беручи значення $a_r = 5,92 \text{ м/с}^2$.

Прискорення у переносному русі та прискорення Кориоліса:

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM = 0,49 \text{ м/с}^2,$$

$$a_e^{\tau} = \varepsilon_e \cdot OM = 3,4 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{\text{кор}} = 2\omega_e v_r = 5,89 \text{ м/с}^2.$$

Вводимо осі координат, пов'язані з відносним рухом точки M , знаходимо проекції абсолютного прискорення на відповідні осі, а потім остаточно визначаємо абсолютне прискорення точки M :

$$a_{aX} = a_r + a_e^n = 6,41 \text{ м/с}^2, \quad a_{aY} = a_{\text{кор}} + a_e^{\tau} = 9,29 \text{ м/с}^2.$$

$$a_a = \sqrt{a_{aX}^2 + a_{aY}^2} = 11,28 \text{ м/с}^2.$$

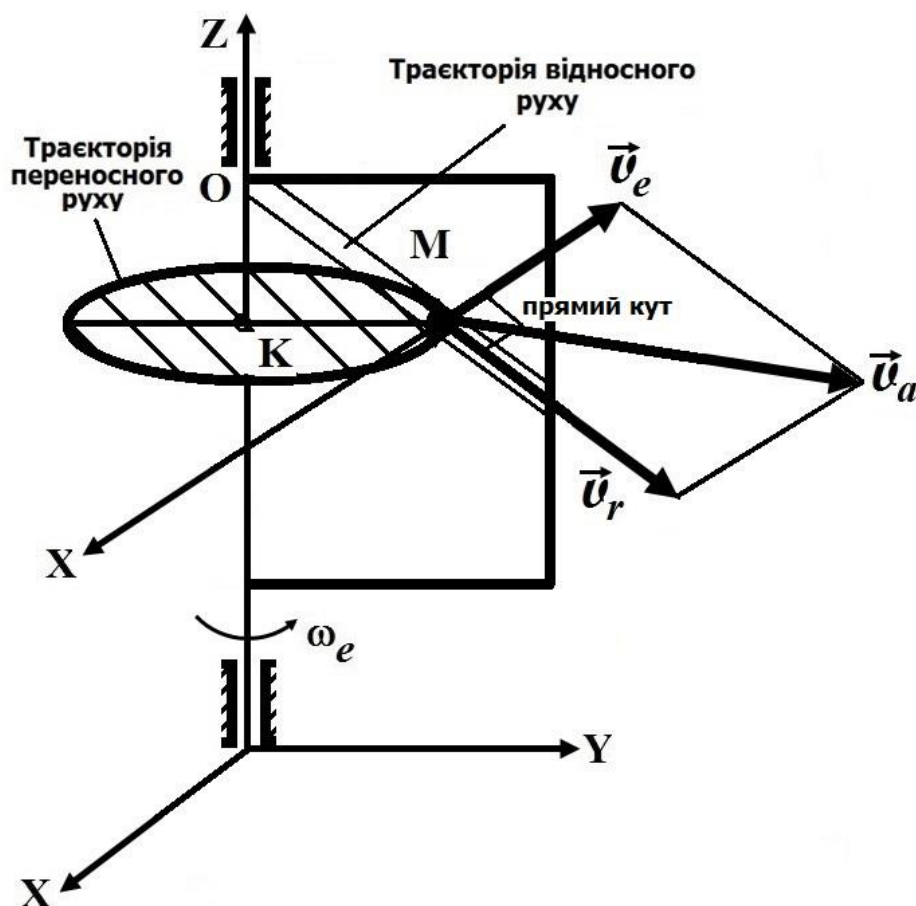
Слід зауважити, що, побудувавши у певному масштабі проекції відповідних швидкостей і прискорень, можна одержати напрям абсолютної швидкості і напрям абсолютного прискорення.

11.8. Приклад розподілу швидкостей (переносний рух обертальний)

Згідно зі схемою механізму обертальний рух тіла здійснюється навколо вертикальної осі. Точка M поступально прямолінійно пересувається вздовж напрямної у тілі. В подальшому під тілом будемо розуміти механізм, який здійснює переносний рух.

В задачі потрібно за відомими рівняннями відносного руху точки M та переносного руху тіла визначити для певного моменту часу абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки M . За відсутності виразів для законів обертання φ_e та S_r наші міркування носять якісний характер.

Вважаємо, що для заданого моменту часу площина рисунку збігається з площиною механізму.



В подібних задачах вихідними даними є закони зміни положення точки M (часто це описується тригонометричними залежностями від часу)

та зміни кута повороту тіла (часто це описується степеневими залежностями від часу). Алгоритм розв'язання задачі, наведений у попередніх прикладах, залишається незмінним.

Траєкторією руху точки M , як належної до тіла, буде окружність радіуса, величина якого змінюється за часом залежно від положення точки M . Площина окружності перпендикулярна до площини рисунку, що потребує уведення просторової системи координат XYZ . Вектор переносної швидкості \vec{v}_e спрямований за дотичною до окружності у бік обертання, що означає його перпендикулярність до площини рисунку. Вектор відносної швидкості \vec{v}_r спрямований у бік пересування точки M і лежить у площині рисунку. За цих умов вектори швидкостей є взаємно перпендикулярними, справедливі наступні вирази для абсолютної швидкості:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e, \quad v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}.$$

11.9. Приклад розподілу прискорень (переносний рух обертальний)

Абсолютне прискорення точки M визначається згідно з (11.12) і для нього записується вираз у розгорнутому вигляді:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{\text{кор}}, \quad \vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

Беручи похідні від виразів для кутової швидкості ω_e і швидкості v_r , отримуємо відповідні вирази для кутового прискорення ε_e і прискорення a_r^τ . Після підстановки в отримані вирази значення часу, проведення аналізу щодо їх від'ємності-додатності (що свідчить про пришвидшення або гальмування механізму та точки M), показуємо на схемі відповідні вектори. Для прикладу вважаємо, що отримані величини є додатними. За умови від'ємності потрібно внести відповідні зміни у напрями векторів прискорення.

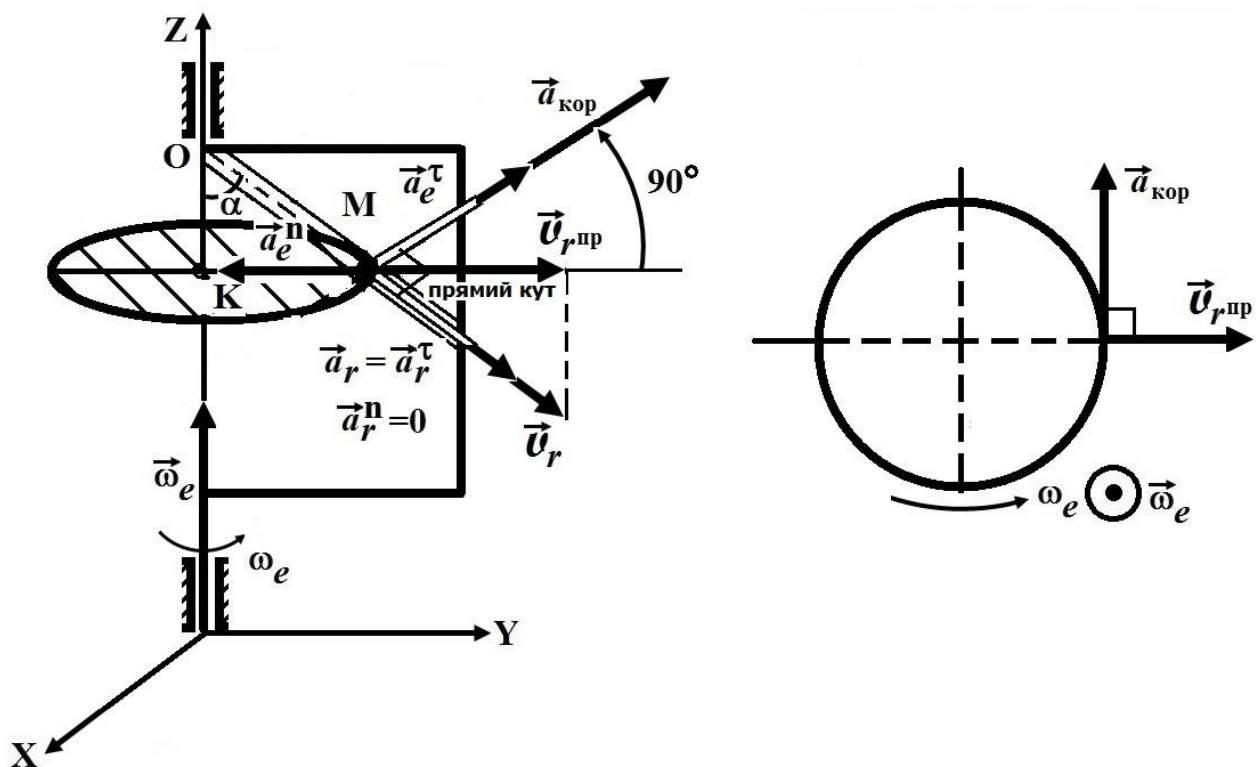
Для переносного руху:

- 1) нормальне прискорення \vec{a}_e^n спрямовано до центру обертання точки M (до осі обертання тіла);
- 2) тангенційне прискорення \vec{a}_e^τ спрямовано аналогічно до напрямку швидкості \vec{v}_e .

Для відносного руху:

- 1) нормальне прискорення \vec{a}_r^n відсутнє через прямолінійність відносного руху точки M вздовж своїх напрямних, $a_r^n = 0 \text{ м/с}^2$.
- 2) тангенційне прискорення \vec{a}_r^τ спрямовано у напрямі швидкості \vec{v}_r .

Величини вказаних прискорень визначаються за відповідними формулами.



Для визначення напрямку прискорення Коріоліса $\vec{a}_{\text{кор}}$ потрібно проаналізувати напрями векторів $\vec{\omega}_e$ і \vec{v}_r . В подібних задачах для умовно «просторових» механізмів між цими векторами кут буде довільним, що потребує знаходження проекції вектора $\vec{v}_{r\text{пр}}$ з урахуванням величини цього кута. Застосовуючи правило векторного добутку або правило

Жуковського , визначаємо напрям прискорення $\vec{a}_{\text{кор}}$, далі модуль абсолютного прискорення точки M знаходимо за способом проєкцій на відповідні осі: a_{aX}, a_{aY}, a_{aZ} , і остаточно згідно з (11.14):

$$a_a = \sqrt{a_{aX}^2 + a_{aY}^2 + a_{aZ}^2}$$

Зауважимо, що за криволінійного відносного руху точки M нормальне прискорення \vec{a}_r^n буде ненульовим, що потребує його врахування у розрахунках.

Контрольні питання

1. В чому полягає задача кінематики складного руху точки?
2. Дати визначення характеристик абсолютного, відносного та переносного рухів точки.
3. Сформулюйте теорему про додавання швидкостей.
4. Сформулюйте теорему про додавання прискорень, або теорему Коріоліса.
5. Як визначати відносне та переносне прискорення?
6. Як визначають прискорення Коріоліса? Які є способи?
7. Наведіть приклади визначення прискорення Коріоліса.
8. Як визначають абсолютні швидкість і прискорення за переносного поступального руху?
9. Як визначають абсолютні швидкість і прискорення за переносного обертального руху?

ЛІТЕРАТУРА

1. Авершин А.Г., Красніков С.В. Методичні вказівки з розрахунково-графічної роботи дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика» для студентів всіх спеціальностей. Харків: ХНАДУ, 2020. 86 с.
2. Авершин А.Г., Біловол О.В. Гідравліка, гідро та пневмоприводи: конспект лекцій. Харків: ХНАДУ, 2023. 129 с.
3. Біловол О.В. Гідравліка, гідрологія та гідрометрія: навч. посібник. В 2-х ч.: Ч.1. Харків: ХНАДУ, 2013. 112 с. ISBN 987-966-303-500-0
4. Біловол О.В., Авершин А.Г. Гідравліка, гідрологія та гідрометрія: конспект лекцій. Харків: ХНАДУ, 2022. 168 с.
5. Булгаков В.А., Яременко В.В., Черниш О.М., Березовський М.Г. Теоретична механіка: підручник. К.: Центр навчальної літератури, 2017. 640 с.
6. Вамболь С.О., Міщенко І.В., Кондратенко О.М. Технічна механіка рідини і газу: підручник. Х.: НУЦЗУ, ФОП Панов А.М. 2016. 300 с. ISBN 978-617-7474-24-0
7. Вамболь С.О., Міщенко І.В., Хохлова Н.В. Технічна механіка. Розділ «Динаміка». Методичні вказівки до виконання контрольної (модульної) роботи. Х.: НУЦЗУ, 2015. 44 с.
8. Воропай О.В., Шарапата А.С. Технічна механіка: Конспект лекцій. Харків: ХНАДУ, 2022. 124 с.
9. Воропай О.В., Шарапата А.С., Єгоров П.А. Методичні вказівки до РГР, СРС і практичних занять для студентів денної та заочної форм навчання з дисципліни «Технічна механіка» з спеціальності 275.03 Транспортні технології (на автомобільному транспорті). Харків: ХНАДУ, 2022. 64 с. (електронна версія)
10. Деркач Ю.Ф., Колосков В.Ю., Кондратенко О.М., Міщенко І.В., Чернобай Г.О. Теоретична механіка та опір матеріалів: курс лекцій. Х.: НУЦЗУ, 2020. 510 с.
11. Деркач Ю.Ф., Колосков В.Ю., Кондратенко О.М., Міщенко І.В., Чернобай Г.О. Технічна механіка: методичні вказівки з організації самостійної роботи здобувачів вищої освіти під час вивчення дисципліни. Х.: НУЦЗУ, 2020. 71 с.

12. Красніков С.В. Theoretical mechanics: навчальний посібник. Kharkiv: ХНАДУ, 2024. 104 р.
13. Міщенко І.В. Теоретична механіка: конспект лекцій. Х.: ХНАДУ, 2023. 207 с.
14. Міщенко І.В. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика». Х.: ХНАДУ, 2024. 82 с.
15. Міщенко І.В., Вамболь С.О., Курська Т.М. Метрологія та стандартизація: конспект лекцій. Х.: АЦЗУ, 2006. 137 с.
16. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник. К.: Техніка, 2002. 511 с.
17. Перегон В.А., Воропай О.В., Коряк О.О., Поваляєв С.І. Синтез механізмів і динаміка машин: навчальний посібник. Х.: ФОП Бровін О.В. 2023. 164 с. ISBN 978-617-8238-36-0
18. Перегон В.А., Воропай О.В., Коряк О.О., Єгоров П.А. Важільні механізми, передачі та зачеплення: навчальний посібник. Х.: ФОП Бровін О.В. 2025. 188 с. ISBN 978-617-8238-90-2
19. Солодов В.Г., Романенко Л.Г. Теоретична механіка: Навч. посіб. для студ. вузів; Харк. нац. автомоб.-дор. ун-т. Х., 2014. 270 с.
20. Солодов В.Г., Авершин А.Г., Стародубцев Ю.В., Хандримайлов А.А., Шипенко О.Н. Теоретична механіка: Теория и задачи. Навч. посіб. для студ. вузів. Харк. нац. автомоб.-дор. ун-т. Х., 2010. 214 с.
21. Штанько П.К., Шевченко В.Г., Омельченко О.С., Дзюба Л.Ф., Пасіка В.Р., Поляков О.М.; за ред. П. К. Штанька. Теоретична механіка: навчальний посібник. Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2021. 464 с.
22. Voropay A.V., Karpenko V.A., Koriak O.O., Povaliaiev S.I., Sharapata A.S. Theory of mechanisms and machines: Lecture notes. Kharkiv National Automobile and Highway University. Kharkiv: KhNAHU, 2023. 95 p.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МІЩЕНКО Ігор Вікторович
ВОРОПАЙ Олексій Валерійович
КРАСНІКОВ Сергій Васильович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Частина I. Статика. Кінематика

Навчальний посібник

Комп'ютерна верстка І.В. Міщенко

Відповідальний за випуск О.В. Воропай

Видавець ФОП Бровін О.В.
Свідоцтво про внесення суб'єкта до Державного реєстру
видавців та виготовників видавничої продукції серія ДК 3587 від 23.09.09 р.
Формат 60x84/16 Ум. друк. арк. 9.18. Тир. 100 прим. Зам. 821.

Надруковано з макету замовника ФОП Бровіна І.П.
61022, м. Харків, вул. Трінклера, 2, корп.1, к.19. Т. (066) 822-71-30

СТИЛЬ®
ИЗДАТ
ДРУКАРНЯ
www.stil-izdat.com