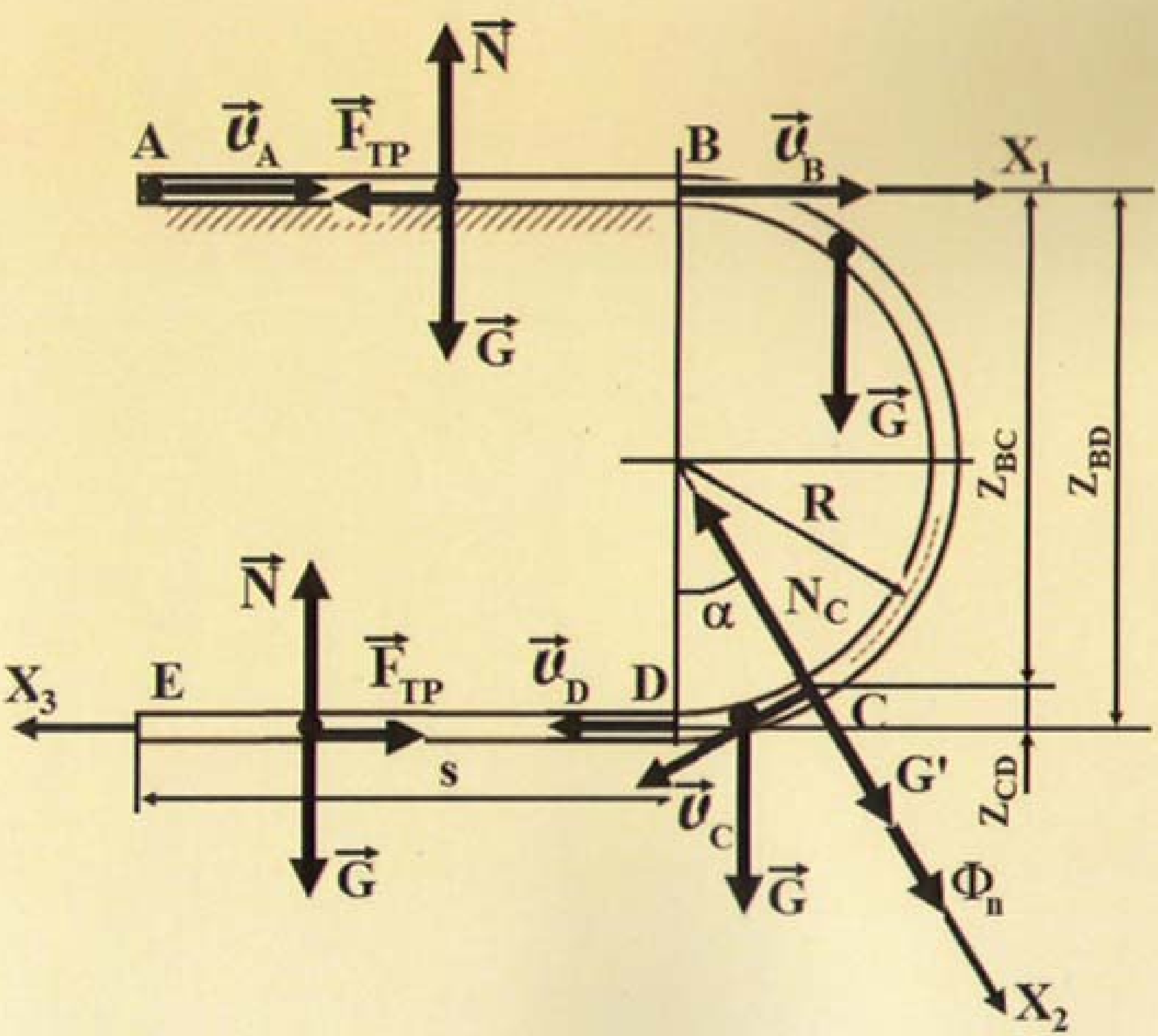
І.В. Міщенко, О.В. Воропай, С.В. Краснiков

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

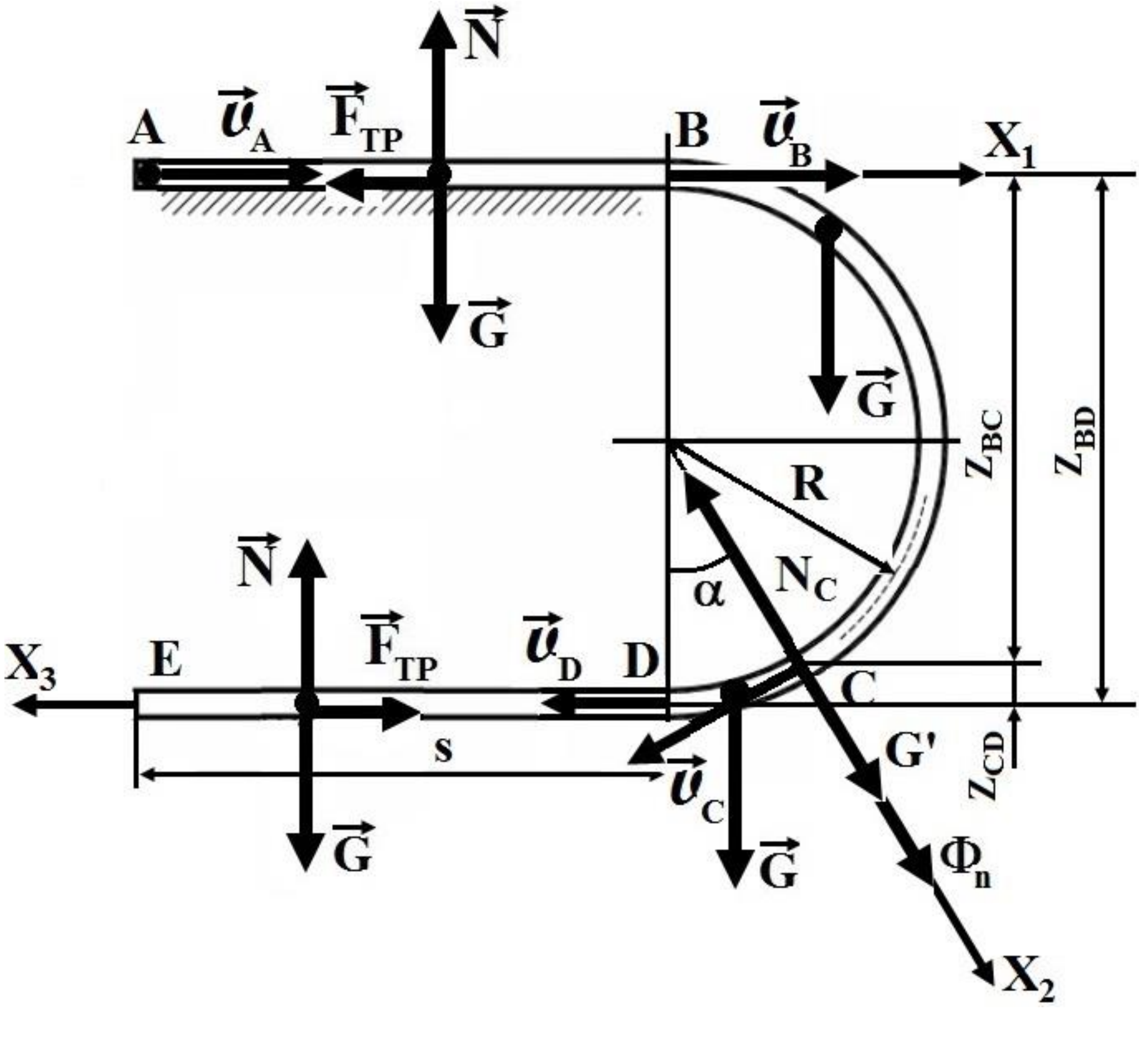
Частина II. Динаміка



І.В. Міщенко, О.В. Воропай, С.В. Краснікова

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Частина II. Динаміка



Міністерство освіти і науки України

Харківський національний автомобільно-дорожній університет

І.В. Міщенко, О.В. Воропай, С.В. Красніков

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Частина ІІ. Динаміка

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Харків 2025

УДК 531
ББК 22.21
М 57

Рекомендовано до видання рішенням Вченої ради
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету
(Дозвіл № 73/25/4.6 від 23 січня 2025 р.)

Рецензенти:

Батигін Юрій Вікторович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фізики Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.

Воронін Сергій Володимирович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри машинобудування та технічного сервісу машин Українського державного університету залізничного транспорту;

Ткачук Микола Анатолійович, доктор технічних наук, професор, професор кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин НТУ «ХПІ»;

Баранов Олег Олегович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки, машинознавства та робототехнічних систем Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут».

М 57

Міщенко І.В., Воропай О.В., Красніков С.В. Теоретична механіка. Частина ІІ. Динаміка: навчальний посібник. Х.: ФОП Бровін О.В., 2025. 154 с. ISBN 978-617-8238-94-0

Навчальний посібник з теоретичної механіки, частина ІІ (Динаміка), призначено для здобувачів вищої освіти за денною та заочною формами навчання за спеціальностями автомобільного, дорожньо-будівельного та механічного факультетів Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.

У навчальному посібнику послідовно розглянуто основні питання теоретичної механіки з розділу Динаміка, наведено теоретичний матеріал та приклади розв’язання задач за вказаним розділом.

Викладений матеріал дозволяє опанувати курс теоретичної механіки за офлайн та (або) онлайн формами навчання.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник «Теоретична механіка» (Частина I. Статика. Кінематика. Частина II. Динаміка) створено на основі багаторічного викладання зазначеної дисципліни у Харківському національному автомобільно-дорожньому університеті (ХНАДУ). В його основу покладено лекції, які читаються майбутнім спеціалістам під час викладання дисципліни «Теоретична механіка».

Теоретична механіка – наука, що вивчає найбільш загальні закони механічного руху, яке визначається переміщенням у просторі та часі одного матеріального об'єкта щодо іншого, а також рівноваги матеріальних тіл і виникаючі між ними взаємодії.

Теоретична механіка – одна з найважливіших наук фізико-математичного профілю (механіка це розділ фізики, рівень викладання якої останнім часом значно знизився як в середній так і в вищий школі), що формує науковий світогляд інженера.

Теоретична механіка є науковим фундаментом для багатьох технічних дисциплін, теорія яких ґрунтується на положеннях і законах теоретичної механіки. Отримані знання будуть в нагоді при подальшому вивченні таких дисциплін: Опір матеріалів, Будівельна механіка, Прикладна механіка, Гідравліка, Теорія механізмів і машин, Деталі машин, та ін. Тому вивчення теоретичної механіки необхідне як для розуміння цих дисциплін, так і для наукового тлумачення явищ природи.

Як фундаментальна наука теоретична механіка була та залишається не тільки однією з дисциплін, яка дає поглиблені знання про природу. Вона є засобом розвитку у майбутніх спеціалістів необхідних творчих навиків до побудови математичних моделей процесів, які відбуваються у природі та техніці, до формування здібностей щодо наукових узагальнень і висновків.

За характером задач, які розглядаються, механіку класично поділяють на три розділи: статику, кінематику та динаміку. У статиці надається вчення про сили та умови рівноваги матеріальних тіл під дією сил. В кінематиці розглядаються загальні геометричні властивості руху тіл (без урахування мас і сил, що викликали цей рух). В динаміці вивчають рух матеріальних тіл під дією сил (і моментів), які викликали цей рух з урахуванням мас (та моментів інерції). В такому ж порядку та відповідно до навчальних програми з «Теоретичної механіки» викладається дисципліна для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти за автомобільного, дорожньо-будівельного, механічного факультетів та факультету транспортних систем ХНАДУ.

Навчальний посібник поділено на три розділи, в кожному з яких є певна кількість глав. У кінці кожної глави наведено контрольні питання, відповідь на які дозволяє визначити рівень опанування теоретичного матеріалу. Нумерація рисунків і формул є подвійною – перша цифра відповідає номеру глави, друга поточному значенню в межах глави. За потреби наводяться приклади розв'язання задач, які дозволяють проілюструвати застосування теоретичного матеріалу на практиці.

Автори ставили за мету створити такий за обсягом навчальний посібник, який задовольняв вимогам до освітнього компоненту «Теоретична механіка» різних освітніх програм спеціальностей. В той же час, зважаючи на певні відмінності у освітніх програмах спеціальностей, викладач обирає ті глави видання, вивчення яких передбачено робочою програмою навчальної дисципліни «Теоретична механіка».

Даний навчально-методичний посібник складено з метою допомоги студентам в самостійній роботі, при підготовці до занять, контрольних робіт, тестового контролю, заліків та іспитів з теоретичної механіки.

Автори дуже вдячні кафедри деталей машин та теорії механізмів і машин ХНАДУ за надані зауваження технічного та методичного характеру, подолання яких на стадії роботи над виданням сприяло покращенню якості подання матеріалу в навчальному посібнику.

Окремо автори висловлюють щиру подяку рецензентам за витрачений час та корисні поради.

Розділ Динаміка

Глава 1. Динаміка точки

1.1. Основні поняття та визначення

Динаміка – розділ механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл під дією сил з урахуванням інертності тіл.

Основними поняттями динаміки є: матеріальна точка, сила, маса, абсолютне тверде тіло.

Матеріальна точка (**МТ**) – **точка, яка має масу та не здійснює обертальний рух**

Сила – основна міра механічної дії на матеріальне тіло. Позначення $\vec{F}$. Сили в динаміці поділяють на сталі та змінні. У загальному випадку будемо вважати, що сила є функцією часу, радіус-вектора та швидкості МТ, до якої вона прикладена, тобто $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$.

Маса тіла – фізична величина, кількісна міра інертності матеріального тіла. Позначення m.

Кінематичні параметри: $\vec{r}$ – радіус-вектор точки, $\vec{v}$ – швидкість, $\vec{a}$ – прискорення

Через те, що різні точки тіла можуть рухатися неоднаково, деякі положення та висновки потрібно застосувати тільки для окремих МТ, а не для всього тіла. Тому динаміку поділяють на дві частини: динаміка матеріальної точки та динаміка системи матеріальних точок, або динаміка системи.

В основу динаміки покладено закони динаміки точки, які встановлені шляхом узагальнення результатів цілого ряду експериментів і спостережень, присвячених вивченню руху тіл, та перевірці їх практикою.

1.2. Закони динаміки (закони Ньютона)

Перший закон (закон інерції): **ізольована від зовнішніх впливів МТ зберігає свій стан спокою або рівномірного**

прямолінійного руху до тих пір, поки прикладені сили не спонукають її змінити цей стан.

Інерція – властивість МТ чинити опір зміні її швидкості.

Другий закон (основний закон динаміки): **зміна кількості руху тіла пропорційна прикладеній рушійній силі та відбувається в напрямі тієї прямої, вздовж якої ця сила діє:**

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}. \tag{1.1}$$

За умови $m = const$

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{1.2}$$

або:

добуток маси МТ на прискорення, яке вона отримує під дією цієї сили, дорівнює за модулем цій силі, а напрям прискорення збігається з напрямом сили.

Сила $\boldsymbol{F}$ (вага $\boldsymbol{G}$) вводиться на основі другого закону Ньютона (1.2). Припускаючи в цьому співвідношенні m=1 кг, a=1 м/с^2, одержимо: 1 одиниця сили=(1 кг)•(1 м/с^2)=1 кг•м/с^2. Розмір одиниці дорівнює (1 кг)•(1 м)**:**(1 с)^2. Найменування цієї одиниці «ньютон», скорочене позначення Н. 1 Ньютон – сила, що надає тілу з масою 1 кг прискорення 1 м/с^2 у напрямку дії сили. Розмірність одиниці сили

$$[F] = [m] \cdot [a] = LMT^{-2}.$$

Інерціальна система відліку – в якій виконуються перший та другий закони. Під час розв’язання більшості технічних задач інерціальною, з достатньою для практики точністю, можна вважати систему відліку, жорстко пов’язану з Землею.

Третій закон (закон рівності дії та протидії, закон взаємодії тіл): **дві МТ діють одна на одну з силами, які рівні за модулем та спрямовані вздовж прямої, що з’єднує ці точки, в протилежні сторони.**

Підкреслимо, що із рівності дії та протидії та протилежності сил за напрямком зовсім не випливає їх взаємна рівновага, бо ці сили прикладені до різних тіл.

Четвертий закон (закон незалежності дії сил): **при одночасній дії на тіло кількох сил прискорення МТ дорівнює геометричній (векторній) сумі тих прискорень, які були б при роздільній дії на МТ цих сил**

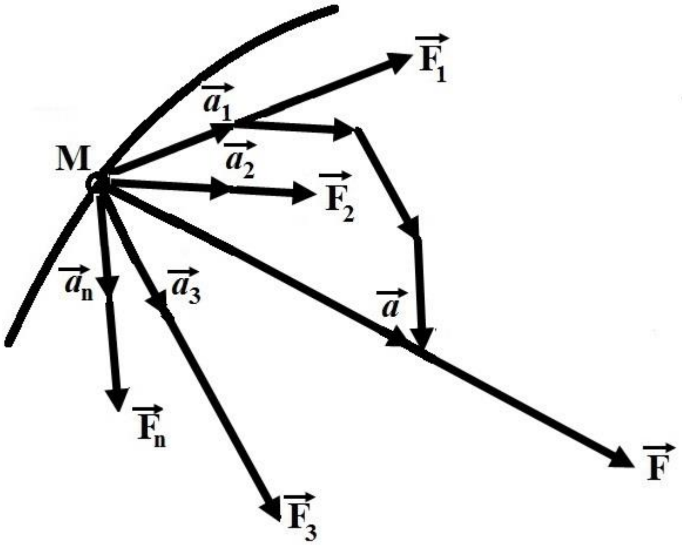


Рисунок 1.1.

$$m\vec{a}_i = \vec{F}_i, \;\; i = 1,2, \dots, n$$

$$m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{R}, \qquad (1.3)$$

$\vec{R}$ – рівнодійна (рис. 1.1). При визначенні швидкості МТ аналогічна суперпозиція (накладення) не виконується.

Рівняння (1.3) – це основне рівняння динаміки вільної матеріальної точки. Це рівняння є справедливим і для невільної МТ, на яку накладені в'язі. Потрібно тільки до прикладених сил додати реакції в'язей, тобто:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{k=1}^{m} \vec{R}_k, \qquad (1.4)$$

де $\vec{R}_k$ – реакція k-ої в'язі. Рівняння (1.4) – основне рівняння динаміки невільної точки.

1.3. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

З кінематики відомо, що рух МТ в просторі можна описати трьома способами: векторним, координатним і натуральним. Кожному із цих способів відповідають диференціальні рівняння руху МТ, які встановлюють на підставі основного рівняння динаміки точки (1.3) або (1.4).

1. Рівняння у векторній формі

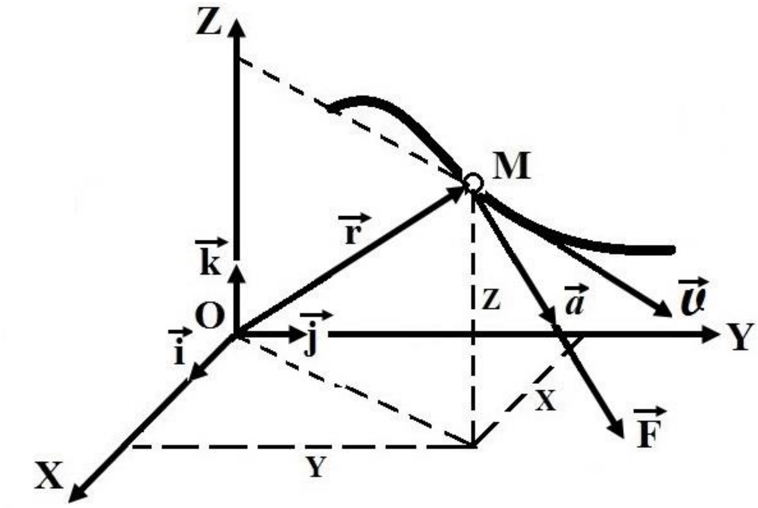


Рисунок 1.2.

Розглянемо МТ, положення якої M визначається радіус-вектором $\vec{r}(t)$ в інерціальній системі відліку (рис. 1.2). Сила $\vec{F}$, яка діє на МТ, залежна від часу t, радіус-вектора $\vec{r}(t)$, швидкості $\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$, тому $\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, t\right)$ та

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, t\right). \qquad (1.5)$$

Рівняння (1.5) називають **диференціальним рівнянням руху МТ у векторній формі.**

2. Рівняння в декартових координатах

Диференціальне рівняння у векторній формі еквівалентне 3-м скалярним рівнянням. Проектуючи обидві частини рівності (1.5) на осі X, Y, Z, маємо:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_k F_{kX}, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_k F_{kY},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum_k F_{kZ},$$

або

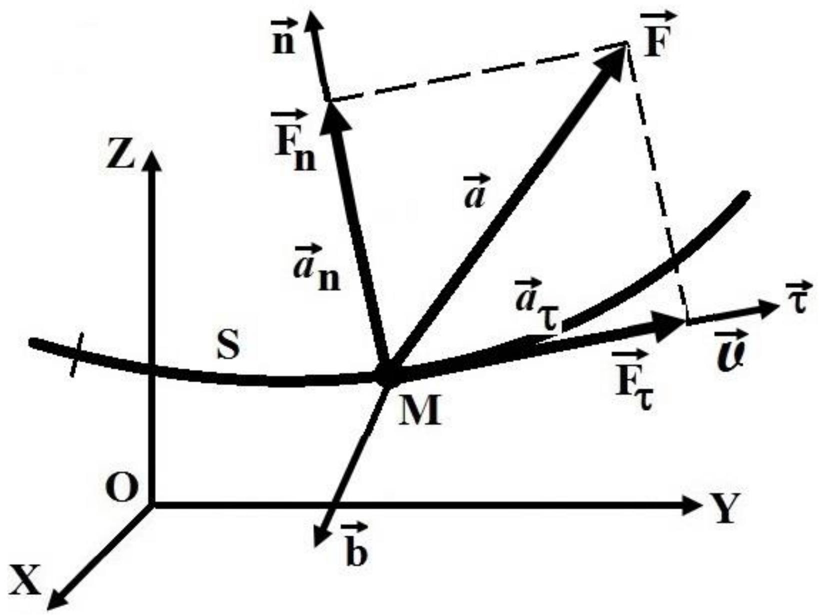
$$m\ddot{x} = \sum_k F_{kX}, \quad m\ddot{y} = \sum_k F_{kY}, \quad m\ddot{z} = \sum_k F_{kZ}. \qquad (1.6)$$

де $\vec{F}(F_X, F_Y, F_Z)$, $\vec{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $\vec{a}(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$**.**

Рівняння (1.6) називають **диференціальним рівнянням руху МТ у координатній (декартовій) формі.**

3. Рівняння в проекціях на осі натурального тригранника (осі $M\tau nb$)

Якщо рух МТ масою m описують у натуральний спосіб (рис. 1.3), тобто її положення на траєкторії визначається дуговою координатою $S = S(t)$, то диференціальне рівняння руху цієї точки в проекціях на осі натурального тригранника $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ мають вигляд:



$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

$$m\left(\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}\right) = \vec{F}$$

Рисунок 1.3.

Проектуючи це рівняння на дотичну $\vec{\tau}$, головну нормаль $\vec{n}$ та бінормаль $\vec{b}$, отримуємо:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b, \tag{1.7}$$

де F_τ, F_n, F_b – відповідно проекції сили, ρ – радіус кривизни в поточній точці траєкторії. Рівність $0 = F_b$ свідчить, що сила $\vec{F}$, під дією якої рухається МТ, лежить у стичній площині.

1.4. Дві основні задачі динаміки точки

1. Перша (пряма) основна задача (визначення сил за заданим рухом).

У динаміці розв'язують дві основні задачі. **Прямою** називається задача, в якій за заданими рухом та масою МТ визначається рівнодійна сил, які прикладені до цієї МТ.

Дано: рівняння руху МТ в декартових координатах $x = f_1(t)$, $y = f_2(t), z = f_3(t)$.

Потрібно визначити: проекції сили $\vec{F} = F_X\vec{\imath} + F_Y\vec{\jmath} + F_Z\vec{k}$, яка призводе до руху.

Розв'язання: через диференціювання заданих рівнянь руху МТ

$$F_X = m\ddot{x}, \quad F_Y = m\ddot{y}, \quad F_Z = m\ddot{z}$$

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2}, \tag{1.8}$$

$$\cos(x, \vec{F}) = \frac{F_X}{F}, \quad \cos(y, \vec{F}) = \frac{F_Y}{F}, \quad \cos(z, \vec{F}) = \frac{F_Z}{F}. \tag{1.9}$$

2. Друга (обернена) основна задача (визначення закону руху за заданими силами).

Оберненою називається задача, в якій за заданими силами, або їхньою рівнодійною, та масою МТ визначається закон руху цієї МТ. У загальній постановці сила (та її проекції) може залежати від положення МТ, її швидкості та часу.

Наведемо алгоритм розв'язування другої задачі динаміки, використовуючи рівняння руху МТ в координатній формі (1.6). Встановлення закону руху в цьому разі зводять до інтегрування системи трьох диференціальних рівнянь другого порядку (1.6), в яких невідомими функціями є координати x, y, z, а аргументом є час t.

Дано: сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,…, $\vec{F}_n$, прикладені до МТ масою m.

Потрібно визначити: закон руху МТ.
Розв'язання: через інтегрування системи диференціальних рівнянь руху у обраній системі відліку:

$$m\ddot{x} = \sum_k F_{kX}, \quad m\ddot{y} = \sum_k F_{kY}, \quad m\ddot{z} = \sum_k F_{kZ},$$
$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{1.10}$$

При інтегруванні 3-х диференціальних рівнянь 2-го порядку з'являються 6 довільних сталих C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, для визначення яких використовують **початкові умови руху**. Це зумовлено тим, що задання тільки сил, які діють на МТ, недостатньо для визначення конкретного закону руху. Для вибору з багатьох розв'язків того, яке відповідає поставленій задачі, необхідно задати початкові умови. Початковий стан руху МТ визначається її положенням та її швидкістю у початковий момент часу, тобто радіус-вектором $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ і швидкістю $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$.

В декартовій системі координат при $t = t_0$ (будь-який початковий момент часу, найчастіше приймають $t = 0$):

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \tag{1.11}$$

(початкове положення МТ)

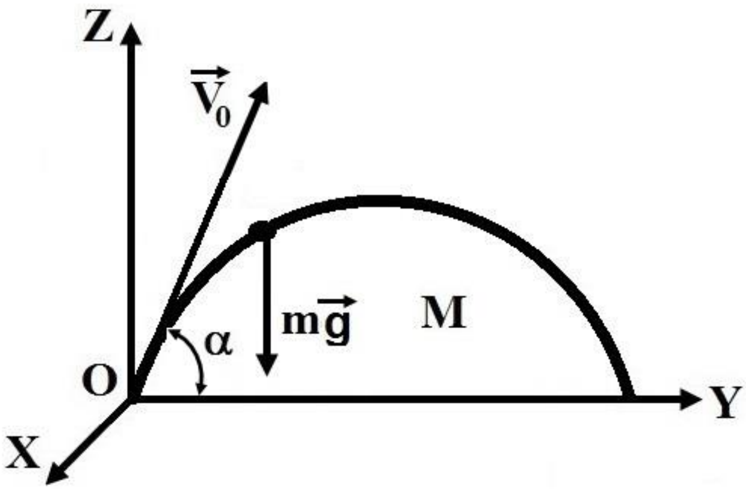
$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 \tag{1.12}$$

(початкова швидкість МТ)

Якщо рух відбувається у площині, «зникає» координата, вісь якої перпендикулярна до цієї площини. Для прямолінійного руху залишається тільки одна координата. Відповідно, зменшується кількість необхідних початкових умов.

У курсі вищої математики доводять, що за певних умов, які накладаються на праві частини рівнянь (1.10), розв'язок $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ є єдиним. Це означає, що за заданих початкових умовах і силах рух МТ повністю та єдиним чином визначено.

Приклад. Знайти рівняння руху тіла масою m, кинутого під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Поле тяжіння однорідне, опором повітря знехтувати, тіло прийняти за МТ.



Розв'язання. У процесі руху на тіло діє тільки сила тяжіння. Тому вісь Z декартової системи спрямуємо вгору, початок сумістимо з початковим положенням МТ та будемо вважати, що рух відбувається у площині OYZ.

Проекції діючої на МТ сили тяжіння на осі координат дорівнюють:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg$$

або після скорочення на масу m

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g. \tag{1.13}$$

Аналізуючи рух у площині ZOY, відкидаємо координату x, що дає:

$$\ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g.$$

Перший інтеграл дає:

$$\dot{y}(t) = C_1, \ \ \dot{z}(t) = -gt + C_2, \tag{1.14}$$

а другий інтеграл має вигляд:

$$y(t) = C_1 t + C_3, \quad z(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4. \tag{1.15}$$

Для визначення постійних інтегрування C_1, C_2, C_3, C_4 необхідно визначити початкові умови при $t = 0$:
для швидкості:

$$\dot{y}_0 = v_0 \cos\alpha, \quad \dot{z}_0 = v_0 \sin\alpha, \tag{1.16}$$

та для переміщення:

$$y_0 = 0, \quad z_0 = 0. \tag{1.17}$$

Підставляючи (1.16) в (1.14), (1.17) в (1.15), маємо:

$$C_1 = v_0 \cos\alpha, \quad C_2 = v_0 \sin\alpha, \quad C_3 = 0, \; C_4 = 0.$$

Підставляючи ці значення в загальний розв'язок (1.15), отримуємо рівняння руху МТ, кинутої під кутом до горизонту:

$$y(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t, \qquad z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t.$$

Для визначення траєкторії руху можна виразити час $t = \dfrac{y}{v_0 \cos\alpha}$,

та, підставляючи у вираз для z, остаточно отримати:

$$z = y\mathrm{tg}\alpha - y^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Траєкторією МТ є парабола.

Контрольні питання

1. Що вивчає динаміка?
2. В яких системах відліку виконуються перший та другий закони динаміки?
3. Назвіть основні фізичні величини, які використовуються в динаміці.
4. Скільки існує форм рівнянь руху матеріальної точки?
5. Яким чином розв'язується перша основна задача динаміки?
6. В чому полягає фізична суть довільних сталих при інтегруванні оберненої задачі динаміки?

Глава 2. Прямолінійні коливання матеріальної точки

Серед різноманітних сил, які діють на МТ, особливе місце займають:

1) **відновлювальні** сили, тобто сили, які намагаються повернути МТ у положення рівноваги;

2) сили **опору**, які залежні від швидкості руху;

3) **збурювальні** сили, які є функціями часу.

У поточній главі буде показано систематичний аналіз усіх варіантів комбінацій зазначених сил у випадку прямолінійного руху МТ, що вимагає визначення закону руху МТ на основі другого закону Ньютона. За наявності діючих сил можна відокремити наступні випадки:

1) відновлювальна сила (діюча), вільні коливання (вид коливань);
2) відновлювальна сила, сила опору (діючі сили), вільні коливання за наявності в'язкого тертя (вид коливань);
3) відновлювальна сила, збурювальна сила (діючі сили), вимушені коливання (вид коливань);
4) відновлювальна сила, сила опору, збурювальна сила (діючі сили), вимушені коливання за наявності в'язкого тертя (вид коливань).

Найбільш простими є випадки, коли відновлювальна сила пропорційна відхиленню МТ від положення рівноваги, а сила опору пропорційна швидкості МТ у першому степені. За цих спрощень диференціальні рівняння руху **є лінійними**, відповідно, і коливання також називаються **лінійними**.

Більш складні випадки залежностей сил від координати, часу та швидкості розглядаються у спеціальному курсі «Теорія коливань», в якому розглядають різні варіанти руху МТ з урахуванням опору та під дією прикладених до точки сил.

2.1. Вільні коливання матеріальної точки

Приймаємо прямолінійну траєкторію руху точки M за вісь X і помістимо початок координат O в положення, в якому точка M мала б знаходитися у стані спокою. Якщо точка M виведена зі стану спокою, то на неї за віссю X діє тільки відновлювальна сила (сила пружності) $\vec{F}_{\text{пр}}$ (рис. 2.1).

Якщо в деякий момент часу t точка M має координату x, то модуль відновлювальної сили дорівнює:

$$\vec{F}_{\text{пр}} = c \cdot OM = c|x|,$$

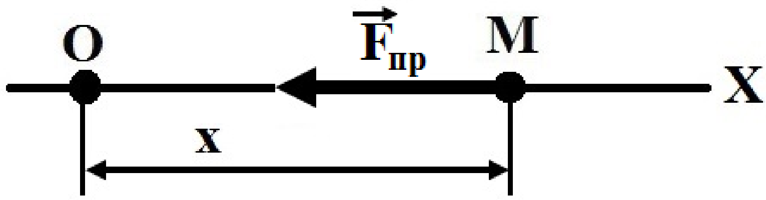


Рисунок 2.1.

де c – коефіцієнт жорсткості пружини, розмірність Н/м, чисельно рівний силі пружності її при деформації, яка дорівнює одиниці.

Через те, що відновлювальна сила в довільному положенні спрямована до точки O, то її проекція на вісь X завжди має знак, протилежний координаті x:

$$F_{\text{пр}X} = -cx. \qquad (2.1)$$

Згідно з (1.6) складемо диференціальне рівняння прямолінійного руху точки M під дією відновлювальної сили $\vec{F}_{\text{пр}}$:

$$m\ddot{x} = \sum X_i = F_{\text{пр}X}.$$

Використовуючи вираз (2.1):

$$m\ddot{x} = -cx \qquad \text{або} \qquad \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Позначимо $\dfrac{c}{m} = k^2$, тоді:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \qquad (2.2)$$

Рівняння (2.2) називають **диференціальним рівнянням вільних коливань матеріальної точки**.

Для інтегрування цього однорідного лінійного рівняння з постійними коефіцієнтами складемо характеристичне рівняння, уводячи розв'язок у вигляді $x = e^{kz}$ і знайдемо його корені:

$$z^2 + k^2 = 0.$$

$$z_1 = +ik \quad \text{і} \quad z_2 = -ik. \tag{2.3}$$

Корені є уявними та різнознаковими. Загальний розв'язок рівняння (2.2) має вигляд:

$$x = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt). \tag{2.4}$$

Для визначення постійних C_1 і C_2 знайдемо рівняння, що визначає швидкість точки, продиференціювавши рівняння (2.4):

$$\dot{x} = -kC_1 \sin(kt) + kC_2 \cos(kt). \tag{2.5}$$

Нехай у початковий момент часу $t = 0$ точка має координату x_0 і проекцію швидкості на вісь X $\dot{x}_0$. Тоді, підставивши початкові умови в рівняння (2.4) і (2.5), знайдемо:

$$C_1 = x_0, \quad \dot{x}_0 = kC_2,$$

звідки $\frac{\dot{x}_0}{k} = C_2$. Підставляючи значення C_1 і C_2 в рівняння (2.5), отримуємо рівняння руху точки M:

$$x = x_0 \cos(kt) + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin(kt). \tag{2.6}$$

Рівнянню (2.6) можна надати іншого вигляду, уводячи замість C_1 і C_2 дві нові змінні a і β, поклавши:

$$C_1 = a \cdot \sin\beta; \quad C_2 = a \cdot \cos\beta.$$

Підставляючи ці вирази у рівняння (2.5), отримуємо:

$$x = a \cdot \sin(kt + \beta). \tag{2.7}$$

Рівняння (2.7) є рівнянням гармонійного коливального руху точки, тобто вільні коливання МТ під дією лінійної відновлювальної сили є гармонійними коливаннями, графік яких показано на рис 2.2.

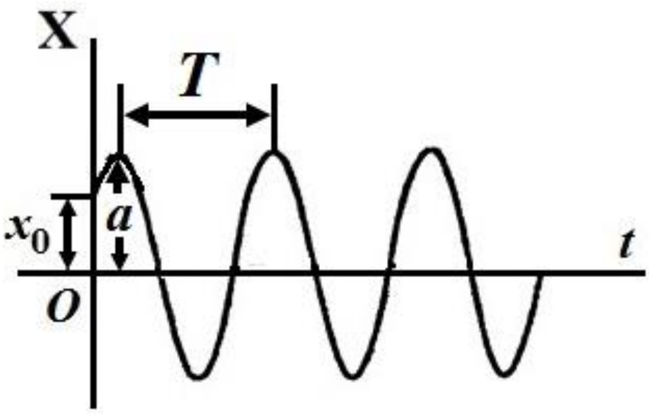


Рисунок 2.2.

Амплітуда a і початкова фаза β вільних коливань МТ як сталі інтегрування визначаються за початковими умовами руху. Частота коливань k і період вільних коливань T, враховуючи $\frac{c}{m} = k^2$, визначаються за відповідними формулами:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \tag{2.8}$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \tag{2.9}$$

2.2. Згасні коливання матеріальної точки

В реальних умова МТ, яка здійснює коливання, відчуває спротив руху через тертя, опір середовища тощо. Це означає, що на неї діє сила опору, завжди спрямовано проти напряму руху (рис. 2.3).

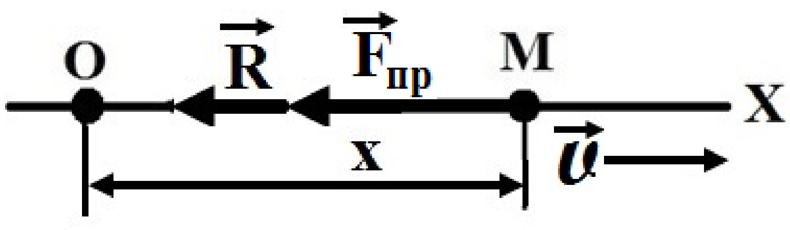


Рисунок 2.3.

Модуль цієї сили залежить від природи цієї сили, наприклад, опір повітря за відносно малих швидкостей руху тіл (приблизно $v \leq 1{,}2$ м/с) вважають пропорційним першому степеню швидкості, за збільшення швидкості опір приймають пропорційним квадрату швидкості рухомого тіла.

Розглянемо коливання МТ під дією лінійної відновлювальної сили $\vec{F}_{\text{пр}}$ і сили опору руху $\vec{R}$, яка пропорційна швидкості МТ. Приймаємо щодо сили $\vec{F}_{\text{пр}}$ міркування (2.1) з аналізу вільних коливань МТ, а модуль сили $\vec{R}$ і її вигляд представимо відповідно:

$$R = \alpha v \quad \text{і} \quad \vec{R} = -\alpha\vec{v},$$

де α – коефіцієнт опору, має розмірність Н/(м/с).

Проекція сили $\vec{R}$ на вісь X записується у вигляді:

$$R_X = -\alpha v_X = -\alpha\dot{x}. \tag{2.10}$$

Згідно з (1.6) складемо диференціальне рівняння прямолінійного руху точки M під дією ї сил $\vec{F}_{\text{пр}}$ і $\vec{R}$:

$$m\ddot{x} = \sum X_i = F_{\text{пр}X} + R_X = -cx - \alpha\dot{x}$$

або після переносу доданків з лівої частини виразу до правої і скорочення на масу:

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Позначимо $\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{\alpha}{m} = 2n$, тоді:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0. \tag{2.11}$$

Рівняння (2.11) називають **диференціальним рівнянням руху матеріальної точки під дією відновлювальної сили та сили опору, пропорційній швидкості точки.**

Для інтегрування цього однорідного лінійного рівняння з постійними коефіцієнтами складемо характеристичне рівняння, уводячи розв’язок у вигляді $x = e^{kz}$ і знайдемо його корені:

$$z^2 + 2nz + k^2 = 0.$$

$$z_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2} \quad \text{і} \quad z_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}. \qquad (2.12)$$

Зважаючи на наявність квадратного кореня $\sqrt{n^2 - k^2}$ у виразах для z_1 і z_2, необхідно розглянути три випадки залежно від співвідношення між величинами n і k.

1. За $n < k$ корені z_1 і z_2 (2.12) можна представити у вигляді:

$$z_1 = -n + i\sqrt{k^2 - n^2} \quad \text{і} \quad z_2 = -n - i\sqrt{k^2 - n^2}.$$

Загальний розв'язок рівняння (2.11) має вигляд:

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}t\right). \qquad (2.13)$$

Рівнянню (2.13) можна надати іншого вигляду, уводячи замість C_1 і C_2 дві нові змінні a і β, поклавши:

$$C_1 = a \cdot \sin\beta; \quad C_2 = a \cdot \cos\beta.$$

Підставляючи ці вирази у рівняння (2.13), отримуємо:

$$x = a \cdot e^{-nt} \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta\right). \qquad (2.14)$$

Через наявність у (2.14) множника функції $\sin$ робимо висновок про коливальний характер руху МТ, але наявність множника e^{-nt} вказує на зменшення амплітуди з часом. Коливання такого виду називають **згасними** (рис. 2.4). Графік зазначених коливань розташований між двома симетричними відносно осі часу кривими.

Амплітуда a і початкова фаза β вільних коливань МТ як сталі інтегрування визначаються за початковими умовами руху. Частота згасних коливань k^* і період згасних коливань T^* визначаються за відповідними формулами:

$$k^* = \sqrt{k^2 - n^2}, \qquad (2.15)$$

$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}\,. \tag{2.16}$$

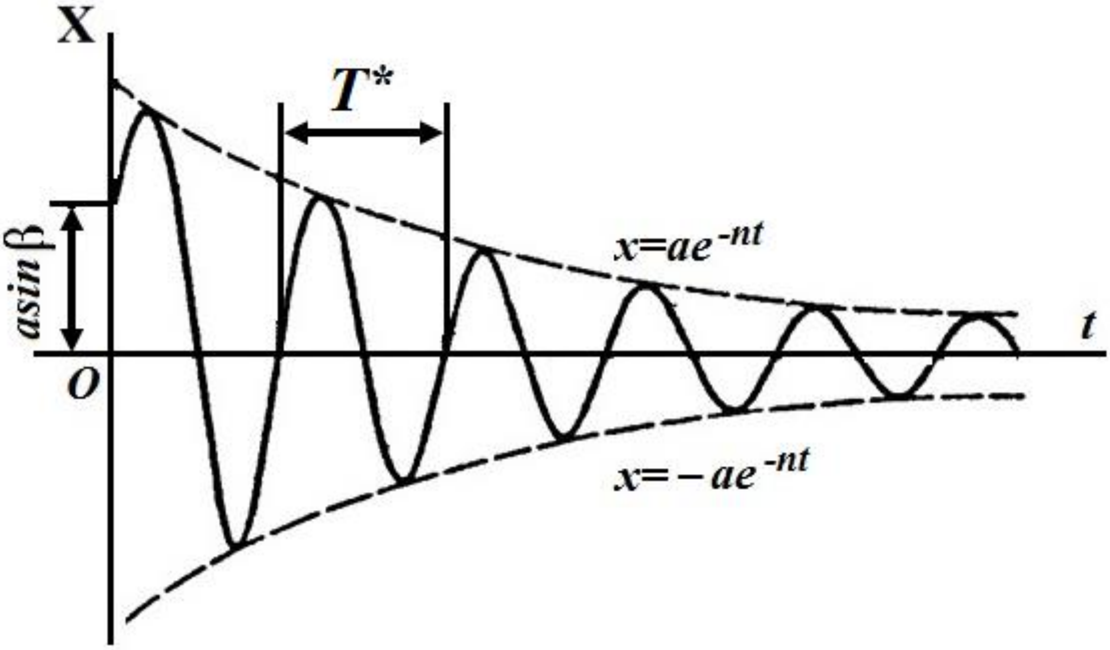


Рисунок 2.4.

В подальшому коефіцієнт n називають **коефіцієнтом згаснення**. За відносно невеликого значення з (2.16) бачимо, що його вплив на зміну періоду коливань незначний. За реальних значень у більшості випадків (коли $n \ll k$) можна вважати періоди вільних коливань та згасних коливань приблизно однаковими $T \approx T^*$. Основний вплив опору на вільні коливання МТ виражається у зменшенні амплітуди коливань з часом, тобто у згасненні коливань.

Порівнюючи послідовно амплітуди коливань, визначаємо постійність відношення двох сусідніх амплітуд:

$$\eta = e^{-nT^*}. \tag{2.17}$$

Величина η називається **декрементом коливань**, а модуль натурального логарифму цієї величини

$$\Lambda = nT^* \tag{2.18}$$

називається **логарифмічним декрементом коливань**. Іноді розглядають не сусідні амплітуди, які розташовані на часовому інтервалі

T^*, а дві послідовні амплітуди на інтервалі напівперіоду $T^*/2$, що призводить до відповідних змін у виразах (2.17) і (2.18).

2. За $n > k$ корені z_1 і z_2 (2.12) є дійсними, від'ємними та різними:

$$z_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2} \quad \text{і} \quad z_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Загальний розв'язок рівняння (2.11) має вигляд:

$$x = e^{-nt}\left(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}t}\right). \qquad (2.19)$$

Уводячи замість сталих інтегрування C_1 і C_2 нові змінні B_1 і B_2

$$C_1 = \frac{B_1+B_2}{2} \quad \text{і} \quad C_2 = \frac{B_1-B_2}{2},$$

після перетворень і застосування виразів для гіперболічних функцій (синуса sh та косинуса ch) отримуємо рівняння (2.19) у вигляді:

$$x = e^{-nt}\left[B_1 \mathrm{ch}\left(\sqrt{n^2 - k^2}t\right) + B_2 \mathrm{sh}\left(\sqrt{n^2 - k^2}t\right)\right].$$

Заміна $B_1 = a \cdot \mathrm{sh}\beta$ і $B_2 = a \cdot \mathrm{ch}\beta$ дозволяє отримати рівняння руху у вигляді:

$$x = a \cdot e^{-nt}\mathrm{sh}\left(\sqrt{n^2 - k^2}t + \beta\right). \qquad (2.20)$$

З точки зору коливань зазначений випадок не має інтересу, тому рух МТ не є коливальним через те, що гіперболічний синус не є періодичною функцією. Рух МТ називають **аперіодичним**.

3. За $n = k$ корені z_1 і z_2 (2.12) є дійсними, від'ємними та однаковими, тобто реалізовано випадок кратних коренів:

$$z_{1,2} = -n, \qquad (2.21)$$

через те загальний розв'язок рівняння (2.11) має вигляд:

$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2). \tag{2.22}$$

Для знаходження сталих C_1 і C_2 потрібно продиференціювати (2.22):

$$\dot{x} = -n \cdot e^{-nt}(C_1 t + C_2) + e^{-nt} C_1. \tag{2.23}$$

За умови рівності у початковий момент часу $t = 0$ відповідно координати x_0 та проекції швидкості на вісь X $\dot{x}_0$ підставимо їх у (2.20) та (2.23). Після нескладних математичних перетворень остаточно запишемо:

$$x = e^{-nt}[x_0 + (\dot{x}_0 + n x_0)t]. \tag{2.24}$$

Рух точки, який визначається (2.24), також є аперіодичним.

Слід зазначити, що в реальності сила опору переважно є функцією, нелінійно залежною від швидкості, і яка може бути описаною різними аналітичними виразами. За умов пропорційності сили опору деякому степеню швидкості $R = \alpha v^{\gamma}$ і $\vec{R} = -\alpha \vec{v}^{\gamma}$ ($\gamma \neq 1$ – показник степеню) і приведення рівняння руху МТ до вигляду:

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x}^{\gamma} + \frac{c}{m}x = 0,$$

його точний розв’язок є достатньо складною задачею, а в елементарних функціях є просто неможливим.

2.3. Вимушені коливання матеріальної точки

Вимушені коливання здійснює МТ, на яку поряд з відновлювальною силою діє періодично змінна сила, яка називається **збурювальною силою**. Важливим є випадок, коли зазначена сила (за позначення $\vec{Q}$) змінюється за гармонійним законом, тобто проекція її на вісь X має вигляд:

$$Q_x = H\sin(pt + \delta), \tag{2.25}$$

де для збурювальної сили введено наступні позначення: H – максимальний модуль, або амплітуда; p – частота її зміни; $pt + \delta$ – фаза зміни; δ – початкова фаза зміни.

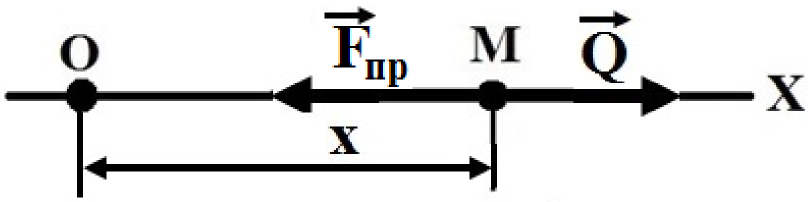


Рисунок 2.5.

Розглянемо прямолінійний рух МТ під дією відновлювальної сили $\vec{F}_{пр}$ та збурювальної сили $\vec{Q}$ (рис. 2.5).

Відповідні проекції сил на вісь X мають вигляд:

$$F_{прX} = -cx \quad \text{і} \quad Q_X = H\sin(pt + \delta). \tag{2.26}$$

Використовуючи вираз (2.1):

$$m\ddot{x} = -cx + H\sin(pt + \delta)$$

або

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m}\sin(pt + \delta).$$

Позначимо $\dfrac{c}{m} = k^2$, $\dfrac{H}{m} = h$, тоді:

$$\ddot{x} + k^2x = h \cdot \sin(pt + \delta). \tag{2.27}$$

Рівняння (2.27) називають **диференціальним рівнянням вимушених коливань матеріальної точки**.

Як відомо з теорії диференціальних рівнянь, загальний розв’язок рівняння (2.27) складається із загального розв’язка x^* однорідного рівняння $\ddot{x} + k^2x = 0$ та частинного розв’язка x^{**}:

$$x = x^* + x^{**}.$$

Щодо x^*, у розділі 2.1 було отримано розв’язок (2.4), тому:

$$x^* = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt).$$

Згідно з виглядом функції $h \cdot \sin(pt + \delta)$ шукаємо частинний розв'язок рівняння (2.27) також у вигляді:

$$x^{**} = A\sin(pt + \delta). \tag{2.28}$$

Після підстановки (2.28) у (2.27) та приведення коефіцієнтів знаходимо частинний розв'язок:

$$x^{**} = \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta). \tag{2.29}$$

З урахуванням (2.7) остаточно маємо:

$$x = a \cdot \sin(kt + \beta) + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta). \tag{2.30}$$

Таким чином, **за одночасною дією відновлювальної і збурювальної сил МТ здійснює складний коливальний рух, який є накладенням вільних і вимушених коливань точки**.

Аналізуючи амплітуду вимушених коливань $A = \frac{h}{k^2 - p^2}$, визначимо, що при зміні частоти від $p = 0$ до $p = k$ зменшення знаменника приводить до збільшення значення амплітуди. При подальшому збільшенні частоти p до умовно нескінченності амплітуда зменшується до нуля. Окремо для випадку $p = k$ амплітуда збільшується до нескінченності і має назву **явище резонансу**. В цьому випадку пошук розв'язку у вигляді (2.29) є неприйнятним, частинний розв'язок має бути знайденим у іншому вигляді.

Вище було розглянуто випадок, коли збурювальна сила змінюється за гармонійним законом. Вважаємо за доцільно розібрати випадки, коли збурювальна сила є постійною або залежною від часу, наприклад, лінійно.

1) Збурювальна сила $\vec{Q} = \vec{F} = const$ і проекція $Q_X = F = const$. Так само, загальний розв'язок складається з двох розв'язків, перший з яких x^* було отримано у вигляді (2.4). Другий розв'язок x^{**} шукаємо,

виходячи із вигляду функції F (за правилами інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь) у вигляді константи $x^{**} = C$ з підстановкою у рівняння руху:

$$\ddot{x}^{**} + k^2 x^{**} = F \quad \text{або} \quad k^2 C = F,$$

звідки

$$C = \frac{F}{k^2} = x^{**}. \tag{2.31}$$

З урахуванням (2.7) остаточно маємо:

$$x = a \cdot \sin(kt + \beta) + \frac{F}{k^2}. \tag{2.32}$$

З виразу (2.32) слідує, що постійна збурювальна сила ніяк не впливає на гармонійні коливання у формі вільних коливань МТ, її наявність тільки зміщує вісь, відносно якої здійснюється коливальний рух.

2) Збурювальна сила $\vec{Q} = \vec{F} = Ft$ і проекція $Q_X = Ft$, $F = const.$

Так само, загальний розв’язок складається з двох розв’язків, перший з яких x^* було отримано у вигляді (2.4). Другий розв’язок x^{**} шукаємо, виходячи із вигляду функції Ft у вигляді функції $x^{**} = Ct$ з підстановкою у рівняння руху:

$$\ddot{x}^{**} + k^2 x^{**} = Ft \quad \text{або} \quad k^2 Ct = Ft,$$

звідки

$$C = \frac{F}{k^2} \quad \text{і} \quad x^{**} = \frac{F}{k^2} t. \tag{2.33}$$

З урахуванням (2.7) остаточно маємо:

$$x = a \cdot \sin(kt + \beta) + \frac{F}{k^2} t. \tag{2.34}$$

З виразу (2.34) слідує, що постійна збурювальна сила ніяк не впливає на гармонійні коливання у формі вільних коливань МТ, за її наявності тільки відбувається поступальний рух осі, відносно якої здійснюється коливальний рух.

Очевидно, подібні розв’язки можна отримати для інших залежностей збурювальної сили від часу, зокрема, нелінійних, однак до внеску у коливальний рух приводить тільки нестаціонарна або змінна за гармонійним законом сила $\vec{Q}$.

2.4. Вимушені коливання матеріальної точки з урахуванням опору руху

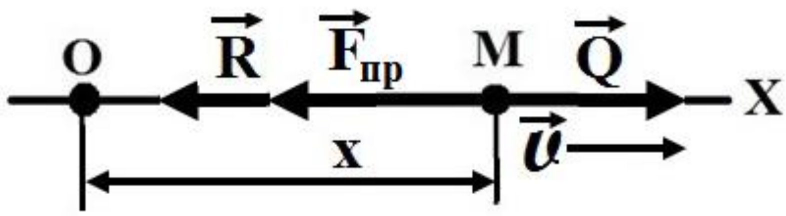


Рисунок 2.6.

Розглянемо вплив опору руху на вимушені коливання МТ, приймаючи модуль сили опору пропорційним першому степеню швидкості точки.

Розглянемо коливання МТ під дією лінійної відновлювальної сили $\vec{F}_{\text{пр}}$, збурювальної сили $\vec{Q}$ і сили опору руху $\vec{R} = -\alpha\vec{v}$, яка пропорційна швидкості МТ (рис. 2.6). Користуючись отриманими у попередніх розділах виразами (2.1), (2.10), (2.25) для проекцій зазначених сил на вісь X, запишемо диференціальне рівняння руху МТ під дією вказаних сил:

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} + H\sin(pt + \delta)$$

або

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m}\sin(pt + \delta).$$

Уводячи позначення $\dfrac{c}{m} = k^2$, $\dfrac{\alpha}{m} = 2n$, $\dfrac{H}{m} = h$, диференціальне рівняння руху МТ набуває вигляду:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \cdot \sin(pt + \delta). \qquad (2.35)$$

Рівняння (2.35) називають **диференціальним рівнянням вимушених коливань матеріальної точки за наявності опору руху, пропорційного швидкості.**

Загальний розв'язок рівняння (2.35) складається із загального розв'язку x^* однорідного рівняння (2.11) та частинного розв'язку x^{**}:

$$x = x^* + x^{**}.$$

Загальний розв'язок x^* залежно від співвідношення між величинами n і k може мати вигляд (2.14), (2.20) або (2.24), а частинний розв'язок має вигляд:

$$x^{**} = A_c \sin(pt + \delta - \varepsilon). \qquad (2.36)$$

Сталі A_c і ε мають бути визначені через підстановку функції x^{**} та її похідних у рівняння (2.36). Опускаючи перетворення, запишемо:

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}; \qquad (2.37)$$

$$\text{tg}\varepsilon = \frac{2np}{k^2-p^2}. \qquad (2.38)$$

Підставляючи (2.37) у (2.36) та приймаючи, що кут ε визначено, отримуємо частинний розв'язок рівняння (2.35) у вигляді:

$$x^{**} = \frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}} \sin(pt + \delta - \varepsilon). \qquad (2.39)$$

Загальний розв'язок рівняння (2.35) залежно від співвідношення між величинами n і k у вигляді:

1) за $n < k$ з урахуванням (2.14):

$$x = a \cdot e^{-nt} \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta\right) +$$

$$+ \frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}} \sin(pt + \delta - \varepsilon) \qquad (2.40)$$

2) за $n = k$ з урахуванням (2.22):

$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2) + \frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}} \sin(pt + \delta - \varepsilon) \quad (2.41)$$

3) за $n > k$ з урахуванням (2.20):

$$x = a \cdot e^{-nt} \operatorname{sh}\left(\sqrt{n^2 - k^2} t + \beta\right) + $$
$$+ \frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}} \sin(pt + \delta - \varepsilon) \quad (2.42)$$

Величини a і β, а також C_1 і C_2, є сталими інтегрування, визначаються за початковими умовами руху.

Аналізуючи вирази (2.40)-(2.42), можна сказати, що за періодичний рух відповідає другий доданок у виразах, натомість, перший відповідає через множник e^{-nt} за достатньо швидке згаснення рухів.

У виразі (2.37) відсутність часу означає незмінність амплітуди, що свідчить про гармонійний характер коливань. Це відрізняє вимушені коливання за наявності опору від вільних коливань за наявності опору, де спостерігається згаснення навіть за відносно невеликого опору.

Частота p і період $\tau = \frac{2\pi}{p}$ вимушених коливань МТ (позначення періоду $T = \frac{2\pi}{k}$ залишаємо для вільних коливань) за наявності опору дорівнюють частоті та періоду збурювальної сили, тобто опір не впливає на частоту і період вимушених коливань.

Фаза збурювальної сили $(pt + \delta)$ випереджає фазу вимушених коливань $(pt + \delta - \varepsilon)$ на величину ε, яка зветься **зсувом фази** і визначається формулою (2.38). Комбінуючи різні за величинами співвідношення між параметрами n, p, і k, можна зробити аналіз впливу кожного з них на величину ε.

Аналіз виразу (2.37) показує, що наявність параметру n у знаменнику впливає на величину амплітуди – зменшення за величиною n приводить до збільшення A_c і навпаки. Звичайно, навіть за збігу частот $p = k$ ніякого збільшення амплітуди до нескінченності не буде. Взагалі, узяття похідної від функції A_c за змінної p дозволяє визначити максимальне значення A_c залежно від величини n.

Графік залежності амплітуди A_c від параметру p/k для різних значень n називають **амплітудно-частотною характеристикою**, а графік залежності зсуву фази ε від параметру p/k для різних значень n називають **фазо-частотною характеристикою** вимушених коливань.

Таким чином, **вплив опору на вимушені коливання МТ виражається у зсуві фази коливань відносно фази збурювальної сили та у зменшенні амплітуди коливань за збільшення опору**.

Контрольні питання

1. Які сили впливають на коливання матеріальної точки?
2. Що таке лінійні коливання?
3. Під дією якої сили відбуваються вільні коливання матеріальної точки?
4. Від яких чинників залежать частота, період, амплітуда, початкова фаза вільних коливань матеріальної точки?
5. Що таке згасні коливання матеріальної точки?
6. В чому відмінність періодичного та аперіодичного руху матеріальної точки?
7. Що таке вимушені коливання матеріальної точки?
8. Дайте визначення явища резонансу.

Глава 3. Основні теореми динаміки матеріальної точки

У теоретичній механіці розроблено методи, які дозволяють обійти основні труднощі, що виникають при використанні диференціальних рівнянь руху механічної системи. З цією метою введені деякі векторні та скалярні величини, що характеризують рух усієї системи (так звані міри руху). До них належать:

- вектор кількості руху;
- вектор моменту кількості руху;
- кінетична енергія;
- сила інерції та головний вектор сил інерції;
- момент сил інерції та головний момент сил інерції.

Загальні теореми динаміки є перетворенням диференціальних рівнянь руху, причому в різних теоремах виділені та пов'язані між собою ті чи інші характеристики руху. В результаті отримуємо зручні залежності, які використовуються для розв'язання задач динаміки. Як завжди, почнемо з визначення наведених величин у прив'язці до матеріальної точки.

3.1. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки. Імпульс сили

Основними характеристиками руху МТ та механічної системи є кількість руху та кінетична енергія. Означення кількості руху МТ як міри механічного руху було наведено у Главі 1 при формулюванні другого закону Ньютона, який є основним рівнянням динаміки і за умови $m = const$:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{або} \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}. \tag{3.1}$$

звідки

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt. \tag{3.2}$$

Кількість руху матеріальної точки – вектор $\vec{q} = m\vec{v}$, який дорівнює добутку маси МТ на її швидкість. Вектор $\vec{q}$ спрямований так само, як і вектор швидкості точки $\vec{v}$, тобто вздовж дотичної до траєкторії руху точки.

Одиниця вимірювання кількості руху визначається з наведеної формули. Припускаючи в цьому співвідношенні m=1 кг, v=1 м/с, одержимо: 1 одиниця=(1 кг)•(1 м/с)= 1 кг•м/с. Розмір одиниці дорівнює (1 кг)• (1 м)**:**(1 с). Розмірність одиниці кількості руху

$$[q] = [m] \cdot [v] = LMT^{-1}.$$

Для характеристики дії сили на тіло за деякий проміжок часу використовують поняття **імпульсу сили**. Спочатку розглянемо елементарний імпульс сили, тобто імпульс сили за нескінченно малий проміжок часу dt.

Елементарний імпульс сили – добуток вектора сили на елементарний проміжок часу $\boldsymbol{d\vec{S} = \vec{F}dt}$, він спрямований в той же бік, що і вектор сили.

Вираз (3.2) є математичним записом теореми про зміну кількості руху МТ у диференціальній формі:
елементарна зміна кількості руху МТ дорівнює елементарному імпульсу сили, прикладеному до цієї точки.

Імпульсом сили $\boldsymbol{\vec{S}}$ за скінчений проміжок часу називається інтеграл за часом від елементарного імпульсу, взятий в границях вказаного проміжку часу

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt. \qquad (3.3)$$

Якщо сила за модулем і напрямом є сталою, імпульс сили дорівнює добутку вектора сили на величину проміжку часу

$$\vec{S} = \vec{F}(t_2 - t_1), \quad \vec{F} = const. \qquad (3.4)$$

Якщо сила задана своїми проекціями F_X, F_Y, F_Z на відповідні осі координат, то проекції імпульсу сили можна знайти за формулами:

$$S_X = \int_{t_1}^{t_2} F_X dt, \quad S_Y = \int_{t_1}^{t_2} F_Y dt, \quad S_Z = \int_{t_1}^{t_2} F_Z dt. \qquad (3.5)$$

Використовуючи проекції вектора імпульсу сили на осі, можна побудувати вектор $\vec{S}$, знайти його модуль, а також кути з осями координат.

Одиниця вимірювання імпульсу сили визначається з формули (3.4). Припускаючи в цьому співвідношенні F=1 Н, t=1 с, одержимо: 1 одиниця=(1 Н)•(1 с)=(1 кг)•(1 м/с^2)•(1 с)=1 кг•м=1 Н•с. Розмір одиниці дорівнює (1 кг)•(1 м)**:**(1 с). Розмірність одиниці імпульсу сили

$$[S] = [F] \cdot [t] = LMT^{-1}.$$

Отже, розмірності кількості руху та імпульсу сили збігаються.

Запишемо основне рівняння руху МТ за умов прикладення до неї системи сил $\vec{F}_k$, $k = 1, \dots, n$:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \quad \text{або} \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k. \qquad (3.6)$$

В цій формі рівняння виражає теорему про зміну кількості руху в диференціальній формі:

похідна за часом від вектору кількості руху дорівнює геометричній сумі діючих на точку сил.

Помножимо обидві частини (3.6) на dt:

$$d(m\vec{v}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \, dt = \sum_{k=1}^{n} d\vec{S}_k. \qquad (3.7)$$

Це друга форма теореми:

диференціал кількості руху МТ дорівнює геометричній сумі елементарних імпульсів сил, діючих на точку.

Нехай точка масою m рухається під дією сили $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$ та має в момент часу t_1 швидкість $\vec{v}_1$, а в момент часу t_2 швидкість $\vec{v}_2$. Тоді після інтегрування в інтервалі часу від t_1 до t_2 одержимо теорему про зміну кількості руху МТ в інтегральній формі:

зміна кількості руху МТ за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів сил, діючих на точку за той же проміжок часу:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{q}_2 - \vec{q}_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k \, dt = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k. \quad (3.8)$$

де $\vec{q}_1$ відповідає початковому моменту часу, а $\vec{q}_2$ кінцевому. В проекціях на осі координат теорема має вигляд:

$$m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_X(\vec{F}_k),$$

$$m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_Y(\vec{F}_k),$$

$$m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 = \sum_{k=1}^{n} S_Z(\vec{F}_k).$$

Зауважимо, що вираз (3.8) є наслідком другого закону Ньютона, який, у цьому разі, можна трактувати як теорему про зміну кількості руху в диференціальній формі. Проте, завжди слід пам'ятати, що другий закон Ньютона є первинним і на ньому ґрунтуються доведення всіх теорем динаміки МТ в інерціальній системі відліку.

3.2. Поняття моменту кількості руху матеріальної точки

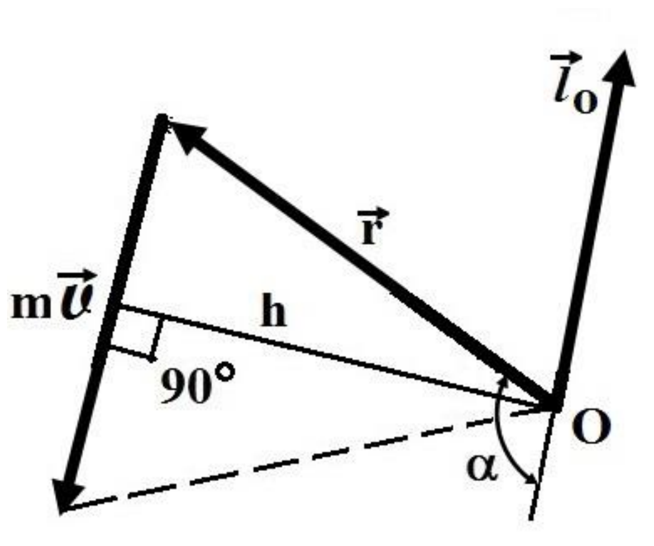


Рисунок 3.1.

Іноді при вивченні руху МТ замість зміни кількості руху $m\vec{v}$ виникає необхідність розглядати зміну моменту кількості руху.

Використовуючи вираз для кількості руху, помножимо його на радіус-вектор $\vec{r}(t)$, отримавши векторний добуток (позначається символом ×)

$$\vec{r} \times m\vec{v},$$

який називається **момент кількості руху відносно нерухомої точки** – **вектор $\vec{l}_O$, величина і напрям якого визначається векторним добутком**

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (3.9)$$

Вектор $m\vec{v}$ вважають прикладеним до рухомої точки (рис. 3.1). Модуль цього вектору дорівнює:

$$l_O = mvr \sin \alpha = mvh, \quad (3.10)$$

де h – плече, довжина перпендикуляра, опущеного із центра на напрямок вектора $m\vec{v}$.

Одиниця вимірювання моменту кількості руху визначається з формули (3.10). Припускаючи в цьому співвідношенні m=1 кг, v=1 м/с, h=1 м, одержимо: 1 одиниця=(1 кг)•(1 м/с)•(1 м)= 1 кг•м^2/с. Розмір одиниці дорівнює (1 кг)•(1 м^2)**:**(1 с). Розмірність одиниці кількості руху

$$[l_O] = [m] \cdot [v] \cdot [h] = L^2 M T^{-1}.$$

Неважко відстежити повну аналогію між поняттям, як відомо із статики, моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O:

$$\overrightarrow{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (3.11)$$

та моментом кількості руху в динаміці:

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

3.3. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки

Знайдемо для МТ, що рухається під дією сили $\vec{F}$, залежність між моментами векторів $m\vec{v}$ та $\vec{F}$ відносно довільного центру. Використовуючи основне рівняння динаміки (1.2), отримуємо:

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

З урахуванням $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, перетворимо ліву частину рівняння наступним чином:

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}. \qquad (3.12)$$

Але $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ і векторний добуток паралельних векторів $\vec{v} \times m\vec{v}$ дорівнює нулю. Тому остаточно:

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (3.13)$$

З урахуванням (3.11) та (3.12):

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{M}_O. \qquad (3.14)$$

Це рівняння виражає **теорему про зміну моменту кількості руху МТ**: **перша похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно будь-якого центру дорівнює моменту сили, прикладеної до точки, відносно того ж центру.**

Векторне рівняння (3.14) еквівалентне трьом скалярним рівнянням. Приймаючи точку O за початок системи координат $OXYZ$ і записуючи векторні добутки у вигляді визначників третього порядку, отримуємо:

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_X & F_Y & F_Z \end{vmatrix},$$

Звідки

$$m\frac{d}{dt}(y\dot{z} - z\dot{y}) = yF_Z - zF_Y, \quad \frac{dl_{OX}}{dt} = M_{OX},$$

$$m\frac{d}{dt}(z\dot{x} - x\dot{z}) = zF_X - xF_Z, \quad \frac{dl_{OY}}{dt} = M_{OY},$$

$$m\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = xF_Y - yF_X, \quad \frac{dl_{OZ}}{dt} = M_{OZ}.$$

Отриманий результат можна сформулювати наступним чином: **похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно будь-якої осі дорівнює моменту сили, прикладеної до точки, відносно тієї ж осі.**

3.4. Робота сили. Потужність

Для характеристики дії сили, що прикладена до твердого тіла, використовують поняття роботи сили. Робота сили характеризує ту дію сили, яка визначає зміну модуля швидкості рухомої точки.

Робота є однією з основних характеристик дії прикладеної сили до МТ. Позначається A (від нім. **Arbeit** – робота).

Розглянемо рух МТ під дією сили $\vec{F}$. Точка рухається з прискоренням, спрямованим за напрямом сили. Використовуючи натуральну форму опису руху точки, уведемо поняття елементарної роботи сили на нескінченно малому переміщенні ds.

Елементарною роботою dA сили $\vec{F}$ називається скалярна величина, яка дорівнює добутку проекції сили на дотичну та величини елементарного переміщення точки вздовж дотичної

$$dA = F_\tau ds. \qquad (3.15)$$

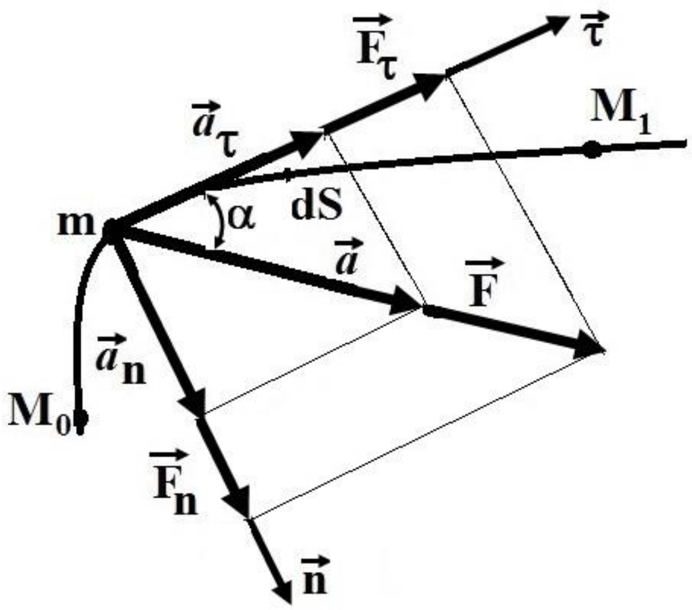


Рисунок 3.2.

Сила та прискорення розкладаються на нормальну (зумовлює зміну напряму руху) та дотичну (зумовлює зміну величини швидкості) складові, а саме $\vec{F}_n$, $\vec{F}_\tau$, $\vec{a}_n$, $\vec{a}_\tau$ (рис. 3.2).

Робота характеризує ту дію сили, якою визначається зміна модуля швидкості точки, що рухається.

Одиниця вимірювання роботи визначається з формули (3.15). Припускаючи в цьому співвідношенні F=1 Н, s=1 м, одержимо: 1 одиниця=(1 Н)•(1 м)= 1 Н•м= 1 кг•м/с^2•м= 1 кг•м^2/с^2. Ця величина має назву «джоуль» і позначається «Дж». Розмір одиниці дорівнює (1 кг)•(1 м^2)**:**(1 с^2). Розмірність одиниці роботи

$$[A] = [F] \cdot [s] = L^2 M T^{-2}.$$

Складова $\vec{F}_n$ змінює напрямок вектора швидкості $\vec{v}$, або, під час невільного руху, змінює тиск на в’язь. Оскільки $\vec{F}_\tau = \vec{F} \cos \alpha$

$$dA = F \cos \alpha \, ds.$$

Тобто елементарна робота сили дорівнює добутку модуля сили на елементарне переміщення та косинус кута між напрямом сили та напрямом переміщення. Робота є додатною (прискорює рух МТ), якщо кут α гострий, від’ємною (сповільнює рух МТ), якщо кут тупий, і дорівнює 0, якщо $\alpha = 90°$.

Знак роботи має такий зміст: робота додатна, коли дотична складова сили спрямована в бік руху, тобто коли сила прискорює рух; робота від’ємна, коли дотична складова сили спрямована в бік, протилежний руху, тобто сила сповільнює рух.

За координатного способу опису руху в декартовій системі координат проекції лежать на своїх осях, тому, проектуючи вектор сили $\vec{F}$ по осях, вздовж переміщень dx, dy, dz, отримуємо вираз для роботи сили на переміщенні ds:

$$dA = F_X dx + F_Y dy + F_Z dz. \qquad (3.16)$$

Роботою сили на довільному переміщенні $M_0 M_1$ називається інтеграл від елементарної роботи, визначений вздовж цієї траєкторії:

$$A(M_0 M_1) = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau ds,$$

або

$$A(M_0M_1) = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{M_0}^{M_1}(F_X dx + F_Y dy + F_Z dz). \qquad (3.17)$$

Для обчислення роботи сил, які залежать від часу або швидкості руху точки, необхідно знати закон її руху, тобто координати x, y, z як функції часу. Тоді всі змінні величини можна виразити через t й обчислити інтеграл (3.17).

Якщо сила залежить від s і відомий графік залежності F_τ від s, то роботу можна обчислити графічно. Нехай в положенні M_0 МТ знаходиться від початку відліку на відстані s_0 а в положенні M_1 – на відстані s_1. Тоді за (3.17), зважаючи на геометричний сенс інтегралу, робота визначається як площа, що знаходиться під функцією F_τ, з урахуванням масштабного коефіцієнту.

Потужність P (від лат. **Potestas**, англ. **Power**) характеризує роботу, яку виконує сила за одиницю часу, і в загальному випадку:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau v. \qquad (3.18)$$

Отже, робота дорівнює добутку дотичної складової сили на швидкість руху. Якщо робота виконується рівномірно (t – час, протягом якого виконується робота), потужність є постійною величиною:

$$P = \frac{A}{t}. \qquad (3.19)$$

Одиниця вимірювання потужності визначається з формули (3.19). Припускаючи в цьому співвідношенні A=1 Дж, t=1 с, одержимо: 1 одиниця=(1 Дж)/(1 с)= 1 Дж/с= 1 кг•м/с^2•м/с= 1 кг•м^2/с^3. Ця величина має назву «ватт» и позначається «Вт». Розмір одиниці дорівнює (1 кг)•(1 м^2)**:**(1 с^3). Розмірність одиниці потужності

$$[P] = [A]/[t] = L^2MT^{-3}.$$

В техніці застосовують більш крупну одиницю потужності 1 кВт=1000 Вт, в автомобілебудуванні досі застосовують позасистемну одиницю потужності «кінська сила», яка дорівнює 1 к.с.=735,499 Вт.

3.5. Теорема про зміну кінетичної енергії точки

Скалярною мірою руху МТ є **кінетична енергія** – половина добутку маси на квадрат її швидкості:

$$E_{\text{К}} = \frac{mv^2}{2}. \tag{3.20}$$

Як і робота, енергія вимірюється в джоулях. Позначається E (від лат. **Energeia** – дія, діяльний).

Нехай точка з масою m в початковий момент часу t_0 знаходиться в положенні M_0 і має швидкість v_0, а в момент часу t_1 в положенні M_1 має швидкість v_1. Запишемо основне рівняння руху МТ:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k. \tag{3.21}$$

Спроектуємо його на дотичну до траєкторії руху в точці:

$$ma_\tau = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}. \tag{3.22}$$

У цьому виразі дотичне прискорення дорівнює похідній за часом від модуля швидкості:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\,\frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Рівняння (3.22) можна переписати у вигляді:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau} ds = \sum_{k=1}^{n} dA_k. \tag{3.23}$$

Вираз (3.23) є записом **теореми про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі: повний диференціал кінетичної енергії точки дорівнює елементарній роботі усіх діючих на точку сил**.

Проінтегрувавши рівняння (3.23) вздовж траєкторії від початкового положення M_0 до кінцевого положенні M_1 в межах, що відповідають значенням швидкостей точки в початковому та кінцевому положеннях, отримуємо **теорему про зміну кінетичної енергії в інтегральній формі: зміна кінетичної енергії матеріальної точки на переміщенні дорівнює сумі робіт діючих на точку сил на тому ж переміщенні**:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{F}_k\right). \tag{3.24}$$

Будемо вважати, що всі складові, що входять до виразу (3.23), залежать від часу t. Розділивши обидві частини виразу на dt, одержимо (третя форма теореми):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{1}{dt}\sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}ds = \frac{1}{dt}\sum_{k=1}^{n} dA_k =$$

(3.25)

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{dA_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} dP_k$$

Отже, повна похідна за часом від кінетичної енергії МТ дорівнює сумарній потужності сил, що діють на точку.

Контрольні питання

1. Яка величина використовується як векторна міра кількості руху?
2. Чому дорівнює зміна кількості руху матеріальної точки?
3. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху механічної системи.
4. За якої умови зберігається кількість руху механічної системи?
5. Сформулюйте поняття моменту кількості руху.
6. Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту точки.
7. Дайте визначення роботи сили та потужності.
8. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.

Глава 4. Система матеріальних точок

4.1. Сили, що діють на точки механічної системи

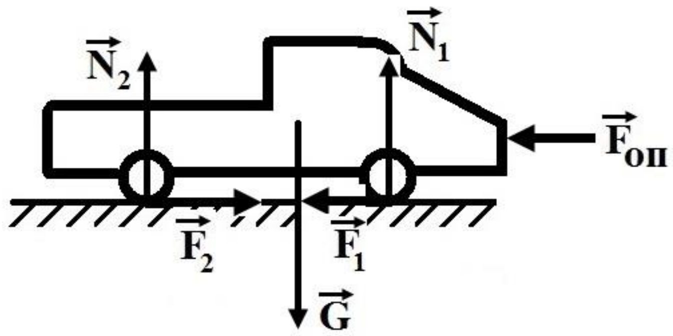
Система матеріальних точок (**СМТ або система**) – **така сукупність точок або тіл, в якій положення або рух кожної точки (тіла) залежить від положення та руху всіх інших точок (тіл).**

Матеріальне тіло будемо розглядати як систему матеріальних частин (точок), які утворюють це тіло.

Діючі на механічну систему активні сили $\vec{F}_k^a$ і реакцій в'язей $\vec{R}_k$ поділяють на зовнішні $\vec{F}_k^e$ і внутрішні $\vec{F}_k^i$ (індекси $\boldsymbol{e}$ та $\boldsymbol{i}$ від лат. **exterior** – зовнішній і **interior** – внутрішній).

Зовнішніми називають **сили, що діють на точки системи з боку інших точок або тіл, які не входять до складу даної системи**.

Внутрішніми називають **сили, з якими точки або тіла даної системи діють один на одного.**



Як зовнішні, та і внутрішні сили можуть бути активними або реакціями в'язей. Для ілюстрації введених понять розглянемо сили, що прикладені до автомобіля, що рухається прямолінійно по горизонтальній дорозі.

Передусім, на автомобіль діє сила тяжіння $\vec{G}$. Ця сила зовнішня, через те, що вона зумовлена дією Землі – тіла, що не входить до системи (автомобіля). Вона також є активною, вона незалежна від в'язей. До активних зовнішніх сил відноситься аеродинамічна сила опору повітря , ця сила не залежить від в'язей і викликана опором навколишнього середовища $\vec{F}_{\text{оп}}$. За принципом звільнення замінимо дію в'язі (дороги) її реакціями $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$. Перші дві сили є рівнодійними нормальних реакцій дороги до передніх і задніх коліс. Сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ – рівнодійні сил тертя, що викликані обертанням ведених і ведучих коліс. Сили $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ – зовнішні, вони зумовлені дією дороги, яка не входить до системи. Таким чином, до автомобіля прикладено шість зовнішніх сил.

В деяких випадках зовнішні сили виникають за рахунок дії внутрішніх сил. Зовнішня сила тертя ковзання $\vec{F}_2$ між задніми колесами автомобіля та дорогою не може виникнути без внутрішніх сил, які передають обертальний момент на ведучі колеса. Якщо ведучими є задні колеса, сила тертя $\vec{F}_2$ спрямована за напрямом руху.

Сила тиску газів на поршні двигуна, сили тиску поршнів на шатуни і шатунів на кривошипи колінчастого вала, сили тертя на осях коліс тощо – це все внутрішні сили системи.

Внутрішні сили мають наступні властивості.

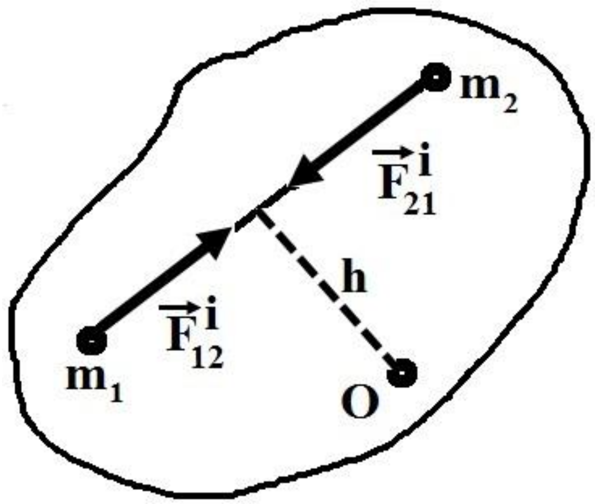


Рисунок 4.1.

1. Геометрична сума (головний вектор) всіх внутрішніх сил системи або сума проекцій цих сил на довільну вісь дорівнює нулю. Згідно з 3-м законом динаміки будь-які дві точки діють одна на одну з рівними за модулем і протилежно спрямованими силами. Їх сума дорівнює нулю (рис. 4.1).

Аналогічний результат має місце для довільної пари точок, тому:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i = 0. \qquad (4.1)$$

2. Геометрична сума моментів (головний момент) всіх внутрішніх сил системи відносно довільного центру або осі дорівнює нулю. Дійсно, як видно з рис. 4.1, сума моментів сили $\vec{F}^i_{12}$ та $\vec{F}^i_{21}$ відносно центру O дорівнює нулю. Додаючи моменти попарно, отримуємо:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^i\right) = 0. \qquad (4.2)$$

З доведених властивостей не випливає, що внутрішні сили взаємно урівноважені та не впливають на рух системи, оскільки ці сили прикладені до різних МТ і можуть викликати взаємне переміщення точок. Урівноваженими внутрішні сили можуть бути лише тоді, коли система, яку розглядають, є абсолютно твердим тілом.

4.2. Маса механічної системи. Центр мас

Рух системи залежить не тільки від сил, які на неї діють, а також від її сумарної маси та розподілу мас. Кожна точка M_k механічної системи має певну масу m_k, а її положення відносно системи відліку $OXYZ$ в кожний момент часу визначається радіус-вектором $\vec{r}_k$ або трьома координатами x_k, y_k, z_k (рис. 4.2).

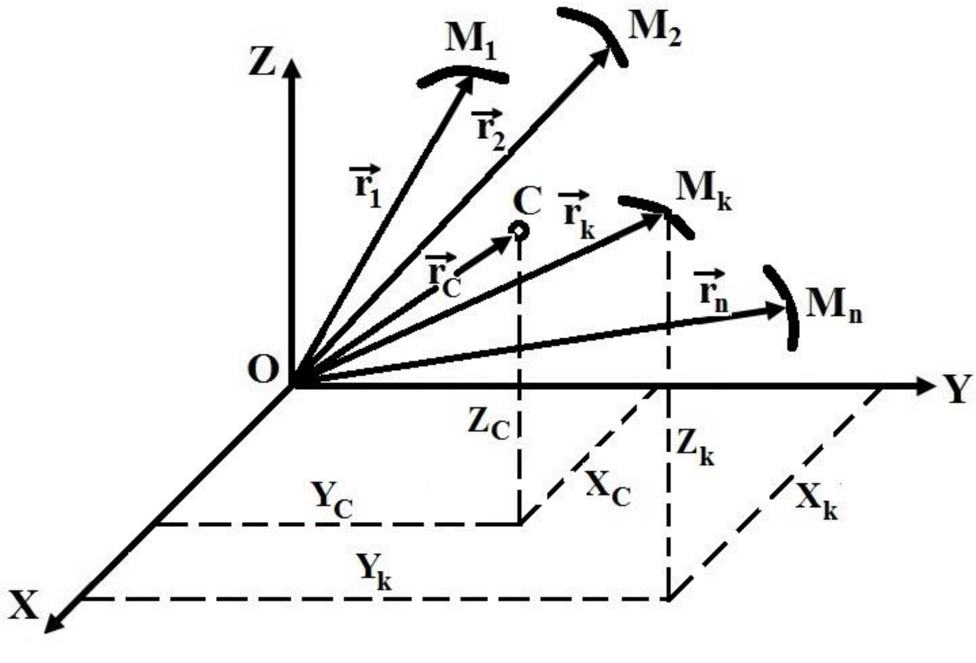


Рисунок 4.2.

Центром мас або **центром інерції механічної системи** називається геометрична точка C, радіус-вектор якої визначається залежністю:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k m_k}{m_\Sigma}, \quad m_\Sigma = \sum_{k=1}^{n} m_k, \qquad (4.3)$$

де m_Σ – маса системи, яка дорівнює арифметичній сумі мас всіх точок або тіл, що утворюють систему.

Проектуючи цю формулу на осі координат, одержимо формули для координат центру мас системи:

$$x_C = \frac{1}{m_\Sigma}\sum_{k=1}^{n} x_k m_k, \quad y_C = \frac{1}{m_\Sigma}\sum_{k=1}^{n} y_k m_k,$$

$$z_C = \frac{1}{m_\Sigma}\sum_{k=1}^{n} z_k m_k. \qquad (4.4)$$

Отримані співвідношення справедливі і для твердого тіла.

Якщо помножимо чисельник і знаменник у виразах (4.3) і (4.4) на g (прискорення земного тяжіння), то отримуємо радіус-вектор та координати центра ваги системи.

4.3. Момент інерції

Для характеристики розподілу маси системи або твердого тіла при дослідженні обертального руху необхідно ввести поняття моменту інерції.

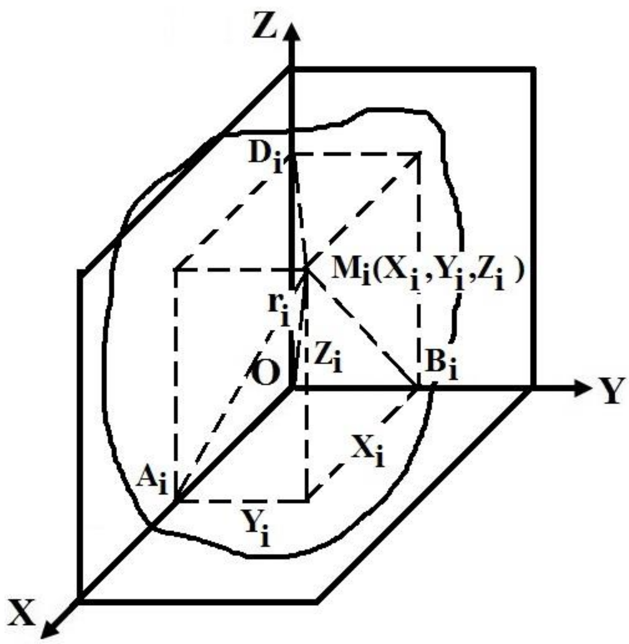


Рисунок 4.3.

Моментом інерції матеріальної системи (тіла) відносно осі є **скалярна величина, що дорівнює сумі добутків мас точок системи (тіла) на квадрати відстаней до осі**. При неперервному розподілі маси сума переходить в інтеграл.

Для визначення моментів інерції системи (тіла) відносно осей опустимо з кожної точки тіла M_i на осі X, Y, Z перпендикуляри M_iA_i, M_iB_i, M_iD_i (рис. 4.3).

Квадрати цих перпендикулярів:

$$(M_iA_i)^2 = y_i^2 + z_i^2, \quad (M_iB_i)^2 = z_i^2 + x_i^2, \quad (M_iD_i)^2 = x_i^2 + y_i^2. \tag{4.5}$$

Позначимо моменти інерції відносно координатних осей через I_X, I_Y, I_Z:

$$I_X = \sum_{i=1}^n m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right), \quad I_Y = \sum_{i=1}^n m_i\left(z_i^2 + x_i^2\right),$$
$$I_Z = \sum_{i=1}^n m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right), \tag{4.6}$$

де x_i, y_i, z_i – координати матеріальних точок системи.

Моментом інерції відносно полюса (**полярним моментом інерції**) називається **скалярна величина, що дорівнює сумі добутків маси кожної точки тіла на квадрат відстані від точки до цього полюса**:

$$I_O = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right). \tag{4.7}$$

З урахуванням (4.6) і (4.7) отримуємо:

$$I_X + I_Y + I_Z = 2I_O.$$

Момент інерції відносно заданої осі, наприклад осі Z, можна представити у вигляді **добутку маси тіла на квадрат лінійної величини, що називається радіус інерції тіла відносно цієї осі**:

$$I_Z = mi_Z^2, \tag{4.8}$$

де m – маса тіла, i_Z - радіус інерції тіла відносно осі Z. Радіусом інерції тіла відносно осі називають відстань від цієї осі, на якій потрібно розмістити всю масу тіла, не змінюючи моменту інерції тіла.

За умов неперервності розподілу маси тіла переходимо до інтегралу. Тоді відносно осі буде:

$$I_{\text{осі}} = \int_{(V)} r^2 dm = \int_{(V)} r^2 \rho dV. \tag{4.9}$$

де ρ, V – відповідно густина та об’єм тіла.

Момент інерції ТТ завжди додатний. Нульове значення момент інерції може прийняти тільки в одному окремому випадку, коли всі точки системи розташовані на осі, відносно якої визначається момент інерції.

Розмірність:

$$[I] = [m] \cdot [r^2] = \text{кг·м}^2.$$

4.4. Осьові моменти інерції деяких простих тіл

1. Момент інерції однорідного тонкого стержня.

Обчислимо його момент інерції відносно осі Z, яка перпендикулярна до стержня та проходить через його кінець (рис. 4.4). Довжина стержня l, маса m.

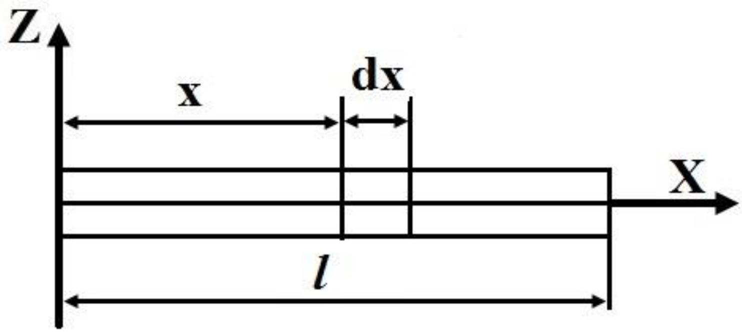


Рисунок 4.4.

Виділимо вздовж осі стержня X елементарну ділянку – відрізок dx, для якого маса $dm = \rho dx$, де $\rho = m/l$ – маса одиниці довжини стержня. В результаті маємо інтеграл:

$$I_Z = \int_0^l x^2\, dm = \int_0^l x^2\, \rho dx = \rho\, \frac{l^3}{3}.$$

Підставляючи $\rho = m/l$, отримуємо:

$$I_Z = \frac{ml^2}{3}. \qquad (4.10)$$

Якщо вісь Z змінює своє положення, наприклад, розташована посередині стержня, момент інерції приймає інше значення. Взагалі, формула для визначення моменту інерції відносно осі, яка пересувається на деяку відстань, буде наведена нижче.

2. Момент інерції однорідної круглої пластинки малої товщини.

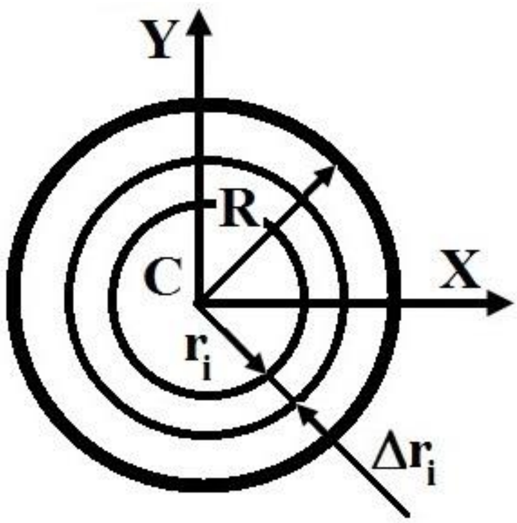


Рисунок 4.5.

Знайдемо момент інерції круглої пластини відносно осі Z, яка перпендикулярна до площини пластини та проходить через її центр (рис. 4.5). Для цього виділимо елементарне кільце радіусом r_i і шириною Δr_i. Площа цього кільця дорівнює $2\pi\Delta r_i$, а маса – $\rho 2\pi\Delta r_i$, ρ – маса одиниці площі пластини. Після інтегрування отримуємо:

$$I_Z = \frac{mR^2}{2}. \qquad (4.11)$$

Моменти інерції круглої пластини відносно осей і відповідно вдвічі менше:

$$I_X = I_Y = \frac{mR^2}{4}. \qquad (4.12)$$

3. Момент інерції однорідного круглого циліндра (рис. 4.6)

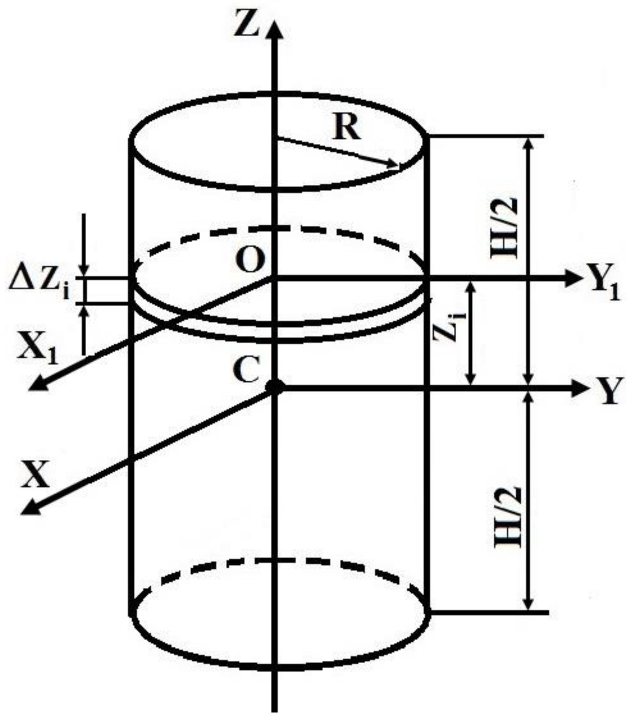


Рисунок 4.6.

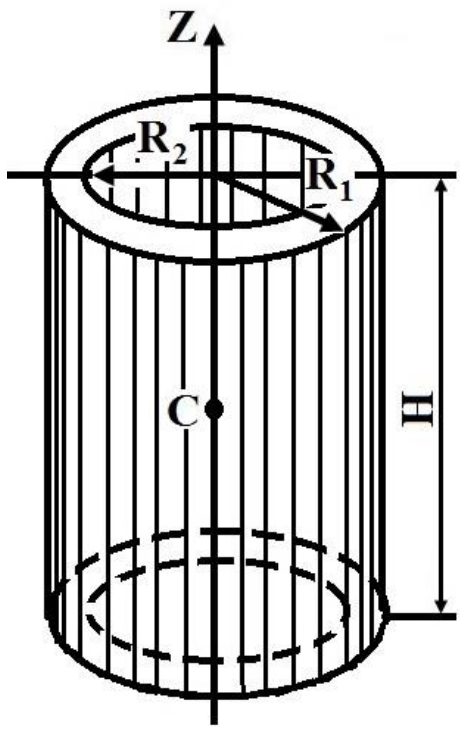


Рисунок 4.7.

Вважаємо циліндр набором тонких круглих пластинок, які сумарно дають:

$$I_Z = \frac{mR^2}{2}. \qquad (4.13)$$

4. Момент інерції полого циліндра (рис. 4.7).

Вважаємо, що ця фігура складається з циліндра радіусом R_1, в якому вирізано циліндр радіусом R_2. Використовуючи формулу (4.9), отримуємо:

$$I_Z = \frac{m_1 R_1^2}{2} - \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

Маси суцільних циліндрів $m_1 = \rho H \pi R_1^2$ і $m_2 = \rho H \pi R_2^2$. Маса полого циліндра $m = m_1 - m_2$. Після перетворень маємо:

$$I_Z = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)\ . \qquad (4.14)$$

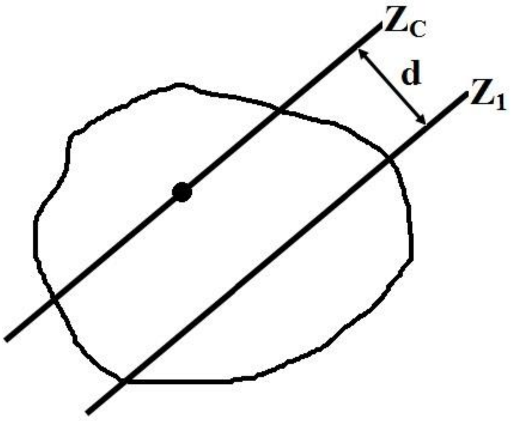


Рисунок 4.8.

Якщо потрібно визначити моменти інерції тіла відносно паралельних осей, то за **теоремою Штейнера** момент інерції відносно деякої осі Z_1 дорівнює сумі моменту інерції відносно центральної осі Z_C, яка проходить через центр мас паралельно до осі Z_1 і добутку маси тіла на квадрат відстані d між осями:

$$I_Z = I_{ZC} + md^2. \qquad (4.15)$$

4.5. Диференціальні рівняння руху механічної системи

Розглянемо рух механічної системи, яка складається з n матеріальних точок $M_1, M_2, .., M_n$ з масами $m_1, m_2,$, m_n (рис. 4.9). Позначимо рівнодійну зовнішніх сил, які діють на k-у точку через $\vec{F}_k^e$ та рівнодійну внутрішніх сил $\vec{F}_k^i$. Згідно з основним рівнянням динаміки МТ:

$$m_k\vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i. \tag{4.16}$$

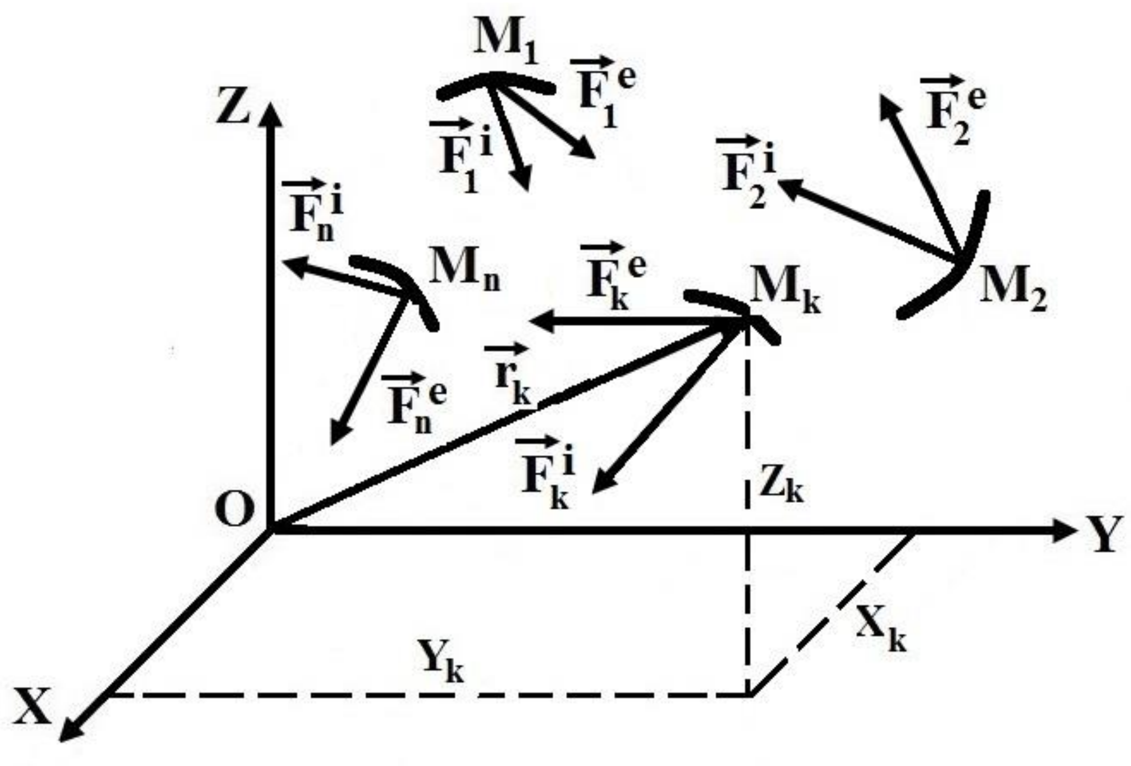


Рисунок 4.9.

Спроектувавши рівняння (4.16) на осі координат, одержимо $3n$ диференціальних рівнянь в проекціях на осі $(k = 1, \ldots, n)$:

$$m_k\ddot{x}_k = \vec{F}_{kX}^e + \vec{F}_{kX}^i$$

$$m_k\ddot{y}_k = \vec{F}_{kY}^e + \vec{F}_{kY}^i \tag{4.17}$$

$$m_k\ddot{z}_k = \vec{F}_{kZ}^e + \vec{F}_{kZ}^i.$$

Повний розв’язок основної задачі динаміки полягає в тому, щоб, знаючи задані сили, проінтегрувати відповідні диференціальні рівняння та визначити закон руху кожної точки системи. У більшості задач практики механічна система складається з великої кількості точок, причому поряд з заданими силами на точки системи діють невідомі реакції в’язей. Для знаходження руху системи, яка складається з твердих тіл, немає необхідності знати рух кожної точки, достатньо знати для кожного тіла закон руху полюса (3 лінійні координати) і закон обертального руху навколо полюса (3 кута повороту), тобто 6 параметрів як функцій часу.

4.6. Теорема про рух центру інерції механічної системи

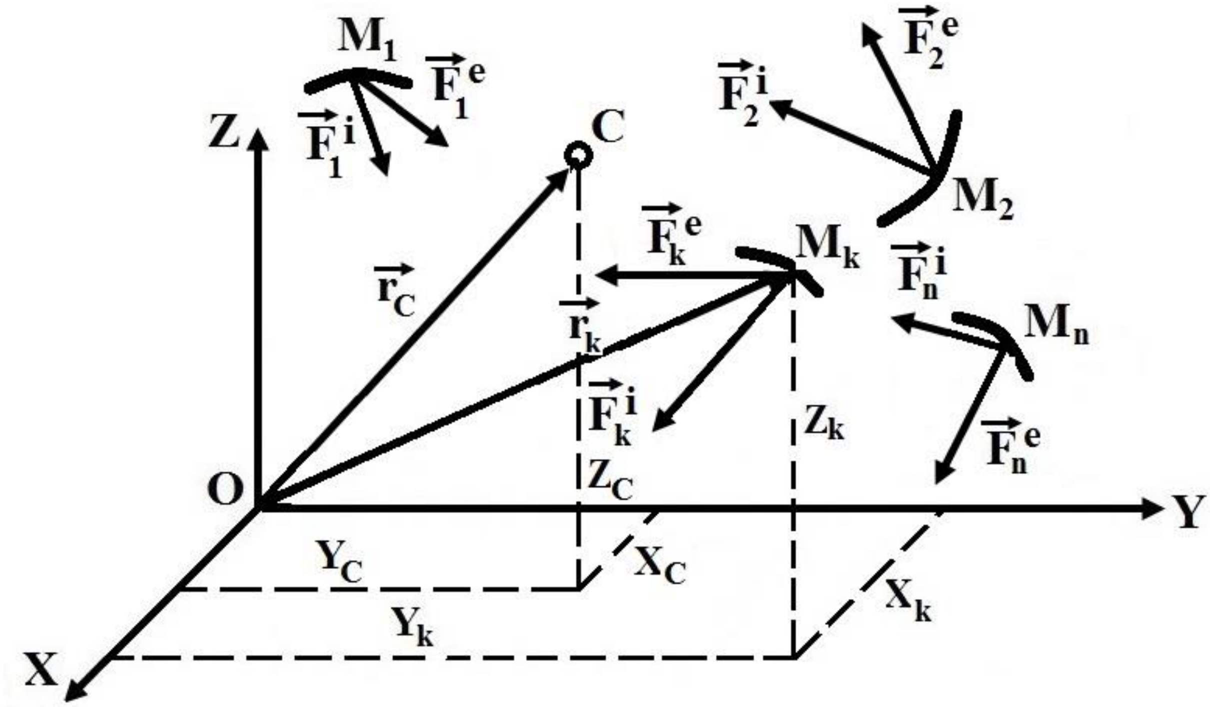


Рисунок 4.10.

Розглянемо рухому систему МТ, що знаходиться під дією зовнішніх та внутрішніх сил (рис. 4.10). Рух системи залежить не тільки від сил, які на неї діють, а також від її сумарної маси та розподілу мас.

За формулою (4.3) дано визначення центру інерції (центру мас) системи матеріальних точок:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k m_k}{m_\Sigma}, \qquad m_\Sigma = \sum_{k=1}^{n} m_k,$$

Використовуючи співвідношення (4.4), отримуємо залежності між швидкістю центру мас і точок системи:

$$\vec{v}_C = \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{k=1}^{n} \vec{v}_k m_k,$$

$$\dot{x}_C = \frac{1}{m_\Sigma}\sum_{k=1}^{n}\dot{x}_k m_k, \quad \dot{y}_C = \frac{1}{m_\Sigma}\sum_{k=1}^{n}\dot{y}_k m_k,$$

$$\dot{z}_C = \frac{1}{m_\Sigma}\sum_{k=1}^{n}\dot{z}_k m_k. \tag{4.18}$$

Для знаходження закону руху візьмемо похідну за часом від швидкості у виразах (4.18):

$$m_\Sigma \ddot{x}_c = \sum_{k=1}^{n}\ddot{x}_k m_k = \sum_{k=1}^{n} F_{kX}^{e},$$
$$m_\Sigma \ddot{y}_c = \sum_{k=1}^{n}\ddot{y}_k m_k = \sum_{k=1}^{n} F_{kY}^{e}, \tag{4.19}$$
$$m_\Sigma \ddot{z}_c = \sum_{k=1}^{n}\ddot{z}_k m_k = \sum_{k=1}^{n} F_{kZ}^{e}.$$

Оскільки $\vec{a}_C = \ddot{x}_c\vec{\imath} + \ddot{y}_c\vec{\jmath} + \ddot{z}_c\vec{k}$,

$$m_\Sigma \vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n}\vec{a}_k m_k = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{e} = \vec{R}^{e}. \tag{4.20}$$

Рівняння (4.20) виражає **теорему про рух центра мас системи**, яка формулюється наступним чином:

Центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка масою, яка дорівнює масі всієї системи, до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на систему.

З рівнянь (4.19) і (4.20) слідує, що внутрішні сили безпосередньо не впливають на рух центра мас. Відзначимо деякі властивості цієї теореми.

1. Теорема обґрунтовує методи динаміки точки. З рівнянь видно, що розв’язок, який ми отримуємо, вважаючи дане тіло матеріальною точкою, визначає закон руху центра мас цього тіла.

Якщо тіло рухається поступально, його рух повністю визначається рухом центра мас. Таким чином, рух твердого тіла, що рухається поступально, можна розглядати як рух матеріальної точки, маса якої дорівнює масі тіла. В інших випадках тіло можна розглядати як матеріальну точку лише тоді, коли для визначення положення тіла достатньо знати положення його центра мас.

2. Теорема дозволяє при визначенні закону руху центра мас довільної системи виключити з розгляду всі невідомі внутрішні сили.

З теореми про рух центра мас отримуємо важливі наслідки.

1. Якщо головний вектор зовнішніх сил залишається весь час рівним нулю, то центр мас механічної системи знаходиться в стані спокою або рухається прямолінійно та рівномірно:

$$\vec{R}^e = 0, \quad \vec{a}_C = 0, \quad \vec{v}_C = const$$

2. Якщо проекція головного вектору зовнішніх сил на будь-яку нерухому вісь залишається весь час рівною нулю, то проекція центру мас механічної системи на цю вісь або нерухома, або рухається рівномірно. Наприклад,

$$\ddot{x}_c = \dot{v}_{CX} = 0, \quad v_{CX} = const.$$

Контрольні питання

1. Дати визначення механічної системи.
2. Сформулювати дві властивості внутрішніх сил.
3. Як визначається центр мас механічної системи?
4. Дати визначення осьового моменту інерції.
5. Як визначаються моменти інерції відносно паралельних осей (за теоремою Штейнера)?
6. Поясніть рух автомобіля з точки зору теореми про рух центру інерції.
7. Які наслідки випливають з теореми про рух центра мас системи?

Глава 5. Кількість руху і момент кількості руху механічної системи

5.1. Кількість руху системи матеріальних точок

Як було показано у Главі 3, **кількість руху матеріальної точки** – **вектор $\vec{q} = m\vec{v}$, який дорівнює добутку маси МТ на її швидкість.**

Кількістю руху системи матеріальних точок (СМТ) називається вектор $\vec{Q}$, який дорівнює сумі кількостей руху (головний вектор кількостей руху) точок, які входять до системи:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k. \tag{5.1}$$

У цьому виразі m_k – маса окремої k-ої точки, $\vec{v}_k$ – її швидкість. З урахуванням $\vec{v}_k = \dot{\vec{r}}_k$, де $\vec{r}_k$ – радіус-вектор k-ої точки, який проведено з точки початку інерціальної системи відліку, рівність (5.1) можна перетворити наступним чином (маси точок вважаємо незмінними):

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k.$$

Користуючись виразом (15.3):

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k m_k}{m_\Sigma}, \qquad m_\Sigma = \sum_{k=1}^{n} m_k,$$

суму, яка стоїть під знаком похідної, замінимо добутком $m_\Sigma \vec{r}_C$, де m_Σ – маса всієї системи, а $\vec{r}_C$ – радіус-вектор центра мас:

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt}(m_\Sigma \vec{r}_C) \qquad \text{або} \qquad \vec{Q} = m_\Sigma \frac{d\vec{r}_C}{dt}.$$

Похідна $\dfrac{d\vec{r}_C}{dt}$ є швидкістю $\vec{v}_C$ центра мас системи. Остаточно маємо:

$$\vec{Q} = m_\Sigma \vec{v}_C, \tag{5.2}$$

тобто **кількість руху матеріальної системи дорівнює масі всій системи, яка помножена на швидкість її центра інерції**.

Рівність (5.2) можна прочитати наступним чином: **кількість руху матеріальної системи дорівнює кількості руху її центра мас, якщо помістити в ньому масу всієї системи.**

Вектор кількості руху $\vec{Q}$ може бути заданий своїми проекціями, вирази для яких безпосередньо слідують з формул (5.1) і (5.2) і теореми про проекції суми векторів:

$$
\begin{gathered}
Q_X = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{x}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{kX} = m_\Sigma \dot{x}_C = m_\Sigma v_{CX} \\
Q_Y = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{y}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{kY} = m_\Sigma \dot{y}_C = m_\Sigma v_{CY}, \\
Q_Z = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{z}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{kZ} = m_\Sigma \dot{z}_C = m_\Sigma v_{CZ}
\end{gathered}
\tag{5.3}
$$

де $\vec{Q} = Q_X\vec{\imath} + Q_Y\vec{\jmath} + Q_Z\vec{k}$.

Модуль головного вектора кількості руху системи:

$$Q = \sqrt{Q_X^2 + Q_Y^2 + Q_Z^2}.$$

Кількість руху системи характеризує її поступальний рух разом з центром мас.

5.2. Теорема про зміну кількості руху системи

Теорема. **Похідна за часом вектора кількості руху СМТ дорівнює головному вектору всіх зовнішніх сил, які діють на систему**.

Перепишемо диференціальні рівняння руху СМТ (4.16)

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$$

в наступній формі:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \ldots, m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i \tag{5.4}$$

і складемо почленно всі рівняння:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i.$$

Перша сума, що стоїть у правій частині рівняння, дорівнює головному вектору всіх зовнішніх сил $\vec{F}^e$, а друга сума через властивості внутрішніх сил дорівнює нулю. Після перетворень лівої частини отримуємо:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k = \vec{F}^e,$$

та з урахуванням (5.1):

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e. \qquad (5.5)$$

З цієї теореми витікає декілька наслідків.

1. **Внутрішні сили безпосередньо не впливають на зміну кількості руху СМТ** (вони можуть впливати непрямим способом через зовнішні сили).

2. **Якщо головний вектор всіх зовнішніх сил, які діють на СМТ, дорівнює нулю, то вектор кількості руху СМТ залишається постійним за величиною та напрямом**.

Дійсно, за умовою $\vec{F}^e = 0$. Тоді $\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0$, звідки:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 = const, \qquad (5.6)$$

де $\vec{Q}_0$ – початкова величина вектора $\vec{Q}$.

3. **Якщо проекція головного вектора всіх зовнішніх сил, прикладених до СМТ, на деяку нерухому вісь дорівнює нулю, то проекція кількості руху СМТ на цю вісь залишається постійною**.

Дійсно, наприклад для осі X, $\frac{dQ_X}{dt} = 0$, звідки:

$$Q_X = Q_{X0} = const. \qquad (5.7)$$

Вирази (5.6) і (5.7) називаються **законами збереження кількості руху СМТ**. З них випливає, що внутрішні сили не можуть змінити кількість руху системи.

Користуючись введеним раніше поняттям імпульса сили, перетворимо рівняння (5.5). Для цього помножимо обидві частини на dt і проінтегруємо в границях від t_0 до t_1:

$$\int_{t_0}^{t_1} d\vec{Q} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}^e dt,$$

або

$$\vec{Q}(t) - \vec{Q}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}^e dt,$$

або остаточно, користуючись виразом для імпульсу сил:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \vec{S}^e, \tag{5.8}$$

де $\vec{Q} = m_\Sigma \vec{v}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e$ – головний вектор імпульсів всіх зовнішніх сил. Таким чином, переходимо до теореми про зміну кількості руху СМТ в інтегральній формі (теорема імпульсів):

зміна кількості руху СМТ за проміжок часу $[\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t_1}]$ дорівнює головному вектору імпульсів всіх зовнішніх сил, прикладених до системи, за той же проміжок часу.

Векторне рівняння (5.8) еквівалентне трьом скалярним рівнянням в проекціях на осі системи координат:

$$Q_X - Q_{0X} = S_X^e, \quad Q_Y - Q_{0Y} = S_Y^e, \quad Q_Z - Q_{0Z} = S_Z^e. \tag{5.9}$$

В цих формулах S_X^e, S_Y^e, S_Z^e – проекції головного вектора імпульсів всіх зовнішніх сил на осі координат, а Q_X, Q_Y, Q_Z і Q_{0X}, Q_{0Y}, Q_{0Z} – величини проекцій кількості руху СМТ в моменти часу t і t_0.

Теорема імпульсів широко застосовується в теорії удару.

5.3. Теорема про рух центра мас

З урахуванням (5.2) і (5.5) та незмінності маси отримуємо:

$$\frac{d}{dt}(m_\Sigma \vec{v}_C) = \vec{F}^e \quad \text{або} \quad m_\Sigma \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}^e. \qquad (5.10)$$

Ця рівність за виглядом збігається з 2-м законом Ньютона, який записано для точки масою m_Σ і прискоренням $\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt}$, до якої прикладена сила $\vec{F}^e$. Рівність (5.10) є математичним записом теореми про рух центра мас: **центр мас СМТ рухається як матеріальна точка, в якій зосереджена вся маса системи і до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на систему**.

З цієї теореми витікає декілька наслідків.

1. **Тільки внутрішніми силами неможливо змінити характер руху центра мас СМТ**.
2. **Якщо головний вектор всіх зовнішніх сил, які діють на СМТ, дорівнює нулю, то центр мас СМТ знаходиться у стані спокою або рухається рівномірно та прямолінійно**.

Дійсно, якщо $\vec{F}^e = 0$, то з (5.10) маємо $m_\Sigma \frac{d\vec{v}_C}{dt} = 0$, звідки:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{0C} = const, \qquad (5.11)$$

$\vec{v}_{0C}$ – початкова швидкість центра мас.

3. **Якщо проекція головного вектора всіх зовнішніх сил СМТ на деяку нерухому вісь дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас СМТ на цю вісь не змінюється**.

$$m_\Sigma \frac{dv_{CX}}{dt} = 0 \quad v_{CX} = const. \qquad (5.12)$$

4. Пара сил, прикладена до твердого тіла, не може змінити рух його центра мас (вона може тільки викликати обертання тіла).

5.4. Момент кількості руху системи матеріальних точок

У Главі 3 було введено поняття моменту кількості руху матеріальної точки, деякі поняття нагадаємо тут.

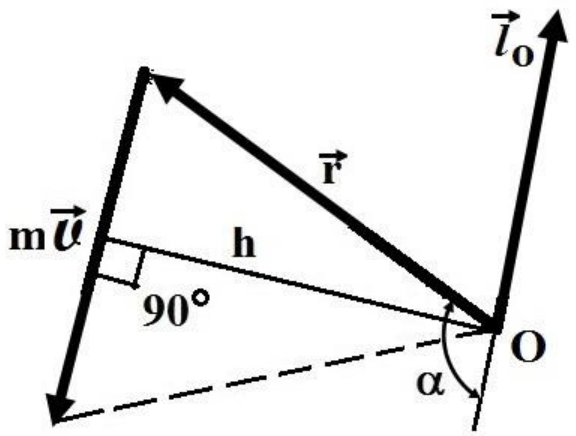


Рисунок 5.1.

Використовуючи вираз для кількості руху $m\vec{v}$, помножимо його на радіус-вектор $\vec{r}(t)$, отримавши векторний добуток (позначається символом $\times$)

$$\vec{r} \times m\vec{v},$$

який називається **момент кількості руху відносно нерухомої точки** – **вектор** $\boldsymbol{\vec{l}_O}$**,** **величина і напрям якого визначається векторним добутком**

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Модуль цього вектору дорівнює $l_O = mvr\sin\alpha = mvh$, де h – плече.

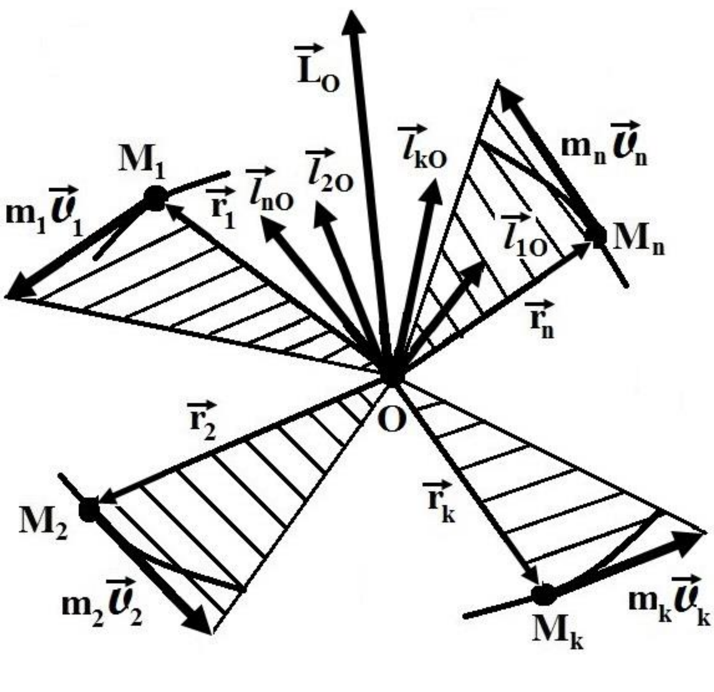


Рисунок 5.2.

Уведемо поняття моменту кількості руху для системи матеріальних точок (рис. 5.2). **Головний момент** $\vec{L}_O$ (використовують також позначення $\vec{K}_O$) **кількості руху СМТ (кінетичний момент) відносно центру** O **дорівнює векторній сумі моментів кількості руху матеріальних точок відносно того ж центра**:

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{l}_{kO} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k \times \vec{q}_k) = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k). \tag{5.13}$$

В цьому рівнянні $\vec{r}_k$ – радіус-вектор k-ої матеріальної точки з початком у центрі O, m_k і $\vec{v}_k$ – маса і швидкість цієї точки. Розкриваючи векторний добуток, запишемо проекції на осі координат:

$$L_X = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) = \sum_{k=1}^{n} l_{kX},$$

$$L_Y = \sum_{k=1}^{n} m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k) = \sum_{k=1}^{n} l_{kY},$$

$$L_Z = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) = \sum_{k=1}^{n} l_{kZ}. \tag{5.14}$$

Кількість руху системи характеризує поступальний рух, головний момент кількості руху системи характеризує обертальний рух.

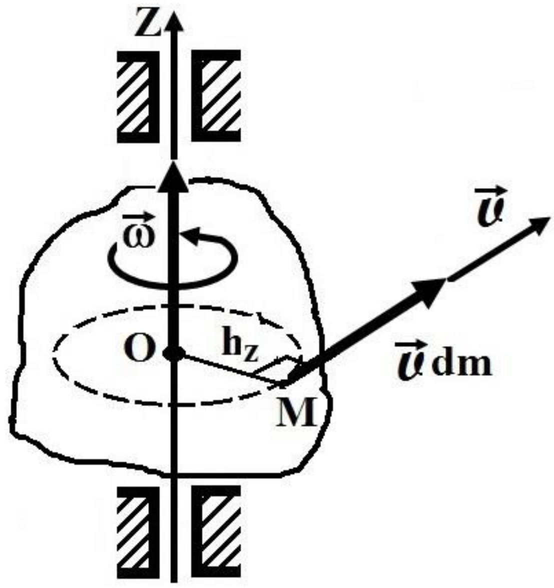


Рисунок 5.3.

Визначення вектора кінетичного моменту зводять до визначення його проекцій на відповідні осі. Викликає інтерес визначення моменту кількості руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі Z (рис. 5.3) з кутовою швидкістю $\omega = \omega_Z$.

Виділимо елемент об’єму з масою dm, який рухається за окружністю з центром в точці O і радіусом h_Z.

Проекція швидкості на дотичну до окружності дорівнює $\omega_Z h_Z$, а проекція кількості руху на ту ж вісь буде:

$$v_\tau dm = \omega_Z h_Z dm.$$

Момент кількості руху елемента відносно осі Z дорівнює:

$$v_\tau dm h_Z = \omega_Z h_Z h_Z dm.$$

Для всього тіла маємо:

$$L_Z = \int \omega_Z h_Z^2 dm,$$

де інтегрування проводимо за масою всього тіла. Проекція кутової швидкості ω_Z однакова для усіх точок тіла, тому :

$$L_Z = \omega_Z \int h_Z^2 dm = \omega_Z I_Z. \tag{5.15}$$

В (5.15) I_Z – момент інерції тіла відносно осі Z, тобто **момент кількості руху твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, відносно осі обертання дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно цієї осі на проекцію кутової швидкості на ту ж саму вісь**.

Можна знайти аналогію між формулами для визначення кількості руху та моменту кількості руху: кількість руху дорівнює добутку маси (величина, що характеризує інертність тіла при поступальному русі) на швидкість; кінетичний момент дорівнює добутку моменту інерції (величина, що характеризує інертність тіла при обертальному русі) на кутову швидкість.

5.5. Теорема про зміну моменту кількості руху системи матеріальних точок (теорема моментів)

Теорема моментів, яка доведена для однієї точки, буде справедлива для кожної точки системи. Розглянемо СМТ. До кожної точки системи можна застосувати теорему про зміну моменту кількості руху:

$$\frac{d\vec{l}_{O1}}{dt} = \vec{M}_O\left(\vec{F}_1^e\right) + \vec{M}_O\left(\vec{F}_1^i\right), \ldots, \frac{d\vec{l}_{On}}{dt} = \vec{M}_O\left(\vec{F}_n^e\right) + \vec{M}_O\left(\vec{F}_n^i\right).$$

Складемо почленно, отримуємо:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d\vec{l}_{Ok}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^e\right) + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^i\right).$$

В лівій частині знак похідної можна винести за знак суми, в правій частині перша сума дорівнює головному моменту $\vec{M}_O^e$ всіх зовнішніх сил відносно центру O, а друга сума за властивостями внутрішніх сил дорівнює нулю. Маємо:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\vec{l}_{Ok} = \vec{M}_O^e = \frac{d\vec{L}_O}{dt}. \qquad (5.16)$$

Це рівняння є математичним записом теореми про зміну кількості руху СМТ:

Повна похідна за часом від вектора моменту кількості руху СМТ, який обчислено відносно нерухомого центру, дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил відносно того ж центру.

В проекціях на нерухомі осі векторне рівняння (5.16) еквівалентне трьом скалярним:

$$\frac{dL_X}{dt} = M_X^e, \quad \frac{dL_Y}{dt} = M_Y^e, \quad \frac{dL_Z}{dt} = M_Z^e. \qquad (5.17)$$

Ці рівняння виражають теорему моментів відносно довільної нерухомої осі. Доведеною теоремою широко користуються для вивчення обертального руху твердого тіла, а також в теорії гіроскопів та в теорії удару. Практична цінність теореми моментів у тому, що вона, аналогічно теоремі про зміну кількості руху, дозволяє виключити з розгляду невідомі внутрішні сили.

З теореми витікає декілька наслідків.

1. **Внутрішні сили безпосередньо не впливають на зміну моменту кількості руху СМТ** (вони можуть впливати непрямим способом через зовнішні сили).

2. **Якщо головний момент всіх зовнішніх сил, які діють на СМТ, відносно деякого нерухомого центру дорівнює нулю, то момент кількості руху СМТ відносно того ж центру залишається постійним за величиною та напрямом**.

Дійсно, за умовою $\vec{M}_O^e = 0$. Тоді $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$, звідки:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_O^0 = const, \qquad (5.18)$$

де $\vec{L}_O^0$ – початкова величина вектора $\vec{L}_O$.

3. **Якщо головний момент всіх зовнішніх сил, прикладених до СМТ, відносно деякої нерухомої осі дорівнює нулю, то момент**

кількості руху СМТ відносно цієї осі залишається постійною в процесі руху.

Дійсно, наприклад для осі X, $\frac{dL_X}{dt} = 0$, звідки:

$$L_X = L_X^0 = const. \qquad (5.19)$$

Вирази (5.18) і (5.19) називаються **законами збереження кількості руху СМТ**.

5.6. Диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

За (5.15) $L_z = \omega_Z \int h_Z^2 dm = \omega_Z I_Z$. З урахуванням третього рівняння (5.17) отримуємо диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі:

$$I_Z \frac{d\omega_Z}{dt} = M_Z^e \quad \text{або} \quad I_Z \ddot{\varphi} = M_Z^e, \qquad (5.20)$$

де φ – кут повороту твердого тіла навколо осі. Звідси такі висновки:

а) якщо система незмінна, тобто $I_Z = const$, то $\omega_Z = const$, тобто тверде тіло, закріплене на осі, обертається зі сталою швидкістю;

б) якщо система змінна, то під дією внутрішніх або зовнішніх сил її точки віддаляються або наближаються до осі Z, що є причиною збільшення або зменшення моменту інерції I_Z. Оскільки $\omega_Z I_Z = const$, то за збільшення I_Z кутова швидкість ω_Z буде зменшуватися, а за зменшення I_Z – збільшуватися. Таким чином, дією внутрішніх сил можна змінювати кутову швидкість обертання системи. Останнє можна проілюструвати на прикладі обертання людини навколо своєї осі, коли притискання рук до тіла або їх розмах змінює кутову швидкість обертання.

Порівняємо з диференціальним рівнянням прямолінійного поступального руху твердого тіла (m – маса тіла):

$$m \frac{dv_Z}{dt} = F_Z^e \quad \text{або} \quad m\ddot{z} = F_Z^e. \qquad (5.21)$$

Порівнюючи (5.20) і (5.21), можна провести аналогію:
лінійній швидкості $\vec{v}$ поступального руху відповідає його кутова швидкість $\overrightarrow{\omega}$ при обертанні навколо нерухомої осі; силам, що викликають поступальний рух, відповідають моменти сил, які викликають обертальний рух; масі тіла відповідає момент інерції. У табл. 5.1 наведено порівняння відповідних характеристик.

Таблиця 5.1

Поступальний рух	Обертальний рух
Радіус-вектор r	Кут повороту φ
Лінійна швидкість $v = \dfrac{dr}{dt}$	Кутова швидкість $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$
Прискорення $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2r}{dt^2}$	Кутове прискорення $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$
Міра інертності – маса m	Міра інертності – момент інерції I відносно осі обертання
Зовнішня сила F	Момент зовнішньої сили M
Головний вектор	Головний момент

5.7. Кінематична інтерпретація теореми про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно центру. Теорема Резаля

На рис. 5.2 показано кінетичний момент $\vec{L}_O$ відносно центру O системи з n матеріальних точок для певного моменту часу та певного положення точок. Звичайно, для будь-яких інших положень за умов руху СМТ вектор $\vec{L}_O$ змінюється як за модулем, так і за напрямом.

Якщо прив'язати ці вектори до центру O, то за рухом СМТ точка A – кінцівка вектора $\vec{L}_O$ – описує у просторі деяку лінію, яка зветься **годографом кінетичного моменту механічної системи**. Швидкість $\vec{u}$ руху точки A за годографом (вектор швидкості за дотичною до годографа) (рис. 5.4) визначається векторною похідною радіус-вектора $\vec{L}_O$ цієї точки за часом:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}. \qquad (5.22)$$

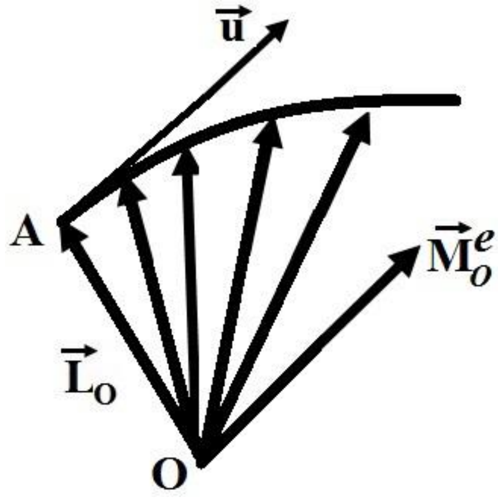


Рисунок 5.4.

Водночас згідно з (5.16) $\vec{M}_O^e = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$, що приводить до очевидного співвідношення:

$$\vec{u} = \vec{M}_O^e. \qquad (5.23)$$

Вираз (5.23) показує, що **швидкість кінця вектора кінетичного моменту механічної системи відносно деякого нерухомого центру геометрично дорівнює головному моменту зовнішніх сил, діючих на цю систему, відносно того ж центру**. Це визначення трактує теорему про зміну кінетичного моменту системи в іншій формі та має назву **теореми Резаля**. В Главі 9 буде показано практичне застосування понять, які наведено в поточній главі.

Контрольні питання

1. Яка величина використовується як векторна міра кількості руху? Яка відповідна міра дії сили?
2. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху механічної системи.
3. Сформулюйте поняття моменту кількості руху.
4. Як визначається момент кількості руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
5. Сформулюйте закони збереження кількості руху механічної системи.

Глава 6. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

6.1. Дві міри механічного руху

В динаміці розглядаються два випадки перетворення механічного руху МТ або СМТ:

1) механічний рух переноситься з однієї системи на іншу як механічний рух;
2) механічний рух перетворюється в іншу форму руху матерії (у форму потенційної енергії, теплоти, електрики тощо).

Кожний з цих випадків має свої вимірювачі як механічного руху, так і дії сили.

Коли розглядається перетворення механічного руху без переходу в іншу форму руху, його мірою є вектор кількості руху МТ $\vec{q} = m\vec{v}$ або СМТ $\vec{Q} = m_{\Sigma}\vec{v}_C$. Мірою взаємодії є вектор імпульса сили $\vec{S}$.

Коли механічний рух перетворюється в іншу форму руху матерії, мірою механічного руху є **кінетична енергія** МТ або СМТ, яка позначається E_{K}.

Через те, що зміна величини кінетичної енергії пов'язана з роботою прикладених до тіла сил, робота є кількісною мірою перетворення механічного руху в будь-яку іншу форму руху.

Кінетична енергія є характеристикою поступального та обертального рухів системи, тому теорему про зміну кінетичної енергії часто використовують для розв'язання задач. Головна відмінність кінетичної енергії від уведених раніше характеристик $\vec{Q}$ та $\vec{L}_O$ полягає в тому, що кінетична енергія є величиною скалярною та додатною. Тому вона не залежить від напрямку руху частин системи і не характеризує зміну цих напрямків.

Відмітимо ще одну важливу обставину. Внутрішні сили, що діють на систему, не змінюють векторні характеристики $\vec{Q}$ та $\vec{L}_O$. Але, якщо під дією внутрішніх сил змінюються модулі швидкостей точок системи, то при цьому змінюється й величина E_{K}.

Поняття роботи сили, потужності, кінетичної енергії точки, теорему про зміну кінетичної енергії точки було введено і розглянуто У Главі 3. В цій лекції ми узагальнимо це на систему матеріальних точок.

6.2. Кінетична енергія матеріальної системи та способи її обчислення

Кінетичною енергією матеріальної системи називається сума кінетичних енергій всіх точок, які входять до системи. За визначенням

$$E_{\text{К}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2. \tag{6.1}$$

У випадку плоского руху його можна розкласти на поступальний рух центру мас та обертальний навколо цього центру. Тоді за теоремою Кеніга:

$$E_{\text{К}} = \frac{1}{2} m_{\Sigma} v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2. \tag{6.2}$$

Кінетична енергія матеріальної системи в її абсолютному русі складається з кінетичної енергії ($\frac{1}{2} m_{\Sigma} v_C^2$) центру мас (вважається, що в ньому зосереджена маса всієї системи) і кінетичної енергії ($\frac{1}{2} I_C \omega^2$) системи в її русі відносно осей, які поступально переміщуються в інерційному просторі разом з центром мас осей.

6.3. Кінетична енергія твердого тіла

Матеріальна система дуже часто є твердим тілом або сукупністю твердих тіл. Тому потрібно вміти визначати кінетичну енергію твердого тіла, яке може здійснювати різні рухи. Тверде тіло розглядається як неперервно розподілена маса, тому всі суми, що входять у вирази для кінетичної енергії системи, переходять в інтеграли, а маса m_k окремої точки замінюється диференціалом dm. Тому для твердого тіла формула (6.1) набуває вигляду:

$$E_{\text{К}} = \frac{1}{2}\int v^2\, dm, \qquad (6.3)$$

де інтегрування проводиться по масі всього тіла.

Розглянемо обчислення кінетичної енергії твердого тіла для різних варіантів руху.

1. Кінетична енергія твердого тіла, що рухається поступально.

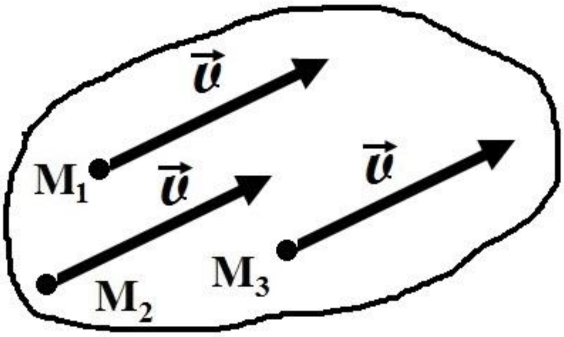


Рисунок 6.1.

При поступальному русі твердого тіла швидкості усіх його точок однакові (рис. 6.1). Тому

$$E_{\text{К}} = \frac{1}{2}\int v^2\, dm,$$

або з урахуванням $\int dm = m_{\Sigma}$, де m_{Σ} – маса всього тіла,

$$E_{\text{К}} = \frac{1}{2} m_{\Sigma} v^2. \qquad (6.4)$$

Таким чином, **кінетична енергія твердого тіла, що рухається поступально, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат його швидкості**.

Аналогічний вираз отримуємо і для СМТ.

$$E_{\text{К}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_C^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{1}{2} m_{\Sigma} v_C^2. \qquad (6.5)$$

2. Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

Модуль швидкості довільної точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює ωh_Z, де ω – модуль кутової швидкості твердого тіла, а h_Z – відстань від точки до осі обертання Z (рис. 6.2).

Підставляючи в (6.3) $v = \omega h_Z$, отримуємо з урахуванням $\omega = const$ для всіх точок тіла:

$$E_К = \frac{1}{2}\int \omega^2\, h_Z^2 dm = \frac{\omega^2}{2}\int h_Z^2 dm = \frac{1}{2}\, I_Z \omega^2, \qquad (6.6)$$

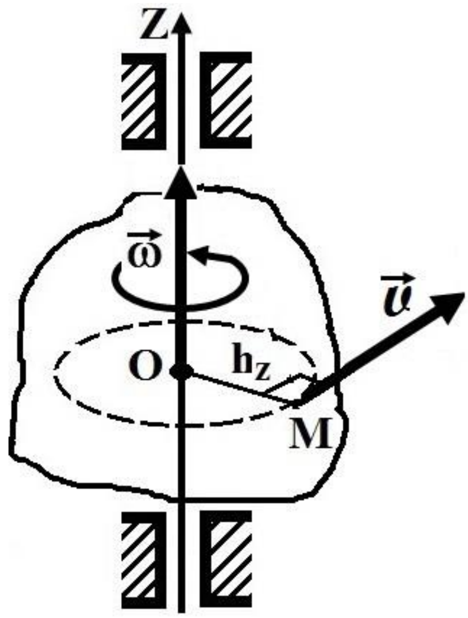


Рисунок 6.2.

Отриманий інтеграл є моментом інерції тіла I_Z відносно осі обертання. Тому **кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості тіла**.

Вирази (6.4), (6.5) і (6.6) використовуються для визначення законів руху системи матеріальних тіл, коли окремі ланки системи здійснюють відповідний рух.

3. Кінетична енергія твердого тіла при плоскому (плоскопаралельному) русі.

При плоскопаралельному русі швидкості точок тіла в кожний момент часу розподілені так, немов би тіло обертається навколо осі Z, перпендикулярної до площини руху, що проходить через миттєвий центр швидкостей. Водночас можна відокремити поступальний рух ТТ разом з центром мас тіла та обертання навколо цього центра. За теоремою Кеніга можна виразити момент інерції тіла відносно центра мас. Опускаючи перетворення, отримуємо:

$$E_К = \frac{1}{2}\, m_\Sigma v_C^2 + \frac{1}{2}\, I_C \omega^2. \qquad (6.7)$$

У цьому виразі перший доданок – це кінетична енергія ТТ у поступальному русі разом з центром мас, а другий доданок – це кінетична енергія в обертанні ТТ навколо нерухомої осі, яка визначена за (6.6).

Якщо матеріальна система складається з декількох тіл, то її кінетична енергія $E_{\text{К}}$ дорівнює сумі кінетичних енергій $E_{\text{К}i}$ усіх тіл, які складають систему.

Обчислення кінетичної енергії СМТ є одним з етапів вирішення задач при використанні теореми про зміну кінетичної енергії системи або при складанні рівнянь Лагранжа другого роду.

6.4. Робота сил, які прикладені до системи матеріальних точок

Припустимо, що при русі СМТ перейшла з одного положення до іншого. Позначимо через A повну роботу, яку виконують при цьому переміщенні СМТ всі прикладені до неї сили, причому роботи зовнішніх і внутрішніх сил будемо позначати відповідно A^e та A^i:

$$A = A^e + A^i. \tag{6.8}$$

Для усіх точок системи маємо:

$$A^e = \sum_{k=1}^{n} A_k^e, \qquad A^i = \sum_{k=1}^{n} A_k^i. \tag{6.9}$$

1. Робота сил тяжіння.

На тіло масою m_Σ діє сила тяжіння $G = m_\Sigma g$, яка спрямована вертикально вниз. Сила вважається прикладеною до центру мас тіла, координата якого z_{0C} у початковий момент часу та z_C у кінцевий після введення осі Z, спрямованої вгору. Тоді повна робота сили тяжіння при переході системи з початкового положення до кінцевого визначається рівністю:

$$A^e = m_\Sigma g(z_{0C} - z_C) = G(z_{0C} - z_C). \tag{6.10}$$

Таким чином, **повна робота сили тяжіння системи дорівнює вазі всій системи, помноженої на вертикальне переміщення її центра ваги.** При переміщенні тіла вниз у напрямі дії сили тяжіння робота є додатною, а вгору – від’ємною. З отриманого результату видно, що робота сили тяжіння не залежить від траєкторії руху. Сили, які мають таку властивість, називають **потенціальними**.

2. Робота внутрішніх сил твердого тіла (без доказу).

Сума робіт всіх внутрішніх сил абсолютно твердого тіла на довільному його переміщенні дорівнює нулю.

3. Робота сил, прикладених до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

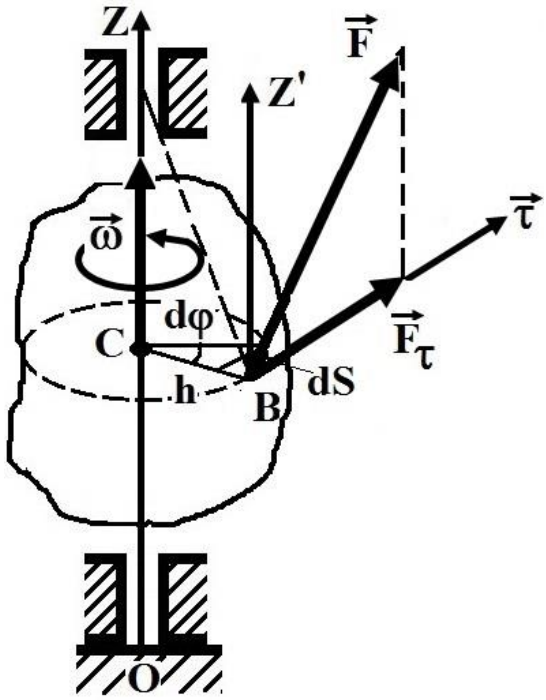


Рисунок 6.3.

Нехай сила $\vec{F}$ прикладена до деякої точки тіла (рис. 6.3), яка знаходиться на відстані h від нерухомої осі обертання Z. Елементарна робота прикладеної до тіла сили $\vec{F}$ дорівнює (F_τ – проекція вектора $\vec{F}$ на вісь $\vec{\tau}$ натурального тригранника, дотична до траєкторії обертання):

$$dA^e = F_\tau ds = F_\tau h d\varphi,$$

тому що $ds = hd\varphi$, де $d\varphi$ – елементарний кут повороту.

В той же час, $F_\tau h = m_Z(\vec{F}) = M_Z$ – **обертальний момент**. Тоді отримуємо:

$$dA^e = M_Z d\varphi. \tag{6.11}$$

Отже, елементарна робота дорівнює добутку обертального моменту на елементарний кут повороту. Формула (6.11) справедлива і за умов дії декількох сил, якщо вважати $M_Z = \sum m_Z(\vec{F}_k)$.

Робота на кінцевому куті повороту визначається рівністю:

$$A^e = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_Z(\varphi) d\varphi, \tag{6.12}$$

де φ і φ_0 – кінцеве та початкове значення кута φ, яке визначає положення тіла. Якщо момент M_Z залежний не тільки від кута повороту

φ, а і від кутової швидкості ω і часу t, необхідно перейти до нової змінної інтегрування.

Якщо момент зовнішньої сили не змінюється під час руху тіла, тобто $M_Z = const$, то:

$$A^e = M_Z(\varphi - \varphi_0). \tag{6.13}$$

Знак роботи не залежить від знаку моменту M_Z. Робота буде додатною тоді, коли напрям обертання та напрям моменту M_Z однакові. За різних напрямів обертання та моменту робота буде від'ємною.

4. Робота сил пружності.

Згідно з (2.1) сила пружності у проекції на вісь X завжди має знак, протилежний координаті x, і має вигляд (c – коефіцієнт жорсткості пружини):

$$F_{\text{пр}X} = -cx.$$

Тоді за подовження на величину x сила пружності здійснює роботу:

$$A^e = -c\,\frac{x^2}{2}\,. \tag{6.14}$$

Робота сили пружності від'ємна у випадку збільшення деформації, тобто коли сила пружності спрямована проти переміщення, і додатна, коли деформація зменшується.

6.5. Теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок

Використовуючи рівняння (3.24) для МТ, перейдемо до СМТ, яка складається з n точок. Нехай $\vec{F}_k^e$ і $\vec{F}_k^i$ – рівнодіючі усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точки M_k системи. Розглянемо 2 моменти часу: початковий t_0 і поточний (або кінцевий) t. Нехай швидкості точки M_k в момент часу t_0 дорівнює v_{0k}, а в момент часу t – v_k. Тоді для кожної точки системи буде справедлива теорема про зміну кінетичної енергії:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 v_{01}^2}{2} = A_1^e + A_1^i, \quad ,$$

$$\frac{m_n v_n^2}{2} - \frac{m_n v_{0n}^2}{2} = A_n^e + A_n^i,$$

де A_k^e і A_k^i – робота сил $\vec{F}_k^e$ і $\vec{F}_k^i$ на дійсному переміщенні точки M_k.
Складаючи почленно всі рівності, отримуємо:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_{0k}^2 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i,$$

або, з позначенням виразу для кінетичної енергії:

$$E_{\text{К}} - E_{\text{К}0} = A^e + A^i, \tag{6.15}$$

де $E_{\text{К}0}$ – початкова величина кінетичної енергії, A^e і A^i – робота всіх зовнішніх і внутрішніх сил системи. Отримана рівність є математичним записом теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної системи в інтегральній формі:

зміна кінетичної енергії матеріальної системи при переході її з початкового до поточного (кінцевого) положення дорівнює сумі робіт на цьому переміщенні всіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок системи.

В цій теоремі внутрішні сили, порівняно з іншими теоремами динаміки, не виключаються.

Розглянемо 2 важливих випадка.

1. Незмінна система – це така механічна система, в якій відстань між довільними двома взаємодіючими точками залишається під час руху постійними (абсолютно тверде тіло).

Сума робіт всіх внутрішніх сил дорівнює нулю.

2. Система з ідеальними в’язями (в’язі без тертя, абсолютно гнучка і нерозтяжна нить).

Робота ідеальних в’язей дорівнює нулю.

Якщо продиференціювати вираз (6.15) за часом:

$$\frac{dE_{\text{К}}}{dt} = \frac{dA^e}{dt} + \frac{dA^i}{dt},$$

то з урахуванням рівності похідної від роботи за часом потужності сили, отримуємо:

$$\frac{dE_{\text{К}}}{dt} = P^e + P^i. \tag{6.16}$$

Цей вираз є аналітичним записом теореми про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі: **повна похідна кінетичної енергії за часом дорівнює сумі потужностей всіх зовнішніх і внутрішніх сил, які прикладено до системи**.

За допомогою теореми про зміну кінетичної енергії в інтегральній формі визначають: 1) швидкості точок матеріальної системи (у тих випадках, коли, знаючи переміщення системи, можна обчислити роботу всіх прикладених до неї сил); 2) роботу однієї з сил, прикладених до системи (коли за умовою задачі швидкості точок матеріальної системи відомі або їх можна визначити в інші методи).

Диференціальна форма теореми про зміну кінетичної енергії системи застосовується для складання диференціальних рівнянь руху, а також для визначення лінійних або кутових прискорень.

У Главі 5 було наведено Табл. 5.1, в якій надані кінематичні характеристики та міри інертності для поступального та обертального рухів з метою показати їхню структурну ідентичність. У Табл. 6.1, яка є продовженням Табл. 5.1, наведені формули для кінетичної енергії, роботи та потужності.

Таблиця 6.1

Поступальний рух	Обертальний рух
Другий закон Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$	Другий закон Ньютона $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$
Кінетична енергія $E_{\text{К}} = \frac{1}{2}mv^2$	Кінетична енергія $E_{\text{К}} = \frac{1}{2}I\omega^2$
Робота $A = Fs\cos\alpha$	Робота $A = M\varphi$
Потужність $P = Fv\cos\alpha$	Потужність $P = M\omega$

Розв’язання задач за допомогою вказаної теореми потрібно проводити у наступній послідовності:

1. Показати на рисунку усі зовнішні та внутрішні сили (для незмінної системи – тільки зовнішні).
2. Обчислити суму робіт усіх зовнішніх та внутрішніх сил (для незмінної системи – тільки зовнішніх).
3. Обчислити кінетичну енергію СМТ у початковому та кінцевому положенні.
4. Записати теорему (з урахуванням отриманих результатів за пунктами 2 і 3) про зміну кінетичної енергії СМТ і отримати шукану величину.

Приклад 1. Використання теореми про зміну кінетичної енергії для системи матеріальних тіл (поступальний, обертальний, плоскопаралельний рухи).

Механічна система, початкове положення якої показано на рис. 6.4, під дією сил тяжіння починає рухатися зі стану спокою. Враховуючи тертя ковзання тіла 1, опір коченню тіла 3, яке котиться без ковзання, нехтуючи іншими силами опору та масами нерозтягнутих нитей, визначити швидкість тіла 1 за проходження відстані s_1.

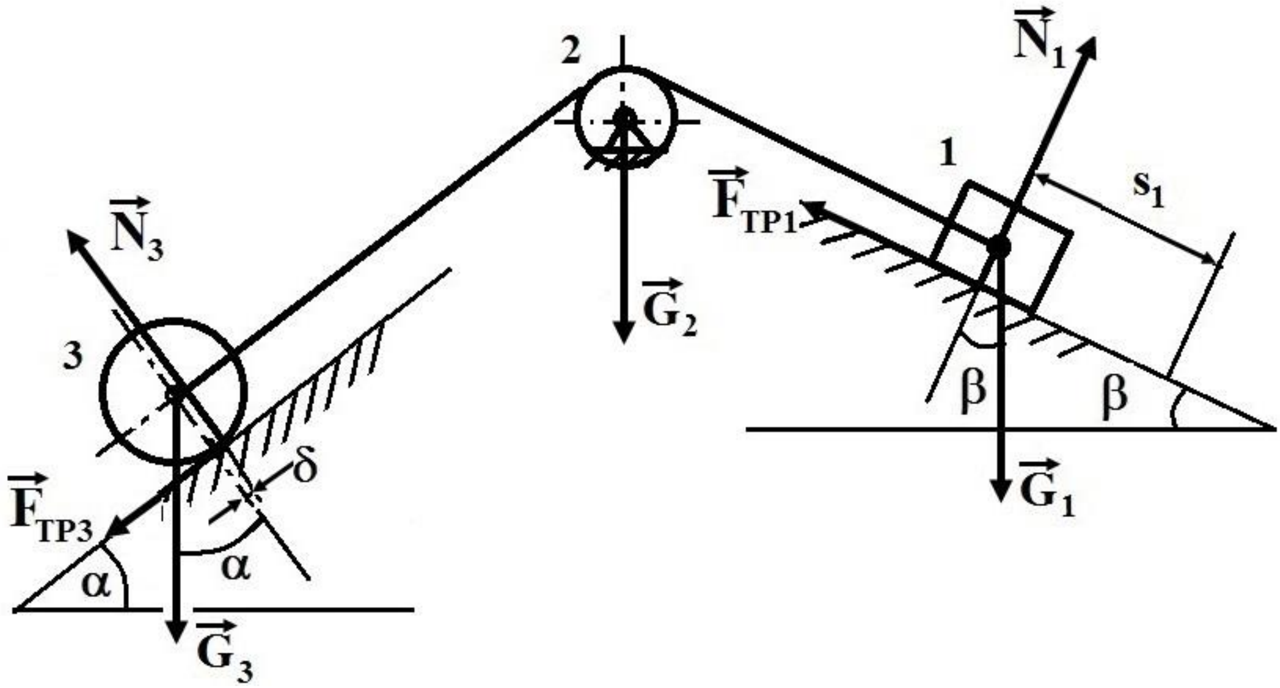


Рисунок 6.4.

Дано: $m = 10$ кг, $m_1 = 2m$ кг, $m_2 = \frac{m}{2}$ кг, $m_3 = m$ кг, $s_1 = 0{,}2$ м, $R_2 = 0{,}2$ м, $R_3 = 0{,}4$ м, $f = 0{,}1$, $\delta = 0{,}002$ м, $g = 9{,}81$ м/с^2, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$.

Визначити: швидкість v_1 тіла 1

Розв'язання:

Скористаємось теоремою про зміну кінетичної енергії системи матеріальних тіл, яка складається з 3-х тіл:

$$E_{\text{К}} - E_{\text{К}0} = \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

$E_{\text{К}}$, $E_{\text{К}0}$ – кінетична енергія в кінцевий та початковий момент руху; $\sum_{i=1}^{n} A_i$ – сума робіт всіх зовнішніх сил та моментів. Для системи, що складається з абсолютно твердих тіл, з'єднаних нерозтяжними нитями, сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю.

У початковий момент часу система тіл була нерухома, тому швидкості всіх точок та тіл дорівнювали нулю. Таким чином, кінетична енергія в початковий момент руху $E_{\text{К}0} = 0$.

Припускаємо, що тіло 1 рухається вниз і має переміщення s_1 та швидкість v_1. Виразимо швидкості та переміщення точок системи через кінематичні характеристики тіла 1.

Визначимо кінетичну енергію матеріальної системи.

Матеріальна система складається з трьох тіл певної маси, тому кінетична енергія матеріальної системи дорівнює сумі кінетичних енергій трьох тіл:

$$E_{\text{К}} = E_{\text{К}_1} + E_{\text{К}_2} + E_{\text{К}_3},$$

$E_{\text{К}_1}$ – кінетична енергія 1-го тіла, яке рухається поступально вздовж нахиленої під кутом β до горизонту; $E_{\text{К}_2}$ – кінетична енергія 2-го тіла, яке обертається навколо нерухомої осі; $E_{\text{К}_3}$ – кінетична енергія 3-го тіла, яке здійснює плоскопаралельний рух, котиться по нахиленій під кутом α до горизонту поверхні. Тіла з’єднані між собою ниттю, яка не розтягується, напрям пересування тіл визначається напрямом пересування тіла 1 s_1.

Зводячи вирази до доданків з множником швидкості v_1 та з урахуванням виразів мас тіл через масу m, доречно в подальшому увести коефіцієнти k_i (k_1, k_2, k_3) для отримання виразу для кінетичної енергії системи.

Тіло 1. Згідно з (6.4) кінетична енергія тіла, що рухається поступально, визначається:

$$E_{\text{К}_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} 2 m v_1^2 = k_1 m v_1^2, \quad k_1 = 1.$$

Тіло 2. Згідно з (6.6) кінетична енергія тіла, що обертається, визначається:

$$E_{\text{К}_2} = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2,$$

де $I_2 = m_2 \dfrac{R_2^2}{2}$ – момент інерції відносно осі обертання суцільного диску – тіла 2, $\omega_2 = \dfrac{v_1}{R_2}$ – його кутова швидкість. Останнє співвідношення отримано через залежності між лінійними швидкостями тіла 1 і точок на зовнішньому контурі тіла 2. Остаточно:

$$E_{\text{К}_2} = \frac{1}{2} m_2 \frac{R_2^2}{2} \left(\frac{v_1}{R_2}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{2} \frac{R_2^2}{2} \left(\frac{v_1}{R_2}\right)^2 = \frac{1}{8} m v_1^2 = k_2 m v_1^2,$$

$$k_2 = \frac{1}{8}.$$

Тіло 3. Згідно з (6.7) кінетична енергія тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, визначається:

$$E_{\text{К}_3} = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,$$

де $I_3 = m_3 \dfrac{R_3^2}{2}$ – момент інерції відносно осі обертання суцільного диску – тіла 3, $\omega_3 = \dfrac{v_1}{R_3}$ – його кутова швидкість обертання, v_3 – швидкість центра мас, який для суцільного диска збігається з центром круга. Обертання тіла в плоскопаралельному русі здійснюється навколо точки центра мас. Самий центр тіла 3 пересувається поступально зі швидкістю $v_3 = v_1$. Остаточно вираз для кінетичної енергії записуємо відповідно до руху центра мас:

$$E_{\text{К}_3} = \frac{1}{2} m_3 v_1^2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{R_3^2}{2}\left(\frac{v_1}{R_3}\right)^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m \frac{R_3^2}{2}\left(\frac{v_1}{R_3}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{4} m v_1^2 = \frac{3}{4} m v_1^2 = k_3 m v_1^2, \quad k_3 = \frac{3}{4}.$$

Таким чином, кінетична енергія системи:

$$E_{\text{К}} = (k_1 + k_2 + k_3) m v_1^2 = 1{,}875 m v_1^2.$$

Визначимо суму робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до системи на заданому переміщенні. Зовнішні сили показано на рисунку.

Тіло 1. Робота сили тяжіння $\vec{G}_1$:

$$A_{G_1} = m_1 g s_1 \sin\beta = 2mgs_1 \sin\beta.$$

Робота сили тертя ковзання $\vec{F}_{\text{ТР}1}$:

$$A_{F_{\text{ТР}1}} = -F_{\text{ТР}1} s_1.$$

У свою чергу сила тертя ковзання:

$$F_{\text{ТР}1} = f N_1 = f m_1 g \cos\beta,$$

де $\vec{N}_1$ – нормальна реакція поверхні тіла 1, і остаточно:

$$A_{F_{\text{ТР}1}} = -f m_1 g s_1 \cos\beta = -f 2mgs_1 \cos\beta.$$

Робота сили $\vec{N}_1$ дорівнює нулю через її перпендикулярність до переміщення.

Тіло 2. Через відсутність пересування центра ваги тіла 2 робота сили тяжіння $\vec{G}_2$ дорівнює нулю: $A_{G_2} = 0$.

Тіло 3. Робота сили тяжіння $\vec{G}_3$:

$$A_{G_3} = -m_3 g s_3 \sin\alpha.$$

Знак «–» введено через протилежність переміщення дії сили тяжіння, спрямованої донизу. У системі $s_3 = s_1$, що дає:

$$A_{G_3} = -m_3 g s_1 \sin\alpha = -mgs_1 \sin\alpha.$$

При коченні тіла 3 виникає сила тертя кочення (опору коченню). Робота пари сил $\vec{G}_3$ і $\vec{N}_3$ опору кочення тіла 3 визначається:

$$A_{F_{\text{ТР}3}} = -M_{\text{ОП}}\varphi_3,$$

де момент пари сил з плечем δ і кут повороту тіла 3 дорівнюють:

$$M_{\text{ОП}} = \delta N_3 = \delta m_3 g \cos\alpha, \qquad \varphi_3 = \frac{s_3}{R_3} = \frac{s_1}{R_3}.$$

Остаточно:

$$A_{F_{\text{ТР}3}} = -\delta m_3 g \cos\alpha \frac{s_1}{R_3} = -\delta mg \cos\alpha \frac{s_1}{R_3}.$$

Робота сили $\vec{N}_3$ дорівнює нулю.

Таким чином, сума всіх робіт зовнішніх сил A_Σ:

$$A_\Sigma = A_{G_1} + A_{F_{\text{ТР}1}} + A_{G_3} + A_{F_{\text{ТР}3}},$$

що дає вираз для теореми про зміну кінетичної енергії системи:

$$(k_1 + k_2 + k_3)mv_1^2 = 1{,}875mv_1^2 = A_{G_1} + A_{F_{\text{ТР}1}} + A_{G_3} + A_{F_{\text{ТР}3}}.$$

Скорочення на масу та приведення до виразу відносно швидкості v_1 дає:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gs_1\sin\beta - f2gs_1\cos\beta - gs_1\sin\alpha - \delta g\cos\alpha\cdot\frac{s_1}{R_3}}{k_1+k_2+k_3}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{g\cdot S_1}{k_1+k_2+k_3}\left(2\sin\beta - f2\cos\beta - \sin\alpha - \cos\alpha\cdot\frac{\delta}{R_3}\right)}.$$

Підставимо числові дані:

$$v_1 = \sqrt{\frac{9{,}81\cdot0{,}2}{1{,}875}\left(2\cdot\sin45° - 0{,}1\cdot2\cdot\cos45° - \sin30° - \cos30°\cdot\frac{0{,}002}{0{,}4}\right)}$$

$= 0{,}877$ м/с.

Відповідь: швидкість $v_1 = 0{,}877$ м/с.

Приклад 2. Механічна система, початкове положення якої показано на рис. 6.5, під дією сил тяжіння починає рухатися зі стану спокою. Нехтуючи силами опору та масами нерозтягнутих нитей, визначити закон руху тіла 1.

Дано: $m_1 = 12$ кг, $m_2 = 8$ кг, $m_3 = 4$ кг, $R_2 = 12$ см, $R_3 = 4$ см, $r_2 = 8$ см, $i_{x2} = 10$ см, $M = 80$ Н·см.

Визначити: закон руху тіла 1, використовуючи теорему про зміну кінетичної енергії системи (натяжіння ниті не враховувати)

Розв'язання. Використовуємо теорему про зміну кінетичної енергії:

$$E_{\text{К}} - E_{\text{К}0} = \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

$E_{\text{К}}$, $E_{\text{К}0}$ – кінетична енергія в кінцевий та початковий момент руху; $\sum_{i=1}^{n} A_i$ – сума робіт всіх зовнішніх сил та моментів.

У початковий момент часу система тіл була нерухома, тому швидкості всіх точок та тіл дорівнювали нулю. Таким чином, кінетична енергія в початковий момент руху $E_{\text{К}0} = 0$.

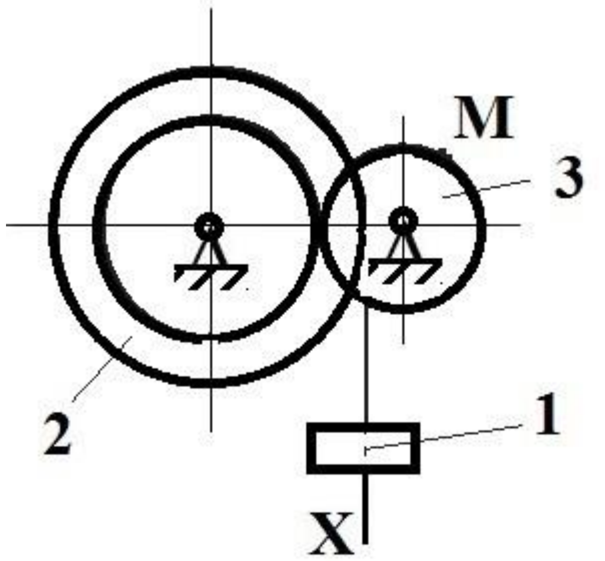


Рисунок 6.5.

Припускаємо, що тіло 1 рухається вниз і має переміщення s_1 та швидкість v_1.

Визначимо кінетичну енергію матеріальної системи. Матеріальна система складається з 3-х тіл певної маси, тому кінетична енергія матеріальної системи дорівнює сумі кінетичних енергій трьох тіл:

$$E_{\text{К}} = E_{\text{К}_1} + E_{\text{К}_2} + E_{\text{К}_3},$$

$E_{\text{К}_1} = {m_1 v_1^2}/{2}$ – кінетична енергія 1-го тіла, яке рухається поступально;

$E_{\text{К}_2} = {I_2 \omega_2^2}/{2}$ – кінетична енергія 2-го тіла, яке обертається;

$E_{\text{К}_3} = {I_3 \omega_3^2}/{2}$ – кінетична енергія 3-го тіла, яке обертається;

I_2, I_3 – моменти інерції 2-го та 3-го тіла;

ω_2, ω_3 – кутові швидкості 2-го та 3-го тіла.

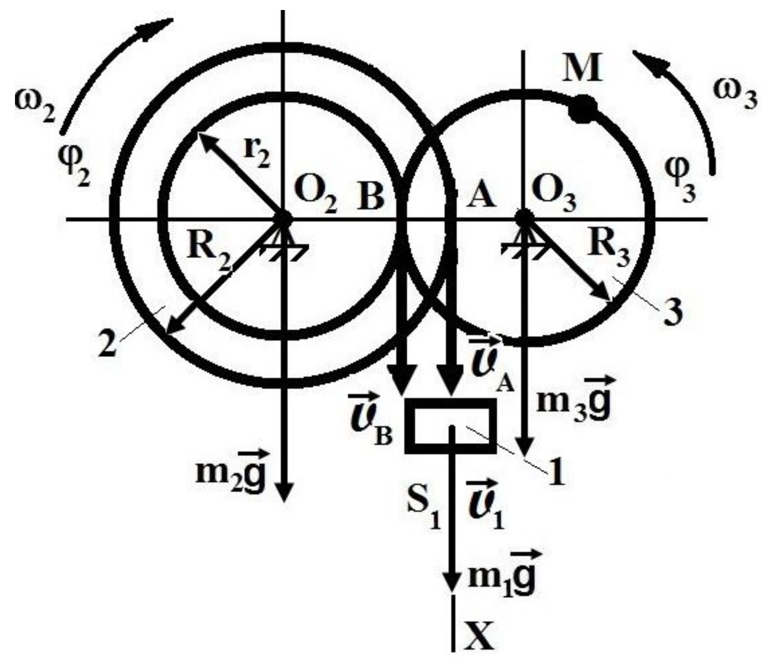


Рисунок 6.6.

На рис. 6.6 покажемо зовнішні сили, що діють на систему, а також кінематичні характеристики рухів тіл 1, 2, 3. Між тілами 1 і 2 загальною точкою є точка A – точка збігу нитi з тіла 2. Швидкість точки A дорівнює швидкості тіла 1, тобто $v_1 = v_A$.

Крім того, точка A належить тілу 2, що здійснює обертальний рух, тому швидкість цієї точки визначаємо за формулою:

$$v_A = \omega_2 R_2.$$

Виходячи з цього, маємо залежність між кутовою швидкістю ω_2 та швидкістю v_1

$$\omega_2 = {}^{v_1}/_{R_2}.$$

Визначимо залежність між кутовою швидкістю ω_3 та швидкістю v_1. Для цього скористаємось тим, що точка B належить тілу 2 та тілу 3, тобто маємо:

$$v_B = \omega_3 R_3 = \omega_2 r_2.$$

Таким чином:

$$\omega_3 = \omega_2 \, {}^{r_2}/_{R_3} = v_1 \frac{r_2}{R_2 R_3}.$$

Моменти інерції 2-го та 3-го тіла визначаємо за формулами:

$$I_2 = m_2 i_{x2}^2, \quad I_3 = m_3 \frac{R_3^2}{2}.$$

Визначимо кінетичні енергії тіл матеріальної системи через швидкість v_1 1-го тіла:

$E_{\text{K}_1} = {}^{m_1 v_1^2}/_2 = \frac{12 v_1^2}{2} = 6 v_1^2$ – кінетична енергія 1-го тіла;

$E_{\text{K}_2} = {}^{I_2 \omega_2^2}/_2 = \frac{m_2 i_{x2}^2}{2} \left({}^{v_1}/_{R_2}\right)^2 = \frac{8 \cdot 10^2}{2} \left(\frac{v_1}{12}\right)^2 = 2{,}78 v_1^2$ – кінетична енергія 2-го тіла;

$E_{\text{K}_3} = {}^{I_3 \omega_3^2}/_2 = \frac{1}{2} m_3 \frac{R_3^2}{2} \left(v_1 \frac{r_2}{R_2 R_3}\right)^2 = \frac{1}{2} 4 \frac{4^2}{2} \left(v_1 \frac{8}{12 \cdot 4}\right)^2 =$
$= 0{,}44 v_1^2$ – кінетична енергія 3-го тіла.

Кінетична енергія всієї матеріальної системи:

$$E_{\text{К}} = E_{\text{К}_1} + E_{\text{К}_2} + E_{\text{К}_3} = 6v_1^2 + 2{,}78v_1^2 + 0{,}44v_1^2 = 9{,}22v_1^2.$$

У виразах для кінетичної енергії множники біля v_1^2 отримано з використанням величин радіусів, розмірність яких може бути будь-яка лінійна, але однакова (метри, сантиметри тощо). За цих умов множники мають розмірність «кг», що потребує в подальшому вимірювання швидкості у «м/с» для отримання енергії у розмірності «Дж».

Визначимо роботу сил та моментів, що діють на матеріальну систему:

1) сили тяжіння m_1g, m_2g, m_3g, які прикладені до центру ваги тіл 1-3;

2) обертальний момент M, прикладений до 3-го тіла.

За визначенням робота сили є скалярний добуток вектора сили на вектор переміщення точки прикладення сили. Робота моменту є добуток моменту на кут обертання тіла до якого прикладений момент. Таким чином, маємо, приймаючи g =10 м/с^2:

$$A(m_1g) = m_1g \cdot s_1 = 120s_1,$$
$$A(m_2g) = m_2g \cdot s_{O2} = 0,$$
$$A(m_3g) = m_3g \cdot s_{O3} = 0,$$
$$A(M) = M \cdot \varphi_3.$$

Визначимо роботу моменту через переміщення s_1. Для цього скористаємось співвідношенням:

$$\omega_3 = v_1 \frac{r_2}{R_2R_3} \to \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{ds_1}{dt}\frac{r_2}{R_2R_3} \to d\varphi_3 = ds_1 \frac{r_2}{R_2R_3} \to$$

$$\varphi_3 = s_1 \frac{r_2}{R_2R_3}.$$

$$A(M) = M \cdot \varphi_3 = M \cdot s_1 \frac{r_2}{R_2R_3} = 80 \cdot s_1 \frac{8}{12\cdot 4} = 13{,}33s_1.$$

Повна робота дорівнює алгебраїчній сумі всіх робіт:

$$A=\sum_{i=1}^{4}A_i=A(m_1g)+A(m_2g)+A(m_3g)+A(M)=$$
$$=120s_1+0+0+13{,}33s_1=133{,}33s_1.$$

У виразах для роботи множники біля s_1 мають розмірність «кг•м/с^2», що потребує в подальшому вимірювання переміщення у «м» для отримання роботи у розмірності «Дж».

Використовуємо закон зміни кінетичної енергії матеріальної системи, звідки:

$$9{,}22v_1^2=133{,}33s_1,$$

та після скорочення на менший з множників:

$$v_1^2=14{,}44s_1.$$

Далі після узяття кореня квадратного від обох частин та представлення швидкості як похідної від переміщення потрібно звести в один бік вирази через s_1, а в другий вирази через час t.

$$v_1=\sqrt{14{,}44s_1} \quad \text{або} \quad \frac{ds_1}{dt}=s_1^{0,5}\sqrt{14{,}44}.$$

$$s_1^{-0,5}ds_1=\sqrt{14{,}44}dt$$

$$\int s_1^{-0,5}ds_1=\int\sqrt{14{,}44}dt.$$

Остаточно після інтегрування маємо:

$$s_1=3{,}61t^2\text{ (м)}, \quad v_1=7{,}22t\text{ (м/с)}.$$

Можна інакше підійти до розв’язання рівняння $v_1^2=14{,}44s_1$, узявши похідну від обох частин за часом:

$$2v_1\frac{dv_1}{dt}=14{,}44\frac{ds_1}{dt},$$

де $\frac{dv_1}{dt} = \dot{v}_1 = \ddot{s}_1$, $\frac{ds_1}{dt} = \dot{s}_1 = v_1$, що після відповідних замін приводить до виразу:

$$2v_1\ddot{s}_1 = 14{,}44v_1 \quad \text{або} \quad \ddot{s}_1 = 7{,}22.$$

Інтегрування дає аналогічні до отриманих вище результати. На жаль, для випадків залежності зовнішніх сил або моментів від часу задача стає достатньо складною для інтегрування та отримання законів руху в аналітичний спосіб.

Контрольні питання

1. Назвіть дві міри механічного руху
2. Що називається кінетичною енергією механічної системи?
3. Як обчислюється кінетична енергія матеріальної системи?
4. Як обчислюється кінетична енергія твердого тіла при поступальному русі та при обертанні навколо нерухомої осі?
5. Як визначається робота сил, які прикладені до твердого тіла?
6. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок.

Глава 7. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки та механічної системи. Кінетостатика

7.1. Принцип Д'Аламбера

Усі методи розв'язання задач динаміки, які були розглянуті у попередніх главах, ґрунтуються на рівняннях, що випливають з законів Ньютона безпосередньо або ж з загальних теорем, які є наслідком цих законів. Однак цей шлях не єдиний. Виявляється, що рівняння руху або умови рівноваги механічної системи можна отримати, поклавши в основу замість законів Ньютона інші загальні положення, які називають **принципами механіки**. У багатьох випадках застосування цих принципів дозволяє знайти більш ефективні методи розв'язання відповідних задач. У цій главі буде розглянуто один із загальних принципів механіки, який називають **принципом Д'Аламбера**. Особливо зручний цей принцип (метод кінетостатики), якщо потрібно визначити реакції в'язей, коли відомий закон руху точки та активні сили.

У статиці будь-яке тіло або МТ знаходиться у рівновазі, якщо діючі на них силові фактори урівноважують один одного. Завдяки засобам, розробленим для розв'язання задач статики, можна визначати невідомі активні або реактивні сили, застосувавши прості математичні прийоми та геометричні побудови. Виникає питання, чи можна ці прийоми використовувати для рухомих тіл, які рухаються з прискоренням.

Нехай МТ масою m рухається з прискоренням $\vec{a}$ під дією деякої системи активних і реактивних сил, рівнодійна яких дорівнює $\vec{F}+\vec{R}$. Скористаємось другим законом динаміки $m\vec{a}=\vec{F}+\vec{R}$ для того, щоб рівняння руху цієї МТ записати у формі рівнянь рівноваги:

$$\vec{F}+\vec{R}+(-m\vec{a})=0. \tag{7.1}$$

Вираз, який стоїть у дужках, називають **силою інерції** і позначають $\overrightarrow{\Phi}$. Таким чином, $\overrightarrow{\Phi}=-m\vec{a}$. Зауважимо, що використовують також інші позначення цієї сили, наприклад, $\vec{F}^{\text{ін}}$, $\vec{F}^{in}$, $\vec{J}$.

Сила інерції (або даламберовою силою інерції) є вектор, який дорівнює добутку маси МТ на її прискорення в заданий момент часу, і спрямований у бік, протилежну прискоренню. На основі цього рівняння можна записати:

$$\vec{F} + \vec{R} + \overrightarrow{\Phi} = 0. \qquad (7.2)$$

Вираз (7.2) є математичним виразом принципу Д’Аламбера: **активні та реактивні сили, діючі на МТ, разом з силами інерції утворюють систему взаємно урівноважених сил, які задовольняють всім умовам рівноваги**.

Нагадаємо, що силою в теоретичній механіці називають міру механічної взаємодії матеріальних тіл.

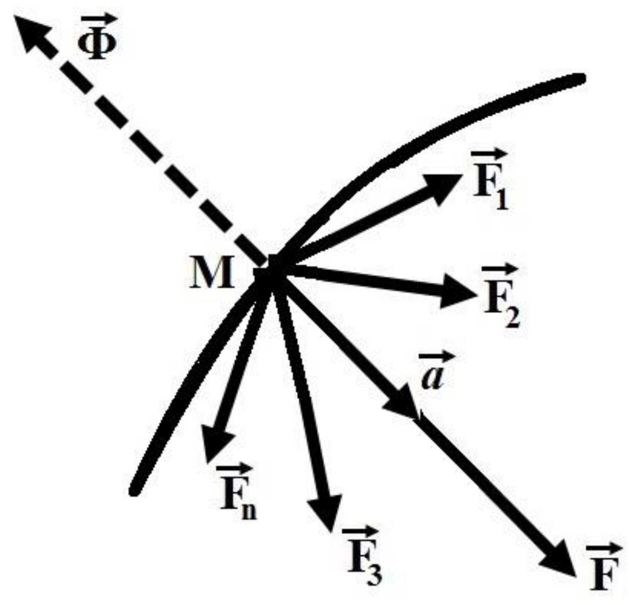


Рисунок 7.1.

З цього погляду, сила інерції не є силою, тому що неможливо вказати інше тіло, яке взаємодіє з даними із силою $\overrightarrow{\Phi}$. В той же час, $\overrightarrow{\Phi}$ – векторна величина, вона має розмірність сили, тому зручно назвати її силою (рис. 7.1). Д’Аламбер запропонував спосіб застосування методів статики до рухомих МТ, використовуючи при цьому як основний інструмент поняття інертності та сили інерції. Нагадаємо, що поняття **інертності** – властивість довільних матеріальних тіл і точок, яке проявляє у намаганні зберегти свій стан. Принцип Д’Аламбера дозволяє звести процес складання рівнянь динаміки до складання рівнянь статики.

Саме умовне урівноваження силою інерції тіл, які рухаються з прискоренням, дозволило використовувати при розв’язанні задач динаміки прийоми статики, створивши розділ механіки – **кінетостатику**.

7.2. Метод кінетостатики

Методом кінетостатики називають формальний прийом, який дає можливість записати рівняння руху у вигляді рівнянь рівноваги. Застосовуючи метод кінетостатики до рухомої МТ, слід записати умову її «рівноваги» (7.1) під дією активних сил, реакції в'язів, а також сил інерції у термінах рівнодійної:

$$\vec{F} + \vec{R} + \overrightarrow{\Phi} = 0,$$

де $\vec{F}$ – рівнодійна активних сил, прикладених до МТ; $\vec{R}$ – рівнодійна реакцій в'язей, накладених на МТ; $\overrightarrow{\Phi}$ – сила інерції МТ.

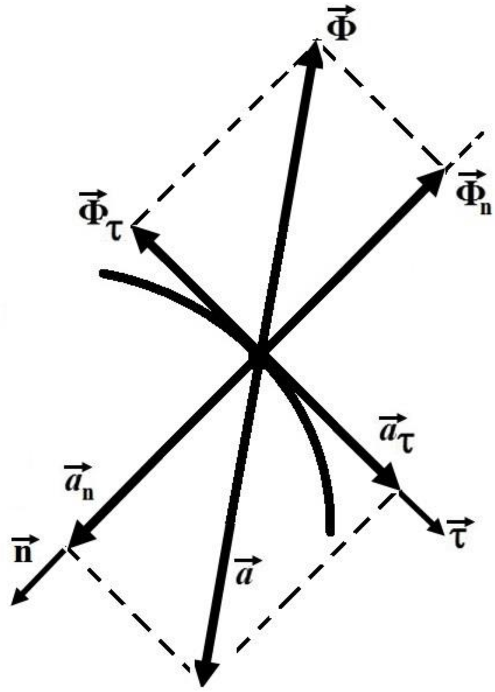


Рисунок 7.2.

Під час руху МТ по кривій (рис. 7.2) силу інерції можна розкласти на дві складові, що відповідають дотичному і нормальному прискоренням: дотичну силу інерції і нормальну силу інерції, причому:

$$\overrightarrow{\Phi}_n = -m\vec{a}_n, \overrightarrow{\Phi}_\tau = -m\vec{a}_\tau, \quad (7.3)$$

$$\overrightarrow{\Phi} = -m\vec{a} = \overrightarrow{\Phi}_n + \overrightarrow{\Phi}_\tau. \quad (7.4)$$

За модулем:

$$\Phi_\tau = m|a_\tau| = mr|\varepsilon|,$$

$$\Phi_n = m|a_n| = mr\omega^2,$$

$$\Phi = m\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Метод кінетостатики для невільної СМТ приводить до системи рівнянь:

$$\begin{gathered}\vec{F}_1 + \vec{R}_1 + \overrightarrow{\Phi}_1 = 0,\\ \vec{F}_2 + \vec{R}_2 + \overrightarrow{\Phi}_2 = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \vec{F}_k + \vec{R}_k + \overrightarrow{\Phi}_k = 0.\end{gathered} \quad (7.5)$$

Кількість векторних рівнянь дорівнює кількості МТ системи. Якщо скласти наведені рівняння, то:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k + \sum_{k=1}^{n} \vec{\Phi}_k = 0, \qquad (7.6)$$

Тобто геометрична сума головного вектора зовнішніх активних сил, головного вектора зовнішніх реакцій в'язів і головного вектора сил інерції СМТ дорівнює нулю. На підставі (7.6) сформулюємо принцип Д'Аламбера для системи: **якщо в будь-який момент часу до кожної з точок системи, окрім внутрішніх і зовнішніх сил, які діють на точки системи, прикласти відповідні сили інерції, то отримана система сил буде перебувати в рівновазі і до неї можна застосувати рівняння статики**.

Помножимо кожне рівняння системи (7.5) векторно на радіус-вектор відповідної точки:

$$\vec{r}_k \times \vec{F}_k + \vec{r}_k \times \vec{R}_k + \vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k = 0. \qquad (7.7)$$

Векторний добуток радіус-вектора на вектор сили є моментом сили відносно початку координат. Складаючи рівняння (7.7) для усіх точок СМТ, одержимо:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_o\left(\vec{F}_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_o\left(\vec{R}_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_o\left(\vec{\Phi}_k\right) = 0, \qquad (7.8)$$

тобто **геометрична сума головних моментів зовнішніх активних сил, реакцій зовнішніх в'язей і сил інерції відносно будь-якого центру дорівнює нулю.**

Спроектувавши рівняння (7.6) і (7.8) на осі координат, одержимо шість рівнянь рівноваги для задач динаміки.

Методом кінетостатики можна користуватися при розв'язанні прямих задач динаміки невільної СМТ, тобто при розв'язанні задач, в яких по заданому закону руху визначаються невідомі сили. Однак всі ці задачі можна розв'язувати звичайним шляхом – через застосування основного рівняння динаміки для кожної точки СМТ.

При розв’язанні обернених задач, тобто в яких по заданим силам визначається закон руху, застосування методу кінетостатики недоцільно.

Методом кінетостатики можна користуватися, коли до числа заданих і невідомих величин входять: маси МТ, моменти інерції твердих тіл, швидкості та прискорення точок, кутові швидкості та кутові прискорення твердих тіл, сили та моменти сил.

Приклади використання принципу Д’Аламбера.

Приклад 1. Підйомник вагою 7350 Н піднімається рівноприскорено і за перші 5 с проходить 25 м. Визначити натяжіння його троса.

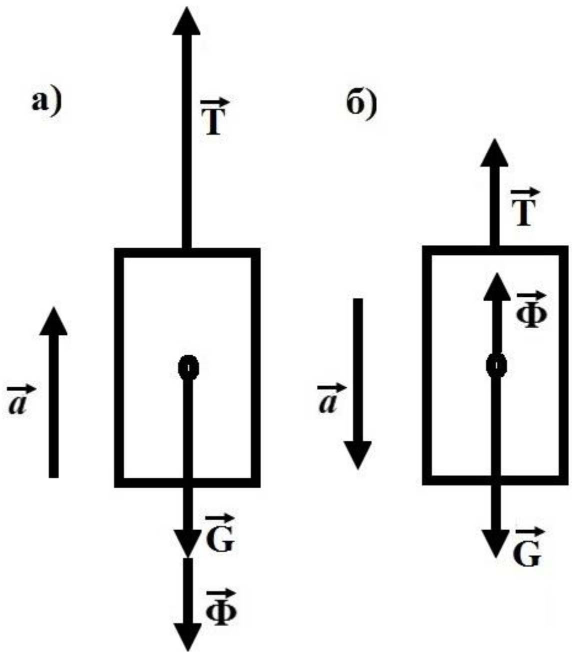


Рисунок 7.3.

Розв’язання.

Прикладемо до підйомника діючі на нього сили: силу тяжіння $\vec{G}$, реакцію троса $\vec{T}$ (рис. 7.3, а). Умовно прикладемо до підйомника його силу інерції $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$, спрямуваши її проти прискорення $\vec{a}$, тобто вниз. Тоді геометрична сума сил $\vec{G}$, $\vec{T}$, $\vec{\Phi}$ дорівнює нулю:

$$\vec{G} + \vec{T} + \vec{\Phi} = 0.$$

Через те, що сили спрямовані вздовж однієї прямої, то:

$$T - G - \Phi = 0.$$

звідки

$$T = G + \Phi.$$

Для визначення реакції троса знайдемо модуль сили інерції підйомника, визначивши попередньо його прискорення. Рівняння рівноприскореного руху зі стану спокою:

$$H = \frac{at^2}{2}, \quad \text{звідки} \quad a = \frac{2H}{t^2} = \frac{2 \cdot 25}{5^2} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Модуль сили інерції:

$$\Phi = ma = \frac{G}{g}a = \frac{7350}{9{,}8}2 = 1500 \text{ Н.}$$

Знаходимо реакцію троса, яка дорівнює його натяжінню:

$$T = G + \Phi = 7350 + 1500 = 8850 \text{ Н.}$$

При русі підйомника вниз з тим же прискоренням (рис. 7.3, б)

$$T = G - \Phi = 7350 - 1500 = 5850 \text{ Н.}$$

За умов рівномірного руху і вгору, і вниз $a = 0$, $\Phi = 0$, тому

$$T = G = 7350 \text{ Н.}$$

Приклад 2. Кулька A масою $m = 0{,}05$ кг підвішена на ниті довжиною l, закріпленою у нерухомій точці O. Кулька здійснює рівномірний рух по окружності в горизонтальній площині, при якому нить складає з вертикаллю кут $\alpha = 30°$. Визначити натяжіння ниті і швидкість кульки цього конічного маятника (рис. 7.4, а).

Розв'язання. Прикладаємо до кульки діючі на неї сили (рис. 7.4, б): вагу $\vec{G}$, реакцію ниті $\vec{T}$. Вага кульки за умови $g =$10 м/с^2 дорівнює $G = 0{,}5$ Н.

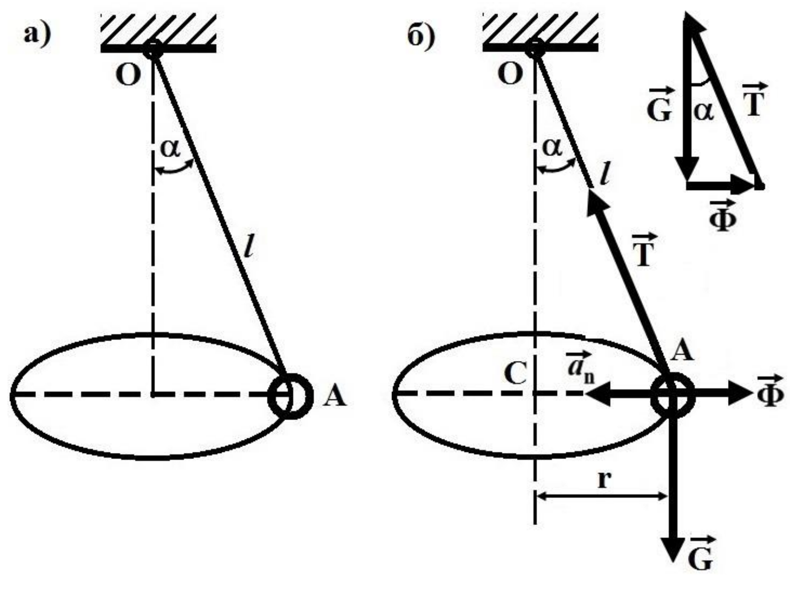


Рисунок 7.4.

Умовно прикладаємо силу інерції $\vec{\Phi}$. За рівномірного руху сила інерції кульки $\vec{\Phi}$ дорівнює нормальній силі інерції $\vec{\Phi}_n$, спрямованої протилежно нормальному прискоренню $\vec{a}_n$.

За модулем вона дорівнює:

$$\Phi = \Phi_n = \frac{mv^2}{r}, \quad \text{де} \quad r = l\sin\alpha.$$

Побудуємо замкнений трикутник сил $\vec{G}$, $\vec{T}$, $\vec{\Phi}$. З трикутника визначаємо модулі сил $\vec{T}$ і $\vec{\Phi}$:

$$T = \frac{G}{\cos\alpha} = \frac{0{,}5}{0{,}866} = 0{,}577 \text{ Н};$$

$$\Phi = G \cdot \mathrm{tg}\alpha = 0{,}5 \cdot 0{,}577 = 0{,}289 \text{ Н}.$$

Визначивши модуль сили інерції, знаходимо швидкість кульки A:

$$v = \sqrt{\frac{\Phi \cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{\Phi g l \cdot \sin\alpha}{G}} = \sqrt{\frac{0{,}289 \cdot 10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5}{0{,}5}} = 1{,}08 \text{ м/с}.$$

7.3. Сили інерції. Приведення сил інерції до простішого вигляду

Як відомо зі статики, систему сил можна привести до сили, яка векторно дорівнює головному вектору, і до пари сил з моментом, який векторно дорівнює головному моменту. Приведення сил інерції дає наступні результати:

а) **при поступальному русі твердого тіла** (рис. 7.5) сили інерції приводяться до рівнодійної, прикладеної до центру ваги.

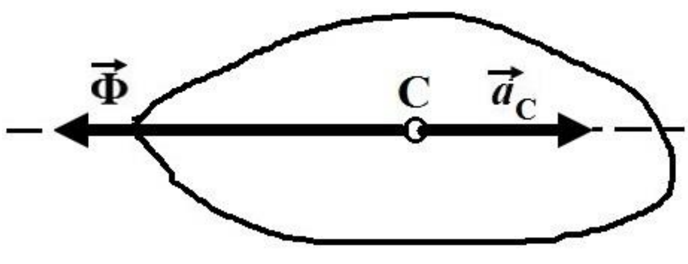


Рисунок 7.5.

Рівнодійна $\vec{\Phi}$ дорівнює за модулем добутку маси твердого тіла на прискорення його довільної точки і спрямована протилежно цьому прискоренню:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_C. \qquad (7.9)$$

б) **при обертанні плоскої фігури навколо перпендикулярної до неї нерухомої осі** (рис. 7.6) сили інерції приводяться до рівнодійної, прикладеної у центрі кочення відповідного фізичного маятника , вісь доважку якого поєднана з нерухомою віссю даного твердого тіла (центр кочення K на відстані, що дорівнює приведеній довжині фізичного маятника

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_Z}{mr},$$

I_Z – момент інерції твердого тіла відносно осі доважку;

r – відстань від осі доважку до центру ваги.

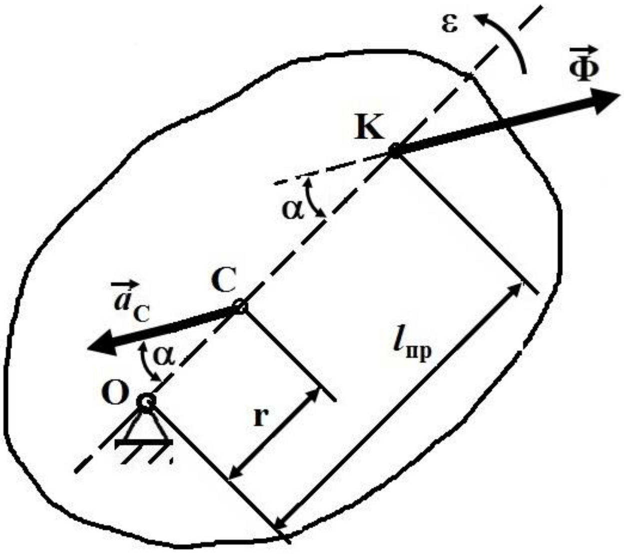


Рисунок 7.6.

Рівнодійна сил інерції $\overrightarrow{\Phi}$ дорівнює за модулем добутку маси твердого тіла на прискорення його центру ваги і спрямована у бік, протилежний цьому прискоренню:

$$\overrightarrow{\Phi} = -m\vec{a}_C, \qquad (7.10)$$

з урахуванням

$$a_C = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \text{ то}$$

$$\Phi = mr\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Напрям сили $\overrightarrow{\Phi}$ визначається кутом α, який знаходимо зі співвідношення

$$\text{tg}\alpha = \varepsilon/\omega^2.$$

Якщо за центр приведення вибрати центр ваги C твердого тіла, то сили інерції приводяться до сили, яка векторно дорівнює головному вектору $\vec{R}^{\Phi}$, і до пари сил з моментом, який дорівнює головному моменту $\vec{M}^{\Phi}$

Головний вектор сил інерції $\vec{R}^{\Phi}$ дорівнює за модулем добутку маси твердого тіла на прискорення його центру ваги і спрямований у бік, протилежний цьому прискоренню:

$$\vec{R}^{\Phi} = -m\vec{a}_C, \qquad (7.11)$$

$$R^{\Phi} = mr\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \text{tg}\alpha = \varepsilon/\omega^2. \qquad (7.12)$$

Головний момент сил інерції $\vec{M}^{\Phi}$ відносно осі, що проходить через центр ваги C паралельно осі обертання, дорівнює за модулем добутку моменту інерції твердого тіла відносно осі C на модуль кутового прискорення твердого тіла $\vec{\varepsilon}$.

Покажемо зв'язок з кількістю руху та моментом кількості руху.
Якщо згадати вираз для кількості руху СМТ

$$\vec{Q} = m\vec{v}_C,$$

то, продиференціювавши його за часом, одержимо:

$$\vec{R}^{\Phi} = -\frac{d\vec{Q}}{dt}. \tag{7.13}$$

Головний вектор сил інерції дорівнює похідній за часом від кількості руху механічної системи, узятій із знаком мінус.
Для головного моменту сил інерції

$$\vec{M}^{\Phi} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}(\vec{\Phi}_k) = \sum_{k=1}^{n}\left[\vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k\right] =$$
$$-\sum_{k=1}^{n}[\vec{r}_k \times m_k\vec{a}_k] = -\sum_{k=1}^{n}\left[\vec{r}_k \times \frac{d}{dt}(m_k\vec{v}_k)\right] =$$
$$-\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}[\vec{r}_k \times (m_k\vec{v}_k)] + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d\vec{r}_k}{dt} \times (m_k\vec{v}_k)\right] = -\frac{d}{dt}\vec{L}. \tag{7.14}$$

Другий доданок у останньому виразі дорівнює нулю через $\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{v}_k$, і векторний добуток $\vec{v}_k \times (m_k\vec{v}_k) = 0$ (вектори паралельні або збігаються). Таким чином, **головний момент сил інерції механічної системи відносно центру дорівнює похідній за часом від кінетичного моменту (моменту кількості руху) системи відносно того ж центру, узятому зі знаком мінус**.

Знак головного моменту сил інерції протилежний знаку проекції кутового прискорення:

$$M_C^{\Phi} = -I_C\varepsilon, \tag{7.15}$$

ε – проекція кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ на вісь обертання, наприклад, вісь Z). Якщо за центр приведення вибрати точку O, що лежить на нерухомій осі, то сили інерції приводяться до сили, що дорівнює головному вектору $\vec{R}^{\Phi}$, і пари сил, момент якої дорівнює головному моменту $\vec{M}^{\Phi}$. Так само,

$$\vec{R}^{\Phi} = -m\vec{a}_C,$$

а у виразі головного моменту замість I_C входить I_O, тобто:

$$M_O^{\Phi} = -I_O\varepsilon, \text{ де } \quad I_O = I_C + mr^2.$$

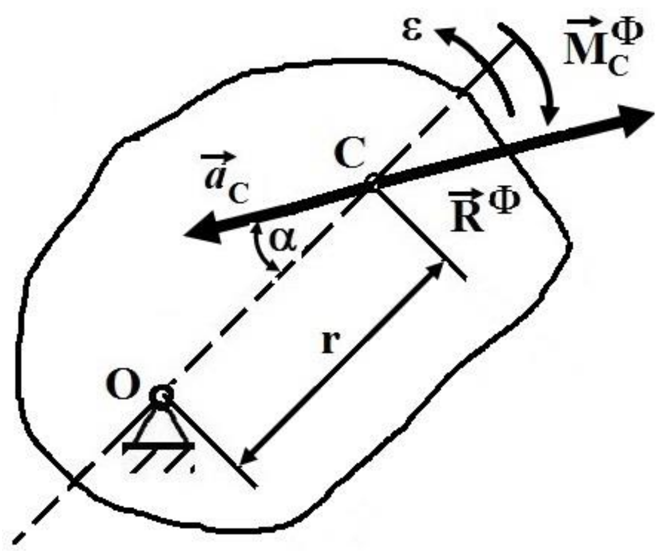


Рисунок 7.7.

У випадку, коли центр ваги C лежить на осі обертання плоскої фігури (рис. 7.7), головний вектор сил інерції $\vec{R}^{\Phi}$ дорівнює нулю, отже, система сил інерції приводиться тільки пари сил з моментом $M_O^{\Phi} = -I_O\varepsilon$.

При розв’язанні задач за формулами (7.11) та (7.15) обчислюють модулі відповідних величин, а їх напрямки вказують на рисунку до задачі.

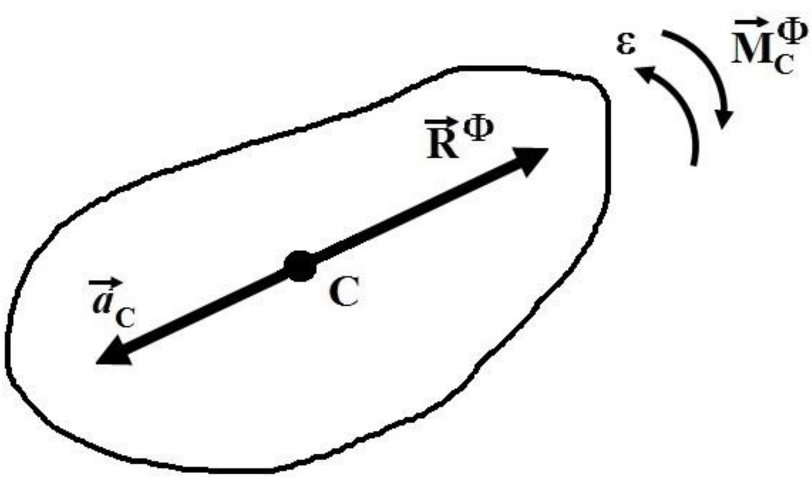


Рисунок 7.8.

в) **при русі плоскої фігури** сили інерції (рис. 7.8) приводяться до сили, яка дорівнює головному вектору $\vec{R}^{\Phi}$, і яка прикладена у центрі приведення, і до пари сил, момент якої $\vec{M}_C^{\Phi}$ дорівнює головному моменту відносно осі, що проходить через центр приведення перпендикулярно до нерухомої площини:

$$\vec{R}^{\Phi} = -m\vec{a}_C, \quad M_C^{\Phi} = -I_C\varepsilon. \tag{7.16}$$

Приведення сил інерції до сили, яка дорівнює головному вектору, і пари сил, момент якої дорівнює головному моменту, є одним з важливих етапів розв'язання задач динаміки невільної СМТ у випадку застосування методу кінетостатики або загального рівняння динаміки.

7.4. Статичні та додаткові динамічні реакції

Запишемо рівняння для головних векторів і головних моментів зовнішніх сил, реакцій в'язів і сил інерції.

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0,$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{R}) + \vec{M}_O(\vec{\Phi}) = 0.$$

Реакції в'язей містять статичні реакції (позначка «ст») та додаткові динамічні реакції (позначка «дд»):

$$\vec{R} = \vec{R}^{\text{СТ}} + \vec{R}^{\text{ДД}}, \tag{7.17}$$

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{M}_O(\vec{R}^{\text{СТ}}) + \vec{M}_O(\vec{R}^{\text{ДД}}). \tag{7.18}$$

У загальному вигляді за формулою (7.2) запишемо:

$$\vec{F} + \vec{R}^{\text{СТ}} + \vec{R}^{\text{ДД}} + \vec{\Phi} = 0.$$

Відокремлюючи статичну та додаткову динамічну частини, складаємо рівняння для визначення статичних реакцій за виразами (7.7) і (7.8):

$$\vec{F} + \vec{R}^{\text{СТ}} = 0, \quad \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{R}^{\text{СТ}}) = 0,$$

та для визначення динамічних реакцій:

$$\vec{R}^{\text{ДД}} + \vec{\Phi} = 0, \quad \vec{M}_O(\vec{R}^{\text{ДД}}) + \vec{M}_O(\vec{\Phi}) = 0.$$

За відсутності джерел додаткових динамічних реакцій на опори (нерухомість об'єктів, які складають механічну систему) виникають тільки статичні опорні реакції. Вони урівноважують активні сили, що діють на механічну систему (вага вантажа, вага опорної балки, вага підйомного механізму). Сила інерції, яка виникає при русі вантажа, прикладається до опорної балки, діє на опори, що приводить до появи додаткових опорних динамічних реакцій. Як це реалізовано, покажемо на прикладі.

Приклад 3.

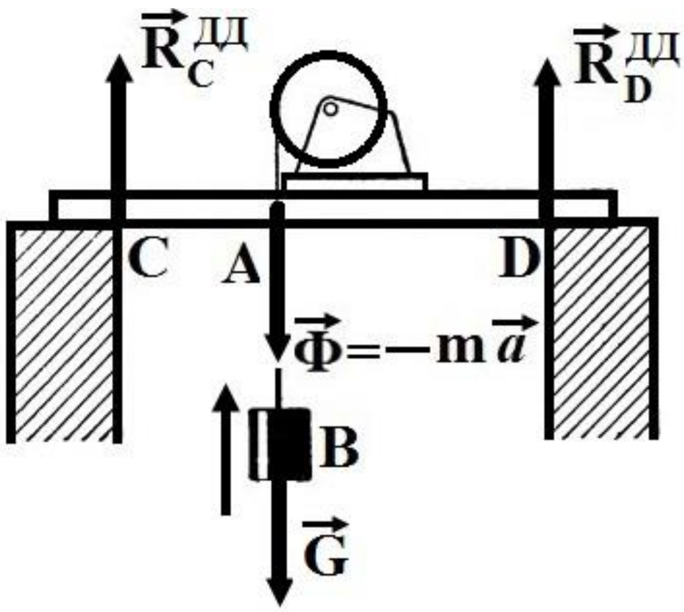


Рисунок 7.9.

Лебідка, що піднімає вантаж B вагою $G = 20$ кН, поставлена на балці, яка спирається на опори C і D; $CD = 8$ м, $AC = 3$ м. Вантаж піднімається рівноприскорено з прискоренням 0,5 м/с^2.

Визначити додатковий тиск на опори C і D, що виникає внаслідок дії сили інерції вантажа (рис. 7.9).

Розв'язання. Коли вантаж B не піднімається, то виникають статичні опорні реакції, які урівноважують активні сили, що діють на балку (вага вантажу, вага балки, вага лебідки). При підйомі вантажа B виникає сила інерції, спрямована вниз, яка прикладена до балки, і, отже, діє на опори C і D. З боку опор C і D виникають додаткові опорні реакції $\vec{R}_C^{ДД}$ і $\vec{R}_D^{ДД}$, діючі на балку. Для знаходження цих реакцій запишемо умови статичної рівноваги сили інерції $\overrightarrow{\Phi}$ і реакцій $\vec{R}_C^{ДД}$ і $\vec{R}_D^{ДД}$:

$$\vec{R}_C^{ДД} + \vec{R}_D^{ДД} + \overrightarrow{\Phi} = 0,$$

$$\vec{M}_A(\vec{R}_C^{ДД}) + \vec{M}_A(\vec{R}_D^{ДД}) + \vec{M}_A(\overrightarrow{\Phi}) = 0.$$

В аналітичній формі ці векторні умови можна представити у наступному вигляді, складаючи рівняння моментів відносно точки A:

$$R_C^{ДД} + R_D^{ДД} - \Phi = 0,$$

$$R_D^{ДД} \cdot AD - R_C^{ДД} \cdot AC = 0.$$

Звідси знаходимо відповідні реакції:

$$R_C^{ДД} = \frac{\Phi \cdot AD}{AD + AC} = \frac{G \cdot a \cdot AD}{g(AD + AC)} = \frac{20000 \cdot 0{,}5 \cdot 5}{9{,}81(5+3)} \approx 637 \text{ Н},$$

$$R_D^{ДД} = \Phi - R_C^{ДД} = \frac{G}{g} a - 637 = \frac{20000}{9{,}81} 0{,}5 - 637 \approx 382 \text{ Н}.$$

Приклад 4. Застосування основних теорем динаміки до дослідження руху матеріальної точки.

Шарик (матеріальна точка) рухається з положення A всередині трубки до точки E (рис. 7.10).

Дано: маса шарика $m = 0{,}7$ кг, початкова швидкість шарика $v_A = 6$ м/с, радіус закруглення криволінійної ділянки $R = 0{,}5$ м, прискорення вільного падіння $g = 9{,}81$ м/с^2, коефіцієнт тертя ковзання шарика по стінках трубки $f = 0{,}15$, кут визначення точки C $\alpha = 30°$, час руху шарика по ділянці AB $t_{AB} = 0{,}25$ с, кінцева швидкість шарика у точці E $v_E = 0$ м/с. Сила тертя на криволінійній ділянці відсутня.

Визначити: швидкості шарика v_B, v_C, v_D, відповідно у точках B, C, D, час t_{DE} руху шарика по ділянці DE, реакцію N_C (тиск шарика на стінку трубки) у точці C, пройдений шлях s від точки D до точки E.

Розв'язання: для визначення вказаних параметрів скористаємось теоремами про зміну кінетичної енергії та зміну кількості руху, а також принципом Д'Аламбера.

Розглянемо рух шарика окремо по ділянках (рис. 7.11).

1. Ділянка AB, прямолінійний рух з точки A до точки B за час t_{AB}, протягом якого швидкість змінюється з величини v_A до величини v_B. Швидкість шарика в положенні B визначим, застосовуючи теорему про зміну кількості руху матеріальної точки.

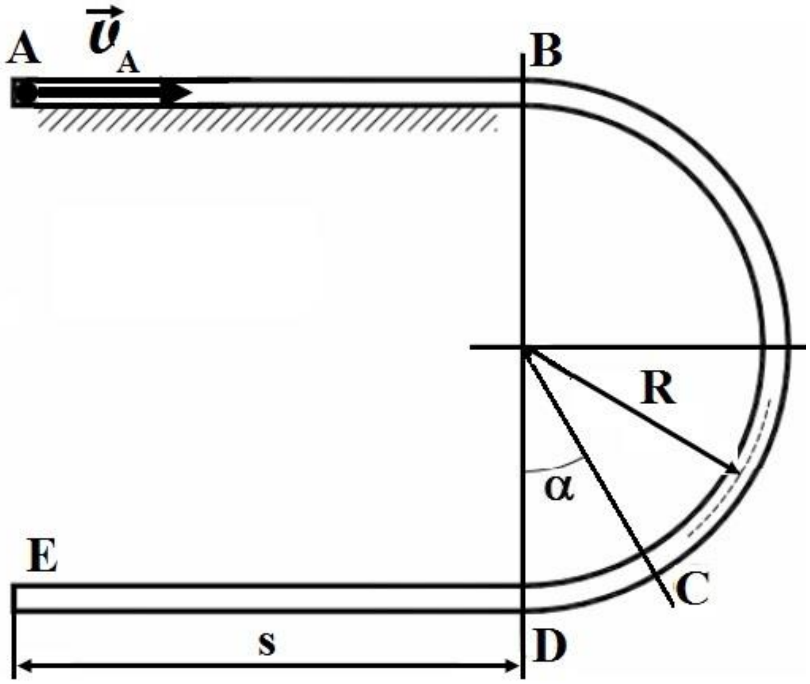


Рисунок 7.10.

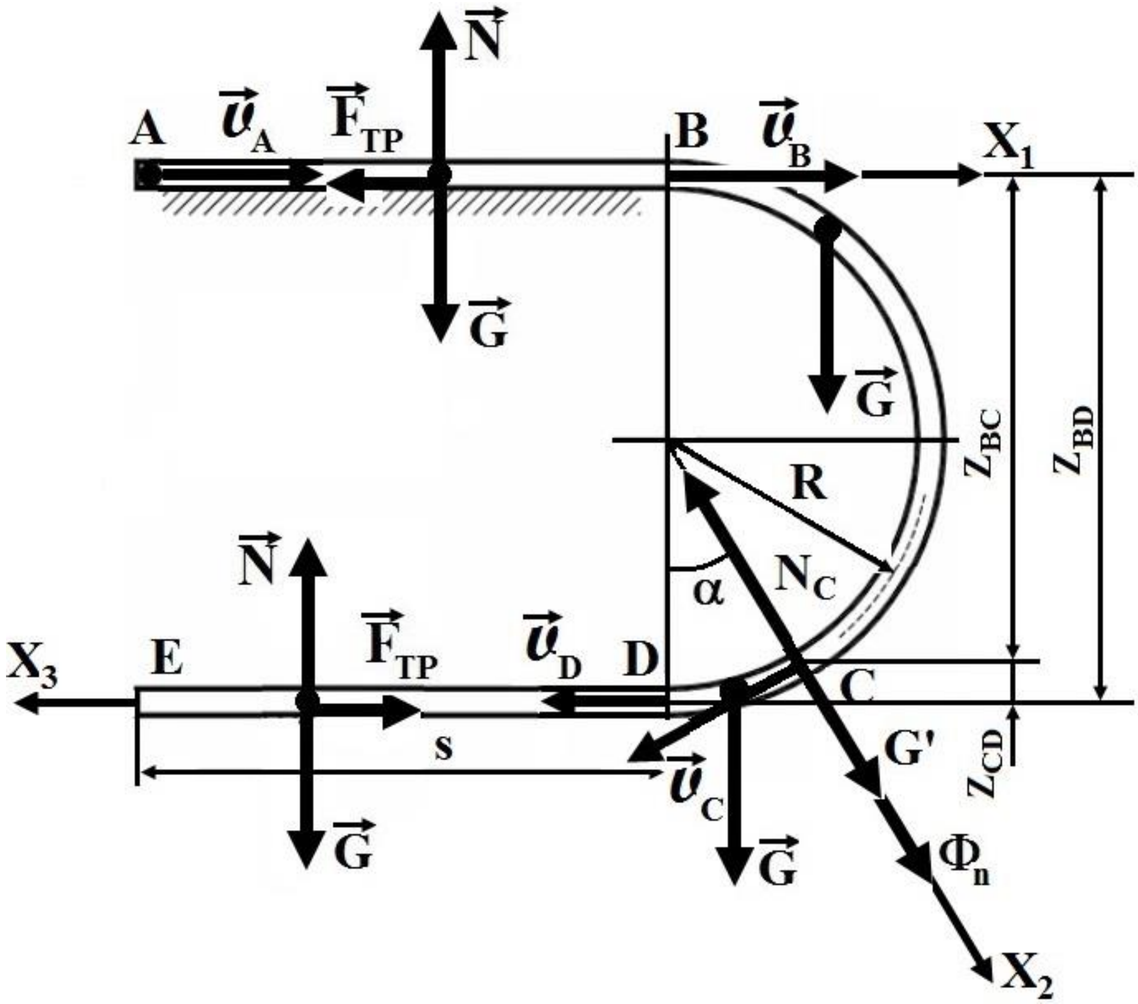


Рисунок 7.11.

Введемо вздовж напряму пересування шарика вісь X_1. До шарика прикладені сила тяжіння $\vec{F}_1 = \vec{G} = m\vec{g}$, реакція стінки трубки $\vec{F}_2 = \vec{N}$, сила тертя $\vec{F}_3 = \vec{F}_{\text{ТР}}$. Тоді:

$$\Delta(mv) = \sum_i S_i,$$

де mv – кількість руху шарика, S_i – імпульс відповідної сили. Запишемо вираз щодо теореми:

$$mv_B - mv_A = \sum_{i=1}^{3} F_i\, t_{AB}.$$

Сили тяжіння та нормальної реакції перпендикулярні до осі X_1, тому у правій частині залишається тільки доданок з силою тертя:

$$mv_B - mv_A = F_{\text{ТР}} t_{AB}.$$

За тертям ковзання відомо, що $F_{\text{ТР}} = -fN$, де $N = mg$. Підставляючи числові дані, отримуємо:

$$N = mg = 0{,}7 \cdot 9{,}81 = 6{,}867 \text{ Н},$$

$$F_{\text{ТР}} = -fmg = -0{,}15 \cdot 0{,}7 \cdot 9{,}81 = -1{,}030 \text{ Н}.$$

Остаточно швидкість у точці B:

$$v_B = v_A - \ fgt_{AB} = 6 - 0{,}15 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}25 = 5{,}632 \text{ м/с}.$$

2. Ділянка BD, криволінійний рух по трубці з радіусом закруглення R. Через те, що потрібно окремо визначити деякі параметри руху в точці C, розіб’ємо ділянку BD на дві ділянки BC і CD. Швидкості в точках C і D визначимо, застосовуючи теорему про зміну кінетичної енергії:

$$\Delta E_{\text{К}} = \sum_i A_i,$$

де $E_{\text{К}}$ – кінетична енергія шарика, A_i – робота відповідної сили. Рух шарика на ділянці BD відбувається під дією сили тяжіння $\vec{G}$, сила тертя на криволінійній ділянці не враховується. Тоді:

$$\frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = \sum_i A_i = A_G(BD) = Gz_{BD} = mgz_{BD}.$$

Для визначення швидкості v_C у точці C запишемо:

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = \sum_i A_i.$$

Зміна положення шарика z_{BC} від точки B до точки C у проекції на вертикаль, робота сили тяжіння $A_G(BC)$ на ділянці BC і v_C відповідно:

$$z_{BC} = R(1+\cos\alpha) = 0{,}5\cdot(1+\cos 30°) = 0{,}933 \text{ м},$$

$$A_G(BC) = mgz_{BC} = 0{,}7\cdot 9{,}81\cdot 0{,}933 = 6{,}407 \text{ Дж},$$

$$v_C = \sqrt{\frac{2A_G(BC)}{m} + v_B^2} = \sqrt{2gz_{BC} + v_B^2} =$$

$$\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}933 + 5{,}632^2} = 7{,}073 \text{ м/с}.$$

Визначимо тиск шарика на стінку трубки N_C в положенні C. Згідно з принципом Д'Аламбера для матеріальної точки геометрична сума сил, прикладених до точки, та сили інерції цієї точки дорівнюють нулю (7.2):

$$\vec{G} + \vec{N}_C + \vec{\Phi} = 0.$$

Введемо вісь X_2, перпендикулярну до поверхні у точці C і спроектуємо рівняння на неї:

$$-N_C + G' + \Phi_n = 0,$$

де $G' = G\cos\alpha = mg\cos\alpha = 0{,}7\cdot 9{,}81\cdot\cos 30° = 5{,}947$ Н,

$$\Phi_n = m\frac{v_C^2}{R} = 0{,}7\cdot\frac{7{,}073^2}{0{,}5} = 70{,}038 \text{ Н}.$$

Силу інерції можна розкласти на нормальну $\vec{\Phi}_n$ та дотичну $\vec{\Phi}_\tau$ складові, однак остання не дає проекції на вісь X_2. Таким чином, остаточно:

$$N_C = \Phi + G' = 70{,}038 + 5{,}947 = 75{,}985 \text{ Н}.$$

Для визначення швидкості v_D у точці D запишемо:

$$\frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = \sum_i A_i.$$

Зміна положення шарика z_{CD} від точки C до точки D у проекції на вертикаль, робота сили тяжіння $A_G(CD)$ на ділянці CD і v_D відповідно:

$$z_{CD} = R(1 - \cos\alpha) = 0{,}5 \cdot (1 - \cos 30°) = 0{,}067 \text{ м},$$

$$A_G(CD) = mgz_{CD} = 0{,}7 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}067 = 0{,}460 \text{ Дж},$$

$$v_D = \sqrt{\frac{2A_G(CD)}{m} + v_C^2} = \sqrt{2gz_{CD} + v_C^2} =$$

$$\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}067 + 7{,}073^2} = 7{,}165 \text{ м/с}.$$

Загалом для всієї ділянки BD без відокремлення точки C застосування теореми про зміну кінетичної енергії має вигляд:

$$\frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = \sum_i A_i,$$

$$A_G(BD) = mgz_{BD} = mg2R = 0{,}7 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 6{,}897 \text{ Дж},$$

$$v_D = \sqrt{\frac{2A_G(BD)}{m} + v_B^2} = \sqrt{2gz_{BD} + v_B^2} =$$

$$\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1 + 5{,}632^2} = 7{,}165 \text{ м/с}.$$

3. Ділянка DE, прямолінійний рух з точки D до точки E за час t_{DE}, протягом якого швидкість змінюється з величини v_D до величини $v_E = 0$ м/с. Час t_{DE} руху шарика по ділянці DE визначим, застосовуючи теорему про зміну кількості руху матеріальної точки.

Введемо вздовж напряму пересування шарика вісь X_3. До шарика прикладені сила тяжіння $\vec{F}_1 = \vec{G} = m\vec{g}$, реакція стінки трубки $\vec{F}_2 = \vec{N}$, сила тертя $\vec{F}_3 = \vec{F}_{\text{ТР}}$. Тоді:

$$\Delta(mv) = \sum_i S_i,$$

де mv – кількість руху шарика, S_i – імпульс відповідної сили. Запишемо вираз щодо теореми:

$$mv_E - mv_D = \sum_{i=1}^{3} F_i\, t_{DE}.$$

Сили тяжіння та нормальної реакції перпендикулярні до осі X_3, тому у правій частині залишається тільки доданок з силою тертя:

$$mv_E - mv_D = F_{\text{TP}} t_{DE}.$$

За тертям ковзання відомо, що $F_{\text{TP}} = -fN$, де $N = mg$. Підставляючи числові дані, отримуємо:

$$N = mg = 0{,}7 \cdot 9{,}81 = 6{,}867 \text{ Н},$$

$$F_{\text{TP}} = -fmg = -0{,}15 \cdot 0{,}7 \cdot 9{,}81 = -1{,}030 \text{ Н},$$

$$0 - mv_D = F_{\text{TP}} t_{DE} = -fmgt_{DE},$$

звідки час t_{DE}:

$$t_{DE} = \frac{v_D}{fg} = \frac{7{,}165}{0{,}15 \cdot 9{,}81} = 4{,}869 \text{ м/с}.$$

4. Додатково можна визначити відстань s – довжину ділянки DE. За теоремою про зміну кінетичної енергії $\Delta E_{\text{K}} = \sum_i A_i$ запишемо:

$$\frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{1}{2}mv_D^2 = \sum_i A_i.$$

Проекцію на вісь X_3 дає тільки сила тертя, тому:

$$0 - \frac{1}{2}mv_D^2 = A_{F_{\text{TP}}}(DE) = F_{\text{TP}} s = -fmgs,$$

звідки:

$$s = \frac{v_D^2}{2fg} = \frac{7{,}165^2}{2 \cdot 0{,}15 \cdot 9{,}81} = 17{,}444 \text{ м}.$$

Відповідь:

$v_B = 5{,}632$ м/с, $v_C = 7{,}073$ м/с, $v_D = 7{,}165$ м/с,

$N_C = 75{,}985$ Н, $t_{DE} = 4{,}869$ м/с, $s = 17{,}444$ м.

Взагалі, методом кінетостатики можна користуватися, коли до числа заданих і невідомих величин входять: маси матеріальних точок, моменти інерції твердих тіл, швидкості та прискорення точок, кутові швидкості та кутові прискорення твердих тіл, сили та моменти сил.

Розв'язок задач за допомогою метода кінетостатики рекомендується виконувати у наступній послідовності:

1) показати на рисунку сили, що задаються, та прикладені до кожної матеріальної точки;
2) застосовуючи принцип звільнення від в'язей, показати сили реакцій в'язей, які накладені до кожної матеріальної точки системи;
3) додати до сил, які задаються, та сил реакції, сили інерції матеріальних точок системи;
4) обрати систему координат;
5) скласти рівняння рівноваги для кожної матеріальної точки системи;
6) розв'язати складену систему рівнянь, визначити шукані величини.

Контрольні питання

1. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для матеріальної точки.
2. Чому дорівнює головний вектор сил інерції?
3. Що називають методом кінетостатики?
4. Як приводяться сили інерції при поступальному русі твердого тіла?
5. Як приводяться сили інерції при обертанні плоскої фігури навколо перпендикулярної до неї нерухомої осі?
6. Наведіть приклади визначення реакцій з використанням принципу Д'Аламбера.

Глава 8. Вступ до аналітичної механіки

У попередніх главах було розглянуто основні теореми динаміки. Ці теореми встановлюють залежності між мірами руху механічних систем (кількість руху, кінетичний момент, кінетична енергія) і мірами дії усіх активних сил і реакцій в’язів (для невільного руху).

Загальні теореми динаміки та отримані з них наслідки дають наочні та потужні засоби дослідження руху СМТ. Користуючись ними, можна скласти диференціальні рівняння, розв’язання яких визначає рух системи.

Однак, практично неможливо строго класифікувати задачі та вказати, в якому випадку яка теорема швидше дозволить розв’язати задачу. Для невільного руху всі сили, що діють на механічну систему, поділяються на активні сили та реакцій в’язей. При вивченні невільного руху силами, що задаються, є активні сили, а реакції в’язей, які виникають при дії активних сил, є невідомими, що суттєво ускладнює задачу – збільшується кількість рівнянь, вводяться нові невідомі, визначення яких не завжди потрібно за умовою задачі.

Аналітична механіка дає загальні методи, за допомогою яких можна скласти диференціальні рівняння руху, не вводячи реакції ідеальних в’язей. Методи аналітичної механіки є корисними не тільки в теоретичних дослідженнях, але й в практичних інженерних розрахунках.

8.1. Основні поняття аналітичної механіки

Сукупність матеріальних точок називається системою матеріальних точок (СМТ), якщо рух кожної з них окремо залежний від руху та положення решти точок. Це означає, що між точками СМТ існують сили взаємодії. Нагадаємо деякі поняття, які були введені у попередніх главах і які нам будуть потрібні під час подання поточної глави.

Внутрішні сили – сили взаємодії між точками матеріальної системи

Зовнішні сили – сили, що діють на точки матеріальної системи з боку точок і тіл, які не належать до даної системи.

Матеріальна система, для якої відстань між будь-якими двома точками не змінюється, називається **твердим тілом**.

Якщо кожна точка СМТ може зайняти будь-яке положення у просторі і мати будь-яку швидкість, то таку СМТ називають **вільною**.

Якщо внаслідок будь-яких обмежень (умов) точки та тіла, що складають СМТ, не можуть зайняти довільного положення у просторі та мати довільні швидкості, така СМТ називається **невільною**.

Обмеження (умови), які не дозволяють точкам СМТ займати довільне положення у просторі та мати довільні швидкості, називають **в'язями**. В'язь накладає обмеження на зміну координат і швидкостей точок. Аналітично ці обмеження записуються у вигляді рівнянь або нерівностей. В аналітичній механіці необхідно більш докладно розглядати в'язі, що накладені на точки механічної системи.

Нехай СМТ складається з n точок, а декартовими координатами i-ої точки будуть x_i, y_i, z_i $(i = 1,2, \dots, n)$. Якщо на СМТ накладена одна в'язь, то в загальному випадку аналітично це можна записати у вигляді:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, , x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) \leq 0, \tag{8.1}$$

де $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ $(i = 1,2, \dots, n)$ – проекції швидкості i-ої точки на осі декартової системи координат, а t – час. У випадку знаку рівності у виразі (8.1), в'язь називається **утримуючою (двобічною)**; якщо стоїть знак нерівності, то в'язь називається **неутримуючою (однобічною)**.

Нехай дві МТ, положення яких визначається відповідно координатами x_1, y_1, z_1 і x_2, y_2, z_2 пов'язані між собою жорстким стержнем довжиною l (рис. 8.1, а). В цьому випадку в'язь є утримуючою та її рівняння має вигляд:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0,$$

тобто відстань між цими точками весь час залишається незмінною.

Якщо стержень замінити гнучкою нерозтяжною ниткою, то точки отримують можливість наближатися, але віддалятися одна від одної на більшу відстань не можуть (рис. 8.1, б). В цьому випадку в'язь є неутримуючою і обмеження на координати запишуться у вигляді нерівності:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 \leq 0.$$

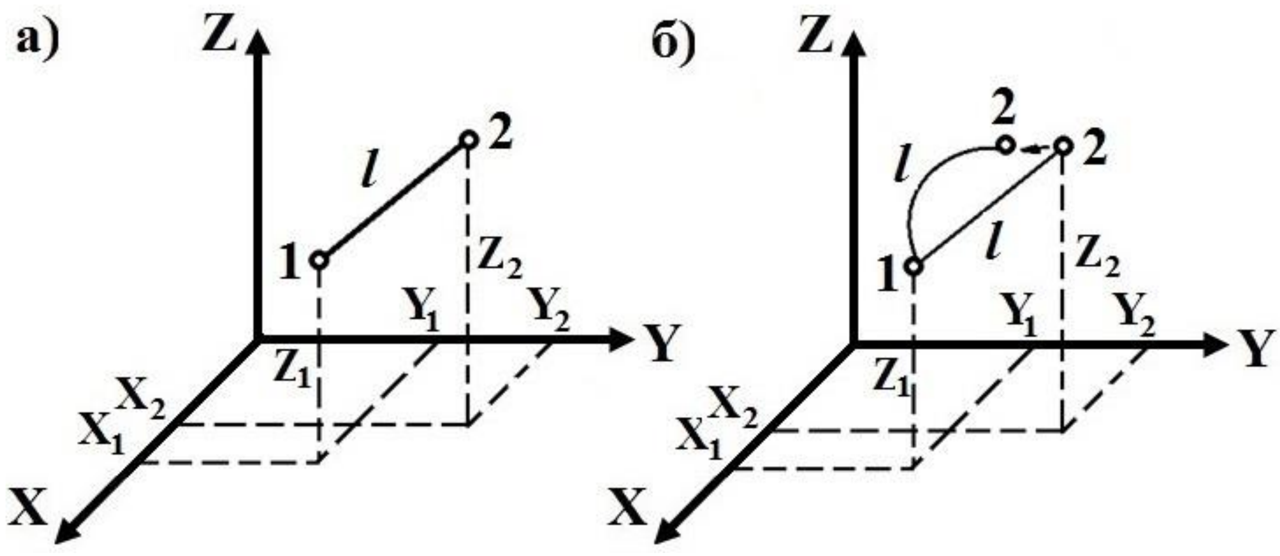


Рисунок 8.1.

Коли нитка натягнута, то в наведеній залежності має місце знак рівності, коли нитка не натягнута – знак нерівності. У такому разі рух системи можна розділити на частини так, що на одних в’язь буде утримуючою (знак рівності). А на інших в’язь можна вважати відсутньою (знак нерівності). В подальшому будемо розглядати тільки утримуючі в’язі.

Під час руху механічної системи координати точок та їхні похідні за часом, які входять до рівнянь в’язей, можуть залежати від часу. Якщо рівняння такої в’язі:

$$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t\ ) = 0 \tag{8.2}$$

має явно час t, то в’язь називають **реономною** або **нестаціонарною**.

Прикладом такої в’язі може бути негнучкий стержень, що з’єднує дві МТ та змінює свою довжину заданим чином, наприклад, $l = l_1 + l_0 \sin t$. Рівняння в’язі в такому випадку має час t:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (l_1 + l_0 \sin t)^2 = 0,$$

де x_1, y_1, z_1 і x_2, y_2, z_2 – координати точок.

Якщо рівняння в’язі не має часу t, тобто рівняння в’язі має вигляд:

$$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0,$$

то в’язь називається **склерономною** або **стаціонарною**.

В’язь, що накладає обмеження тільки на координати точок системи, тобто в’язь, рівняння якої не має похідних від координат:

$$f(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \tag{8.3}$$

називається **геометричною** або **голономною**. З голономних в’язей диференціюванням можна отримати в’язі, рівняння яких містять похідні. В’язь, рівняння якої має вигляд (8.2), називається **кінематичною**.

Якщо рівняння (8.2) кінематичної в’язі шляхом інтегрування неможливо привести до вигляду (8.3), в якому немає похідних, то ця в’язь називається **неголономною** або **неінтегруємою**. З неголономних в’язей голономні отримати неможливо.

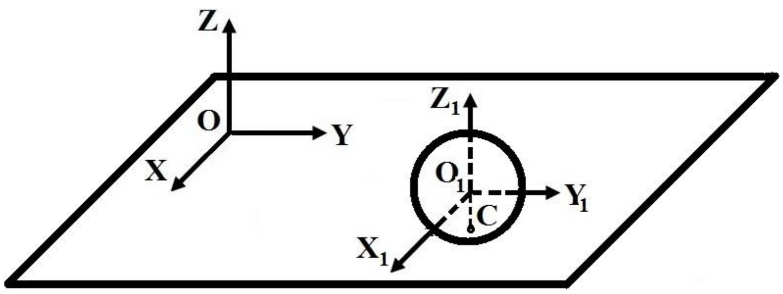


Рисунок 8.2.

Наприклад, кулька, яка котиться по поверхні (рис. 8.2), в точці контакту з поверхнею має нульову швидкість, тобто рівняння в’язі записується відносно похідної.

На кульку, що котиться по поверхні без ковзання, накладено наступні обмеження: 1) відстань від центру O_1 до площини дорівнює постійній величині – радіусу r, в’язь $z = r$; 2) швидкість точки дотику C у кожний момент часу дорівнює нулю, в’язь $v_C = 0$ (миттєвий центр швидкостей).

Якщо на СМТ накладено k в’язей, то буде k рівнянь в’язі наступного вигляду:

$$f_j(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0, \quad (j = 1,2, \dots, k).$$

СМТ, на яку накладені голономні в’язі, називається **голономною**, а СМТ з неголономними в’язями – **неголономною**. В нашому курсі основна увага приділяється голономним системам, на які накладено в'язі, рівняння яких можуть бути записані у вигляді:

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t\ ) = 0, \quad (j = 1,2, \dots, k), \tag{8.4}$$

де k – кількість в'язей.

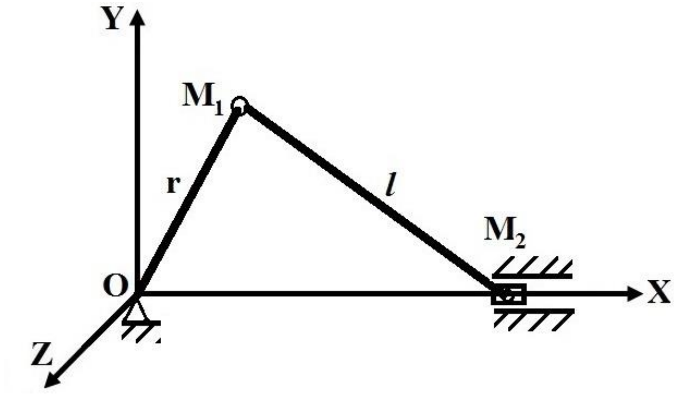


Рисунок 8.3.

На рис. 8.3 показано приклад голономних в'язей. Для точок M_1 і M_2 кривошипно-повзунного механізму рівняння в'язей мають вигляд:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad y_2 = 0,$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2 = 0,$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0,$$

де x_1, y_1, z_1 і x_2, y_2, z_2 – відповідно координати точок M_1 і M_2. За умови розташування механізму у площині OXY всі координати z автоматично дорівнюють нулю, що приводить до рівнянь у вигляді:

$$y_2 = 0, \quad x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0,$$
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0.$$

Числом степенів вільності голономної матеріальної системи називається число незалежних параметрів, які повністю визначають її положення (конфігурацію), тобто визначають положення будь-якої точки системи.

Тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі, має один степінь вільності, положення твердого тіла визначається кутом повороту φ навколо осі обертання.

Тверде тіло, що здійснює плоский рух, має три степеня вільності, положення будь-якого його перерізу, проведеного паралельно нерухомій площині, визначається двома координатами центру ваги перерізу x_C, y_C і кутом повороту φ.

Системою з трьома степенями вільності є тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої точки. Його положення визначається трьома кутами Ейлера φ, ψ, θ.

Системою з шістьма степенями вільності є вільне тверде тіло, його положення визначається шістьма незалежними параметрами: трьома координатами центру ваги x_C, y_C і z_C, та трьома кутами Ейлера φ, ψ, θ.

Пружне тіло має нескінчену кількість степенів вільності.

8.2. Узагальнені координати

Положення СМТ, на яку накладено k голономних в'язей, визначається $s = 3n - k$ незалежними декартовими координатами. Однак у багатьох випадках використання декартових координат приводить до громіздких викладок, тому для визначення положення СМТ можна використовувати інші незалежні один від одного параметри $q_1, q_2, \ \ , q_s$. Ці параметри можуть мати різну розмірність – це можуть бути кути, довжини дуг, площини тощо. Всі $3n$ декартових координат можна виразити через введені параметри $q_1, q_2, \ \ , q_s$:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ \ , q_s, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ \ , q_s, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ \ , q_s, t) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,2, \dots, n). \tag{8.5}$$

Ці функції перетворюють на тотожність рівняння в'язей (8.4):

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \quad (j = 1,2, \dots, k).$$

Будемо вважати, що довільне положення СМТ, сумісне з в'язами, однозначно визначається за допомогою функцій (8.5) деякими значеннями параметрів $q_1, \ q_2, \ \ \ , \ q_s$. **Незалежні параметри, які**

визначають положення системи у кожний момент її руху, називають узагальненими координатами системи.

Задання узагальнених координат повністю визначає положення точок системи відносно обраної системи відліку.

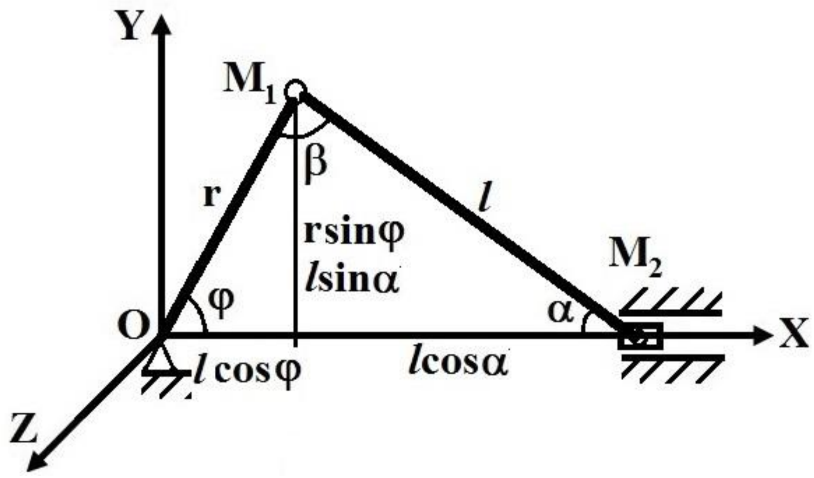


Рисунок 8.4.

На рис. 8.4 показано, що положення точок M_1 і M_2 кривошипно-повзунного механізму (довжина кривошипу r і шатуна l) визначається кутом повороту кривошипа φ.

Дійсно, якщо прийняти роботу механізму у площині OXY, координати $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, решта:

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\cos\varphi + l\cos\alpha,$$

де кут α знаходимо зі співвідношення:

$$l\sin\alpha = r\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right),$$

і остаточно:

$$x_2 = r\cos\varphi + l\cos\left(\arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)\right),$$

$$y_1 = r\sin\varphi, \quad y_2 = 0.$$

Таким чином, наведений механізм є з одним степенем вільності та узагальненою координатою φ.

Визначення ступені рухомості, тобто кількості узагальнених координат, механізму є необхідним кроком під час розв’язання задач у курсі «Теорія механізмів і машин». Для визначення степеня рухомості різних механізмів використовують формули Сомова-Малишева, Чебишева та Добровольського.

8.3. Віртуальні переміщення. Ідеальні в’язі

Для формулювання принципу можливих переміщень, який визначає умови рівноваги механічної системи, слід розглянути поняття можливого, або віртуального, переміщення. Введемо математичне поняття варіації функції.

Варіацією функції δy називається приріст функції, зумовлений зміною вигляду функції, за фіксованого значення аргументу (рис. 8.5). При переході від функції $y_1 = f_1(x)$ до функції $y_2 = f_2(x)$, нескінченно близької до першої, варіація δy буде:

$$\delta y = y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x).$$

На відміну від варіації функції δy, диференціал функції dy є головною частиною приросту функції, що утворюється за рахунок приросту аргументу dx.

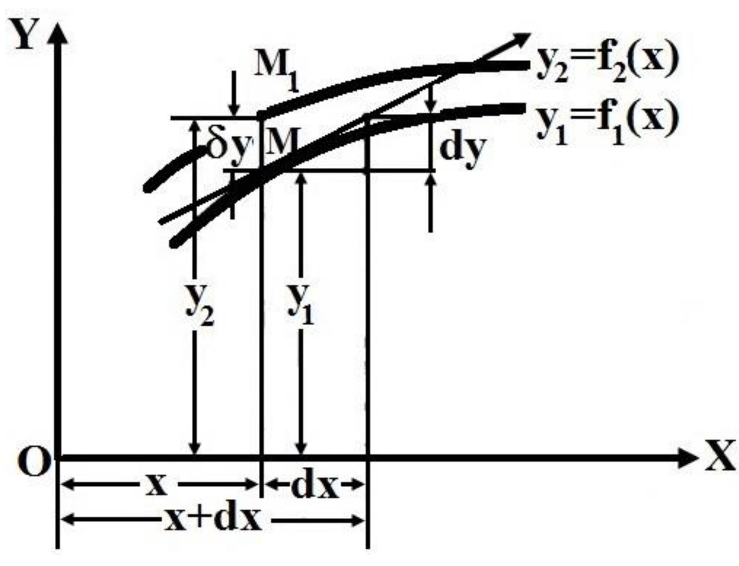


Рисунок 8.5.

Операції диференціювання та варіювання, які є незалежними одна від одної операціями, мають властивість **комутативності** у послідовності їх застосування. Також варіація визначеного інтегралу з постійними границями інтегрування дорівнює визначеному інтегралу від варіації підінтегральної функції.

Для узагальненої координати q справедливі співвідношення:

$$\frac{d}{dt}\delta q = \delta\frac{dq}{dt}, \qquad \delta\int_{t_0}^{t_1} q dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta q dt.$$

Віртуальним (уявним, можливим) називається нескінченно мале переміщення точки з даного положення, яке допускається в’язями, що накладені на цю точку. Так, якщо МТ знаходиться на нерухомій горизонтальній площині, то віртуальним є будь-яке уявне переміщення точки з даного положення по площині.

Віртуальне переміщення є уявним переміщенням в певний момент (тобто за фіксованого значення аргументу – часу t). Для цього переміщення не потрібен час на його виконання. На відміну від цього дійсне переміщення точки відбувається в певному напрямі під дією прикладених сил за неперервної зміни аргументу – часу. Тому віртуальне переміщення є варіацією, а дійсне переміщення – диференціалом.

Застосовуючи поняття можливого переміщення, можна визначити роботу сили на цьому переміщенні, наприклад:

$$\delta A = F_X \delta x + F_Y \delta y + F_Z \delta z.$$

Для механічної системи з n точок, до яких прикладені сили, елементарна робота цих сил на будь-якому можливому переміщенні системи відповідно:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k. \qquad (8.6)$$

Позначимо сили реакцій в’язей для точок системи $\vec{R}_k$. Голономні та неголономні в’язі, елементарна робота сил реакцій яких на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю, називають ідеальними в’язями без тертя. Для них виконується умова:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0, \qquad (8.7)$$

де $\vec{R}_k$ – рівнодіюча реакцій в’язей, діючих на k-ту точку, $\delta \vec{r}_k$ – віртуальне переміщення k-ої матеріальної точки системи.

Прикладом ідеальної в’язі є абсолютно гладка поверхня (рис. 8.6, а). Реакція в’язі $\vec{N}$ спрямована перпендикулярно до поверхні, тому:

$$\delta A = \vec{N} \cdot \delta \vec{r} = 0.$$

Негладка поверхня не є ідеальною в'яззю (рис. 8.6, б). Сила реакції поверхні $\vec{R}$ є сумою двох її складових: нормальної $\vec{N}$, перпендикулярної до поверхні в точці, і дотичної, яка є силою тертя $\vec{F}$ точки по поверхні. Віртуальне переміщення $\delta\vec{r}$ спрямовуємо вздовж поверхні. При обчисленні роботи нормальної реакції $\delta A = \vec{N} \cdot \delta\vec{r} = 0$, а для сили тертя $\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} \neq 0$. Отже, умова, що визначає ідеальність в'язі, не виконується.

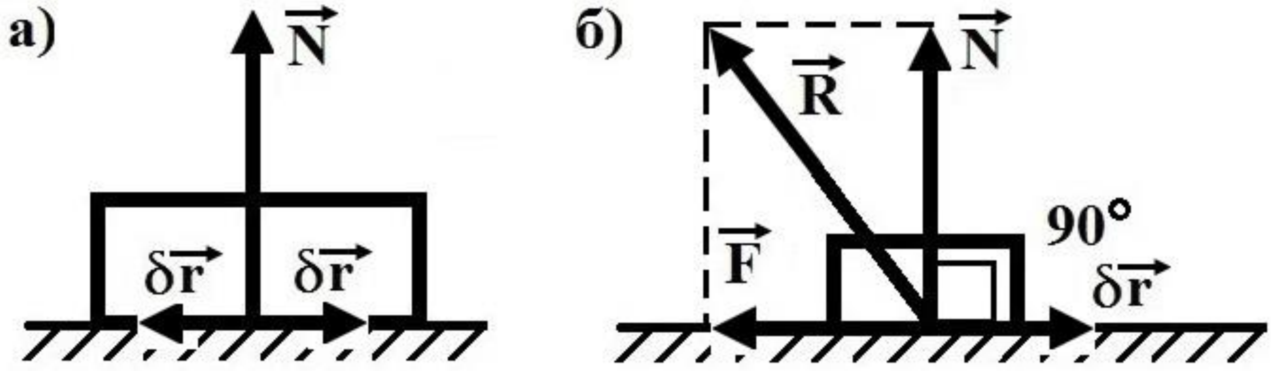


Рисунок 8.6.

У абсолютно твердому тілі точки зв'язані ідеальними в'язями. Силами реакцій у цьому випадку є внутрішні сили, для яких сума елементарних робіт цих сил на будь-яких елементарних переміщеннях точок дорівнює нулю.

Закріплені точки системи є ідеальними в'язями, бо їхні можливі переміщення дорівнюють нулю.

Шорстка поверхня для котків, що котяться без ковзання за відсутності тертя кочення і з однією точкою дотику, є ідеальною в'яззю, бо можливі переміщення в точці дотику дорівнюють нулю.

8.4. Принцип віртуальних переміщень

Для рівноваги СМТ необхідно та достатньо, щоб суми всіх сил, діючих на кожну точку системи, і швидкості всіх точок у початковий момент часу дорівнювали нулю. Якщо позначити через $\vec{F}_k$ і $\vec{R}_k$ рівнодіючі всіх активних сил і реакцій в'язей, прикладених до k-ої точки, то математично умову рівноваги можна записати:

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k = 0, \quad \vec{v}_k(0) = 0, (k = 1,2,\dots,n). \tag{8.8}$$

Ці умови мають один істотний недолік – вони потребують урахування всіх сил, включаючи і реакції в'язей, діючих на кожну точку системи.

Надаємо системі віртуальне переміщення $\delta\vec{r}_1$, $\delta\vec{r}_2$,..., $\delta\vec{r}_n$. Домножимо доданки у кожному рівнянні (8.8) на $\delta\vec{r}_k$ і складемо їх почленно:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k + \vec{R}_k\right)\cdot\delta\vec{r}_k = 0,$$

або

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\cdot\delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{n}\vec{R}_k\cdot\delta\vec{r}_k = 0.$$

Друга сума дорівнює нулю (в'язі ідеальні), тому за рівноваги системи має дорівнювати нулю і перша сума.

В механіці вводять поняття принципу віртуальних переміщень, за яким **для рівноваги СМТ, на яку накладено ідеальні стаціонарні в'язі, необхідно та достатньо, щоб сума робіт активних сил на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнювала нулю**:

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\cdot\delta\vec{r}_k = 0, \tag{8.9}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(F_{kX}\delta x_k + F_{kY}\delta \mathrm{y_k} + F_{kZ}\delta z_k\right) = 0.$$

Перевагою цього принципу є відсутність в його формулюванні реакцій ідеальних в'язей.

Принцип віртуальних переміщень широко застосовується в механіці. За його допомогою можна достатньо просто розв'язувати задачі про рівновагу твердого тіла та систем твердих тіл, а також визначати залежності між величинами активних сил.

Під час розв'язання задач необхідно враховувати наступні зауваження.

1. Якщо в’язі неідеальні, то їх реакції (наприклад, сили тертя) слід віднести до активних сил.
2. В тих випадках, коли потрібно визначити реакцію ідеальної в’язі, необхідно подумки відкинути цю в’язь, а відповідну реакцію розглядати як активну силу.

8.5. Узагальнені сили

Для узагальненої координати q було введено поняття **варіації** δq. З урахуванням виразу для віртуальної роботи (роботи на віртуальному переміщенні), маємо:

$$\delta A = \sum_{m=1}^{s} Q_m \delta q_m = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s. \qquad (8.10)$$

Вираз (8.10) дозволяє дати наступне визначення узагальнених сил: **узагальненими силами називаються коефіцієнти при варіаціях узагальнених координат у виразах для віртуальної роботи**.

Узагальнена сила Q_m при варіації узагальненої координати δq_m в загальному випадку не є силою у звичайному розумінні. Її розмірність залежить від розмірності цієї координати і визначається рівністю:

$$[Q_m] = [A]/[q_m],$$

де $[A]$ – розмірність роботи, Дж. Тобто розмірність узагальненої сили дорівнює розмірності роботи сили, поділеної на розмірність узагальненої координати, до якої віднесена узагальнена сила.

При поступальному русі робота визначається як добуток сили на переміщення – q лінійна величина, тому узагальненою силою є звичайна сила з розмірністю Н. При обертальному русі робота визначається як добуток моменту на кут повороту – q є кутом з розмірністю 1, тому узагальненою силою є момент з розмірністю Н·м. Якщо q – об’єм (наприклад, положення поршня в циліндрі можна визначити об’ємом запоршневого простору), то узагальнена сила вимірюється у Н/м^2 і має розмірність тиску.

8.6. Принцип віртуальних переміщень у випадку руху системи. Загальне рівняння динаміки

Принцип віртуальних переміщень (8.9), який дає загальний метод розв'язання задач статики, можна застосувати до розв'язання задач динаміки. З іншого боку, принцип Д'Аламбера дозволяє застосовувати методи статики для розв'язання задач динаміки. Поєднуючи ці два принципи одночасно, можна отримати загальний метод розв'язання задач динаміки.

За принципом Д'Аламбера, який було введено у Главі 18: **активні та реактивні сили, діючі на МТ, разом з силами інерції утворюють систему взаємно урівноважених сил, які задовольняють всім умовам рівноваги:**

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0.$$

Для довільної k-ої точки:

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k = 0, \quad (k = 1,2, \dots, n).$$

Якщо система отримує віртуальне переміщення, при якому кожна точка має своє віртуальне переміщення $\delta\vec{r}_k$, то сума робіт цих сил на переміщенні $\delta\vec{r}_k$ має дорівнювати нулю:

$$\left(\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k\right) \cdot \delta\vec{r}_k = 0, \quad (k = 1,2, \dots, n).$$

Складаючи всі n рівнянь,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k\right) \cdot \delta\vec{r}_k = 0. \qquad (8.11)$$

Припустимо, що всі в'язі в СМТ ідеальні (сили тертя за наявності можна віднести до активних сил, які задаються). Тоді сума робіт реакцій в'язей на віртуальних переміщеннях дорівнює нулю, що призводить до рівняння:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k + \vec{\Phi}_k\right) \cdot \delta\vec{r}_k = 0. \qquad (8.12)$$

Вираз (8.12) називається загальним рівнянням динаміки:

у будь-який момент часу сума робіт всіх активних сил и сил інерції матеріальних точок невільної механічної системи з ідеальними в’язями на довільному віртуальному переміщенні дорівнює нулю.

Проектуючи на осі координат з урахуванням

$$\vec{F}_k = F_{kX}\vec{\imath} + F_{kY}\vec{\jmath} + F_{kZ}\vec{k}, \qquad \vec{\Phi}_k = \Phi_{kX}\vec{\imath} + \Phi_{kY}\vec{\jmath} + \Phi_{kZ}\vec{k},$$

$$\delta\vec{r}_k = \delta x_k\vec{\imath} + \delta y_k\vec{\jmath} + \delta z_k\vec{k},$$

отримуємо:

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{matrix} [(F_{kX} + \Phi_{kX}) \cdot \delta x_k + (F_{kY} + \Phi_{kY}) \cdot \delta y_k + \\ (F_{kZ} + \Phi_{kZ}) \cdot \delta z_k] = 0 \end{matrix}. \qquad (8.13)$$

Рівняння (8.13) дозволяють скласти диференціальні рівняння руху механічної системи. Запишемо рівняння (8.12) і (8.13) в іншій формі:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k - m_k\vec{a}_k\right) \cdot \delta\vec{r}_k = 0.$$

Якщо

$$\vec{a}_k = \ddot{x}_k\vec{\imath} + \ddot{y}_k\vec{\jmath} + \ddot{z}_k\vec{k},$$

то загальне рівняння динаміки має вигляд:

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{matrix} [(F_{kX} - m_k\ddot{x}_k) \cdot \delta x_k + (F_{kY} - m_k\ddot{y}_k) \cdot \delta y_k + \\ (F_{kZ} - m_k\ddot{z}_k) \cdot \delta z_k] = 0 \end{matrix}. \qquad (8.14)$$

Як ми бачимо, у дужках записано рівняння руху у проекціях на координатні осі. Великою перевагою загального рівняння динаміки у порівнянні з іншими теоремами є відсутність реакцій ідеальних в’язей.

Якщо при цьому система є сукупністю будь-яких твердих тіл, то для складання рівнянь руху необхідно до діючих на кожне тіло активних сил додати прикладену в центрі мас силу, яка дорівнює головному вектору інерції, і пару з моментом, який дорівнює головному моменту сил інерції відносно цього центру. Після цього застосувати принцип віртуальних переміщень.

Обчислення суми робіт сил інерції на віртуальних переміщеннях точок твердого тіла проводиться за формулами:

1) При поступальному русі:

$$\delta A = \vec{\Phi} \cdot \delta \vec{r},$$

де $\vec{\Phi}$ – рівнодіюча сил інерції ($\vec{\Phi} = -m\vec{a}$, $\vec{a}$ – прискорення довільної точки твердого тіла), $\delta \vec{r}$ – віртуальне переміщення довільної точки твердого тіла. Поступальне можливе переміщення для всіх точок тіла однакове, однакові також і прискорення.

2) При обертанні навколо нерухомої осі:

$$\delta A = M_Z^{\text{ін}} \cdot \delta\varphi,$$

де $M_Z^{\text{ін}}$ – головний момент сил інерції відносно осі обертання Z ($M_Z^{\text{ін}} = -I_Z \varepsilon_Z$), $\delta\varphi$ – віртуальне кутове переміщення твердого тіла.

3) При плоскому русі:

$$\delta A = \vec{F}_C^{\text{ін}} \cdot \delta \vec{r}_C + M_C^{\text{ін}} \cdot \delta\varphi,$$

де $\vec{F}_C^{\text{ін}}$ – головний вектор сил інерції ($\vec{F}_C^{\text{ін}} = -\,m\vec{a}_C$, $\vec{a}_C$ – прискорення центру ваги твердого тіла), $M_C^{\text{ін}}$ – головний момент сил інерції відносно осі, що проходить через центр ваги C твердого тіла перпендикулярно до площини руху ($M_C^{\text{ін}} = -I_C \varepsilon_Z$), $\delta \vec{r}_C$ – віртуальне переміщення центру ваги C твердого тіла, $\delta\varphi$ – віртуальне кутове переміщення твердого тіла. Із загального рівняння динаміки витікають диференціальні рівняння руху СМТ, до яких не входять реакції ідеальних в’язей. Можливо розв’язання як прямих (визначення сил за заданим рухом), так і обернених задач (визначення руху за заданими силами) динаміки. При розв’язанні обернених задач приходиться інтегрувати складену систему диференціальних рівнянь руху.

Застосування загального рівняння динаміки для відносно простих систем цілком виправдано, однак для більш складних випадків використання загального рівняння динаміки приводить до складних перетворень. Тому значно зручніше користуватися замість нього рівняннями Лагранжа II-го роду, в яких основні труднощі перетворення подолані в загальному вигляді.

8.7. Рівняння Лагранжа II-го роду

Припустимо, що механічна система з n матеріальних точок має n степенів вільності. У випадку голономних нестаціонарних в’язей радіус-вектор $\vec{r}_i$ довільної точки M цієї системи є функцією узагальнених координат $q_1(t)$, $q_2(t)$,..., $q_n(t)$ і часу t:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\big(q_1, q_2, \dots, q_{n,} t\ \big), \tag{8.15}$$

Узагальнені координати системи $q_1(t)$, $q_2(t)$,..., $q_n(t)$ є функціями часу. Тому радіус-вектор $\vec{r}_i$ також є складною функцією часу і вектор швидкості точки $\vec{v}_i$ визначається за правилами диференціювання складної функції:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial q_n}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \tag{8.16}$$

або з урахуванням $\frac{\partial q_1}{\partial t} = \dot{q}_1$, $\frac{\partial q_2}{\partial t} = \dot{q}_2$,..., $\frac{\partial q_n}{\partial t} = \dot{q}_n$, перепишемо (8.16):

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \tag{8.16}$$

і записуємо у вигляді суми:

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \tag{8.17}$$

У випадку стаціонарних в’язей $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$,

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j. \tag{8.18}$$

Похідні від узагальнених координат за часом $\dot{q}_j$ називаються **узагальненими швидкостями**, які відповідають узагальненим координатам q_j.

З виразу (8.16) слідує, що частинна похідна від $\vec{v}_i$ за будь-якої узагальненої швидкості $\dot{q}_j$ дорівнює коефіцієнту при $\dot{q}_j$ у правій частині цього виразу, тобто дорівнює частинній похідній від $\vec{r}_i$ за координатою q_j:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}, \ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}, \ , \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \ldots, \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n}. \qquad (8.19)$$

Кінетична енергія механічної системи, яка складається з n матеріальних точок, визначається за формулою:

$$E_{\text{К}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i. \qquad (8.20)$$

З виразу (8.4) слідує, що вектор швидкості $\vec{v}_i$ у випадку голономних нестаціонарних в'язей є функцією узагальнених координат, які містяться у виразах $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$, узагальнених швидкостей $\dot{q}_j$ і часу t:

$$E_{\text{К}} = E_{\text{К}}(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t). \qquad (8.21)$$

Визначимо частинні похідні від кінетичної енергії за узагальненою координатою q_j і узагальненою швидкістю $\dot{q}_j$, диференціюючи вираз (8.6) як складну функцію:

$$\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j},$$

$$\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Перетворимо останнє рівняння на основі (8.19):

$$\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,.$$

Продиференціюємо цей вираз за часом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right). \qquad (8.22)$$

Розглянемо дві суми, що входять до правої частини рівності (8.22), враховуючи, що для невільної матеріальної точки $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$.

1) За допомогою рівності, що визначає узагальнену силу

$$Q_j = \frac{\delta A_{q_j}}{\delta q_j} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,,$$

знаходимо:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = Q_j + Q_j^R.$$

2) Для встановлення значення другої суми розглянемо вираз $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)$. Частинна похідна $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ є функцією тих самих змінних, від яких залежний радіус-вектор $\vec{r}_i$. Диференціюємо $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ як складну функцію часу:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt} + \cdots +$$

$$+ \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial q_n} \cdot \frac{dq_n}{dt} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial t}\,. \qquad (8.23, а)$$

З урахуванням позначень

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = \dot{q}_1, \quad \frac{\partial q_2}{\partial t} = \dot{q}_2, \ldots, \frac{\partial q_n}{\partial t} = \dot{q}_n,$$

запишемо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \cdots +$$

$$+ \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial t}. \tag{8.23, б}$$

Визначимо частинну похідну $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$, диференціюючи за q_j вираз (8.16):

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_1 \cdot \partial q_j} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_2 \cdot \partial q_j} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_n \cdot \partial q_j} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \cdot \partial t}. \tag{8.24}$$

Праві частини виразів (8.23, б) і (8.24) відрізняються лише послідовністю диференціювання, яка для неперервних функцій не має значення, отже:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}.$$

Користуючись цим, перетворимо другу суму в правій частині рівності (8.22):

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial q_j}.$$

Підставляємо знайдені значення обох сум в рівність (8.22) і розглядаємо механічну систему зі стаціонарними ідеальними в’язями, для яких $Q_j^R = 0$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial \dot{q}_j}\right) = Q_j + \frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial q_j},$$

або

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} = Q_j, (j = 1,2, \dots, n) \qquad (8.25)$$

Систему n диференціальних рівнянь (8.25) називають **рівняннями Лагранжа II-го роду**, кількість яких дорівнює числу степенів вільності системи. Ці рівняння є диференціальними рівняннями другого порядку відносно узагальнених координат системи $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$. Інтегруючи ці диференціальні рівняння та визначаючи за початковими умовами постійні інтегрування, отримуємо рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах.

Рівняння Лагранжа II-го роду дають єдиний та достатньо простий метод розв'язання задач динаміки. Важлива перевага цих рівнянь полягає в тому, що їхній вигляд і кількість не залежать ані від кількості тіл, що складають дану систему, ані від того, як ці тіла рухаються. Крім того, за ідеальних в'язей до правих частин рівнянь входять узагальнені сили та ці рівняння дозволяють заздалегідь виключити з розгляду всі невідомі реакції в'язей.

Припустимо, що на механічну систему поряд з силами, які мають потенціал (консервативними силами, робота яких не залежить від траєкторії руху, наприклад, сила тяжіння), діють сили, які не мають потенціалу (неконсервативними силами, робота яких залежить від траєкторії руху, наприклад, сила тертя). При цьому узагальнену силу Q_j зручно представити у вигляді суми узагальненої сили Q_j^P, яка відповідає консервативним силам $\vec{P}_i$, і узагальненої сили Q_j^F, яка відповідає неконсервативним силам $\vec{F}_i$:

$$Q_j = Q_j^P + Q_j^F.$$

Тоді з урахуванням $Q_j^P = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j}$ рівняння Лагранжа II-го роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j^F. \qquad (8.26)$$

8.8. Застосування методу віртуальних переміщень

Далі продемонструємо застосування принципу можливих переміщень для визначення опорних реакцій статично невизначеної системи. Це статична задача, але вважаємо за доцільне показати ефективність застосування цього принципу.

Задача. Складена балка AD, яка лежить на 3-х опорах, складається з двох балок AC і CD, що шарнірно з'єднані в точці C. До балки AC прикладено вертикальні сили F_1 =80 кН і F_2 =60 кН, а до балки CD – момент $M = 40a$ кН·м, спрямований проти годинникової стрілки. Розміри вказано на рис. 8.7, а.

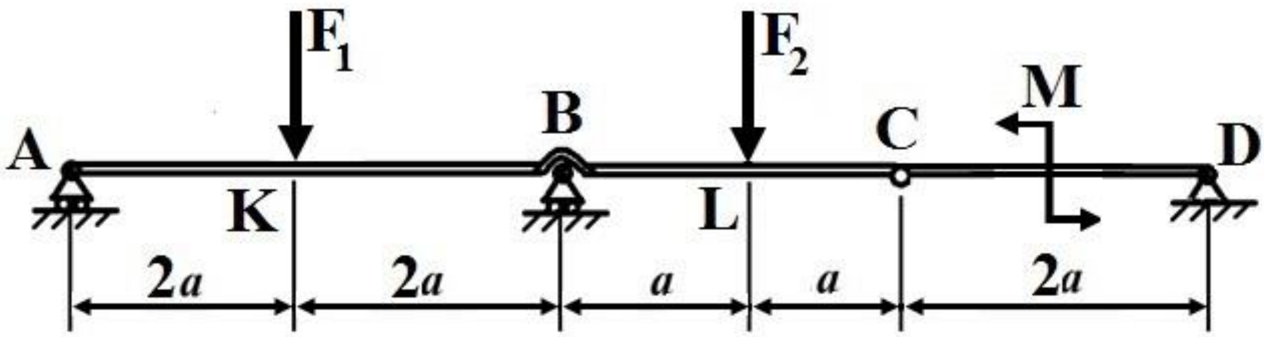


Рисунок 8.7, а.

Визначити опорні реакції в точках A, B, D. Вагою балок знехтувати.

Розв'язання. Складена балка AD є системою двох твердих тіл – балок AC і CD, які знаходяться у рівновазі.

Для розв'язання цієї задачі методами статики, потрібно, подумки розірвавши шарнір C, відкинути одну з балок, замінити дію відкинутої балки на частину, що залишилась, двома складовими реакції шарніра C і скласти рівняння рівноваги для частини, що залишилась. Потім, застосувавши ті ж самі дії до відкинутої частини, записати для неї рівняння рівноваги. Нарешті, розв'язавши систему рівнянь рівноваги, складених для кожної з балок, визначити шукані опорні реакції. Таке рішення є достатньо громіздким.

Застосовуючи принцип віртуальних переміщень, можна довільну опорну реакцію визначити з одного відповідним чином складеного рівняння. Це істотно спрощує розв’язання задачі, особливо у тих випадках, коли потрібно визначити тільки одну опорну реакцію.

Проілюструємо це твердження послідовним, незалежним одним від одного визначенням опорних реакцій A, B, D за допомогою принципу віртуальних переміщень.

Для визначення реакції R_A відкидаємо подумки опору A, компенсуючи відсутність цієї в’язі опорною реакцією R_A.

Надаємо віртуальне переміщення δr_A точці A за вертикаллю вгору. При цьому балка приймає положення, яке показано на рис. 8.7, б.

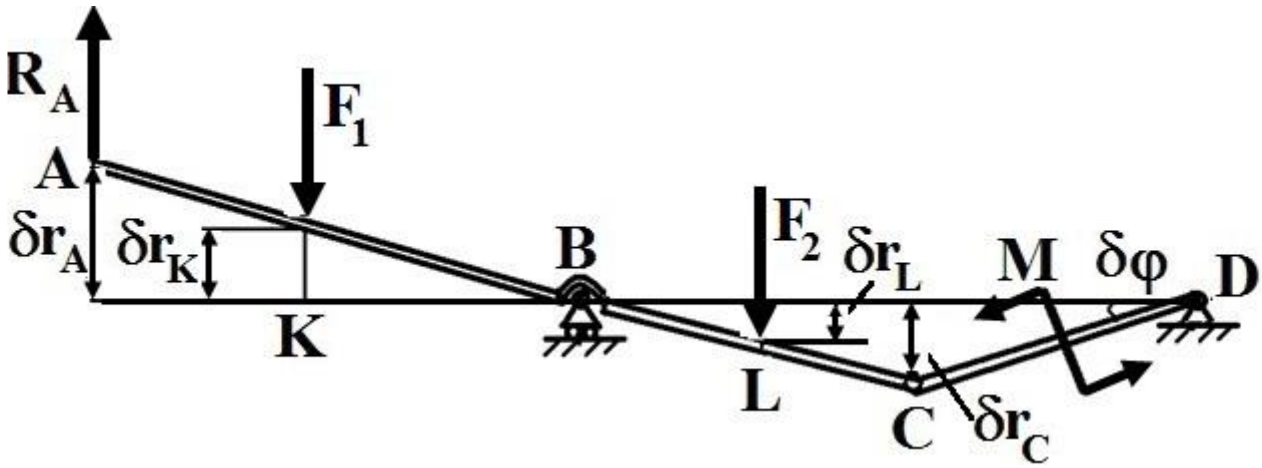


Рисунок 8.7, б.

Позначимо через δr_K і δr_L віртуальні переміщення точок прикладення K і L сил F_1 і F_2 і через $\delta\varphi$ – кутове переміщення балки CD.

Виразимо, скориставшись подібністю трикутників, залежність між лінійними віртуальними переміщеннями:

$$\delta r_A = 2\delta r_K = 4\delta r_L = 2\delta r_C = 4a\delta\varphi. \tag{8.27}$$

Застосувавши принцип віртуальних переміщень, прирівнюємо суму робіт всіх активних сил і моментів, а також реакції R_A на відповідних віртуальних переміщеннях до нуля:

$$R_A\delta r_A - F_1\delta r_K + F_2\delta r_L + M\delta\varphi = 0. \qquad (8.28)$$

Скориставшись співвідношенням (8.27), після почленного скорочення рівняння (8.28) на δr_A знаходимо:

$$R_A - \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{4}F_2 + \frac{1}{4a}M = 0,$$

звідки після підстановки числових значень отримуємо: $R_A = 15$ кН.

Для визначення опорної реакції R_B подумки відкидаємо опору B, компенсуючи відсутню в’язь опорною реакцією R_B.

Надаємо віртуальне переміщення δr_C шарніру C за вертикаллю вгору. При цьому балка приймає положення, яке показано на рис. 8.7, в.

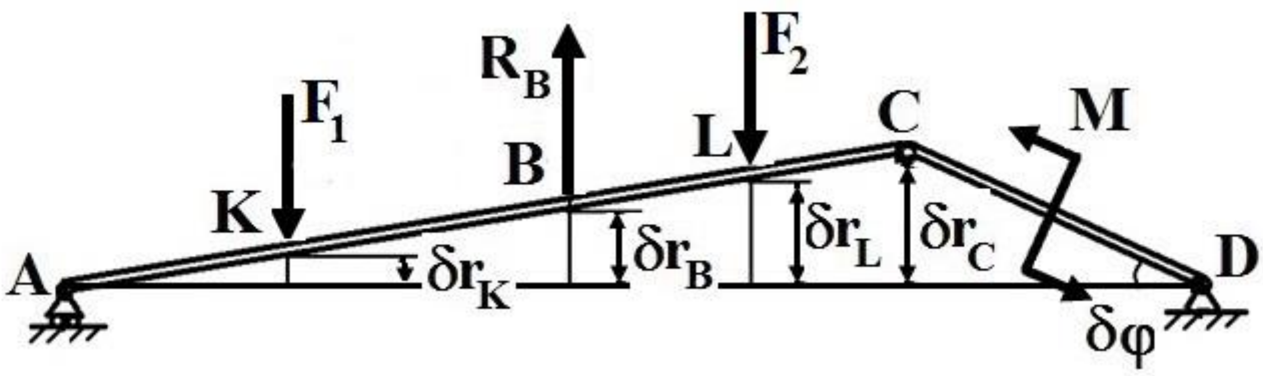


Рисунок 8.7, в.

Позначимо через δr_K, δr_L, δr_B віртуальні переміщення точок прикладання K, L, B сил F_1, F_2, R_B і віртуальне кутове переміщення балки CD через $\delta\varphi$, виразимо зв'язок між ними:

$$\delta r_C = \frac{6}{5}\delta r_L = \frac{3}{2}\delta r_B = 3\delta r_K = 2a\delta\varphi. \qquad (8.29)$$

Застосувавши принцип віртуальних переміщень, запишемо (напрям $\delta\varphi$ проти хода годинникової стрілки вважаємо додатним, за ходом годинникової стрілки – від’ємним):

$$-F_1\delta r_K + R_B\delta r_B - F_2\delta r_L - M\delta\varphi = 0. \qquad (8.30)$$

Скориставшись формулою (8.29), після почленного скорочення рівняння (8.30) на δr_C знаходимо:

$$-\frac{1}{3}F_1 + \frac{2}{3}R_B - \frac{5}{6}F_2 - \frac{1}{2a}M = 0.$$

звідки після підстановки числових значень отримуємо: $R_B = 145$ кН.

Залишається визначити опорну реакцію R_D. Знову застосовуючи принцип звільнення від в'язей, подумки відкидаємо опору D, компенсуючи її відсутність опорною реакцією R_D (рис. 8.7, г.).

Надаємо віртуальне переміщення δr_D точці D за вертикаллю вгору. При цьому балка CD повернеться проти годинникової стрілки на кут:

$$\delta\varphi = \frac{\delta r_D}{2a}. \tag{8.31}$$

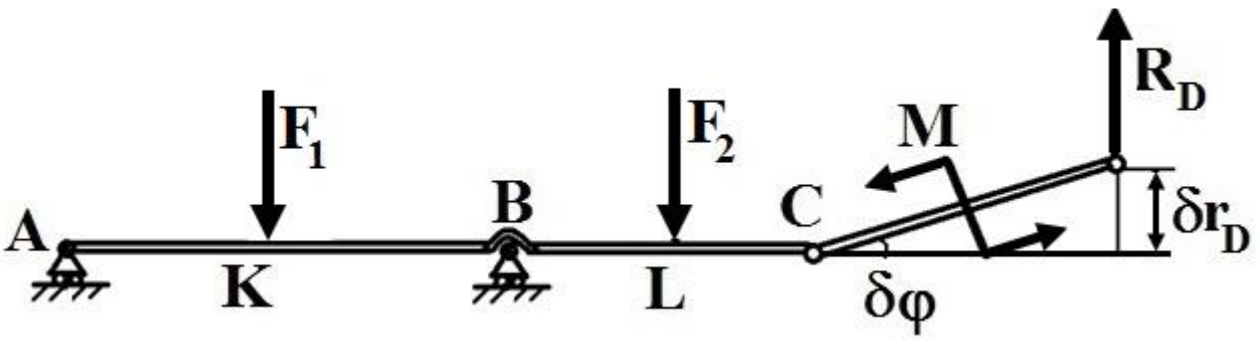


Рисунок 8.7, г.

Положення балки AC залишається незмінним.

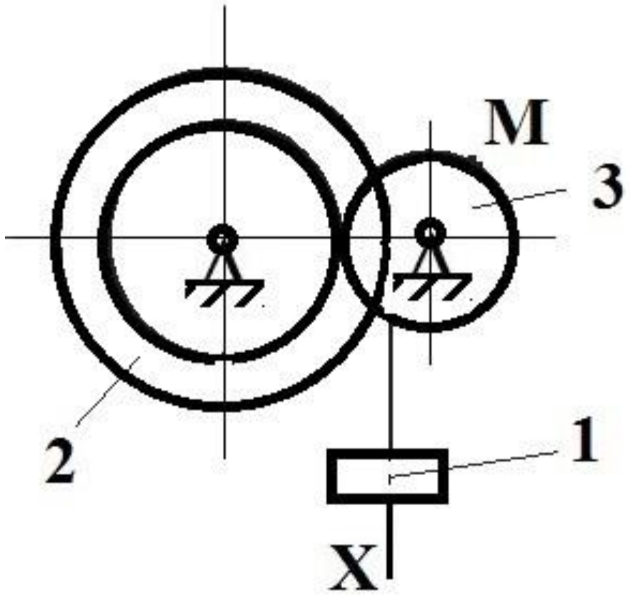
Записавши принцип віртуальних переміщень, отримуємо:

$$R_D\delta r_D + M\delta\varphi = 0. \tag{8.32}$$

Після підстановки числових значень, використання формули (8.31) і почленного скорочення рівняння (8.32) на δr_D знаходимо реакцію: $R_D = -20$ кН. Знак «–» вказує, що опорна реакція R_D спрямована за вертикаллю вниз.

8.9. Методика застосування рівняння Лагранжа II-го роду

У Главі 6 було показано розв'язання задачі щодо визначення закону руху тіла 1 механічної системи, яка зображена на рисунку, із застосуванням теореми про зміну кінетичної енергії системи.



Отримані під час розв'язання задачі у наведений спосіб вирази для кінетичної енергії та співвідношення між кінематичними характеристиками тіл системи залишаються незмінними, що дозволяє їх використання під час розв'язання задачі за допомогою рівняння Лагранжа II-го роду.

Продемонструємо розв'язання цієї задачі за допомого рівняння Лагранжа II-го роду.

Дано: $m_1 =$12 кг, $m_2 =$8 кг, $m_3 =$4 кг, $R_2 =$12 см, $R_3 =$4 см, $r_2 =$8 см, $i_{x2} =$10 см, $M =$80 Н·см

Визначити: закон руху тіла 1, використовуючи рівняння Лагранжа II-го роду (натяжіння ниті не враховувати)

Розв'язання. Рівняння Лагранжа II-го роду має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x,$$

$E_{\text{К}}$ – кінетична енергія матеріальної системи;

Π – потенціальна енергія матеріальної системи;

Q_x – узагальнені неконсервативні сили;

x – узагальнена координата;

$\dot{x}$ – узагальнена швидкість.

Проаналізуємо рух окремих ланок матеріальної системи. Тіло 1 рухається поступально, тіла 2 і 3 – здійснюють обертальний рух.

Матеріальна система має одну ступінь вільності, тобто всі переміщення матеріальних точок системи можна визначити через переміщення однієї узагальненої координати. За узагальнену координату приймаємо переміщення тіла 1 x. Припускаємо, що тіло 1 рухається донизу і має переміщення x та швидкість $\dot{x}$

Визначимо кінетичну енергію матеріальної системи.

Матеріальна система складається з трьох тіл певної маси, тому кінетична енергія матеріальної системи дорівнює сумі кінетичних енергій трьох тіл:

$$E_{\text{К}} = E_{\text{К}_1} + E_{\text{К}_2} + E_{\text{К}_3},$$

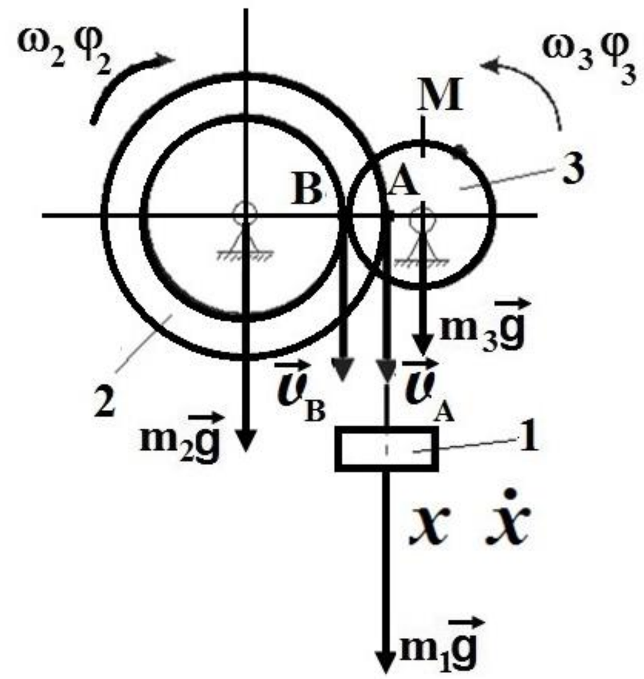
$E_{\text{К}_1} = {m_1\dot{x}^2}/{2}$ – кінетична енергія 1-го тіла, яке рухається поступально;

$E_{\text{К}_2} = {I_2\omega_2^2}/{2}$ – кінетична енергія 2-го тіла, яке обертається;

$E_{\text{К}_3} = {I_3\omega_3^2}/{2}$ – кінетична енергія 3-го тіла, яке обертається;

I_2, I_3 – моменти інерції 2-го та 3-го тіла;

ω_2, ω_3 – кутові швидкості 2-го та 3-го тіла.



Для визначення співвідношень між швидкостями тіл системи проаналізуємо точки A і B з урахуванням узагальненої швидкості $\dot{x}$.

Швидкість точки A дорівнює швидкості тіла 1, тобто $\dot{x} = v_A$. Крім того, точка A належить тілу 2, що здійснює обертальний рух, тому швидкість цієї точки визначаємо за формулою:

$$\dot{x} = \omega_2 R_2.$$

Виходячи з цього, маємо залежність між кутовою швидкістю ω_2 та швидкістю v_1:

$$\omega_2 = \dot{x}/_{R_2}.$$

Визначимо залежність між кутовою швидкістю ω_3 та швидкістю $\dot{x}$. Для цього скористаємось тим, що точка B належить тілу 2 та тілу 3,тобто маємо:

$$v_B = \omega_3 R_3 = \omega_2 r_2.$$

Таким чином:

$$\omega_3 = \omega_2 \, {}^{r_2}/_{R_3} = \dot{x}\,\frac{r_2}{R_2 R_3}.$$

Моменти інерції 2-го та 3-го тіла визначаємо за формулами:

$$I_2 = m_2 i_{x2}^2, \quad I_3 = m_3\,\frac{R_3^2}{2}.$$

Запишемо кінетичні енергії тіл матеріальної системи через швидкість $\dot{x}$ 1-го тіла:

$E_{\text{К}_1} = {}^{m_1\dot{x}^2}/_2 = \dfrac{12\dot{x}^2}{2} = 6\dot{x}^2$ – кінетична енергія 1-го тіла;

$E_{\text{К}_2} = {}^{I_2\omega_2^2}/_2 = \dfrac{m_2 i_{x2}^2}{2}\left({}^{\dot{x}}/_{R_2}\right)^2 = \dfrac{8\cdot 10^2}{2}\left(\dfrac{\dot{x}}{12}\right)^2 = 2{,}78\dot{x}^2$ – кінетична енергія 2-го тіла;

$$E_{\text{К}_3} = {}^{I_3\omega_3^2}/_2 = \frac{1}{2} m_3\,\frac{R_3^2}{2}\left(\dot{x}\,\frac{r_2}{R_2 R_3}\right)^2 = \frac{1}{2}\,4\,\frac{4^2}{2}\left(\dot{x}\,\frac{8}{12\cdot 4}\right)^2 =$$

$= 0{,}44\dot{x}^2$ – кінетична енергія 3-го тіла.

Кінетична енергія всієї матеріальної системи:

$$E_{\text{К}} = E_{\text{К}_1} + E_{\text{К}_2} + E_{\text{К}_3} = 6\dot{x}^2 + 2{,}78\dot{x}^2 + 0{,}44\dot{x}^2 = 9{,}22\dot{x}^2.$$

Визначимо потенційну енергію Π матеріальної системи, яка складається з потенційних енергій сил тяжіння $m_1 g$, $m_2 g$, $m_3 g$, які прикладені до центру ваги тіл 1-3:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3.$$

Потенційна енергія за визначенням – це робота цієї сили, узята з протилежним знаком:

$$A(m_1 g) = m_1 g \cdot s_1 = 120 s_1 \Longrightarrow \Pi_1 = -m_1 g \cdot x = -120x$$

$$A(m_2 g) = m_2 g \cdot s_{O2} = 0 \Longrightarrow \Pi_2 = -m_2 g \cdot 0 = 0$$

$$A(m_3 g) = m_3 g \cdot s_{O3} = 0 \Longrightarrow \Pi_3 = -m_3 g \cdot 0 = 0$$

Таким чином, повна потенційна енергія системи $\Pi = -120x$.

Узагальнені неконсервативні сили Q_x – це коефіцієнт у формулі для визначення роботи сил при відповідній узагальненій координаті.

Визначимо роботу неконсервативних сил на узагальненому переміщенні x. У ролі зазначеної сили в задачі виступає зовнішній момент M, робота якого:

$$A(M) = M \cdot \varphi_3.$$

Визначимо роботу моменту через переміщення x. Для цього скористаємось співвідношенням:

$$\omega_3 = \dot{x}\,\frac{r_2}{R_2 R_3} \to \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{r_2}{R_2 R_3} \to d\varphi_3 = dx\,\frac{r_2}{R_2 R_3} \to$$

$$\varphi_3 = x\,\frac{r_2}{R_2 R_3}.$$

$$A(M) = M \cdot \varphi_3 = M \cdot x\,\frac{r_2}{R_2 R_3} = 80 \cdot x\,\frac{8}{12 \cdot 4} = 13{,}33x = Q_x \cdot x.$$

Таким чином, $Q_x = 13{,}33$.

Отримані результати підставимо у рівняння Лагранжа II-го роду, далі, проводячи послідовні перетворення, отримуємо закон руху 1-го тіла.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\left(9{,}22\dot{x}^2\right)}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial\left(9{,}22\dot{x}^2\right)}{\partial x}=-\frac{\partial(-120x)}{\partial x}+13{,}33,$$

$$\frac{d}{dt}(18{,}44\dot{x})-0=120+13{,}33,$$

$$18{,}44\ddot{x}=133{,}33,$$

$$\ddot{x}=7{,}22.$$

У початковий момент руху система перебувала у стані спокою, тому для $t=0$ швидкість $\dot{x}=0$ і переміщення $x=0$. З урахуванням початкових умов двічі інтегруємо диференціальне рівняння і отримуємо:

$$\dot{x}=7{,}22t,\quad x=3{,}61t^2.$$

Розв'язки збігаються з отриманими під час розв'язання задачі за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії (Глава 6).

Таким чином, показано, що рівняннями Лагранжа II-го роду можна користуватися для вивчення руху довільної механічної системи з геометричними або зведеними до геометричних (голономних) в'язями, незалежно від того, скільки тіл (або точок) складають систему, як вони рухаються та який рух – абсолютний чи відносний – розглядається.

В практичних задачах кількість узагальнених координат відносно невелике (в машинах на рівні одиниць, а часто достатньо однієї або двох). Тому за допомогою рівнянь Лагранжа II-го роду можна скласти невелику кількість диференційних рівнянь для опису руху механічної системи.

Алгоритм застосування методу Лагранжа однаковий в усіх задачах, що має велике значення – не вимагає від дослідника надскладних міркувань. Для складання рівнянь Лагранжа II-го роду потрібно:

1) встановити кількість степенів вільності та обрати узагальнені координати;
2) показати систему в довільному положенні з поданням всіх діючих сил;
3) обчислити узагальнені сили, при цьому, щоб запобігти помилок у знаках, кожне можливе переміщення має бути спрямовано у напрямі додатного приріста відповідної координати;

4) визначити кінетичну енергію системи у її абсолютному русі та виразити її через узагальнені координати та швидкості;
5) підрахувати відповідні частинні похідні від кінетичної та потенційної енергій з подальшим підставленням у рівняння Лагранжа II-го роду.

Контрольні питання

1. В чому полягає сутність аналітичної механіки?
2. Які існують в’язі?
3. Що називають число степенів вільності матеріальної системи?
4. Дайте визначення узагальнених координат.
5. Що називають віртуальним переміщенням? Чим вони відрізняються від дійсних?
6. Дайте визначення ідеальних в’язей.
7. Що таке узагальнена сила?
8. Сформулюйте загальне рівняння динаміки.
9. Що представляють за змістом рівняння Лагранжа II-го роду?
10. Що таке узагальнені швидкості?
11. Яка структура рівнянь Лагранжа II-го роду?
12. Як обчислюються узагальнені сили?

Глава 9. Основи теорії гіроскопа

9.1. Основні поняття та визначення

У відповідності з сучасним станом і перспективами розвитку гіроскопічної техніки **гіроскопом** в широкому розумінні називають **прилад, що містить обертовий або коливальний елемент і дозволяє на цій основі виявляти і вимірювати обертання в інерційному просторі основи, на якому встановлено цей пристрій**.

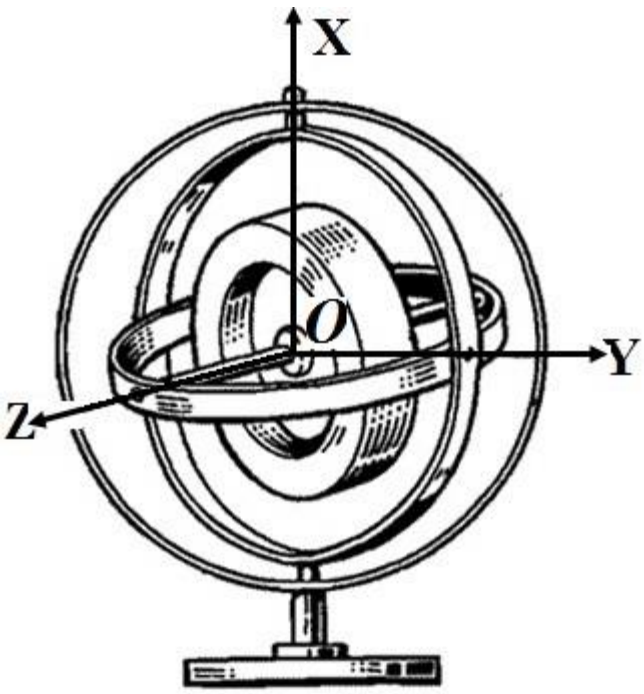


Рисунок 9.1.

Це визначення відповідає самому значенню терміна гіроскоп, введеного в 1852 році французьким фізиком Леоном Фуко, утвореного від двох грецьких слів: обертання і спостерігати. Тобто у вільному перекладі гіроскоп – це індикатор обертання. На рис. 9.1 показано гіроскоп у вигляді середини XIX століття з використанням карданних кілець, а сам гіроскоп називається гіроскопом на кардановому підвісі.

Гіроскопи набули широкого використання у різних галузях техніки: на транспорті, морському флоті, авіації тощо. За допомогою гіроскопічних пристроїв за заданим курсом спрямований рух суден у відкритому морі, здійснюються польоти літаків. На всіх морських і океанських суднах встановлені гіроскопічні компаси, які працюють значно точніше та стійкіше ніж магнітні компаси. У військовій справі гіроскопічні прилади застосовуються для управління польотом ракет і рух торпед під водою.

Гіроскопи застосовують для вимірювання з високим степенем точності кутових і лінійних швидкостей і прискорень.

Звичайно, на сьогодні конструктивне виконання гіроскопів значно різноманітніше. В якості гіроскопа можуть використовуватися обертові тверді, рідкі і газоподібні тіла. Практично доведена можливість використання гіроскопічних властивостей частинок – атомних ядер або електронів зі спіновими або орбітальними моментами. На основі оптичних квантових генераторів створені лазерні гіроскопи.

Проте в даний час в технічних пристроях найбільшого поширення набули гіроскопи, в яких використовується динамічно симетричне тверде тіло (ротор), що швидко обертається, підвішене таким чином, що його власна вісь обертання може довільно змінювати напрямок у просторі. Тому основними частинами гіроскопа є ротор і його підвіска.

Центром підвісу гіроскопа є та точка, що залишається єдиною нерухомою точкою під час усіх обертальних рухів ротора. Якщо центр мас гіроскопа збігається з центром підвісу, то гіроскоп називають астатичним, або врівноваженим, якщо не збігається – важким.

Гіроскоп називається вільним, якщо на нього не діє жоден момент зовнішніх сил. У техніці під вільним гіроскопом часто розуміють астатичний гіроскоп з надзвичайно малими моментами сил тертя на підвісці.

Розглянемо підвіси, які використовуються в гіроскопах. Ступінь досконалості гіроскопа, побудованого на основі суцільного ротора, багато в чому залежить від якості його підвіски. Через підвіску ротор гіроскопа з’єднаний з основою (об’єктом, платформою), на якій він встановлений. Підвіс гіроскопа вважається тим кращим, чим менше кутові переміщення основи передаються на ротор.

Всі гіроскопи (гіроскопічні чутливі елементи) можна розділити на два класи в залежності від того, що є об'єктом підвіски:

камера (оболонка), що містить швидко обертовий ротор (або систему роторів). У цьому класі гіроскопів використовуються карданний, гідростатичний (у поєднанні з електромагнітним або пружним підвісом), а також газостатичний підвіс;

швидко обертовий ротор. У цьому класі гіроскопів використовуються підвіски – електростатичні, гідродинамічні, електромагнітні, кріогенні, газодинамічні, а також пружні обертові.

У тих гіроскопах, в яких для підвіски використовуються електростатичне або електромагнітне поле або сили тиску рідини або газу, сам ротор або камера, що містить ротор, має, як правило, сферичну форму. Ця форма є найбільш зручною з точки зору забезпечення симетрії діючих опорних сил.

Якщо принципово необхідними компонентами гіроскопа є ротор і підвіска, то гіроскоп, призначений для використання в гіроскопічному пристрої, повинен мати: ротор (камеру з ротором), привід (для додання ротору власного обертального руху), а в деяких випадках датчик кута (для відстеження кутового положення гіроскопа) і датчик моменту для введення контрольних і коригувальних моментів.

Гіроскоп на кардановому підвісі має можливість обертатися навколо трьох взаємно перпендикулярних осей, які перетинаються в одній точці: осі обертання Z самого гіроскопа, яка називається головною віссю (полярною віссю) або віссю власного обертання; осі обертання Y внутрішнього кільця; осі обертання X зовнішнього кільця підвісу. Осі Y і X називають екваторіальним осями. В техніці кутова швидкість Ω власного обертання гіроскопа сягає 6000 рад/с, водночас кутова швидкість ω обертання самого тіла навколо інших осей залишається на рівні 1 рад/с. Цей факт дозволяє побудувати достатньо ефективну наближену теорію гіроскопу, яка зветься елементарною або прецесійною. В основі цієї теорії покладено наступне.

Припустимо, що гіроскоп має нерухому точку O і вісь симетрії Z. Якщо гіроскоп обертається навколо осі Z з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$ і положення осі Z не змінюється, то вектор кутової швидкості $\vec{\Omega}$ спрямований вздовж вказаної осі (рис. 9.2). Його проекція на вісь Z дорівнює $\Omega_Z = \Omega$. На будь-які інші рухомі осі, перпендикулярні до осі Z, проекції дорівнюють нулю. Це приводить згідно з (16.15) до виразу $L_Z = \Omega_Z I_Z$ і загалом кінетичний момент гіроскопа відносно нерухомої точки O дорівнює $L_O = \Omega_Z I_Z$.

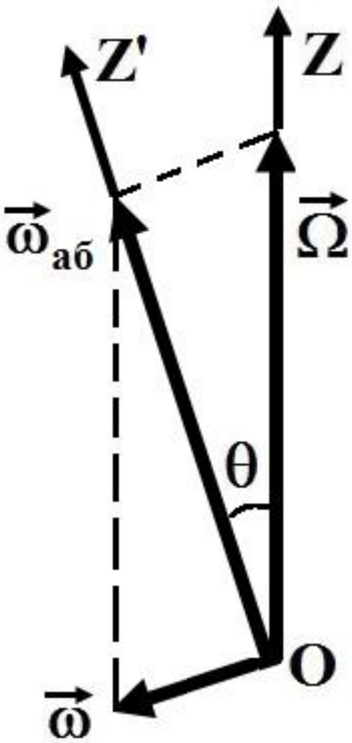


Рисунок 9.2.

Розглянемо складний рух гіроскопа, котрий складається з обертання навколо осі симетрії Z' з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$ і обертання разом з цією віссю навколо нерухомої осі Z з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$.

У кожний момент часу вектор абсолютної кутової швидкості гіроскопа $\vec{\omega}_{аб}$ визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах кутових швидкостей $\vec{\omega}_{аб}$ і $\vec{\omega}$ обертань:

$$\vec{\omega}_{аб} = \vec{\Omega} + \vec{\omega},$$

а його рух складається з серії елементарних поворотів з цією кутовою швидкістю навколо миттєвих осей обертання Z'.

Кінетичний момент гіроскопа $\vec{L}_O$ відносно точки O можна визначити за його проекціями на рухомі осі координат. Тангенс кута θ визначається відношенням модулів векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\Omega}$, що за співвідношеннями між ними у 3-4 порядки дозволяє вважати цей кут $\theta \approx 0$. Полярний та екваторіальні моменти інерції є величинами одного порядку, для круглих дисків полярний момент вдвічі більший за будь-який екваторіальний, також, кінетичними моментами самих рамок теж можна нехтувати через їхню кутову швидкість на рівні одиниць рад/с. Всі ці чинники дозволяють вважати кінетичний момент гіроскопа, навіть за наявності відхилення осі Z' від осі Z, спрямованим вздовж осі симетрії гіроскопа і який дорівнює:

$$\vec{L}_O = \vec{\Omega} I_z. \tag{9.1}$$

Односпрямованість вектора $\vec{L}_O$ і осі Z вздовж однієї прямої дозволяє знаходити, як змінюється за часом напрям осі гіроскопа за зміною напряму вектора $\vec{L}_O$. Кінетичний момент гіроскопа є найбільш вичерпною характеристикою тіла, що обертається, оскільки ані маса тіла, ані його момент інерції , ані кутова швидкість його обертання окремо не відображає його гіроскопічних властивостей. На цій умові побудована наближена теорія гіроскопічних явищ.

9.2. Основні властивості гіроскопів з різними степенями вільності

1. Гіроскоп з 3-ма степенями вільності (рис. 9.3).

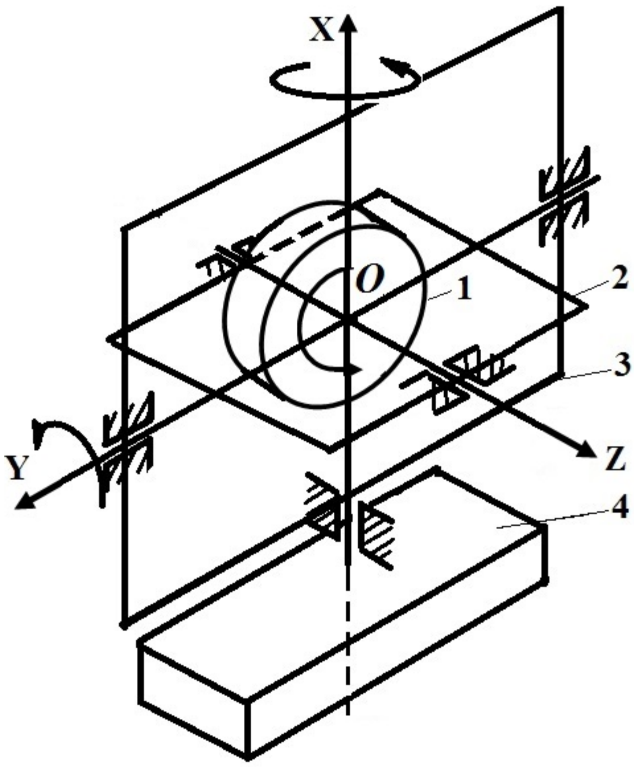


Рисунок 9.3.

Ротор 1 підвішений у системі рамок так, що він може обертатися навколо осі Z відносно внутрішньої рамки 2 (природне обертання), внутрішня рамка навколо осі Y відносно зовнішньої рамки 3, а остання навколо осі X відносно опор спирання на основі 4. Точка O перетину зазначених осей є центром підвісу гіроскопа.

Розглянемо декілька властивостей гіроскопа.

Перша властивість полягає в наступному. Головна вісь вільного гіроскопа прагне зберегти незмінний напрямок в інерційному просторі. Це означає, що якщо головна вісь спрямована на будь-яку зірку, то при будь-якому русі основи, на якій встановлено гіроскоп, він незмінно буде вказувати на цю зірку, змінюючи свою орієнтацію щодо системи координат, пов’язаної із Землею. Цю властивість вперше використав Л. Фуко для доказу добового обертання Землі.

Друга властивість пов’язана з дією сил, які прикладені до осі гіроскопа. Напрям пересування осі легко визначити за теоремою Резаля (Глава 5, розділ 5.7).

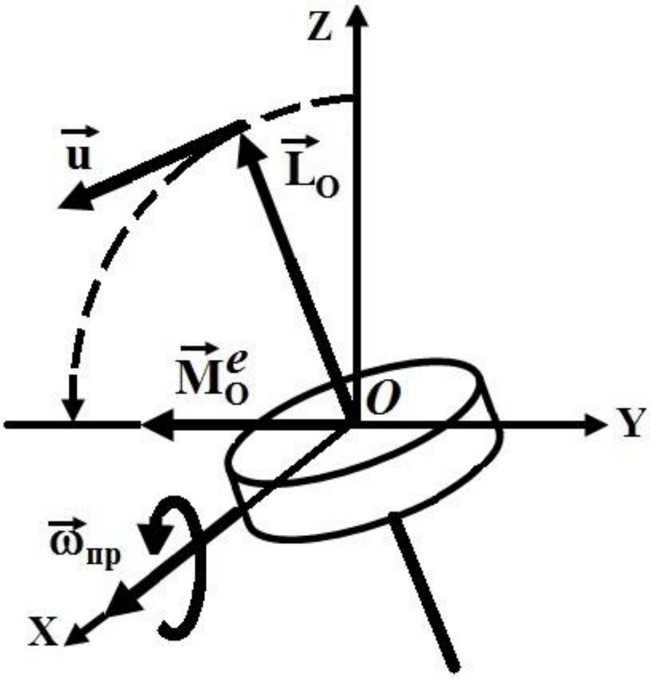


Рисунок 9.4.

Припустимо, що до гіроскопа відносно будь-якої його екваторіальної осі прикладений момент $\vec{M}^e_O$, що викликає обертання вектора $\vec{L}_O$, а також і повязаної з ним полярної осі, з деякою кутовою швидкістю $\vec{\omega}_{пр}$.

Обертання осі гіроскопа під дією прикладеного до нього моменту зовнішніх сил називають **прецесією**.

Правило прецесії полягає в тому, що вектор $\vec{L}_O$ за найкоротшим шляхом стає сумісним з вектором $\vec{M}^e_O$. За величиною кутова швидкість прецесії дорівнює:

$$\omega_{пр} = \frac{M^e_O}{L_O}, \tag{9.2}$$

або у векторному вигляді з урахуванням (9.1):

$$\vec{M}^e_O = \vec{\omega}_{пр} \times \vec{L}_O = \vec{\omega}_{пр} \times \vec{\Omega} I_Z. \tag{9.3}$$

Очевидно, кутова швидкість прецесії тим менше, чим більше кутова швидкість обертання гіроскопа навколо осі симетрії, і більше за умов збільшення моменту зовнішніх сил.

З правила прецесії слідує висновок, що за умови рівності нулю моменту зовнішніх сил відносно точки полярна вісь гіроскопа залишається нерухомою, або, якщо дія моменту зовнішніх сил припиняється, вісь гіроскопа миттєво зупиняється.

Прецесійний рух відбувається з постійною кутовою швидкістю, тобто є безінерційним.

Спостерігаючи за поведінкою гіроскопа у карданному підвісі, розглянемо два варіанти прикладання зовнішніх сил до його рамок (рис. 9.5). На рис. 9.5, а показано прикладання сили $\vec{F}$ до внутрішньої рамки. Момент $\vec{M}_O^e$ навколо осі Y, напрям якого визначається за правилом векторного добутку, приводить до прецесії навколо осі X, тобто повороту вектора $\vec{L}_O$ до вектора $\vec{M}_O^e$.

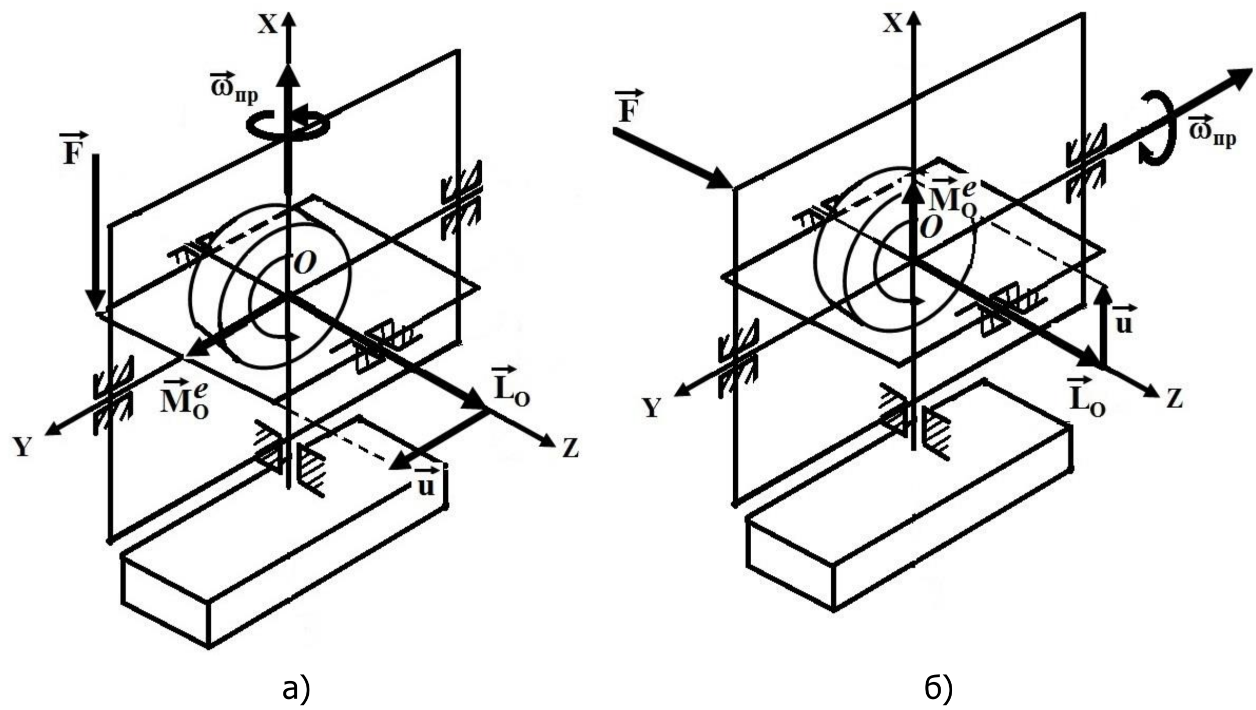


Рисунок 9.5.

На рис. 9.5, б показано прикладання сили $\vec{F}$ до зовнішньої рамки. Момент $\vec{M}_O^e$ навколо осі X, напрям якого визначається за правилом векторного добутку, приводить до прецесії навколо осі Y, тобто повороту вектора $\vec{L}_O$ до вектора $\vec{M}_O^e$.

Якщо гіроскоп знаходиться у стані спокою, то прикладання сили у площині, наприклад, перпендикулярній до осі Z, приводить до обертання цієї осі. Головний момент зовнішніх сил спрямований вздовж осі Y, і за умов його постійності гіроскоп обертається рівноприскорено, набуваючи за деякий інтервал часу τ величини кутової швидкості від нуля до значення ω. За умов припинення дії сили гіроскоп продовжує обертатися за інерцією навколо осі Y з постійною набутою кутовою швидкістю ω.

Слід зазначити, що теорій прецесії гіроскопа дає дійсну картину лише за умови, що власна кутова швидкість обертання гіроскопа достатньо велика.

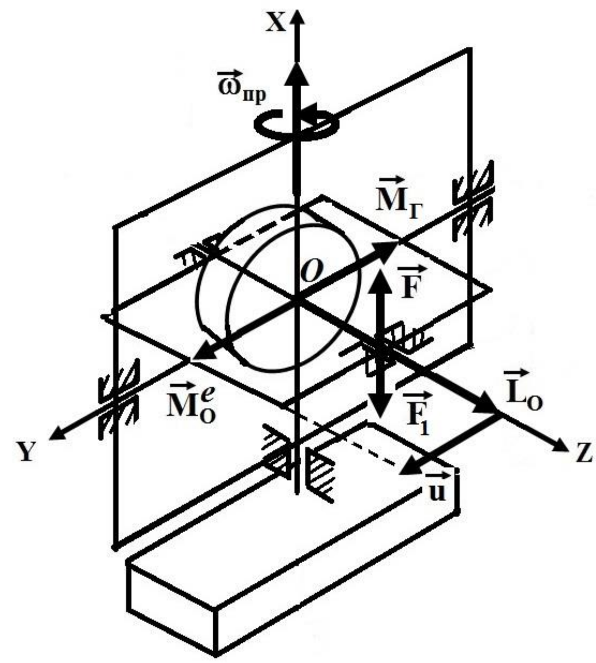


Рисунок 9.6.

Введемо поняття **гіроскопічного моменту**, яким називають **сумарний момент сил протидії гіроскопа, які виникають за його прецесії**.

Прикладаючи до рамки зовнішню силу $\vec{F}$, момент якої $\vec{M}_O^e$ приводить до прецесії з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_{пр}$, за третім законом Ньютона з'являється сила протидії $\vec{F}_1$. Момент цієї сили $\vec{M}_Г$ відносно точки O і буде гіроскопічним моментом (рис. 9.6).

Через рівність за модулем моментів $\vec{M}_O^e$ і $\vec{M}_Г$ можна записати:

$$\vec{M}_Г = I_Z \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_{пр}. \quad (9.4)$$

Третя властивість виражається наступним чином. Якщо гіроскоп знаходився у стані спокою, то вплив імпульсу сили на вісь гіроскопа приводить до обертання навіть після припинення дії сили. Інша картина спостерігається за умов обертання ротору гіроскопа.

Удар по ротору, що обертається, не викликає помітного відхилення від його осі. Якщо зменшувати швидкість обертання ротору, удар по ньому викликає помітні коливання осі ротору. Вісь продовжує коливатися за інерцією, і такий рух називається **нутацією**.

Властивості гіроскопа з трьома степенями вільності використовуються в таких пристроях, як гірокомпаси, гірогоризонти, гіростабілізатори індикаторного типу.

2. Гіроскоп з 2-ма степенями вільності

Отримаємо гіроскоп з двома степенями вільності (рис. 9.7), якщо позбавити гіроскоп з 3-ма степенями вільності одного степеня вільності, наприклад, навколо осі X, жорстко з'єднавши рамку 3 з основою 4 (рис. 9.3). Це фактично означає зникнення зовнішньої рамки. В результаті матимемо пристрій, зображений на (рис. 9.7), у якому положення гіроскопа визначається двома величинами: кутом повороту ротора навколо осі Z і кутом повороту рами навколо осі Y.

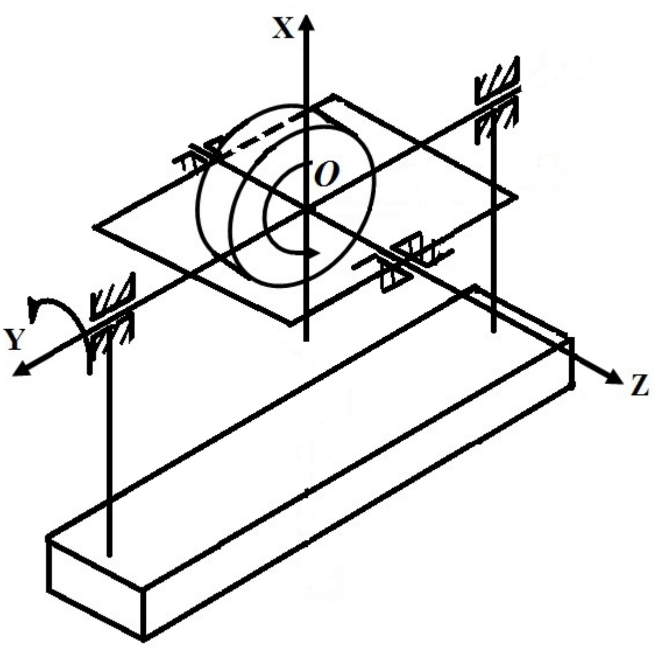
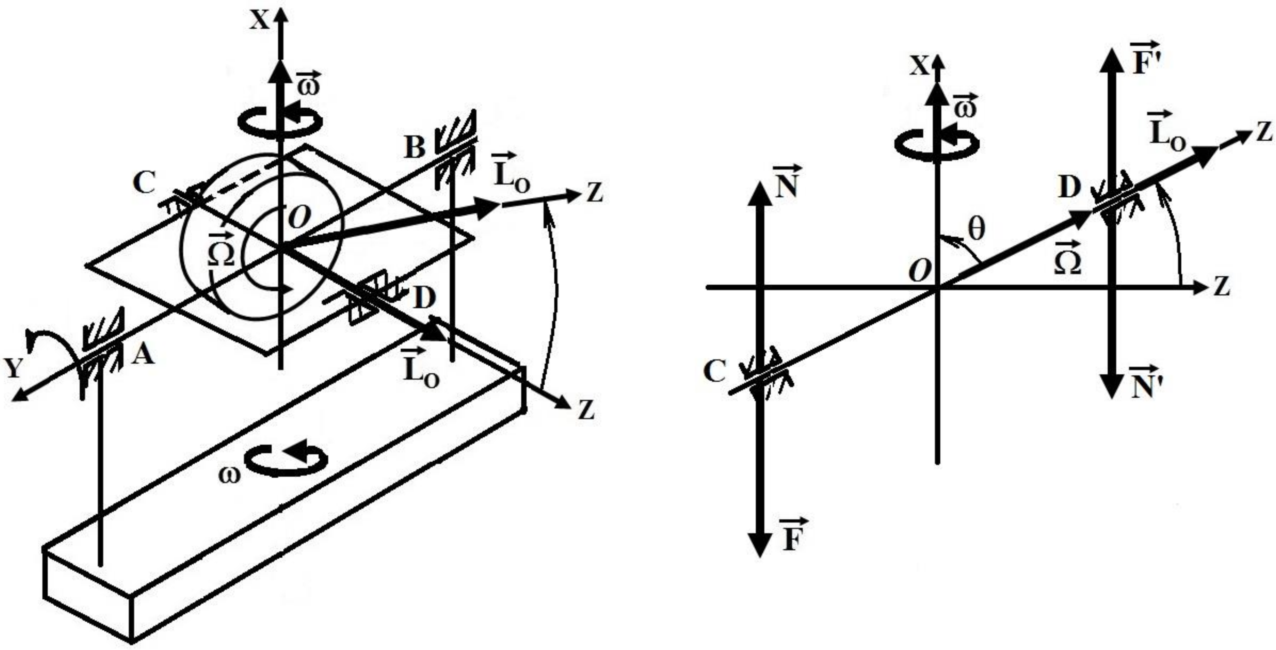


Рисунок 9.7.

Гіроскоп з 2-ма степенями вільності не має жодних властивостей, якими володіє гіроскоп з 3-ма степенями вільності. Властивість, притаманна тільки гіроскопу з 2-ма степенями вільності, полягає в наступному.

Якщо штовхнути рамку, то вона почне вільно обертатися разом з ротором навколо осі Y, а гіроскоп з 3-ма степенями вільності на такий вплив практично не реагує.

Не реагує гіроскоп з 3-ма степенями вільності і на обертання основи, зберігаючи незмінним напрям своєї осі Z. Натомість, гіроскоп з 2-ма степенями вільності поводить себе інакше.



а) б)

Рисунок 9.8.

Припустимо, що в деякий момент часу основа починає обертатися навколо осі X з деякою кутовою швидкістю ω, яка значно поступається кутовій швидкості обертання ротора гіроскопа $\omega \ll \Omega$ (рис. 9.8, а). Тоді, обертаючись разом з основою, гіроскоп починає здійснювати вимушену прецесію навколо осі X. На ротор згідно з (9.3) має діяти момент $\vec{M}_O^e$, який можуть створити тільки сили $\vec{F}, \vec{F}'$ тиску підшипників C, D на вісь ротора. Через нерухомість центру мас ротора O має бути $\vec{F} + \vec{F}' = 0$, значить, сили $\vec{F}$, $\vec{F}'$ утворюють пару. На рис. 9.8, б це схематично показано у вигляді на площину OXZ.

Водночас, за третім законом Ньютона дія підшипників на вісь ротора викликає дію осі на підшипники з такими ж за модулем і протилежними за напрямом силами $\vec{N}$, $\vec{N}'$. Пара сил $\vec{N}$, $\vec{N}'$ є гіроскопічною парою, яка приводить до гіроскопічного моменту $\vec{M}_\Gamma$. За (9.4) запишемо:

$$M_\Gamma = L_O \omega \sin\theta = I_Z \Omega \omega \sin\theta. \tag{9.5}$$

Тут кут θ є кутом між віссю Z в процесі її повороту і віссю X.

Сформулюємо наступне правило Жуковського: якщо гіроскопу, який швидко обертається навколо своєї осі, надати вимушений прецесійний рух, то на підшипники, в яких закріплена вісь ротора гіроскопа, починає діяти гіроскопічна пара з моментом $\overrightarrow{M}_{\Gamma}$, яка намагається найкоротшим шляхом встановити вісь ротора паралельно осі прецесії таким чином, щоб відбувся збіг напрямів векторів $\overrightarrow{\Omega}$ і $\overrightarrow{\omega}$. Під дією гіроскопічної пари рамка почне обертатися навколо осі Y, при цьому кут θ і момент M_{Γ} зменшуються до значення $\theta = 0$, що призведе до зупинки обертання рамки.

На основі властивості гіроскопа з 2-ма степенями вільності створені гіротахометри (диференціюючі гіроскопи), інтегруючі гіроскопи та інше.

3. Гіроскоп з 1-им степенем вільності

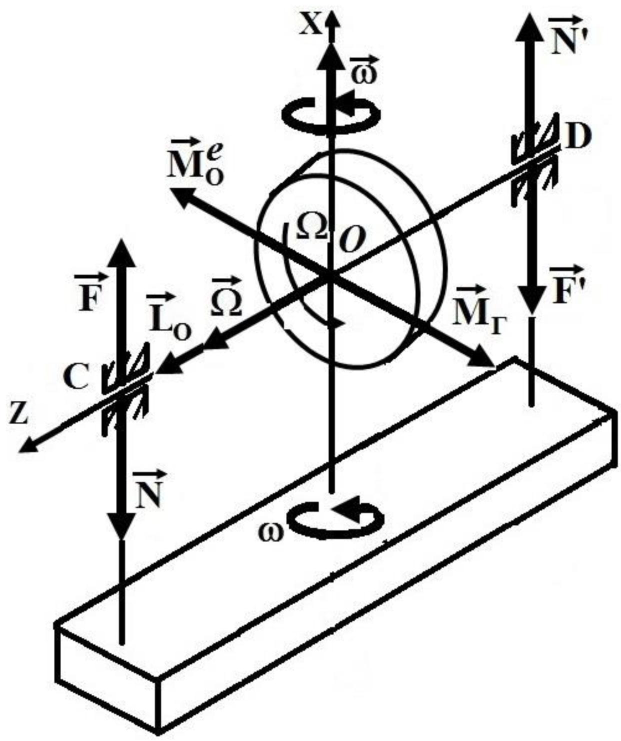


Рисунок 9.9.

Якщо внутрішню рамку жорстко закріпити з основою, що унеможливлює обертання навколо осі X, то у гіроскопа залишається 1 ступінь вільності (поворот навколо осі Z). В такому випадку, за обертання основи навколо осі X (рис. 9.9), виникає гіроскопічний ефект, описаний для гіроскопа з 2-ма степенями вільності. Сили можна визначити, знаючи величини у формулі (9.5).

Момент зовнішніх сил $\overrightarrow{M}_O^e$ утворюється силами $\vec{F}, \vec{F}'$, які прикладено до осі ротора з боку підшипників C, D. За умов дії з боку гіроскопа на підшипники сил $\vec{N}$, $\vec{N}'$ виникає гіроскопічний момент $\overrightarrow{M}_{\Gamma}$, що приводить до намагання сумістити вісь гіроскопа з віссю прецесії.

Необхідно враховувати гіроскопічний ефект тіл, що мають один ступінь вільності у власному обертанні, коли вони встановлені на об'єкти, що змінюють напрямок руху (турбіна корабля чи літака, гвинт вертольоту).

9.3. Регулярна прецесія

У попередньому розділі, аналізуючи поведінку гвроскопа с 3-ма степенями вільності, вплив сили тяжіння не розглядався через збіг точки центру мас з точкою підвісу гіроскопа. Розглянемо гіроскоп, центр ваги якого не збігається з точкою опори O. Прикладом такого гіроскопу є дзиґа (далі тіло), яка спирається гострою віссю на нерухому поверхню. Існує вісь симетрії $O\zeta$ такого тіла, навколо якої відбувається його обертання з кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$ (рис. 9.10). Припустимо, що вісь симетрії тіла утворює з нерухомою вертикальною віссю Z кут θ і тіло обертається навколо цієї осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_{\text{пр}}$.

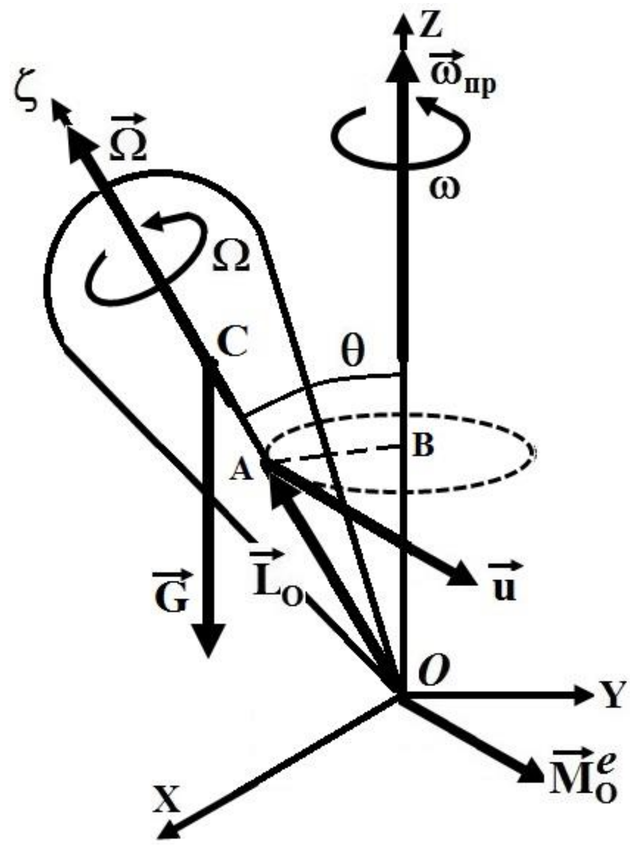


Рисунок 9.10.

Кінетичний момент тіла $\vec{L}_O$ відносно нерухомої точки O спрямований вздовж осі $O\zeta$ і дорівнює:

$$L_O = I_\zeta \Omega, \qquad (9.6)$$

де I_ζ – момент інерції відносно осі $O\zeta$, Ω – кутова швидкість обертання.

На тіло діють сила тяжіння $\vec{G}$, прикладена в точці центра ваги C, і реакція опори O. Позначимо відстань $OC = d$ для подальшого визначення моментів зовнішніх сил.

Головний момент реакції опори дорівнює нулю. Залишається тільки сила тяжіння, момент якої відносно точки O і утворює головний момент зовнішніх сил $\vec{M}_O^e$. Тоді:

$$M_O^e = Gd \cdot \sin \theta.$$

Вектор $\vec{M}_O^e$ спрямований перпендикулярно до площини $OZ\zeta$, яка проходить через лінію дії сили $\vec{G}$ і точку O. За теоремою Резаля (вираз 16.23) швидкість $\vec{u}$ точки A – кінцівки кінетичного моменту $\vec{L}_O$ – геометрично дорівнює головному моменту зовнішніх сил $\vec{M}_O^e$:

$$\vec{u} = \vec{M}_O^e.$$

Відтак, швидкість $\vec{u}$ точки A паралельна вектору $\vec{M}_O^e$, тобто в будь-який момент часу перпендикулярна до площини $OZ\zeta$. З цього слідує, що вісь симетрії тіла $O\zeta$ обертається навколо нерухомої осі Z з деякою кутовою швидкістю $\vec{\omega}_{\text{пр}}$, описуючи конічну поверхню. Кут θ при цьому русі залишається незмінним.

Цей рух, який здійснює вісь тіла, називається **регулярною прецесією**, а кутова швидкість $\vec{\omega}_{\text{пр}}$ її обертання навколо нерухомої осі Z називається **кутовою швидкістю прецесії**. У розділі 9.2 було надано поняття прецесії, але тут дається аналіз руху тіла під дією сили тяжіння.

Для визначення величини $\omega_{\text{пр}}$ скористаємось теоремою Резаля, за якою

$$u = M_O^e = Gd \cdot \sin \theta. \qquad (9.7)$$

З іншого боку, швидкість $\vec{u}$ можна розглядати як обертальну (дотичну) швидкість точки A у обертанні тіла навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю $\omega_{\text{пр}}$, яка за модулем дорівнює:

$$u = AB\omega_{\text{пр}},$$

де AB – відстань від точки A до осі Z:

$$AB = OA\sin\theta = L_O\sin\theta = I_\zeta\Omega\sin\theta.$$

Таким чином:

$$u = I_\zeta\Omega\omega_{\text{пр}}\sin\theta. \tag{9.8}$$

Порівнюючи вирази (9.7) і (9.8), маємо:

$$Gd\cdot\sin\theta = I_\zeta\Omega\omega_{\text{пр}}\sin\theta.$$

Для рішення цього рівняння можна записати

$$\sin\theta\cdot\left(Gd - I_\zeta\Omega\omega_{\text{пр}}\right) = 0.$$

За правилами рівність нулю добутка можлива тільки тоді, коли хоча б один з множників дорівнює нулю. Очевидно, рівність нулю $\sin\theta = 0$, означатиме рівність нулю кута $\theta = 0$, що є тривіальним рішенням і ознакою відсутності прецесії як такої.

Розкриваючи вираз в дужках, отримуємо:

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{Gd}{I_\zeta\Omega}. \tag{9.9}$$

Аналізуючи вираз (9.9) в цілому, можна визначити чинники, що впливають на величину $\omega_{\text{пр}}$ з точки зору її збільшення або зменшення.

Отримане співвідношення показує, що кутова швидкість прецесії $\omega_{\text{пр}}$ тим менше, чим більше кутова швидкість Ω обертання тіла навколо його осі симетрії.

Найпростіший шлях щодо зменшення $\omega_{\text{пр}}$ полягає в зменшенні відстані d, що приводить до максимально плоского виконання гіроскопа, разом з цим збільшується момент інерції I_ζ.

Очевидно, не може бути ситуації, коли $\omega_{\text{пр}} = 0$, бо не може бути обнулення величин, які стоять у чисельнику (9.9). Водночас збільшення до нескінченості моменту інерції I_ζ або кутової швидкості обертання тіла

Ω теж є з області фантастики. Тому в реальності у випадку регулярної прецесії вона завжди має місце з певною швидкістю $\omega_{пр}$.

Контрольні питання

1. Дайте визначення терміну гіроскоп?
2. Чим характеризуються гіроскопи з різною кількістю степенів вільності?
3. Дайте визначення поняттям прецесія та нутація.
4. Що таке гіроскопічний момент?
5. Поясніть регулярну прецесію тіла.
6. В яких галузях техніки використовують пристрої, в яких задіяні гіроскопи?

ЛІТЕРАТУРА

1. Авершин А.Г., Красніков С.В. Методичні вказівки з розрахунково-графічної роботи дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика» для студентів всіх спеціальностей. Харків: ХНАДУ, 2020. 86 с.
2. Авершин А.Г., Біловол О.В. Гідравліка, гідро та пневмоприводи: конспект лекцій. Харків: ХНАДУ, 2023. 129 с.
3. Біловол О.В. Гідравліка, гідрологія та гідрометрія: навч. посібник. В 2-х ч.: Ч.1. Харків: ХНАДУ, 2013. 112 с. ISBN 987-966-303-500-0
4. Біловол О.В., Авершин А.Г. Гідравліка, гідрологія та гідрометрія: конспект лекцій. Харків: ХНАДУ, 2022. 168 с.
5. Булгаков В.А., Яременко В.В., Черниш О.М., Березовський М.Г. Теоретична механіка: підручник. К.: Центр навчальної літератури, 2017. 640 с.
6. Вамболь С.О., Міщенко І.В., Кондратенко О.М. Технічна механіка рідини і газу: підручник. Х.: НУЦЗУ, ФОП Панов А.М. 2016. 300 с. ISBN 978-617-7474-24-0
7. Вамболь С.О., Міщенко І.В., Хохлова Н.В. Технічна механіка. Розділ «Динаміка». Методичні вказівки до виконання контрольної (модульної) роботи. Х.: НУЦЗУ, 2015. 44 с.
8. Воропай О.В., Шарапата А.С. Технічна механіка: Конспект лекцій. Харків: ХНАДУ, 2022. 124 с.
9. Воропай О.В., Шарапата А.С., Єгоров П.А. Методичні вказівки до РГР, СРС і практичних занять для студентів денної та заочної форм навчання з дисципліни «Технічна механіка» з спеціальності 275.03 Транспортні технології (на автомобільному транспорті). Харків: ХНАДУ, 2022. 64 с. (електронна версія)
10. Деркач Ю.Ф., Колосков В.Ю., Кондратенко О.М., Міщенко І.В., Чернобай Г.О. Теоретична механіка та опір матеріалів: курс лекцій. Х.: НУЦЗУ, 2020. 510 с.
11. Деркач Ю.Ф., Колосков В.Ю., Кондратенко О.М., Міщенко І.В., Чернобай Г.О. Технічна механіка: методичні вказівки з організації самостійної роботи здобувачів вищої освіти під час вивчення дисципліни. Х.: НУЦЗУ, 2020. 71 с.

12. Красніков С.В. Theoretical mechanics: навчальний посібник. Kharkiv: ХНАДУ, 2024. 104 p.
13. Міщенко І.В. Теоретична механіка: конспект лекцій. Х.: ХНАДУ, 2023. 207 с.
14. Міщенко І.В. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика». Х.: ХНАДУ, 2024. 82 с.
15. Міщенко І.В., Вамболь С.О., Курська Т.М. Метрологія та стандартизація: конспект лекцій. Х.: АЦЗУ, 2006. 137 с.
16. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник. К.: Техніка, 2002. 511 с.
17. Перегон В.А., Воропай О.В., Коряк О.О., Поваляєв С.І. Синтез механізмів і динаміка машин: навчальний посібник. Х.: ФОП Бровін О.В. 2023. 164 с. ISBN 978-617-8238-36-0
18. Перегон В.А., Воропай О.В., Коряк О.О., Єгоров П.А. Важільні механізми, передачі та зачеплення: навчальний посібник. Х.: ФОП Бровін О.В. 2025. 188 с. ISBN 978-617-8238-90-2
19. Солодов В.Г., Романенко Л.Г. Теоретична механіка: Навч. посіб. для студ. вузів; Харк. нац. автомоб.-дор. ун-т. Х., 2014. 270 с.
20. Солодов В.Г., Авершин А.Г., Стародубцев Ю.В., Хандримайлов А.А., Шипенко О.Н. Теоретична механіка: Теория и задачи. Навч. посіб. для студ. вузів. Харк. нац. автомоб.-дор. ун-т. Х., 2010. 214 с.
21. Штанько П.К., Шевченко В.Г., Омельченко О.С., Дзюба Л.Ф., Пасіка В.Р., Поляков О.М.; за ред. П. К. Штанька. Теоретична механіка: навчальний посібник. Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2021. 464 с.
22. Voropay A.V., Karpenko V.A., Koriak O.O., Povaliaiev S.I., Sharapata A.S. Theory of mechanisms and machines: Lecture notes. Kharkiv National Automobile and Highway University. Kharkiv: KhNAHU, 2023. 95 p.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МІЩЕНКО Ігор Вікторович
ВОРОПАЙ Олексій Валерійович
КРАСНІКОВ Сергій Васильович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Частина II. Динаміка

Навчальний посібник

Комп'ютерна верстка І.В. Міщенко

Відповідальний за випуск О.В. Воропай

Видавець ФОП Бровін О.В.
Свідоцтво про внесення суб'єкта до Державного реєстру видавців та виготовників видавничої продукції серія ДК 3587 від 23.09.09 р.
Формат 60x84/16 Ум. друк. арк. 8.95. Тир. 100 прим. Зам. 820.

Надруковано з макету замовника ФОП Бровіна І.П.
61022, м. Харків, вул. Трінклера, 2, корп.1, к.19. Т. (066) 822-71-30

СТИЛЬ-ІЗДАТ
ДРУКАРНЯ
www.stil-izdat.com