МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ
УНІВЕРСИТЕТ

ТЕОРІЯ ЦИФРОВИХ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ КОЛІСНИХ ТА ГУСЕНИЧНИХ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ

Навчальний посібник
для студентів спеціальності «Галузеве машинобудування»

Харків
ХНАДУ
2022

УДК 517.93:519
Т11

Затверджено Вченою радою ХНАДУ,
протокол № 2 від 25.10.21 р.

Рецензенти:

Гурко О. Г., д-р техн. наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет;

Кошовий М. Д., д-р техн. наук, професор, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського;

Шуляк М.Л., д-р техн. наук, професор, Державний біотехнологічний університет

Автори:
Є. Є. Александров, д-р техн. наук, професор, Т. Є. Александрова, д-р техн. наук, професор І. В. Костяник, канд. техн. наук, доцент
М. П. Холодов, канд. техн. наук, доцент

Теорія цифрових автоматичних систем колісних та гусеничних
Т11 транспортних засобів: навчальний посібник для студентів спеціальності «Галузеве машинобудування» / Є. Є. Александров, Т. Є. Александрова, І. В. Костяник, М. П. Холодов. – Харків : ХНАДУ, 2022. – 108 с.

У навчальному посібнику розглядаються питання аналізу та синтезу цифрових автоматичних систем під час їхнього застосування в агрегатах колісних і гусеничних транспортних засобів.

Рекомендовано студентам спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» для вивчення вибіркового блоку дисциплін «Мехатронні системи транспортних засобів» та «Підйомно-транспортні машини і обладнання».

Табл. 4., Іл. 36., Бібліогр. назв 24.

УДК 517.93:519

© Є. Є. Александров, Т. Є. Александрова,
І. В. Костяник, М. П. Холодов, 2022

ВСТУП

На сучасних колісних і гусеничних транспортних засобах усе частіше застосовуються бортові цифрові обчислювальні машини (БЦОМ) для діагностики технічного стану та керування окремими системами й агрегатами. Насамперед це стосується колісних і гусеничних машин військового призначення. Так, найсучасніший французький танк «Леклерк» містить чотири БЦОМ для:

- керування системою наведення й стабілізації танкової гармати та механізмом зарядження танкової гармати;
- реалізації алгоритмів танкової навігаційної системи;
- автоматичного керування паливоподаванням і наддувом танкового дизеля;
- автоматичного керування танковим гідрооб'ємним механізмом повороту.

Український танк Т-84 «Оплот», що посідає разом із танком «Леклерк» I і II місця у світовому рейтингу бронетанкової техніки, за багатьма тактико-технічними характеристиками випереджає «Леклерк». Але ступінь автоматизації систем і агрегатів танка «Оплот», зокрема в системах автоматики, цифрової та мікропроцесорної техніки, значно відстає від танка «Леклерк». Унаслідок цього за показниками рухомості, швидкострільності та точності стрільби з основного озброєння вітчизняний танк поступається французькому.

Український колісний бронетранспортер БТР-4, що широко застосовується армією України у військових діях на Донбасі, містить некеровану гальмівну систему, що в умовах бездоріжжя значно знижує точність стрільби з ходу із стабілізованої 30-мм швидкострільної гармати. Цей недолік притаманний і вітчизняній броньованій розвідувально-дозорній машині (БРДМ), оснащеній 12,7-мм танковим зенітним кулеметом НСВТ. Тактико-технічні характеристики перелічених вітчизняних колісних бронетранспортерів можуть бути значно підвищені за умови встановлення на них систем курсової стійкості, які містять БЦОМ.

Сучасний стан вітчизняного транспортного машинобудування потребує суттєвого перегляду змісту підготовки бакалаврів і магістрів зі спеціальності «Галузеве машинобудування» щодо вибіркового блоку дисциплін «Мехатронні системи транспортних засобів». Дисципліну «Теорія автоматичного керування», що є складовою частиною цього блоку й містить розділ «Цифрові системи автоматичного керування», доцільно доповнити розділами «Цифрові низькочастотні фільтри» й «Параметричний синтез замкнених цифрових систем». Це дасть змогу випускникам зазначеної вище спеціальності набути навичок розроблення цифрових систем автоматичного керування агрегатами колісних і гусеничних транспортних засобів.

Пропонований навчальний посібник, який містить зазначені вище розділи, призначений для використання в навчальному процесі підготовки магістрів напряму «Галузеве машинобудування», що здійснюється кафедрою інформаційних технологій і систем колісних та гусеничних машин ім. О. О. Морозова, кафедрою підйомно-транспортних машин і обладнання Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» та кафедрою автомобілів ім. А. Б. Гредескула Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЛІНІЙНИХ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

1.1. Системи автоматичного керування з цифровими обчислювальними машинами

Структурна схема САК із цифровою обчислювальною машиною в контурі керування зображена на рис. 1.

На рис. 1 прийняті такі позначки: ОК – об’єкт керування; ВО – виконавчий орган; ЧЕ – чутливий елемент; ПАК – перетворювач «аналог-код»; ОП – обчислювальний пристрій; ПКА – перетворювач «код-аналог»; $y(t)$ – регульована величина; $y^*(t)$ – виміряне значення регульованої величини; $u(t)$ – керуючий сигнал; $m(t)$ – керуючий вплив; $y^*[nT]$ – решітчаста функція, відповідна безперервній функції $y^*(t)$; $u[nT]$ – решітчаста керуюча функція, яка формується обчислювальним пристроєм ЦВМ.

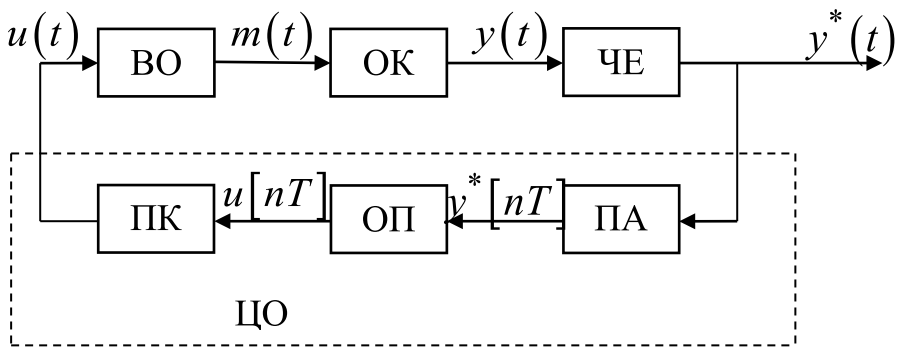

Рис. 1. Структурна схема САК із ЦОМ у контурі

ЦВМ оперує з дискретними за часом і рівнем величинами.

Справді, основним елементом ЦОМ є комірка пам’яті, в яку записується число з певною точністю. Інформація в комірку пам’яті записується в двійковій системі числення, тобто у вигляді нулів і одиниць. Зв’язок між цифрами десяткової системи числення та їхнім поданням до двійкової системи числення визначається такою таблицею (табл. 1):

Таблиця 1

Зв'язок між цифрами десяткової системи числення та їхнім поданням до двійкової системи числення

Цифра в десятковій системі числення	Число у двійковій системі числення
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Дійсні числа зазвичай подаються у вигляді чисел із плаваючою комою. Число з плаваючою комою складається з набору окремих двійкових розрядів, умовно розділених на знак, порядок і мантису. У найбільш поширеному форматі число з плаваючою комою подається у вигляді набору бітів, частина з яких кодує собою мантису числа, інша частина – показник ступеня, і ще один біт використовується для вказівки знака числа (0 – якщо число позитивне, 1 – якщо число від'ємне). У цьому разі порядок записується як ціле число, а мантиса – в нормалізованому вигляді, своєю дробовою частиною у двійковій системі числення. Ось приклад такого числа з 16 двійкових розрядів:

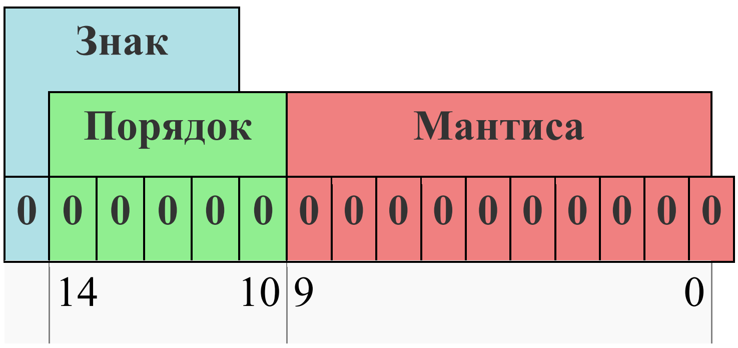

Рис. 2. Подання дійсного числа в ЦОМ

Знак – один біт, який вказує на знак всього числа з плаваючою крапкою. Порядок і мантиса – цілі числа, які разом зі знаком дають уявлення числа з плаваючою комою в такому вигляді:

$$(-1)^s \cdot M \cdot B^E,$$

де s – знак, B – основа, E – порядок, а M – мантиса.

Порядок також іноді називають експонентою, або просто показником ступеня. У цьому випадку лише деякі з дійсних чисел можуть бути подані в пам'яті комп'ютера точним значенням, тоді як інші числа подаються наближеними значеннями.

Нормальною формою числа з плаваючою комою називається така форма, в якій мантиса (без урахування знака) в десятковій системі знаходиться на півінтервалі [0; 1). Така форма запису має недолік: деякі числа записуються неоднозначно (наприклад, 0,0001 можна записати в чотирьох формах — $0{,}0001\times10^0$, $0{,}001\times10^{-1}$, $0{,}01\times10^{-2}$, $0{,}1\times10^{-3}$), тому поширена також інша форма запису – нормалізована, в якій мантиса десяткового числа набуває значення від 1 (включно) до 10 (не включно), а мантиса двійкового числа набуває значення від 1 (включно) до 2 (не включно). Тобто в мантисі зліва від коми до застосування порядку є рівно один знак. У такій формі будь-яке число (крім 0) записується єдиним способом. Нуль уявити таким чином неможливо, тому стандарт передбачає спеціальну послідовність бітів для задання числа 0 (а також і деяких інших корисних чисел, таких як $-\infty$ і $+\infty$).

Діапазон чисел, що можна записати таким способом, залежить від кількості біт, відведених для подання мантиси й показника. Пара значень показника (коли всі розряди нулі й коли всі розряди одиниці) зарезервована для забезпечення можливості подання спеціальних чисел.

Алгоритм отримання уявлення дійсного числа в пам'яті ЦОМ покажемо на прикладі числа, що займає в пам'яті 8 байтів (64 біти). На схемі нижче показано, як тут подані поля мантиси і порядку (нумерація бітів здійснюється справа наліво):

S	Зміщений порядок	Мантиса

Можна помітити, що старший біт, відведений під мантису, має номер 51, тобто мантиса займає молодші 52 біти. Риска вказує тут на положення двійкової коми. Перед комою має стояти біт цілої частини мантиси, але оскільки вона завжди дорівнює 1, тут цей біт не потрібен і відповідний розряд відсутній у пам'яті (але він мається на увазі). Значення порядку зберігається тут як ціле число, подане в додатковому коді. Для спрощення обчислень і порівняння дійсних чисел значення порядку в ЦОМ зберігається у вигляді зміщеного числа, тобто до наданого значення порядку перед записом його в пам'ять додається зсув. Зсув обирається так, щоб мінімальному значенню порядку відповідав нуль. Наприклад, якщо порядок займає 11 біт і має діапазон від 2^{-1023}до 2^{1023}, то зміщення дорівнює $1023_{(10)}$ = =1111111111(2). Нарешті, біт із номером 63 вказує на знак числа.

Отже, з вищесказаного випливає такий алгоритм для отримання уявлення дійсного числа в пам'яті ЦОМ:

1) перевести модуль цього числа у двійкову систему числення;

2) нормалізувати двійкове число, тобто записати у вигляді $M \times 2^p$, де M – мантиса (її ціла частина дорівнює $1_{(2)}$) і p – порядок, записаний у десятковій системі числення;

3) додати до порядку зміщення і перевести зміщений порядок у двійкову систему числення;

4) враховуючи знак заданого числа (0 – позитивне; 1 – від'ємне), виписати його подання до пам'яті ЦОМ.

Приклад. Запишемо код числа – 312,3125.

1. Двійковий запис модуля цього числа має вигляд: 100111000,0101.

2. Маємо 100111000,0101 = $1{,}001110000101 \times 2^8$.

3. Отримуємо зміщений порядок 8 + 1023 = 1031. Далі маємо $1031_{(10)} = 10000000111_{(2)}$.

4. Остаточно

1	10000000111	0011100001010000000000000000000000000000000000000000
63	62..52	51..0

Отже, точність подання дійсного числа в ЦОМ залежить від кількості розрядів, виділених для його подання.

У сучасних високорозрядних бортових ЦОМ точність подання чисел досить висока. Зважаючи на це, ефектом квантування поданого числа за рівнем можна безболісно знехтувати.

Одним із технічних показників бортових ЦОМ, що використовуються на рухомих об'єктах, є маса і об'єм БЦОМ. За умови однакових масогабаритних показників розрядність БЦОМ зворотно-пропорційна її періоду квантування T. Що вища розрядність БЦОМ і обсяг обчислень, то більша величина періоду квантування T. Тому не можна в розрахунку САК із БЦОМ у контурі керування нехтувати періодом квантування за часом і вважати його нескінченно малим.

Перетворювач «аналог-код» (ПАК), що перетворює безперервну виміряну регульовану величину в цифровий код, з урахуванням наведених міркувань, будемо вважати найпростішим імпульсним елементом (НІЕ), який перетворює безперервну функцію $y^*(t)$ у решітчасту функцію $y^*[nT]$, що є послідовністю миттєвих імпульсів, рівновіддалених один від одного на величину періоду квантування T. До того ж у моменти часу nT амплітуда миттєвого імпульсу $y^*[nT]$ точно збігається з амплітудою безперервної функції $y^*(t)$ в той самий момент часу (рис. 3).

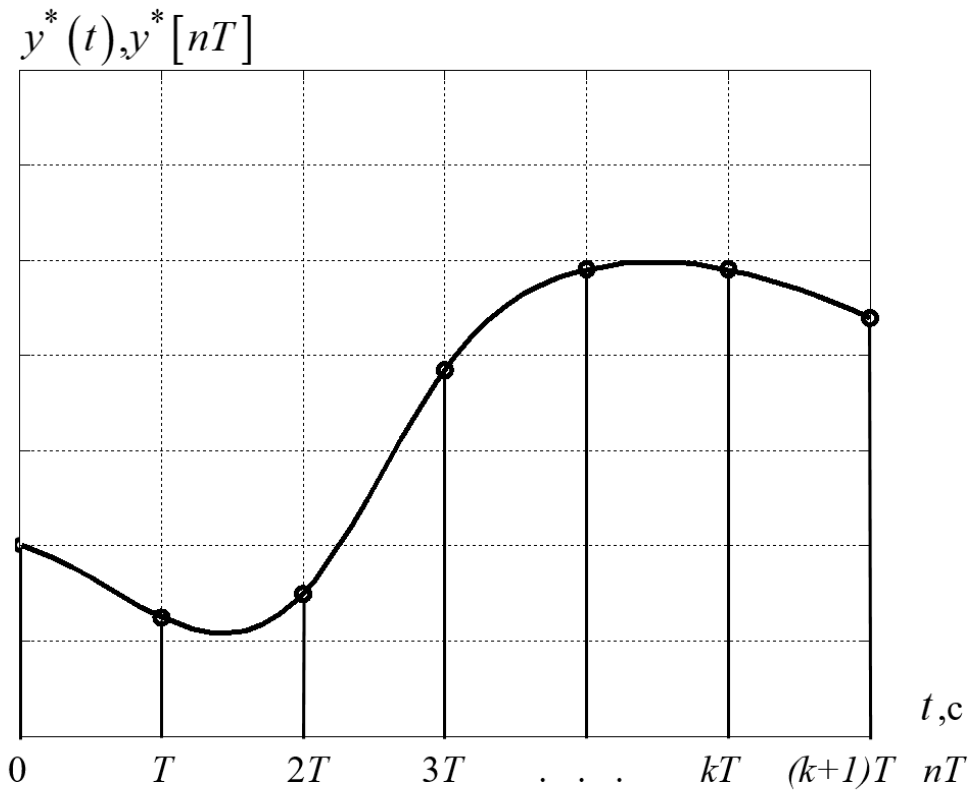

Рис. 3. Графік, що пояснює роботу ПАК

Обчислювальний пристрій формує решітчасту функцію керування $u[nT]$, яка надходить до входу перетворювача «код-аналог» (ПКА). Якщо решітчаста функція $y^{*}[nT]$ однозначно відновлюється з безперервної функції $y^{*}(t)$, то відновлення безперервної функції $u(t)$ з решітчастої функції $u[nT]$ не є однозначним і залежить від алгоритму інтерполяції, що реалізує перетворювач «код-аналог». Так, ПКА нульового порядку перетворює решітчасту функцію $u[nT]$ у кусково-постійну функцію $u(t)$ (рис. 4).

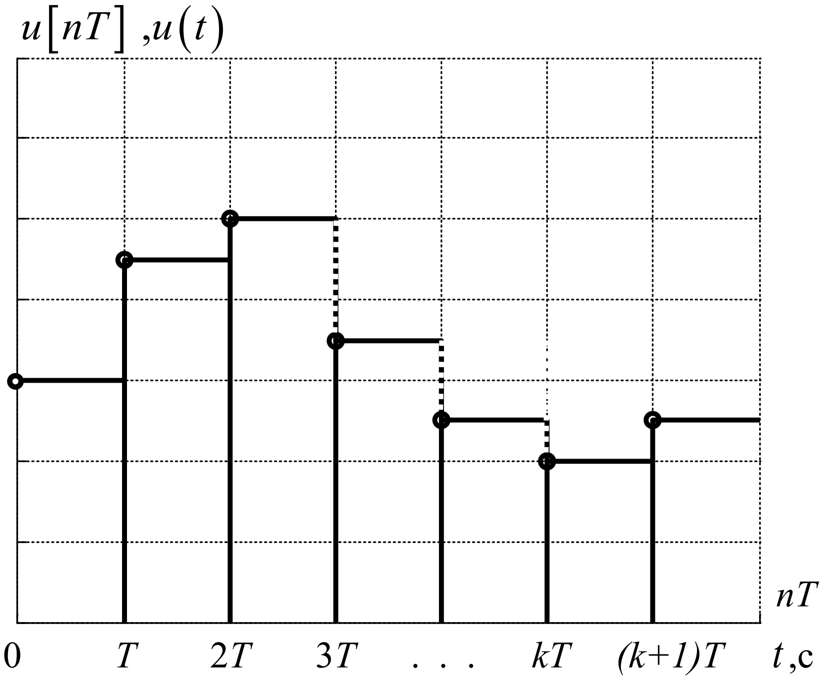

Рис. 4. Графік, що пояснює роботу ПКА нульового порядку

ПКА нульового порядку перетворює миттєвий імпульс з амплітудою $u[kT]$ у прямокутний імпульс тієї самої амплітуди, яка залишається постійною протягом періоду квантування T, тобто до приходу до входу ПКА наступного миттєвого імпульсу (рис. 5).

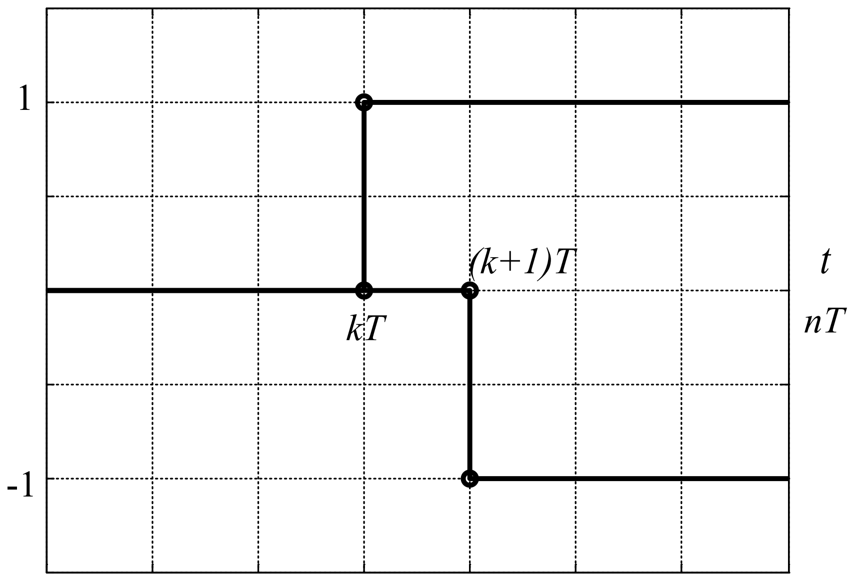

Рис. 5. Графік, що пояснює роботу ПКА

Подаємо до входу ПКА миттєвий імпульс. Тоді на виході ПКА має місце імпульсна перехідна функція $\omega_{\text{ПКА}}(t)$, яка є сумою двох ступінчастих функцій різної полярності, зсунутих одна щодо одної на величину періоду квантування T, тобто

$$\omega_{\text{ПКА}}(t) = 1(t) - 1(t - T). \tag{1}$$

Застосуємо до обох частин (1) операцію перетворення Лапласа [1]. Унаслідок цього отримаємо передавальну функцію ПКА

$$W_{\text{ПКА}}(s) = L\{\omega_{\text{ПКА}}(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \tag{2}$$

1.2. Z-перетворення решітчастої функції

Для вивчення решітчастих функцій методи диференційного та інтегрального числення не придатні, оскільки вони розроблені для вивчення безперервних функцій.

У класі решітчастих функцій дискретним аналогом похідної є різниця решітчастої функції

$$\Delta f[nT] = \frac{f[nT] - f[(n-1)T]}{T}, \tag{3}$$

а дискретним аналогом інтеграла є сума

$$\sum f[kT] = T\sum_{k=0}^{N} f[kT]. \tag{4}$$

Співвідношення (3) та (4) мають строгий фізичний зміст. Так, формула (3) є відношенням приросту функції на інтервалі T до величини цього інтервалу, тобто формулою наближеного обчислення похідної за часом функції $f(t)$. Формула (4) є формулою наближеного обчислення інтеграла функції $f(t)$ методом прямокутників.

Для дослідження цифрових САК із ЦОМ у контурі керування також, як і для дослідження безперервних САК, застосовуються операторні методи, зокрема метод Z-перетворення, оскільки отримані з його допомогою співвідношення за своєю структурою аналогічні співвідношенням для безперервних систем, отриманих за допомогою перетворення Лапласа.

Z-перетворенням решітчастої функції $f[nT]$ зветься функція $F(z)$ комплексної змінної z, яка визначається співвідношенням [2]

$$Z\{f[nT]\} = F(z) = T\sum_{n=0}^{\infty} f[nT]z^{-n}. \tag{5}$$

Відшукаємо зв'язок між комплексними змінними z та s, для чого розглянемо формулу перетворення Лапласа

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt. \tag{6}$$

Використовуючи формулу прямокутників, запишемо наближене співвідношення для обчислення інтеграла в правій частині (6)

$$\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \approx T\sum_{n=0}^{\infty} f[nT]e^{-snT}. \tag{7}$$

Порівняння правих частин співвідношень (5) і (7) дозволяє записати

$$e^{-snT}=z^{-n}$$

або

$$z=e^{sT}. \tag{8}$$

1.3. Дискретна передавальна функція дискретної динамічної ланки

Дискретною динамічною ланкою назвемо послідовне з'єднання безперервної динамічної ланки з передавальною функцією $W(s)$ та найпростішого імпульсного елемента ІЕ, який перетворює безперервний сигнал у решітчасту функцію (рис. 6).

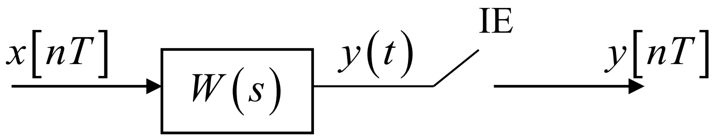

Рис. 6. Схема дискретної динамічної ланки

Припустимо, що до входу дискретної динамічної ланки подана решітчаста функція $x[nT]$. Тоді на виході безперервної частини дискретної динамічної ланки має місце безперервна функція $y(t)$, а на виході дискретної динамічної ланки – решітчаста функція $y[nT]$.

У безперервних динамічних ланках зв'язок між вхідним сигналом $x(t)$ та вихідним сигналом $y(t)$ визначається інтегралом Дюамеля [3]

$$y(t)=\int_0^t \omega(\tau)x(t-\tau)d\tau,$$

де $\omega(\tau)$ – імпульсна перехідна функція динамічної ланки. За аналогією для дискретних динамічних ланок маємо

$$y[nT]=T\sum_{k=0}^{n}\omega[kT]x[(n-k)T]. \tag{9}$$

Додавання в правій частині (9) проводиться до n. З огляду на те, що значення решітчастої функції від від'ємного аргументу дорівнює нулю, верхню границю додавання в співвідношенні (9) можна формально покласти рівною нескінченності

$$y[nT] = T\sum_{k=0}^{\infty}\omega[kT]x[(n-k)T]. \tag{10}$$

До обох частин співвідношення (10) застосуємо операцію Z-перетворення

$$Z\{y[nT]\} = Z\left\{T\sum_{k=0}^{\infty}\omega[kT]x[(n-k)T]\right\}. \tag{11}$$

У правій частині (11) від n залежить тільки решітчаста функція $x[(n-k)T]$. Отже, співвідношення (11) можна записати у вигляді

$$Z\{y[nT]\} = T\sum_{k=0}^{\infty}\omega[kT]\cdot Z\{x[(n-k)T]\}. \tag{12}$$

Розглянемо Z-перетворення решітчастої функції $x[(n-k)T]$.

$$Z\{x[(n-k)T]\} = T\sum_{k=0}^{\infty}x[(n-k)T]z^{-n} = z^{-k}T\sum_{k=0}^{\infty}x[(n-k)T]z^{-(n-k)}.$$

Введемо заміну $n-k=m$

$$Z\{x[(n-k)T]\} = z^{-k}T\sum_{m=-k}^{\infty}x[mT]z^{-m}. \tag{13}$$

Решітчаста функція від від'ємного аргументу дорівнює нулю, отже,

$$Z\{x[(n-k)T]\} = z^{-k}T\sum_{n=0}^{\infty}x[nT]z^{-n} = z^{-k}Z\{x[nT]\}. \tag{14}$$

Унаслідок, підставляючи (14) в (12), маємо

$$Z\{y[nT]\} = T\sum_{k=0}^{\infty}\omega[kT]\cdot z^{-k}Z\{x[nT]\} = Z\{\omega[nT]\}Z\{x[nT]\}.$$

За аналогією з безперервними системами дискретною передавальною функцією дискретної динамічної ланки назвемо відношення Z-перетворення вихідного сигналу ланки до Z-перетворення її вхідного сигналу

$$W(z) = \frac{Z\{y[nT]\}}{Z\{x[nT]\}} = Z\{\omega[nT]\}. \qquad (15)$$

Якщо для безперервної динамічної ланки передавальна функція є перетворенням Лапласа імпульсної перехідної функції $\omega(t)$, то для дискретної динамічної ланки дискретна передавальна функція є Z-перетворенням решітчастої функції $\omega[nT]$, яка відповідає імпульсній перехідній функції безперервної частини дискретної динамічної ланки.

Може бути вказано такий алгоритм відшукання дискретної передавальної функції дискретної динамічної ланки:

- за допомогою таблиць перетворень Лапласа відшукують імпульсну перехідну функцію $\omega(t)$ безперервної частини дискретної динамічної ланки

$$\omega(t) = L^{-1}\{W(s)\};$$

- за допомогою формальної заміни $t = nT$ здійснюють перехід від безперервної функції $\omega(t)$ до решітчастої функції $\omega[nT]$;
- за допомогою таблиць Z-перетворень відповідно до формули (15) відшукують дискретну передавальну функцію дискретної динамічної ланки.

1.4. Дискретна передавальна функція замкнутої дискретної системи

Розглянемо структурну схему замкнутої системи автоматичного керування із ЦОМ у контурі керування, яка подана на рис. 1. Сукупність виконавчого органу, об’єкта керування та чутливого елемента є безперервною частиною САК, передавальна функція якої дорівнює добутку передавальних функцій перелічених елементів

$$W_{\text{БЧ}}(s) = W_{\text{ВО}}(s) \cdot W_{\text{ОК}}(s) \cdot W_{\text{ЧЕ}}(s). \tag{16}$$

Сукупність перетворювача «код-аналог» із передавальною функцією (2) та безперервної частини системи з передавальною функцією (16) назвемо приведеною безперервною частиною системи. Її передавальна функція дорівнює добутку передавальних функцій (2) і (16):

$$W_{\text{ПБЧ}}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} W_{\text{БЧ}}(s). \tag{17}$$

Тоді замкнуту дискретну САК можна подати у вигляді з'єднання зі зворотним зв'язком двох дискретних динамічних ланок (рис. 7).

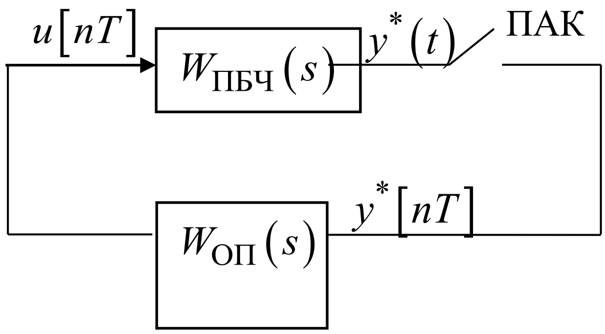

Рис. 7. Схема замкнутої САК із ЦОМ

Знайдемо дискретну передавальну функцію дискретної динамічної ланки, розташованої в прямому ланцюгу.

Для цього знайдемо імпульсну перехідну функцію приведеної безперервної частини САК

$$\begin{aligned}\omega_{\text{ПБЧ}}(t) &= L^{-1}\{W_{\text{ПБЧ}}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{W_{\text{БЧ}}(s)}{s}\right\} - \\ &- L^{-1}\left\{e^{-sT}\frac{W_{\text{БЧ}}(s)}{s}\right\} = h_{\text{БЧ}}(t) - h_{\text{БЧ}}(t-T).\end{aligned} \tag{18}$$

У співвідношенні (18) зробимо формальну заміну $t = nT$

$$\omega_{\text{ПБЧ}}[nT] = h_{\text{БЧ}}[nT] - h_{\text{БЧ}}[(n-1)T]. \tag{19}$$

До обох частин співвідношення (19) застосуємо операцію Z-перетворення

$$Z\left\{\omega_{\text{ПБЧ}}\left[nT\right]\right\}=W_{\text{ПБЧ}}\left(z\right)=Z\left\{h_{\text{БЧ}}\left[nT\right]\right\}-Z\left\{h_{\text{БЧ}}\left[\left(n-1\right)T\right]\right\}=$$
$$=Z\left\{h_{\text{БЧ}}\left[nT\right]\right\}-z^{-1}Z\left\{h_{\text{БЧ}}\left[nT\right]\right\}=\frac{z-1}{z}Z\left\{h_{\text{БЧ}}\left[nT\right]\right\}. \quad (20)$$

Тоді передавальна функція замкнутої дискретної системи становить

$$W\left(z\right)=\frac{W_{\text{ПБЧ}}\left(z\right)}{1+W_{\text{ПБЧ}}\left(z\right)\cdot W_{\text{ОП}}\left(z\right)}. \quad (21)$$

Алгоритм отримання передавальної функції полягає в такому:

- знаходиться передавальна функція безперервної частини САК із використанням формули (16);
- використовуючи таблиці перетворень Лапласа, знаходиться перехідна функція безперервної частини САК

$$h_{\text{БЧ}}\left(t\right)=L^{-1}\left\{\frac{W_{\text{БЧ}}\left(s\right)}{s}\right\};$$

- за допомогою формальної заміни $t=nT$ знаходиться решітчаста функція $h_{\text{БЧ}}\left[nT\right]$;
- з використанням таблиць Z-перетворень і формули (20) знаходиться дискретна передавальна функція $W_{\text{ПБЧ}}\left(z\right)$;
- з використанням формули (21) знаходиться дискретна передавальна функція замкнутої дискретної системи.

1.5. Стійкість дискретних САК

Характеристичне рівняння замкнутої дискретної системи може бути отримано прирівнянням до нуля знаменника передавальної функції (21)

$$1+W_{\text{ПБЧ}}\left(z\right)\cdot W_{\text{ОП}}\left(z\right)=0. \quad (22)$$

Безперервна замкнута система є стійкою в тому випадку, якщо всі корені її характеристичного рівняння знаходяться у лівій півплощині комплексної площини коренів. Межею області стійкості в комплексній площині s є її уявна вісь. Для побудови межі області стійкості замкнутої дискретної системи в комплексній площині z розглянемо рівняння зв'язку між комплексними змінними s та z (8). У співвідношенні (8) зробимо заміну $s = j\omega$ та скористаємося формулою Ейлера.

$$z = e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T. \tag{23}$$

Модуль та аргумент комплексної величини z становлять

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{\cos^2\omega T + \sin^2\omega T} = 1; \\ \phi_z &= arctg\frac{\sin\omega T}{\cos\omega T} = \omega T. \end{aligned} \tag{24}$$

З аналізу співвідношень (24) можна стверджувати, що в разі зміни ω від нуля до $\frac{2\pi}{T}$ у комплексній площині z отримуємо коло одиничного радіуса, яке є конформним відображенням уявної осі комплексної площини s на комплексну площину z.

Умовою стійкості замкнутої дискретної системи є розташування коренів характеристичного рівняння (22) в колі одиничного радіуса (критерій Шур-Кона, рис. 8).

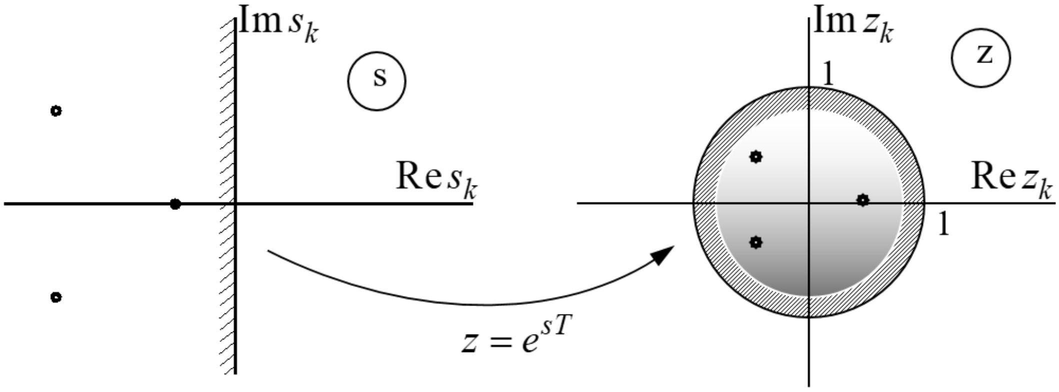

Рис. 8. До пояснення критерію Шур-Кона

Водночас для обчислення коренів характеристичного рівняння необхідна обчислювальна техніка й сертифіковані програмні продукти. Тому часто під час інженерних розрахунків замкнутих дискретних систем використовують метод *W*-перетворення. Відомо, що за допомогою білінійного перетворення

$$z = \frac{1+w}{1-w} \tag{25}$$

коло одиничного радіуса в комплексній площині z відображається в уявну вісь комплексної площини w (рис. 9).

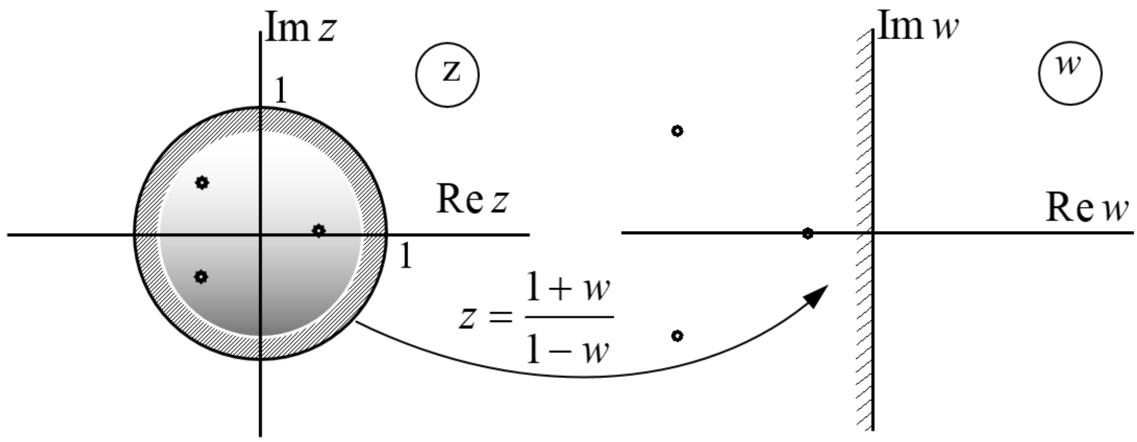

Рис. 9. До пояснення методу *W*-перетворення

У характеристичному рівнянні (22) зробимо заміну

$$1 + W_{\text{ПБЧ}} \frac{1+w}{1-w} \cdot W_{\text{ОП}} \left(\frac{1+w}{1-w} \right) = 0. \tag{26}$$

Характеристичне рівняння (26) має той самий порядок, що й рівняння (22). Кореням характеристичного рівняння (22), розташованим в колі одиничного радіуса площини коренів z, відповідають корені характеристичного рівняння (26), розташовані в лівій півплощині площини коренів w. Вимогою стійкості дискретної системи є розташування всіх коренів перетвореного характеристичного рівняння (26) у лівій півплощині площини w, тобто всі критерії стійкості безперервних систем можуть бути використані для аналізу стійкості дискретних систем.

1.6. Аналіз стійкості дискретної системи курсової стійкості автомобіля в процесі гальмування

Автоматичне керування гальмівною системою автомобіля складається принаймні з трьох систем автоматичного керування, що працюють паралельно [4]:

- антиблокувальної системи (ABS), яка оберігає колеса від блокування в разі різкого натискання на педаль гальм;
- протибуксувальної системи (TRC), яка оберігає ведучі колеса від буксування за умови надмірного натискання на педаль управління подачею палива;
- системи підтримки курсової стійкості (VSC) та підвищення керованості автомобіля у разі втрати зчеплення коліс із дорогою.

Система автоматичного керування гальмами автомобіля працює таким чином. За умови різкого натискання на педаль керування подачею палива ведучі колеса автомобіля можуть пробуксовувати, унаслідок чого автомобіль утрачає стійкість. У цьому разі вихідні сигнали датчиків кутових швидкостей буксувальних коліс перевищують сигнали датчиків кутових швидкостей інших коліс, а система TRC виробляє сигнали керування, спрямовані на збільшення тиску гальмівної рідини в робочих циліндрах буксувальних коліс.

У процесі гальмування на слизькій дорозі колеса автомобіля можуть блокуватися, що також призводить до втрати стійкості руху. На основі аналізу вихідних сигналів від датчиків кутових швидкостей коліс автомобіля блок керування ABS визначає схильність коліс до ковзання і видає сигнали на зменшення тиску гальмівної рідини в робочих циліндрах заблокованих коліс.

Отже, як система TRC, так і система ABS постійно підтримують стійкість напрямку руху автомобіля. Однак точність підтримки курсової стійкості автомобіля за допомогою цих двох систем може бути недостатньою в разі втрати зчеплення двома передніми або двома задніми колесами й характерного для цієї ситуації занесення автомобіля. У цьому випадку починає діяти система VSC, схема якої наведена на рис. 10.

На рис. 10 прийняті такі познаки: БЧЕ – блок чутливих елементів; БЦОМ – бортова цифрова обчислювальна машина; ЕМ – електромагніт; О1, О2 – обмотки ЕМ; К – коромисло ЕМ; Пр – пружина, що фіксує коромисло ЕМ у нейтральному стані за відсутності сигналів на обмотках О1 та О2; Г1, Г2 – запірні голки; ГЦ – головний циліндр; ПГ – педаль гальм; ОГН – об'ємний гідронасос; РЦ – робочі циліндри; КПБ – колесо правого борту автомобіля; КЛБ – колесо лівого борту.

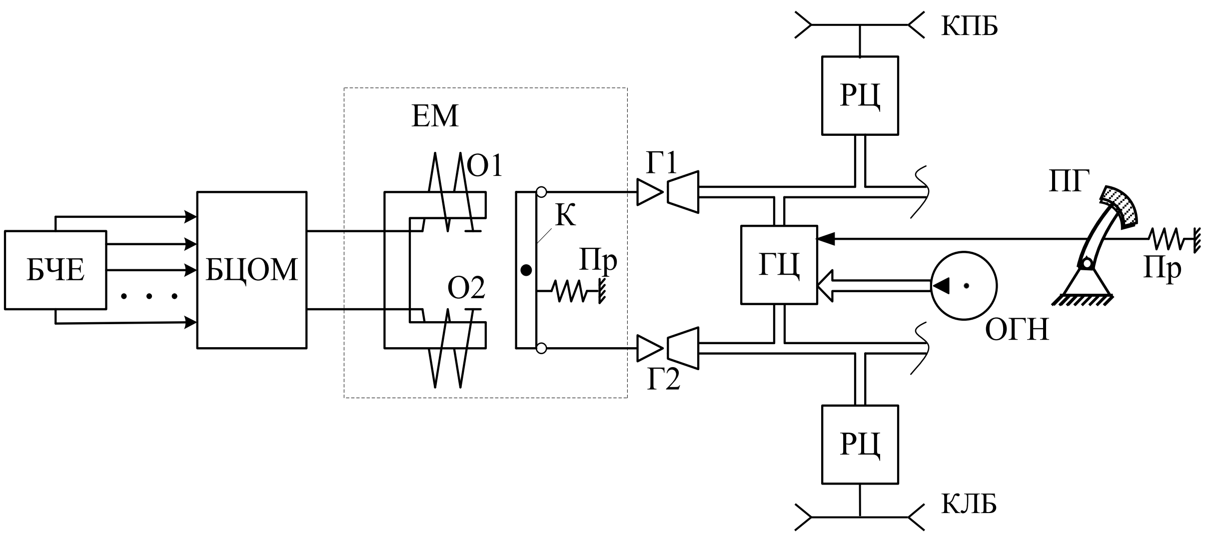

Рис. 10. Структурна схема системи VSC

Система VSC працює таким чином. На підставі вихідних сигналів датчиків блоку чутливих елементів БЦОМ формує електричний сигнал управління, що подається на одну з обмоток електромагніту залежно від знака керуючого сигналу. Якщо керуючий сигнал, що формує БЦОМ, від'ємний, то відповідний електричний сигнал надходить до обмотки О1. Якщо ж керуючий сигнал позитивний – то до обмотки О2. У цьому разі коромисло електромагніту повертається на відповідний кут, а запірні голки прикривають та привідкривають відповідні отвори гідравлічної системи гальм.

Якщо автомобіль робить рух у чітко потрібному напрямку, то під дією фіксувальної пружини коромисло електромагніту має нейтральне положення, а тиск гальмівної рідини, що створюється головним циліндром, однаковий у робочих циліндрах коліс правого й лівого бортів автомобіля.

За умови заносу автомобіля на нього реагують відповідні датчики блоку чутливих елементів, а БЦОМ формує відмінний від нуля керуючий сигнал, що призводить до відхилення коромисла електромагніту від нейтрального положення і до відповідного переміщення запірних голок Г1 і Г2. У цьому разі тиск гальмівної рідини в робочих циліндрах борту автомобіля, що забігає, збільшується, а в робочих циліндрах борту, що відстає, зменшується, що призводить до повернення корпусу автомобіля до заданого положення.

Процес повороту корпусу автомобіля під час гальмування описується диференційним рівнянням

$$I_a \frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \frac{B}{2}\left[F_{\Sigma Л}(t) - F_{\Sigma П}(t)\right], \tag{27}$$

де $F_{\Sigma Л}(t)$, $F_{\Sigma П}(t)$ – сумарні сили опору переміщенню по лівому і правому бортах автомобіля; I_a – момент інерції корпусу автомобіля щодо власної вертикальної осі; B – ширина колії автомобіля.

Сили $F_{\Sigma Л}(t)$ і $F_{\Sigma П}(t)$ складаються з гальмівного складника й складника опору коченню колеса

$$F_{\Sigma Л}(t) = F_{ГЛ}(t) + F_{ОЛ}(t) \;; \tag{28}$$

$$F_{\Sigma П}(t) = F_{ГП}(t) + F_{ОП}(t). \tag{29}$$

Гальмівна сила за кожним із бортів пропорційна тиску гальмівної рідини в робочих циліндрах коліс відповідного борту

$$F_{ГЛ}(t) = k_Г p_Л(t);\; F_{ГП}(t) = k_Г p_П(t). \tag{30}$$

Вважатимемо, що сили опору коченню колеса по правому й лівому бортах однакові

$$F_{ОП}(t) = F_{ОЛ}(t). \tag{31}$$

З урахуванням співвідношень (28)–(31) рівняння (27) записується

$$I_a \frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \frac{B}{2} k_{\Gamma} \left[p_{\text{Л}}(t) - p_{\text{П}}(t) \right] = \frac{B}{2} k_{\Gamma} \Delta p(t), \tag{32}$$

або

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \frac{Bk_{\Gamma}}{2I_a} \Delta p(t). \tag{33}$$

Вводячи позначки

$$\frac{Bk_{\Gamma}}{2I_a} = k_{\text{авт}},$$

рівняння (33) запишемо в такому вигляді:

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = k_{\text{авт}} \Delta p(t). \tag{34}$$

Диференційне рівняння (34) перетворимо за Лапласом

$$s^2 \Psi(s) = k_{\text{авт}} P(s). \tag{35}$$

Із співвідношення (35) маємо вираз для передавальної функції автомобіля як регульованого об’єкта [5]

$$W_{\text{авт}}(\mathrm{s}) = \frac{\Psi(s)}{P(s)} = \frac{k_{\text{авт}}}{s^2}. \tag{36}$$

Виконавчим органом цієї системи є електрогідравлічний підсилювач, на вхід якого надходить сигнал управління $u(t)$, що формується БЦОМ, а з виходу – різниця тисків робочої рідини $\Delta p(t)$. Припускатимемо в першому наближенні, що вхідний і вихідний сигнали ЕГП пов’язані між собою лінійною залежністю

$$\Delta p(t) = k_{\text{егп}} u(t), \tag{37}$$

де $k_{\text{егп}}$ – коефіцієнт посилення ЕГП. Тоді передавальна функція ЕГП записується у вигляді

$$W_{\text{егп}}(\mathrm{s})=\frac{P(s)}{U(s)}=k_{\text{егп}}. \qquad (38)$$

Безперервна частина замкнутої САК є сукупністю ЕГП і власне автомобіля. Отже, передавальна функція безперервної частини системи є добутком передавальних функцій (36) та (38)

$$W_{\text{БЧ}}(\mathrm{s})=W_{\text{егп}}(\mathrm{s})W_{\text{авт}}(\mathrm{s})=\frac{k_{\text{егп}}k_{\text{авт}}}{s^2}. \qquad (39)$$

Вводячи позначки

$$k_{\text{егп}}k_{\text{авт}}=k_{\text{а}}, \qquad (40)$$

передавальну функцію (39) запишемо у вигляді

$$W_{\text{БЧ}}(\mathrm{s})=\frac{k_{\text{а}}}{s^2}.$$

Використовуючи таблиці перетворень Лапласа, відшукаємо перехідну функцію безперервної частини системи

$$h_{\text{БЧ}}(t)=L^{-1}\left\{\frac{W_{\text{БЧ}}(s)}{s}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{k_{\text{а}}}{s^3}\right\}=\frac{k_{\text{а}}}{2}t^2. \qquad (41)$$

Здійснюючи у співвідношенні (41) заміну $t=nT$, знаходимо решітчасту функцію $h_{\text{БЧ}}[nT]$, яка відповідає безперервній функції (41)

$$h_{\text{БЧ}}[nT]=\frac{k_{\text{а}}}{2}[nT]^2. \qquad (42)$$

Використовуючи таблиці перетворень, відшукаємо перетворення решітчастої функції (42)

$$\begin{aligned}Z\{h_{\text{БЧ}}[nT]\}&=Z\left\{\frac{k_{\text{а}}}{2}[nT]^2\right\}=\frac{k_{\text{а}}}{2}Z\left\{[nT]^2\right\}=\\&=\frac{k_{\text{а}}}{2}\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}=\frac{k_{\text{а}}T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.\end{aligned} \qquad (43)$$

Використовуючи формулу (20), запишемо дискретну передавальну функцію прямого ланцюга з'єднання, зображеного на рис. 7,

$$W_{\text{ПБЧ}}(z) = \frac{z-1}{z} Z\{h_{\text{БЧ}}[nT]\} = \frac{k_{\text{а}} T^2}{2} \frac{(z+1)}{(z-1)^2}. \tag{44}$$

Припустимо, що БЦОМ реалізує дискретний алгоритм керування

$$u[nT] = k_\psi \psi[nT] + k_{\dot\psi} \Delta\psi[nT]. \tag{45}$$

Враховуючи, що

$$\Delta\psi[nT] = \frac{\psi[nT] - \psi[(n-1)T]}{T},$$

алгоритм (45) набуває вигляду

$$u[nT] = k_\psi \psi[nT] + \frac{k_{\dot\psi}}{T}\{\psi[nT] - \psi[(n-1)T]\}. \tag{46}$$

До обох частин співвідношення (46) застосуємо операцію перетворення

$$\begin{aligned} Z\{u[nT]\} &= \left(k_\psi + \frac{k_{\dot\psi}}{T}\right) Z\{\psi[nT]\} - \frac{k_{\dot\psi}}{T} z^{-1} Z\{\psi[nT]\} = \\ &= \left(k_\psi + \frac{k_{\dot\psi}}{T} \cdot \frac{z-1}{z}\right) Z\{\psi[nT]\}. \end{aligned} \tag{47}$$

Зі співвідношення (47) запишемо вираз для передавальної функції обчислювального пристрою

$$W_{\text{ОП}}(\text{s}) = \frac{Z\{u[nT]\}}{Z\{\psi[nT]\}} = k_\psi + \frac{k_{\dot\psi}}{T} \cdot \frac{z-1}{z}. \tag{48}$$

Тоді, відповідно до формули (22), характеристичне рівняння системи курсової стійкості автомобіля записується

$$1+\frac{k_{\text{a}}T^2}{2}\cdot\frac{(z+1)}{(z-1)^2}\left(k_{\psi}+\frac{k_{\dot\psi}}{T}\cdot\frac{z-1}{z}\right)=0. \qquad (49)$$

Розкриваючи дужки, отримуємо

$$1+\frac{k_{\text{a}}T^2}{2}k_{\psi}\frac{(z+1)}{(z-1)^2}+\frac{k_{\text{a}}T}{2}k_{\dot\psi}\frac{(z+1)}{z(z-1)}=0. \qquad (50)$$

Приводячи рівняння (50) до спільного знаменника, отримуємо

$$2z(z-1)^2+k_{\text{a}}T^2k_{\psi}z(z+1)+k_{\text{a}}Tk_{\dot\psi}\left(z^2-1\right)=0. \qquad (51)$$

Розкриваючи дужки й приводячи подібні члени, запишемо рівняння (51) в нормальній формі в порядку спадання ступеня

$$2z^3-\left(4-k_{\text{a}}T^2k_{\psi}-k_{\text{a}}Tk_{\dot\psi}\right)z^2+\left(2+k_{\text{a}}T^2k_{\psi}\right)z-k_{\text{a}}Tk_{\dot\psi}=0. \qquad (52)$$

У характеристичному рівнянні (52) зробимо заміну

$$z=\frac{1+w}{1-w}.$$

Унаслідок маємо

$$\begin{aligned}&2\frac{(1+w)^3}{(1-w)^3}-\left(4-k_{\text{a}}T^2k_{\psi}-k_{\text{a}}Tk_{\dot\psi}\right)\frac{(1+w)^2}{(1-w)^2}+\\&+\left(2+k_{\text{a}}T^2k_{\psi}\right)\frac{1+w}{1-w}-k_{\text{a}}Tk_{\dot\psi}=0.\end{aligned} \qquad (53)$$

Приведемо всі доданки характеристичного рівняння (53) до спільного знаменника $(1-w)^3$. Після цього отримуємо нове характеристичне рівняння, що записується у вигляді

$$8w^3+\left(8-2k_{\text{a}}T^2k_{\psi}-4k_{\text{a}}Tk_{\dot\psi}\right)w^2+4k_{\text{a}}Tk_{\dot\psi}w+2k_{\text{a}}T^2k_{\psi}=0. \qquad (54)$$

Щодо нового характеристичного рівняння (54) можна застосувати будь-які критерії стійкості, розроблені для безперервних систем.

Побудуємо область стійкості замкнутої дискретної системи курсової стійкості автомобіля в площині варійованих констант алгоритму (46). Для цього в характеристичному рівнянні (54) зробимо заміну.

Унаслідок отримуємо

$$-8j\omega^3 - 8\omega^2 + 2k_а T^2 k_\psi \omega^2 + 4k_а T k_{\dot\psi} \omega^2 + 4k_а T k_{\dot\psi} j\omega + 2k_а T^2 k_\psi = 0. \quad (55)$$

Виділимо в (55) дійсну й уявну частини та прирівняємо їх до нуля:

$$X\left(\omega, k_\psi, k_{\dot\psi}\right) = -8\omega^2 + 2k_а T^2 k_\psi \left(1 + \omega^2\right) + 4k_а T k_{\dot\psi} \omega^2 = 0; \quad (56)$$

$$Y\left(\omega, k_\psi, k_{\dot\psi}\right) = 4k_а T k_{\dot\psi} \omega - 8\omega^3 = 0. \quad (57)$$

З (57) маємо

$$k_{\dot\psi} = \frac{2\omega^2}{k_а T}. \quad (58)$$

Підставимо (58) у (56)

$$-8\omega^2 + 2k_а T^2 k_\psi \left(1 + \omega^2\right) + 8\omega^4 = 0. \quad (59)$$

З (59) маємо

$$k_\psi = \frac{4\omega^2\left(1 - \omega^2\right)}{k_а T^2 \left(1 + \omega^2\right)}. \quad (60)$$

Скориставшись співвідношеннями (60) та (58), у площині $\left(k_\psi, k_{\dot\psi}\right)$ побудуємо границю області стійкості замкнутої дискретної системи (рис. 11) за умови зміни ω від нуля до нескінченності в разі різних значень періоду квантування T, до того ж $T_1 < T_2 < T_3$.

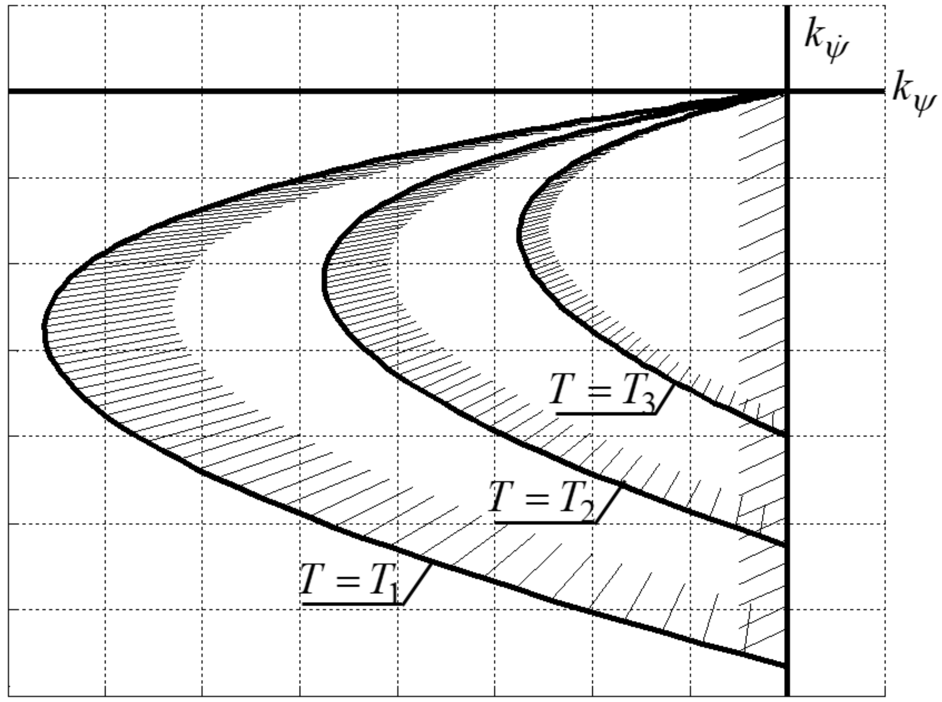

Рис. 11. Область стійкості

Скориставшись правилом штрихування, для нанесення штрихів побудуємо визначник, що складається з приватних похідних

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X(\omega, k_\psi, k_{\dot\psi})}{\partial k_\psi} & \dfrac{\partial X(\omega, k_\psi, k_{\dot\psi})}{\partial k_{\dot\psi}} \\ \dfrac{\partial Y(\omega, k_\psi, k_{\dot\psi})}{\partial k_\psi} & \dfrac{\partial Y(\omega, k_\psi, k_{\dot\psi})}{\partial k_\psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2k_\text{а} T^2 k_\psi (1+\omega^2) & 4k_\text{а} T\omega^2 \\ 0 & 4k_\text{а} T\omega \end{vmatrix} = \tag{61}$$

$$= 8k_\text{а}^2 T^3 k_\psi (1+\omega^2)\omega > 0.$$

Визначник (61) позитивний, тому, переміщуючись уздовж границі області стійкості, границю необхідно штрихувати зліва. За умови дотримання цього правила штрихування завжди спрямоване всередину області стійкості.

Аналіз рис. 11 дозволяє зробити висновок, що зі зростанням періоду квантування область стійкості замкнутої дискретної системи скорочується.

Контрольні запитання й завдання до розділу 1

1. Що таке решітчаста функція?
2. Що таке передавальна функція перетворювача «код-аналог» нульового порядку?
3. Дайте визначення Z-перетворення решітчастої функції.
4. Дайте визначення дискретної динамічної ланки.
5. Запишіть співвідношення для дискретної передавальної функції дискретної динамічної ланки.
6. Запишіть співвідношення для дискретної передавальної функції замкнутої динамічної системи з ЦОМ.
7. Запишіть співвідношення для характеристичного рівняння замкнутої динамічної системи з ЦОМ.
8. Сформулюйте критерій стійкості Шур-Кона.
9. Що таке метод Z-перетворення?

РОЗДІЛ 2
ЦИФРОВІ НИЗЬКОЧАСТОТНІ ФІЛЬТРИ

2.1. Синтез цифрових нерекурсивних фільтрів

Перетворення безперервних функцій у решітчасті, незважаючи на уявну простоту, пов’язаний із великими похибками через те, що перетворений сигнал зазвичай містить високочастотну перешкоду. Так, наприклад, вихідні сигнали гіроскопічного датчика кутової швидкості, крім корисного складника, містять також складники високочастотних коливань рамок гіроскопічних датчиків, які є перешкодами у вимірюванні й перетворенні корисних сигналів. Ці високочастотні перешкоди знижують точність і перешкодозахищеність цифрових керуючих пристроїв.

На рис. 12 показані графіки процесів перетворення безперервної функції в решітчасту. З аналізу цього рисунка випливає, що перетворення корисного складника в решітчасту функцію здійснюється зі значними помилками внаслідок зашумлення корисного сигналу високочастотним шумом.

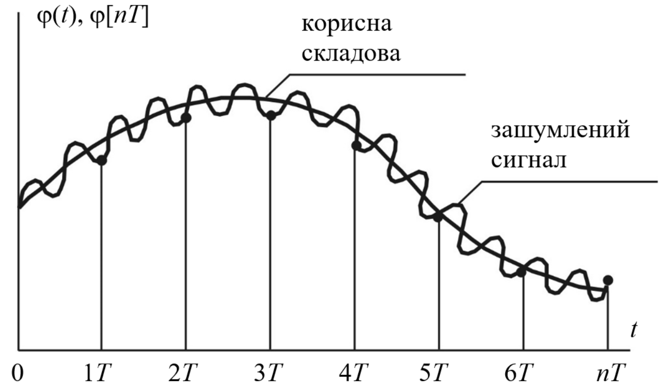

Рис. 12. Графік, що пояснює перешкодозахищеність динамічної системи з ЦОМ

Для підвищення перешкодозахищеності динамічної системи з ЦОМ зазвичай використовують цифрові фільтри.

Загальне рівняння цифрового нерекурсивного фільтра має вигляд [6]:

$$y[nT] = \sum_{k=0}^{m} c_k x[(n-k)T], \tag{62}$$

де $x[nT]$ – вхідний сигнал фільтра; $y[nT]$ – вихідний сигнал; $m+1$ – порядок фільтра.

До обох частин формули (62) застосуємо операцію Z-перетворення

$$Z\{y[nT]\} = \sum_{k=0}^{m} c_k z^{-k} Z\{x[nT]\}.$$

Отже, дискретна передавальна функція нерекурсивного фільтра записується у вигляді

$$W(z) = \frac{Z\{y[nT]\}}{Z\{x[nT]\}} = \sum_{k=0}^{m} c_k z^{-k}. \qquad (63)$$

Надалі будемо припускати, що всі синтезовані фільтри мають 5-й порядок, тобто базуються на п’яти послідовних вимірах вхідного сигналу в моменти часу nT, $(n-1)T$, $(n-2)T$, $(n-3)T$ і $(n-4)T$.

У роботі проаналізовано три можливих цифрових фільтри, побудованих на лінійному згладжуванні п’яти останніх вимірів.

Ф і л ь т р № 1 отриманий шляхом послідовного використання двох згладжувальних фільтрів

$$g[nT] = \frac{1}{2}\{x[nT] + x[(n-1)T]\}; \qquad (64)$$

$$y[nT] = \frac{1}{4}\{g[nT] + g[(n-1)T] + g[(n-2)T] + g[(n-3)T]\}. \qquad (65)$$

Підставляючи (64) в (65), отримуємо

$$y[nT] = \frac{1}{8}\left\{\begin{array}{l} x[nT] + 2x[(n-1)T] + 2x[(n-2)T] + \\ + 2x[(n-3)T] + x[(n-4)T] \end{array}\right\}. \qquad (66)$$

Тоді передавальна функція фільтра (66) набуває вигляду

$$W(z) = \frac{1}{8}\left[1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}\right]. \qquad (67)$$

З урахуванням формули (23) можна записати

$$
\begin{aligned}
W(j\omega) &= \frac{1}{8}\left[1 + 2e^{-j\omega T} + 2e^{-2j\omega T} + 2e^{-3j\omega T} + 2e^{-4j\omega T}\right] = \\
&= \frac{1}{8}\left(1 + e^{-4j\omega T}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{-j\omega T} + e^{-3j\omega T}\right) + \frac{1}{4}e^{-2j\omega T} = \\
&= e^{-2j\omega T}\left[\frac{1}{8}\left(e^{2j\omega T} + e^{-2j\omega T}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}\right) + \frac{1}{4}\right] = \\
&= \left(\cos 2\omega T - j\sin 2\omega T\right)\left[\frac{1}{8}2\cos 2\omega T + \frac{1}{4}2\sin 2\omega T + \frac{1}{4}\right].
\end{aligned} \tag{68}
$$

Виділимо в (68) дійсну й уявну частини:

$$
\operatorname{Re} W(j\omega) = \cos 2\omega T\left[\frac{1}{4}\cos 2\omega T + \frac{1}{2}\cos\omega T + \frac{1}{4}\right];
$$

$$
\operatorname{Im} W(j\omega) = -\sin 2\omega T\left[\frac{1}{4}\cos 2\omega T + \frac{1}{2}\cos\omega T + \frac{1}{4}\right].
$$

Тоді АЧХ і ФЧХ фільтра 1 набувають вигляду

$$
M(\omega) = \sqrt{\left[\operatorname{Re} W(j\omega)\right]^2 + \left[\operatorname{Im} W(j\omega)\right]^2} = \frac{1}{4}\left|\cos 2\omega T + 2\cos\omega T + 1\right|; \tag{69}
$$

$$
\Psi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} W(j\omega)}{\operatorname{Re} W(j\omega)} = \operatorname{arctg}\frac{\sin 2\omega T}{\cos 2\omega T} = -2\omega T. \tag{70}
$$

Фільтр № 2 отриманий шляхом послідовного використання двох згладжувальних фільтрів:

$$
g[nT] = \frac{1}{3}\left\{x[nT] + x[(n-1)T] + x[(n-2)T]\right\};
$$

$$
y[nT] = \frac{1}{3}\left\{g[nT] + g[(n-1)T] + g[(n-2)T]\right\}.
$$

Здійснюючи аналогічні перетворення, отримуємо

$$
M(\omega) = \frac{1}{9}\left|\,2\cos 2\omega T + 4\cos\omega T + 3\right|; \tag{71}
$$

$$
\Psi(\omega) = -2\omega T. \tag{72}
$$

Фільтр № 3 отриманий осередненням п'яти послідовних наближень вхідного сигналу

$$
\begin{aligned}
y\left[nT\right] = \frac{1}{5}\big\{ & x\left[nT\right] + x\left[(n-1)T\right] + x\left[(n-2)T\right] + \\
& + \big\{ x\left[(n-3)T\right] + x\left[(n-4)T\right]\big\}.
\end{aligned} \qquad (73)
$$

Шляхом аналогічних перетворень отримуємо АЧХ і ФЧХ фільтра (73)

$$M(\omega) = \frac{1}{5}\left|2\cos 2\omega T + 2\cos\omega T + 1\right|; \qquad (74)$$

$$\Psi(\omega) = -2\omega T. \qquad (75)$$

На рис. 13 показані АЧХ фільтрів 1, 2 і 3, побудовані за допомогою співвідношень (69), (71) і (74). ФЧХ усіх трьох фільтрів однакові та лінійно залежать від частоти вхідного сигналу. Аналіз кривих АЧХ дозволяє зробити висновок, що звуження смуги пропускання призводить до погіршення фільтрації високочастотних перешкод.

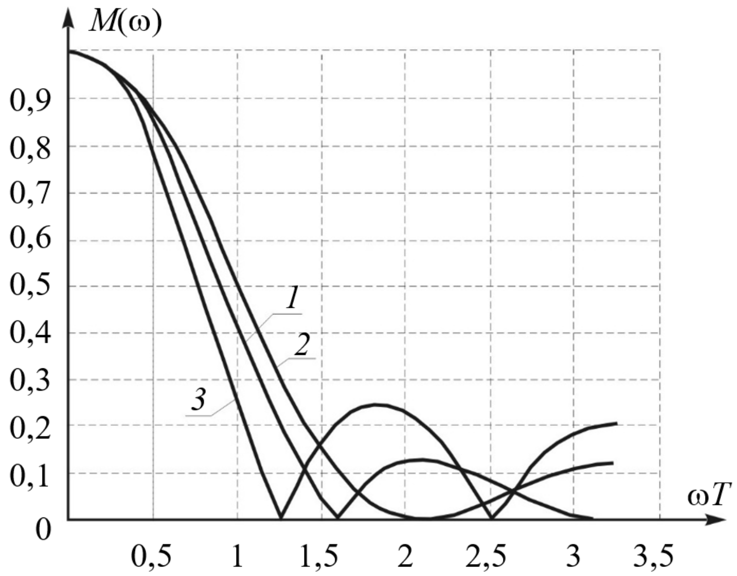

Рис. 13. АЧХ фільтрів 1, 2 і 3

Перейдемо до розгляду нерекурсивних фільтрів, побудованих на нелінійному згладжуванні п'яти послідовних вимірювань. На інтервалі $\left[(n-4)T, nT\right]$ апроксимуємо вимірювану величину нелінійною залежністю

$$y\left[iT\right] = A(iT)^2 + B(iT) + C. \tag{76}$$

На цьому самому інтервалі сформуємо функцію нев’язок

$$Q = \sum_{k=0}^{m} \left\{ A\left[(n-k)T\right]^2 + B\left[(n-k)T\right] + C - x\left[(n-k)T\right] \right\}^2. \tag{77}$$

Коефіцієнти *A, B* і *C* виберемо з умов мінімуму функції (77), які записуються у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta Q}{\delta A} = 2\sum_{k=0}^{m} \left\{ A\left[(n-k)T\right]^2 + B\left[(n-k)T\right] + C - x\left[(n-k)T\right] \right\} \left[(n-k)T\right]^2 = 0;\\
&\frac{\delta Q}{\delta B} = 2\sum_{k=0}^{m} \left\{ A\left[(n-k)T\right]^2 + B\left[(n-k)T\right] + C - x\left[(n-k)T\right] \right\} \left[(n-k)T\right] = 0;\\
&\frac{\delta Q}{\delta C} = 2\sum_{k=0}^{m} \left\{ A\left[(n-k)T\right]^2 + B\left[(n-k)T\right] + C - x\left[(n-k)T\right] \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{78}$$

Умови (78) запишемо у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь із невідомими *A, B* і *C*:

$$\begin{aligned}
&A\cdot\sum_{k=0}^{m}\left[(n-k)T\right]^4 + B\cdot\sum_{k=0}^{m}\left[(n-k)T\right]^3 + C\cdot\sum_{k=0}^{m}\left[(n-k)T\right]^2 =\\
&\quad = \sum_{k=0}^{m}\left[(n-k)T\right]^2\cdot x\left[(n-k)T\right];\\
&A\cdot\sum_{k=0}^{m}\left[(n-k)T\right]^3 + B\cdot\sum_{k=0}^{m}\left[(n-k)T\right]^2 + C\cdot\sum_{k=0}^{m}\left[(n-k)T\right] =\\
&\quad = \sum_{k=0}^{m}\left[(n-k)T\right]\cdot x\left[(n-k)T\right];\\
&A\cdot\sum_{k=0}^{m}\left[(n-k)T\right]^2 + B\cdot\sum_{k=0}^{m}\left[(n-k)T\right] + C\cdot(m+1) = \sum_{k=0}^{m} x\left[(n-k)T\right].
\end{aligned} \tag{79}$$

Нехай $m = 4$; $T = 0{,}004$ с. Відшукуючи шляхом вирішення системи (79) коефіцієнти *A, B* і *C* та підставляючи їх у співвідношення (76), отримуємо рівняння фільтра № 4:

$$y[nT] = \frac{1}{35}\{-3x[(n-4)T] + 12x[(n-3)T] + \\ + 17x[(n-2)T] + 12x[(n-1)T] - 3x[nT]\}. \quad (80)$$

Описаним вище способом відшукаємо АЧХ фільтра (80)

$$M(\omega) = \frac{1}{35}\left|-6\cos 2\omega T + 24\cos \omega T + 17\right|. \quad (81)$$

ФЧХ фільтра (80) має вигляд (72).

На рис. 14 наведена АЧХ фільтра (80) (крива 1). Аналіз цієї кривої дозволяє зробити висновок про те, що ефективність зменшення високочастотних складників вхідного сигналу у фільтра (80) недостатня.

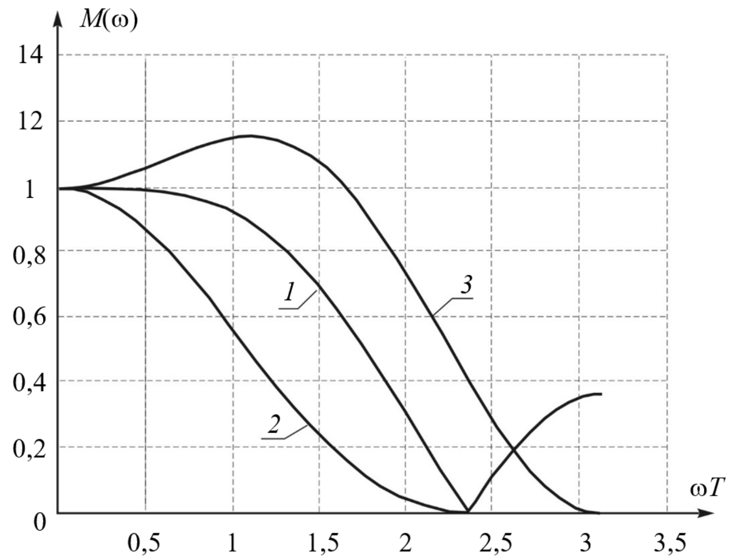

Рис. 14. АЧХ фільтра (80)

Ф і л ь т р № 4.1 отриманий унаслідок зміни двох крайніх доданків фільтра (80):

$$y[nT] = \frac{1}{48}\{3{,}5x[(n-4)T] + 12x[(n-3)T] + \\ + 17x[(n-2)T] + 12x[(n-1)T] + 3{,}5x[nT]\}. \quad (82)$$

АЧХ фільтра (82) записується у вигляді:

$$M(\omega) = \frac{1}{48}\left|7\cos 2\omega T + 24\cos \omega T + 17\right| \tag{83}$$

і подана на рис. 14 кривою 2.

Ф і л ь т р № 4.2 отриманий унаслідок зміни значення другого й четвертого доданків фільтра (80):

$$\begin{gathered} y[nT] = \frac{1}{22}\{-3x[(n-4)T] + 5{,}5x[(n-3)T] + \\ + 17x[(n-2)T] + 5{,}5x[(n-1)T] - 3x[nT]\}. \end{gathered} \tag{84}$$

АЧХ фільтра (84) записується у вигляді співвідношення

$$M(\omega) = \frac{1}{22}\left|-6\cos 2\omega T + 11\cos \omega T + 17\right| \tag{85}$$

і подана на рис. 14 кривою 3.

Аналіз АЧХ фільтрів 4.1, 4.2 дозволяє зробити висновок про те, що всі фільтри мають різні смуги пропускання, але ефективно пригнічують високочастотні складники вхідного сигналу.

Перейдемо до вирішення проблеми синтезу низькочастотного нерекурсивного фільтра із заданими характеристиками.

Загальне співвідношення для розрахунку АЧХ цифрового низькочастотного нерекурсивного фільтра запишемо в такому вигляді:

$$M(\omega) = \left|2a\cos 2\omega T + 2b\cos \omega T + c\right|, \tag{86}$$

де коефіцієнти a, b, і c підлягають вибору.

Зважаючи на те, що синтезовані фільтри є низькочастотними, які пропускають низькі частоти й пригнічують високі частоти вхідного сигналу, ставимо на інтервалі $\omega T = 0 - \pi$ такі умови:

- якщо $\omega T = 0$, амплітуда АЧХ має дорівнювати одиниці

$$M(0) = 1; \tag{87}$$

- якщо $\omega T = \pi$, амплітуда АЧХ має дорівнювати нулю

$$M(\pi) = 0. \tag{88}$$

Умови (87) і (88) у разі підставлення їх у співвідношення (86) приводять до рівнянь:

$$\begin{aligned} 2a + 2b + c &= 1; \\ 2a - 2b + c &= 0. \end{aligned} \qquad (89)$$

З рівнянь (89) отримуємо:

$$b = 0,25; \qquad c = 0,5 - 2a. \qquad (90)$$

Тоді співвідношення (86) записується у вигляді

$$M(\omega) = \left|2a\cos 2\omega T + 0,5\cos\omega T + 0,5 - 2a\right|. \qquad (91)$$

Тепер задача відшукання параметрів фільтра стає однопараметричною, що залежить тільки від одного параметра *a*.

Для відшукання коефіцієнта *a* ставимо ще одну умову, а саме: АЧХ фільтра має перетинати вісь абсцис у деякій точці, визначаючи тим самим смугу пропускання фільтра $\omega^* T$. Ця умова записується у вигляді

$$2a\cos 2\omega^* T + 0,5\cos\omega^* T + 0,5 - 2a = 0. \qquad (92)$$

З умови (92) маємо

$$a = 0,25\frac{1 + \cos 2\omega^* T}{1 - \cos\omega^* T}. \qquad (93)$$

Величини коефіцієнтів *a*, *b* і *c* для різних значень $\omega^* T$ наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Величини коефіцієнтів *a*, *b* і *c* для різних значень $\omega^* T$

$\omega^* T$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$
a	0,125	0,0904	0,0732	0,065
b	0,25	0,25	0,25	0,25
c	0,25	0,3192	0,3536	0,37

Аналіз узагальнених рівнянь нерекурсивного фільтра (62) і АЧХ фільтра (86) дозволяє записати зв'язок між параметрами АЧХ a, b, c і коефіцієнтами рівняння фільтра (62), який для $m = 4$ визначається співвідношеннями:

$$c_0 = a; \quad c_1 = b; \quad c_2 = c; \quad c_3 = b; \quad c_4 = a. \tag{94}$$

Фільтр 5 отриманий з формули (62) у разі підставлення в неї коефіцієнтів (94) для $\omega^* T = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} y[nT] = 0{,}125x[nT] + 0{,}25x[(n-1)T] + 0{,}25x[(n-2)T] + \\ + 0{,}25x[(n-3)T] + 0{,}125x[(n-4)T]. \end{aligned} \tag{95}$$

Фільтр 6 отриманий з формули (62) у разі підставлення в неї коефіцієнтів (94) для $\omega^* T = \dfrac{5\pi}{8}$:

$$\begin{aligned} y[nT] = 0{,}0904x[nT] + 0{,}25x[(n-1)T] + 0{,}3192x[(n-2)T] + \\ + 0{,}25x[(n-3)T] + 0{,}0904x[(n-4)T]. \end{aligned} \tag{96}$$

Фільтр 7 отриманий з формули (62) у разі підставлення в неї коефіцієнтів (94) для $\omega^* T = \dfrac{7\pi}{8}$:

$$\begin{aligned} y[nT] = 0{,}0732x[nT] + 0{,}25x[(n-1)T] + 0{,}353x[(n-2)T] + \\ + 0{,}25x[(n-3)T] + 0{,}0732x[(n-4)T]. \end{aligned} \tag{97}$$

На рис. 15 наведені АЧХ цифрових нерекурсивних фільтрів 5 (крива 1), 6 (крива 2), 7 (крива 3). Ці фільтри, маючи чітко виражену смугу пропускання, досить ефективно пригнічують високочастотні складники вхідних сигналів.

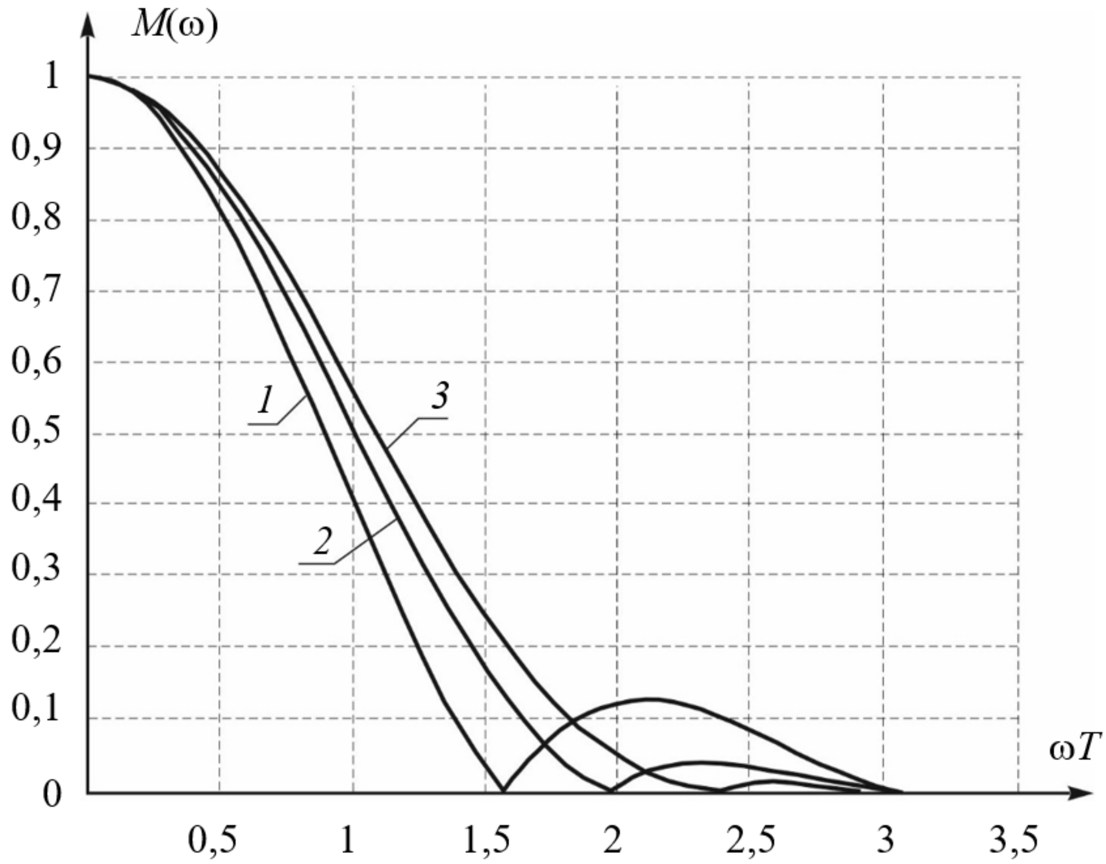

Рис. 15. АЧХ цифрових нерекурсивних фільтрів 5, 6 і 7

Розглянемо ще одну методику синтезу цифрових нерекурсивних фільтрів, основану на оптимізації АЧХ фільтра, щодо поліпшення його фільтрувальних властивостей. Уведемо в розгляд інтегральний квадратичний функціонал

$$I(\omega_1 T) = \int_{\omega_1 T}^{\pi} M^2(\omega T)\, d\omega T \tag{98}$$

і виберемо коефіцієнт a з умови мінімуму функціонала (98) у разі різних значень $\omega_1 T$.

Підставимо (91) в (98). Унаслідок інтегрування маємо:

$$I(\omega_1 T) = \left[\begin{array}{l} 4a^2(1{,}5\omega T - \sin 2\omega T + 0{,}125 \sin 4\omega T) + \\ + 2a(0{,}166 \sin 3\omega T + 0{,}5 \sin 2\omega T - 0{,}5 \sin \omega T - \omega T) + \\ + 0{,}25(0{,}25 \sin 2\omega T + 2 \sin \omega T + 1{,}5\omega T) \end{array}\right]_{\omega_1 T}^{\pi}. \tag{99}$$

Запишемо умову мінімуму по a функції (99)

$$\frac{\partial I(\omega_1 T)}{\partial a} = \left[8a(1{,}5\omega T - \sin 2\omega T + 0{,}125\sin 4\omega T - \omega T) + \right.$$
$$\left. + 2(0{,}166\sin 3\omega T + 0{,}5\sin 2\omega T - 0{,}5\sin \omega T - \omega T)\right]_{\omega_1 T}^{\pi} = 0 \qquad (100)$$

Значення оптимальних значень коефіцієнтів АЧХ, отриманих за допомогою рівняння (100) і співвідношення (92) у випадку різних значень $\omega_1 T$ наведені в табл. 3.

Таблиця 3

Значення коефіцієнтів ФЧХ нерекурсивних фільтрів

$\omega_1 T$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$
a	0,1444	0,1185	0,09594	0,0795
b	0,25	0,25	0,25	0,25
c	0,2111	0,2629	0,3081	0,341

На рис. 16 наведені АЧХ цифрових нерекурсивних фільтрів для різних значень $\omega_1 T \in (0, \pi)$.

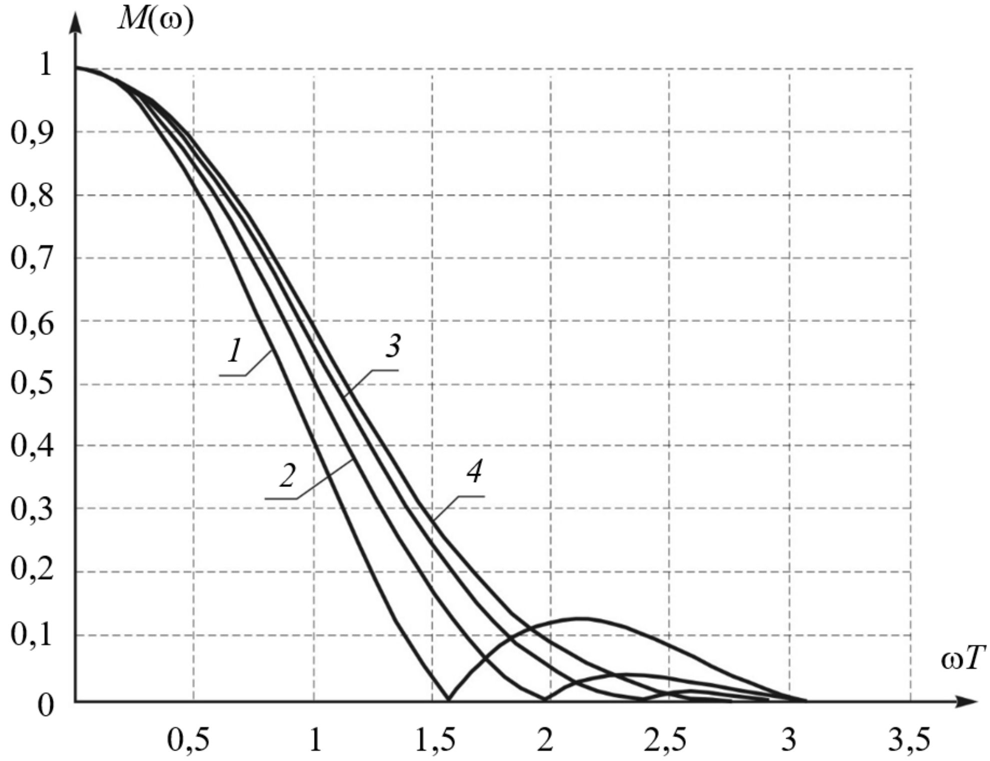

Рис. 16. АЧХ оптимальних фільтрів

Порівняння рис. 15 і 16 дозволяє зробити висновок про те, що оптимальні фільтри мають більш високі фільтрувальні властивості за умови порівняних смуг пропускання. Водночас необхідно зазначити, що крутизна смуги пропускання всіх без винятку нерекурсивних фільтрів незначна, що є їхнім спільним недоліком.

2.2. Синтез цифрових рекурсивних фільтрів

У загальному випадку дискретна передавальна функція рекурсивного фільтра k-го порядку записується у вигляді

$$W(z) = \frac{\sum_{i=0}^{k} c_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{k} d_i z^{-i}}. \qquad (101)$$

Дослідження Р. В. Хеммінга [5] показали, що найбільш високими фільтрувальними властивостями за умови досить вузької смуги пропускання мають фільтри Баттеруорта, квадрат АЧХ яких визначається співвідношенням

$$M^2(w) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|w|}{w_c}\right)^{2N}}, \qquad (102)$$

де w – комплексна змінна W-перетворення (25); N – порядок фільтра; w_c – деяке значення змінної w, що визначає вигляд ФЧХ фільтра.

Для читача, який здобув знання із класичної теорії автоматичного керування з праць радянських учених Е. П. Попова, В. В. Солодовникова, М. А. Айзермана та ін., запис АЧХ у вигляді (102) є незвичним. Надалі нами буде здійснений перехід від формули (102) до звичного для нас запису АЧХ.

Для відшукання величин N та w_c фільтра Баттеруорта скористаємося рекомендацією роботи [7]. Для цього розглянемо приблизний вигляд залежності (102), поданий на рис. 17.

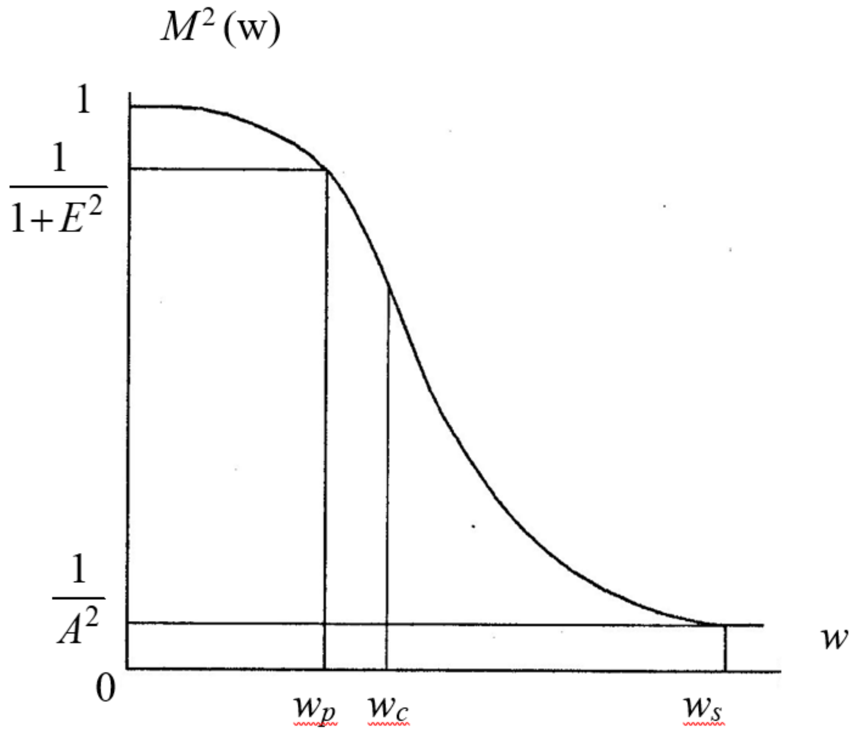

Рис. 17. Квадрат АЧХ фільтрів Баттеруорта

Запишемо умови

$$\frac{1}{1+\mathrm{E}^2} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{w_p}{w_c}\right)^{2N}}; \tag{103}$$

$$\frac{1}{A^2} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{w_s}{w_c}\right)^{2N}}, \tag{104}$$

або

$$\left(\frac{w_p}{w_c}\right)^{2N} = \mathrm{E}^2; \tag{105}$$

$$\left(\frac{w_s}{w_c}\right)^{2N} = A^2 - 1. \tag{106}$$

Розділимо (105) на (106)

$$\left(\frac{w_p}{w_s}\right)^{2N}=\frac{\mathrm{E}^2}{A^2-1}; \tag{107}$$

отримаємо квадратний корінь з обох частин співвідношення (107)

$$\left(\frac{w_p}{w_s}\right)^{2N}=\frac{\mathrm{E}}{\sqrt{A^2-1}}. \tag{108}$$

Унаслідок зі співвідношень (107) і (108) отримуємо

$$N=\left[\frac{\log\left(\dfrac{\mathrm{E}}{\sqrt{A^2-1}}\right)}{\log\left(\dfrac{w_p}{w_s}\right)}\right]; \tag{109}$$

$$w_c=\frac{w_p}{\mathrm{E}^{\frac{1}{N}}}. \tag{110}$$

Квадратні дужки в співвідношенні (109) означають виділення найближчого цілого числа з виразу в дужках.

Отже, задаючи за допомогою величин w_p, w_s, A і E необхідний вигляд кривої (102), отримуємо параметри фільтра Баттеруорта. Для цього запишемо зв’язок між комплексними змінними z, s і w відповідно Z-перетворення, перетворення Лапласа і W-перетворення

$$z=e^{sT}=\frac{1+w}{1-w}. \tag{111}$$

Розглянемо співвідношення

$$\frac{1+w}{1-w}=e^{sT}, \tag{112}$$

у якому зробимо заміну $s=j\omega$

$$\frac{1+w}{1-w} = e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T. \tag{113}$$

Зі співвідношення (113) отримуємо

$$w = \frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1} = \frac{\cos\omega T - 1 + j\sin\omega T}{\cos\omega T + 1 + j\sin\omega T} = j\,\mathrm{tg}\frac{\omega T}{2}. \tag{114}$$

Підставляючи формулу (114) в співвідношення (103), отримуємо вираз для ФЧХ фільтра Баттеруорта у звичній для нас формі:

$$M(\omega) = \frac{w_c^N}{\sqrt{\mathrm{tg}^{2N}\frac{\omega T}{2} + w_c^{2N}}}. \tag{115}$$

ФЧХ фільтрів Баттеруорта різних порядків визначається співвідношенням

$$\Psi(\omega) = -N\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{\omega T}{2}}{w_c}\right). \tag{116}$$

Як приклад розглянемо АЧХ і ФЧХ трьох фільтрів Баттеруорта, параметри яких мають такі значення: $\frac{1}{A^2} = 0{,}1$; $\frac{1}{1+\mathrm{E}^2} = 0{,}6$; $w_p = 0{,}25676$; $T = 0.04$ с; $w_{s1} = 0{,}4891$; $w_{s2} = 0{,}3959$; $w_{s3} = 0{,}3529$. Скориставшись формулами (109) і (110) для трьох розглянутих фільтрів, отримуємо: $N_1 = 2{,}019 \approx 2$; $N_2 = 3{,}005 \approx 3$; $N_3 = 4{,}090 \approx 4$; $w_{c1} = 0{,}28414$; $w_{c2} = 0{,}27471$; $w_{c3} = 0{,}27011$.

На рис. 18 наведені АЧХ і ФЧХ розглянутих фільтрів Баттерворта, побудованих за допомогою співвідношень (115) і (116).

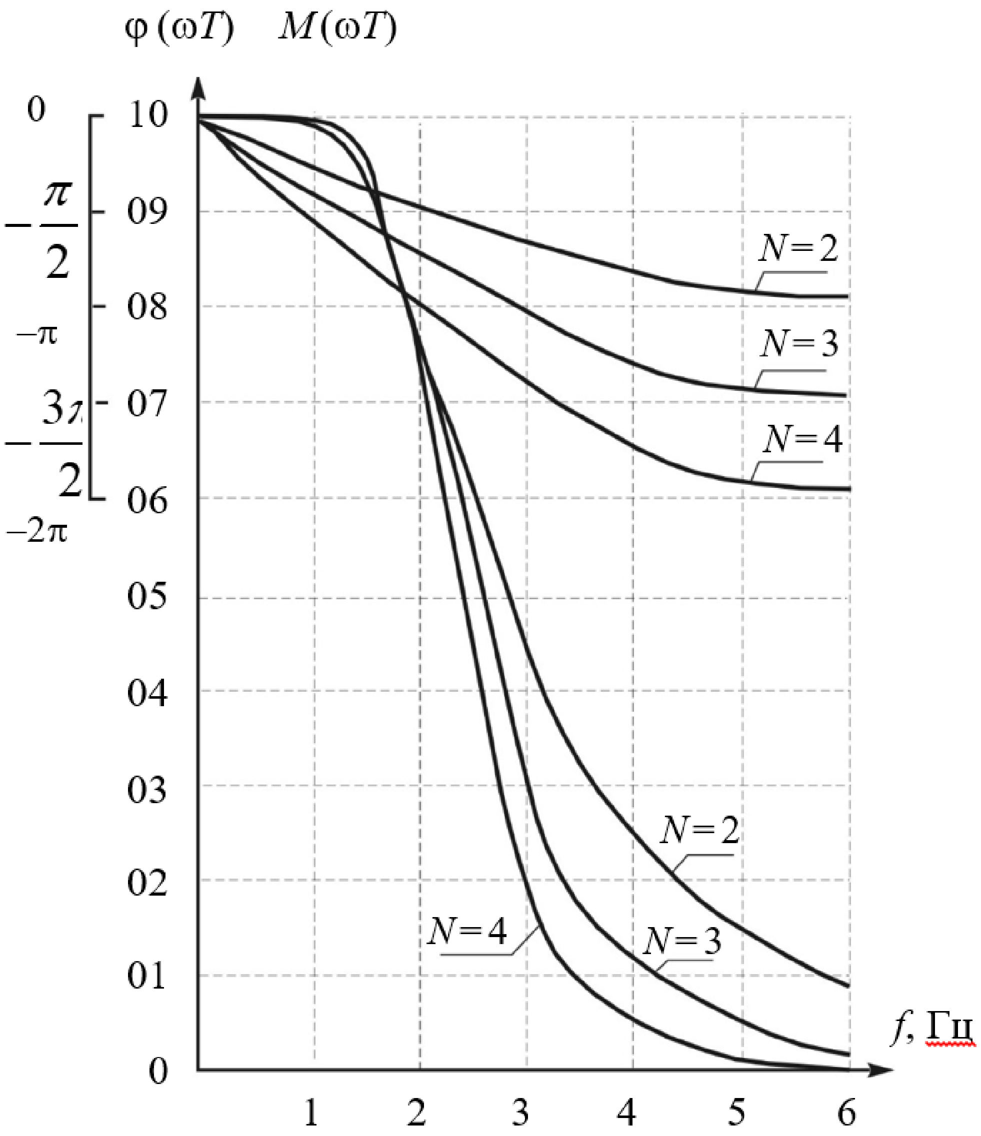

Рис. 18. АЧХ і ФЧХ фільтрів Баттерворта

Аналіз побудованих кривих дозволяє зробити висновок про те, що підвищення порядку фільтра Баттеруорта призводить до звуження смуги пропускання з одночасним підвищенням його фільтрувальних властивостей. З іншого боку, підвищення порядку фільтра призводить до значного зростання фазового запізнювання вихідного сигналу фільтра щодо вхідного.

Зі співвідношення (111) отримуємо

$$w = \frac{z-1}{z+1}. \qquad (117)$$

Тоді, з урахуванням співвідношення (103), отримуємо дискретну передавальну функцію фільтра Баттеруорта

$$W_{\text{Б}}(z) = \frac{w_c^N}{\sqrt{w_c^{2N} + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2N}}}. \tag{118}$$

Покладемо $N = 2$. Тоді співвідношення (118) набуває вигляду

$$W_{\text{Б}}(z) = \frac{a_1\left(1 + 2z^{-1} + z^{-2}\right)}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}, \tag{119}$$

а рівняння рекурсивного фільтра Баттеруорта другого порядку записується у вигляді

$$\begin{aligned} y\left[nT\right] = a_1\left(x\left[nT\right] + 2\left[(n-1)T\right] + x\left[(n-2)T\right]\right) - \\ - d_1\, y\left[(n-1)T\right] + d_2\, y\left[(n-2)T\right], \end{aligned} \tag{120}$$

зокрема коефіцієнти фільтра (120) дорівнюють:

$$a_1 = \frac{w_c}{1 + \sqrt{2}w_c + w_c^2};$$

$$d_1 = \frac{2\left(w_c^2 - 1\right)}{1 + \sqrt{2}w_c + w_c^2};$$

$$d_2 = \frac{1 - \sqrt{2}w_c + w_c^2}{1 + \sqrt{2}w_c + w_c^2}.$$

2.3. Синтез фільтрів, що диференціюють

Перешкодозахищеність цифрової САК істотно знижується, якщо алгоритм керування використовує інформацію про похідну «зашумленого» сигналу. Дійсно, якщо перша різниця решітчастої функції оцінюється формулою

$$y\left[nT\right] = \frac{1}{T}\left\{x\left[nT\right] - x\left[(n-1)T\right]\right\}, \tag{121}$$

то дискретна передавальна функція фільтра, що диференціюється, (121) може бути записана у вигляді:

$$W(z) = \frac{Z\{y[nT]\}}{Z\{x[nT]\}} = \frac{1}{T}(1 - z^{-1}). \qquad (122)$$

З урахуванням формули (112) зі співвідношення (122) отримуємо вираз для частотної передавальної функції фільтра (121)

$$W(j\omega) = \frac{1}{T}(1 - e^{-j\omega T}). \qquad (123)$$

Тоді дійсна та уявна частини (123) записуються як

$$\mathrm{Re}W(j\omega) = \frac{1}{T}(1 - \cos\omega T); \qquad \mathrm{Im}W(j\omega) = \frac{1}{T}\sin\omega T,$$

а АЧХ і ФЧХ фільтра (121) визначаються формулами

$$M(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2 W(j\omega) + \mathrm{Im}^2 W(j\omega)} = \left|\frac{2}{T}\sin\frac{\omega T}{2}\right|; \qquad (124)$$

$$\Psi(\omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{\cos\frac{\omega T}{2}}{\sin\frac{\omega T}{2}}. \qquad (125)$$

АЧХ і ФЧХ фільтра (121), якщо $T = 0{,}04$ с, наведені на рис. 19 і 20 (крива 1). Аналіз цих кривих приводить до висновку, що оцінка похідної «зашумленого» дискретного сигналу за допомогою формули (121) різко знижує перешкодозахищеність цифрової САК, посилюючи амплітуди високочастотних шумів. Для оцінки похідних «зашумлених» дискретних сигналів необхідно використовувати цифрові фільтри більш складної структури, ніж фільтр (121).

Вибір структури й параметрів фільтра, що диференціює, будемо здійснювати в класі фільтрів Ланцоша [8], загальне рівняння яких має вигляд

$$y\left[nT\right]=\frac{3}{TN(N+1)(2N+1)}\sum_{k=0}^{2N}(N-k)\,x\left[(N-k)T\right], \qquad (126)$$

де N – порядок фільтра.

Зі співвідношення (126) запишемо формулу для дискретної передавальної функції фільтра Ланцоша:

$$W_{\text{Л}}(z)=\frac{3}{TN(N+1)(2N+1)}\sum_{k=0}^{2N}(N-k)\,x\,z^{-k}. \qquad (127)$$

З урахуванням формули (127) запишемо вираз для частотної передавальної функції фільтра

$$W_{\text{Л}}(j\omega)=\frac{3}{TN(N+1)(2N+1)}\sum_{k=0}^{2N}(N-k)\,e^{-j\,\omega T}. \qquad (128)$$

У (128) виділимо дійсну та уявну частини:

$$\operatorname{Re}W_{\text{Л}}(j\omega)=\frac{3}{TN(N+1)(2N+1)}\sum_{k=0}^{2N}(N-k)\,\cos\omega kT\,; \qquad (129)$$

$$\operatorname{Im}W_{\text{Л}}(j\omega)=\frac{3}{TN(N+1)(2N+1)}\sum_{k=0}^{2N}(N-k)\,\sin\omega kT\,. \qquad (130)$$

З урахуванням співвідношень (129) і (130) запишемо формули для розрахунку АЧХ і ФЧХ фільтра Ланцоша N-го порядку

$$M\left[\omega\right]=\frac{6}{TN(N+1)(2N+1)}\sum_{k=0}^{N}k\sin\omega kT\,; \qquad (131)$$

$$\Psi\left[\omega\right]=\operatorname{arctg}\frac{\cos\omega kT}{\sin\omega kT}\;. \qquad (132)$$

На рис. 19 і 20 наведені АЧХ і ФЧХ фільтрів Ланцоша різних порядків:

- фільтр Ланцоша 1-го порядку $N = 1$ (крива 2)

$$M(\omega)=\frac{1}{T}\left|\sin\omega T\right|; \qquad (133)$$

$$\Psi[\omega] = \text{arctg} \ \frac{\cos \omega T}{\sin \omega T} \ ; \tag{134}$$

- фільтр Ланцоша 2-го порядку $N = 2$ (крива 3)

$$M(\omega) = \frac{1}{5T}\left|2\sin 2\omega T + \sin \omega T\right|; \tag{135}$$

$$\Psi[\omega] = \text{arctg} \ \frac{\cos 2\omega T}{\sin 2\omega T} \ ; \tag{136}$$

- фільтр Ланцоша 3-го порядку $N = 3$ (крива 4)

$$M(\omega) = \frac{1}{14T}\left|3\sin 3\omega T + 2\sin 2\omega T + \sin \omega T\right|; \tag{137}$$

$$\Psi[\omega] = \text{arctg} \ \frac{\cos 3\omega T}{\sin 3\omega T} \ ; \tag{138}$$

- фільтр Ланцоша 4-го порядку $N = 4$ (крива 5)

$$M(\omega) = \frac{1}{30T}\left|4\sin 4\omega T + 3\sin 3\omega T + 2\sin 2\omega T + \sin \omega T\right|; \tag{139}$$

$$\Psi[\omega] = \text{arctg} \ \frac{\cos 4\omega T}{\sin 4\omega T} \ . \tag{140}$$

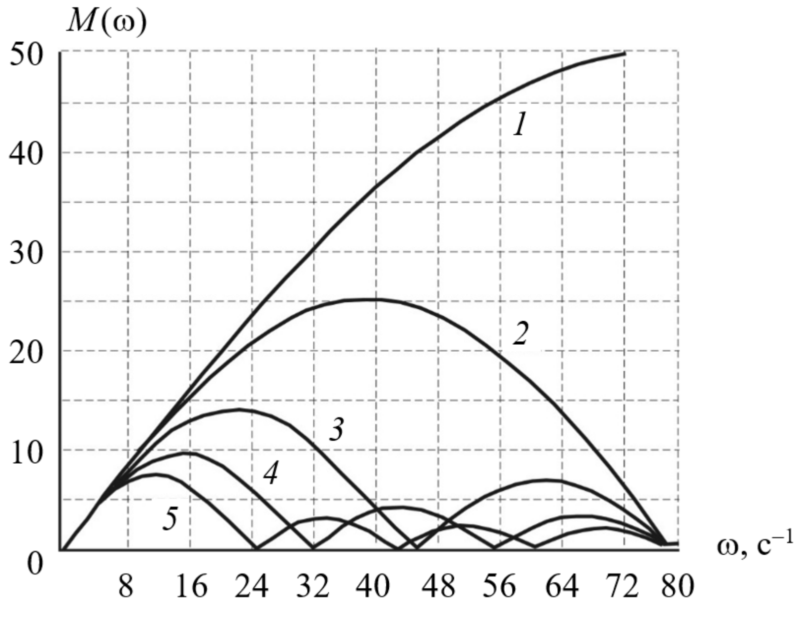

Рис. 19. АЧХ фільтрів (124), (133), (135), (137) і (139)

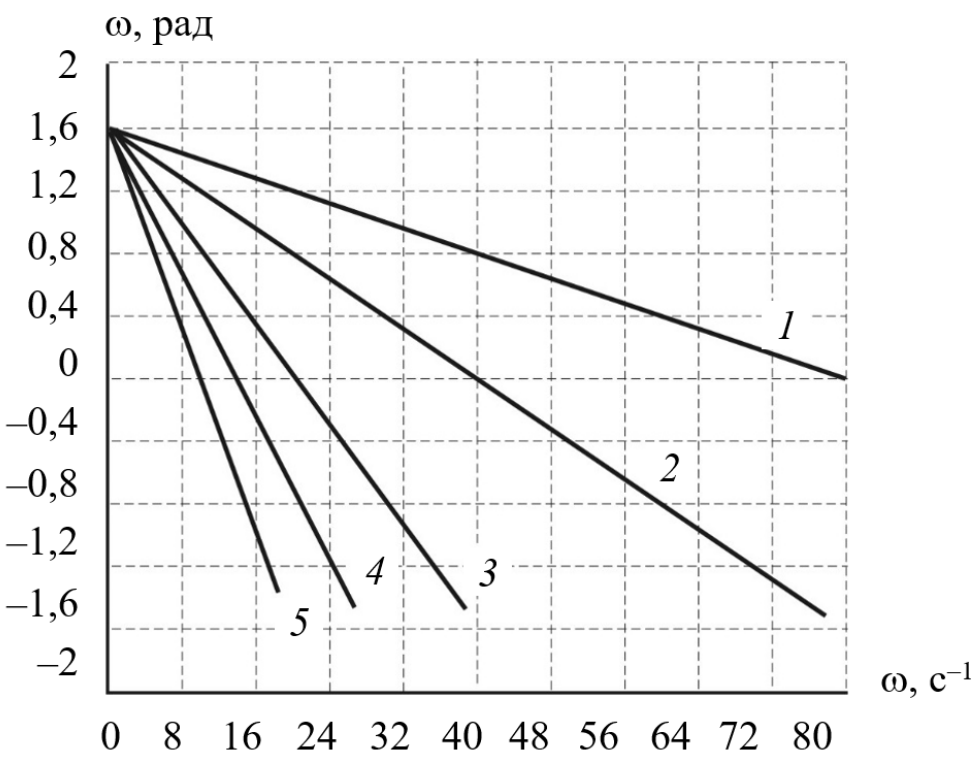

Рис. 20. ФЧХ фільтрів (125), (134), (136), (138) і (140)

Аналіз побудованих за допомогою співвідношень (133)–(140) кривих приводить до висновку, що з підвищенням порядку фільтра Ланцоша смуга пропускання зменшується. До середини смуги пропускання має місце фазове випередження, а потім ФЧХ проходить через нуль.

Рівняння фільтрів Ланцоша різних порядків можуть бути отримані зі співвідношень (126):

- фільтр 1-го порядку

$$y[nT] = \frac{1}{2T}\{x[nT] - x[(n-2)T]\}; \tag{141}$$

- фільтр 2-го порядку

$$y[nT] = \frac{1}{10T}\left\{\begin{array}{l} 2x[nT] + x[(n-2)T] - \\ -x[(n-3)T] - 2x[(n-4)T] \end{array}\right\}; \tag{142}$$

- фільтр 3-го порядку

$$y\left[nT\right]=\frac{1}{28T}\begin{Bmatrix}3x\left[nT\right]+2x\left[(n-1)T\right]+x\left[(n-2)T\right]-\\-x\left[(n-4)T\right]-2x\left[(n-5)T\right]-3x\left[(n-6)T\right]\end{Bmatrix};\quad(143)$$

- фільтр 4-го порядку

$$y\left[nT\right]=\frac{1}{60T}\begin{Bmatrix}4x\left[nT\right]+3x\left[(n-1)T\right]+2x\left[(n-2)T\right]+\\+x\left[(n-3)T\right]-x\left[(n-5)T\right]-2x\left[(n-6)T\right]-\\-3x\left[(n-7)T\right]-4x\left[(n-8)T\right]\end{Bmatrix}.\quad(144)$$

2.4. Синтез цифрових ПД-стабілізаторів

Розглянемо цифровий ПД-стабілізатор, структурна схема якого наведена на рис. 21.

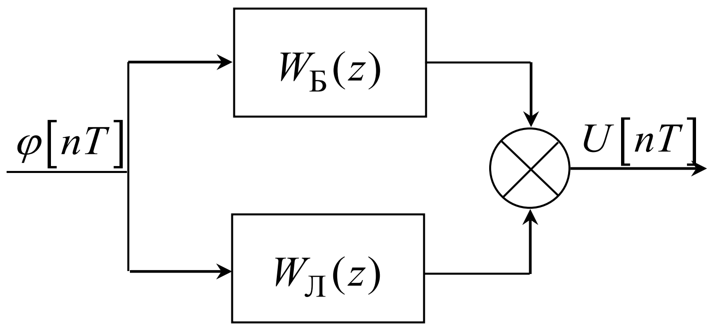

Рис. 21. Структурна схема цифрового ПД-стабілізатора, виконаного за паралельною схемою

Передавальна функція такого стабілізатора, виконаного за паралельною схемою, записується як

$$W_c(z)=k_{\varphi}W_Б(z)+k_{\dot\varphi}W_Л(z),\quad(145)$$

де $W_Б(z)$ – дискретна передавальна функція фільтра Баттерворта; $W_Л(z)$ – дискретна передавальна функція фільтра Ланцоша.

Припустимо, що фільтри Баттерворта й Ланцоша мають другий порядок, і їхні передавальні функції подаються у вигляді:

$$W_{\text{Б}}(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}; \tag{146}$$

$$W_{\text{Л}}(z) = c_0 + c_1 z^{-1} - c_1 z^{-3} - c_0 z^{-4}. \tag{147}$$

Підставляючи (146) і (147) у формулу (145), отримаємо дискретну передавальну функцію ПД-стабілізатора, наведеного на рис. 21,

$$W_c(z) = \frac{\begin{gathered} k_\varphi\left(d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}\right) + \\ + k_\varphi\left(f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3} - f_4 z^{-4} - f_5 z^{-5} - f_5 z^{-5}\right) \end{gathered}}{1 + l_1 z^{-1} + l_2 z^{-2}}, \tag{148}$$

де відповідні постійні пов'язані з параметрами фільтрів (146) і (147) співвідношеннями:

$$d_0 = \frac{a_0}{b_0};\ d_1 = \frac{a_1}{b_0};\ d_2 = \frac{b_2}{b_0}.$$

$$f_0 = c_0;\ f_1 = \frac{b_0 c_1 + b_1 c_0}{b_0};\ \ f_2 = \frac{b_1 c_1 + b_2 c_0}{b_0};\ \ f_3 = \frac{c_1\left(b_2 + b_0\right)}{b_0};$$

$$f_4 = \frac{b_0 c_0 + b_1 c_1}{b_0};\ \ f_5 = \frac{b_1 c_0 + b_2 c_1}{b_0};\ \ f_6 = \frac{b_2 c_0}{b_0}.$$

$$l_1 = \frac{b_1}{b_0}.$$

Зі співвідношення (148) отримуємо різницеве рівняння ПД-стабілізатора

$$\begin{aligned} U(nT) &= k_\varphi\left\{d_0\varphi\left[nT\right] + d_1\varphi\left[(n-1)T\right] + d_2\varphi\left[(n-2)T\right]\right\} + \\ &+ k_{\dot\varphi}\left\{\begin{aligned} &f_0\varphi\left[nT\right] + f_1\varphi\left[(n-1)T\right] + f_2\varphi\left[(n-2)T\right] + f_3\varphi\left[(n-3)T\right] - \\ &- f_4\varphi\left[(n-4)T\right] - f_5\varphi\left[(n-5)T\right] - f_6\varphi\left[(n-6)T\right] \end{aligned}\right\} - \\ &- l_1 U\left[(n-1)T\right] + l_2 U\left[(n-2)T\right]. \end{aligned} \tag{149}$$

Як приклад розглянемо фільтри (146) і (147) з параметрами: $a_0 = 0,08073$; $a_1 = 0,16147$; $b_0 = 1,48256$; $b_1 = -1,83854$; $b_2 = 0,67789$; $c_0 = 5$; $c_1 = 2,5$. Використовуючи співвідношення (149), побудуємо АЧХ і ФЧХ розглянутого ПД-стабілізатора за умови різних значень варійованих параметрів k_φ і $k_{\dot{\varphi}}$. Для цього на вході лінійного цифрового стабілізатора (149) сформуємо синусоїдальну решітчасту функцію

$$\varphi(nT) = A\sin\omega nT\,. \tag{150}$$

У цьому разі на виході стабілізатора, відповідно до алгоритму (149), має місце синусоїдальна решітчаста функція

$$U(nT) = B(\omega T)\sin\left\{\omega nT + \psi\left[\omega T\right]\right\}. \tag{151}$$

Для кожного поточного значення ωT обчислюється значення АЧХ

$$M(\omega T) = \frac{B(\omega T)}{A}$$

і вимірюється фазовий зсув вихідного сигналу (151) щодо вхідного (150). АЧХ і ФЧХ ПД-стабілізатора (149) наведені на рис. 22.

Аналіз АЧХ і ФЧХ фільтра (149) дозволяє зробити висновок, що стабілізатор (145) не дуже ефективно пригнічує високочастотні перешкоди, до того ж із зростанням константи k_φ інтенсивність пригнічення високочастотних перешкод знижується. Пояснюється це тим, що в схемі ПД-стабілізатора (рис. 21) на фільтр Ланцоша подається зашумлений високочастотними перешкодами вхідний сигнал, а пригнічення фільтром Ланцоша високих частот не завжди ефективно.

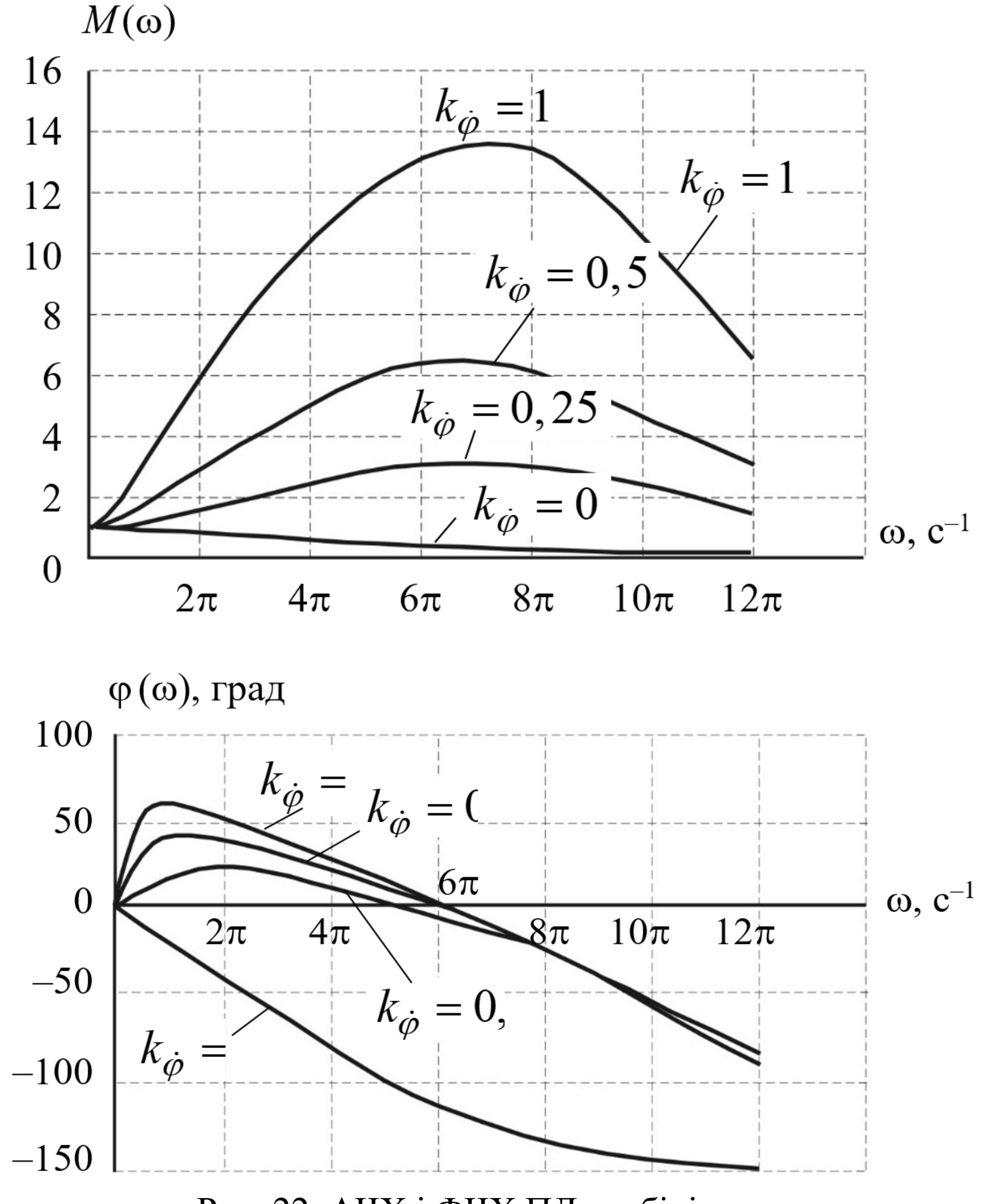

Рис. 22. АЧХ і ФЧХ ПД-стабілізатора

Відповідно до викладеного розглянемо ПД-стабілізатор, виконаний за послідовно-паралельною схемою та показаний на рис. 23. У цій схемі на фільтр Ланцоша подається вже відфільтрований низькочастотним фільтром Баттеруорта сигнал $\tilde{\varphi}[nT]$.

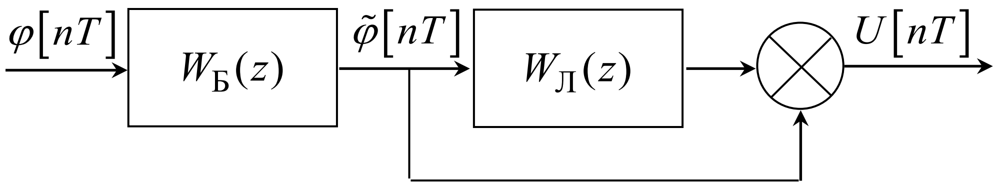

Рис. 23. Схема ПД-стабілізатора, виконаного послідовно-паралельно

Передавальна функція ПД-стабілізатора, поданого на рис. 23, дорівнює:

$$W_c(z) = k_{\varphi} W_{\text{Б}}(z) + k_{\varphi} k_{\dot{\varphi}} W_{\text{Б}}(z) W_{\text{Л}}(z) = k_{\varphi} W_{\text{Б}}(z)\left[1 + k_{\dot{\varphi}} W_{\text{Л}}(z)\right]. \quad (152)$$

Підставляючи в (152) співвідношення (146) і (147), отримуємо:

$$W_c(z) = \frac{k_{\varphi}\left\{\begin{array}{c} d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \\ + k_{\dot{\varphi}}(f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_2 z^{-4} - f_1 z^{-5} - f_0 z^{-6}) \end{array}\right\}}{1 + l_1 z^{-1} + l_2 z^{-2}}. \quad (153)$$

Відповідне передавальній функції (153) різницеве рівняння ПД-стабілізатора має вигляд:

$$U(nT) = k_{\varphi}\left\{\begin{array}{l} d_0\varphi\left[nT\right] + d_1\varphi\left[(n-1)T\right] + d_2\varphi\left[(n-2)T\right] + \\ + k_{\dot{\varphi}}\left[\begin{array}{l} f_0\varphi\left[nT\right] + f_1\varphi\left[(n-1)T\right] + f_2\varphi\left[(n-2)T\right] - \\ - f_2\varphi\left[(n-4)T\right] - f_1\varphi\left[(n-5)T\right] - f_0\varphi\left[(n-6)T\right] \end{array}\right] \end{array}\right\} - \quad (154)$$
$$- l_1 U\left[(n-1)T\right] + l_2 U\left[(n-2)T\right].$$

На рис. 24 наведені АЧХ і ФЧХ стабілізатора (154). Пригнічення високочастотних перешкод стабілізатором (154) значно ефективніше, ніж стабілізатором (149).

Аналіз цифрового ПД-стабілізатора, виконаного за послідовно-паралельною схемою, показує, що його високі динамічні властивості обумовлені тим, що на вхід диференціювального фільтра Ланцоша подається вхідний сигнал фільтра Баттеруорта, який практично не містить високочастотних перешкод.

Розглянемо ПД-стабілізатор, зображений на рис. 23 з фільтром Баттеруорта третього порядку з передавальною функцією

$$W_{\text{Б}}(z) = \frac{a_0\left(1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}\right)}{1 + d_{10} z^{-1} + d_{20} z^{-2} + d_{30} z^{-3}} \quad (155)$$

і фільтром Ланцоша першого порядку з передавальною функцією

$$W_{\text{Л}}(z) = c_2\left(1 - z^{-2}\right). \quad (156)$$

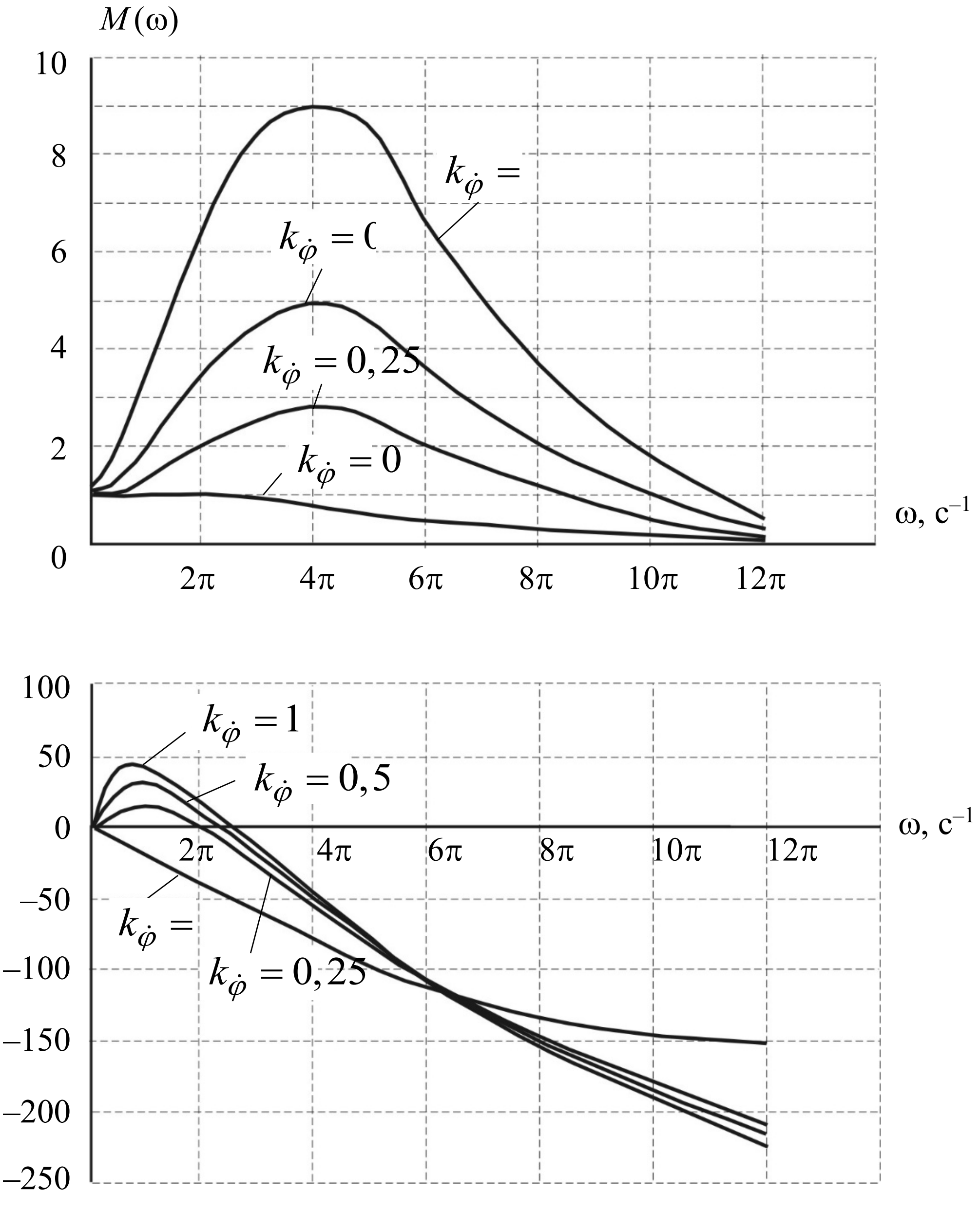

Рис. 24. АЧХ і ФЧХ стабілізатора (154)

Унаслідок отримуємо передавальну функцію ПД-стабілізатора у вигляді

$$W_c(z) = \frac{k_\varphi a_0 \left\{ \begin{array}{c} 1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3} + \\ + k_{\dot\varphi} c_2 (1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} - \\ -2z^{-3} - 3z^{-4} - z^{-5}) \end{array} \right\}}{1 + d_{10} z^{-1} + d_{20} z^{-2} + d_{30} z^{-3}}, \qquad (157)$$

якій відповідає алгоритм стабілізації

$$U(nT) = k_{\varphi} a_0 \begin{Bmatrix} \varphi[nT] + 3\varphi[(n-1)T] + 3\varphi[(n-2)T] + \varphi[(n-3)T] + \\ + k_{\dot{\varphi}}\, c_2 \begin{bmatrix} \varphi[nT] + 3\varphi[(n-1)T] + 2\varphi[(n-2)T] - \\ -2\varphi[(n-3)T] - 3\varphi[(n-4)T] - \varphi[(n-5)T] \end{bmatrix} \end{Bmatrix} - \quad (158)$$

$$- d_{10}\, U[(n-1)T] + d_{20} U[(n-2)T] - d_{30}\, U[(n-3)T].$$

Нехай параметри фільтрів (155) і (156) дорівнюють $a_0 = 0{,}012045$; $d_{10} = -1{,}93847$; $d_{20} = -1{,}37229$; $d_{30} = -0{,}33745$; $c_2 = 12{,}5$.

АЧХ і ФЧХ стабілізатора (158) практично повністю збігаються з відповідними характеристиками стабілізатора (154). Деяке погіршення фільтрувальних властивостей фільтра (156) порівняно з фільтром (147) компенсується використанням фільтра Баттеруорта третього порядку (155) з практично ідеальною АЧХ, який ефективно фільтрує високочастотні перешкоди.

Отже, цифрові ПД-стабілізатори доцільно будувати за послідовно-паралельною схемою відповідно до алгоритмів стабілізації (154) і (158).

2.5. Структурна схема та алгоритми дискретної частини замкнутої системи курсової стійкості автомобіля

У системах стабілізації рухомих об’єктів і насамперед об’єктів військового призначення в останні десятиліття широко використовуються безплатформенні інерціальні системи (БІС), у яких кути відхилення осей пов’язаної з об’єктом системи координат від осей інерціальної системи координат не вимірюються, а обчислюються бортовою цифровою обчислювальною машиною відповідно до значень вихідних сигналів датчиків кутових швидкостей, установлених на об’єкті, осі чутливості яких збігаються у напрямку з основними центральними осями інерції об’єкта, що утворюють пов’язану з об’єктом систему координат. Структурна схема дискретної частини замкнутої системи курсової стійкості автомобіля може бути подана у вигляді, як зображено на рис. 25.

На рис. 25 прийняті такі позначки: ГДКШ – гіроскопічний датчик кутової швидкості; БЧЕ – блок чутливих елементів; ПАК –

перетворювач «аналог-код»; ФБ – фільтр Баттеруорта; БІС – безплатформенна інерціальна система, яка здійснює обчислення кута відхилення поздовжньої власної осі корпусу автомобіля від заданого напрямку руху; ФЛ – фільтр Ланцоша; ПКА – перетворювач «код-аналог».

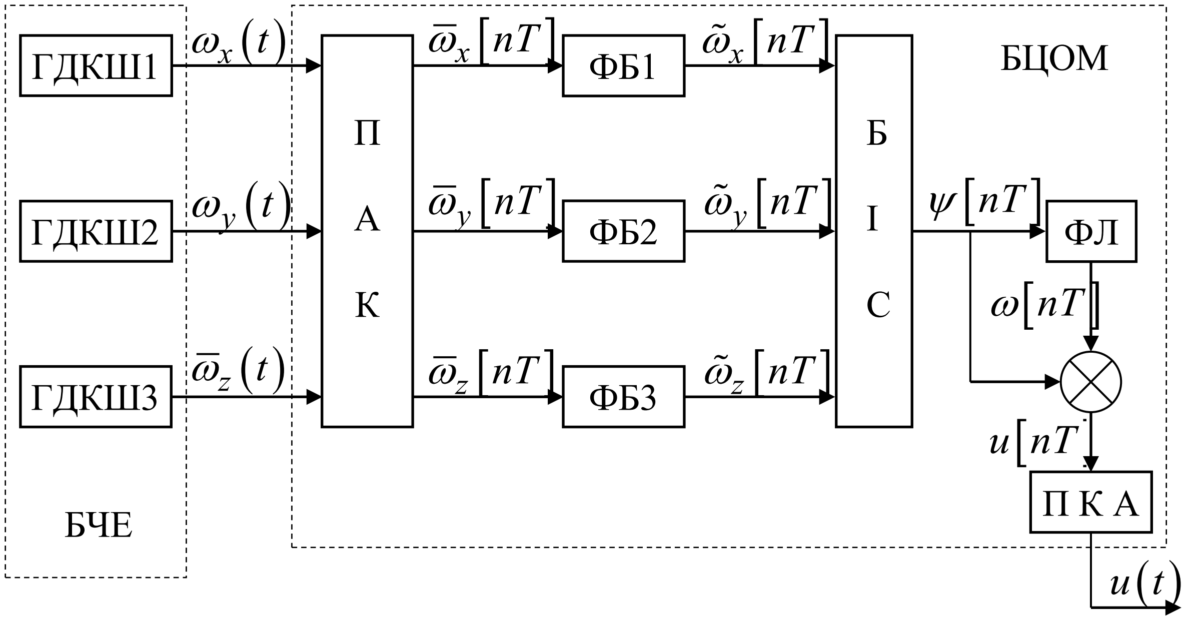

Рис. 25. Структурна схема дискретної частини системи

З виходу трьох датчиків кутової швидкості безперервні сигнали $\bar{\omega}_x(t)$, $\bar{\omega}_y(t)$ та $\bar{\omega}_z(t)$ надходять до входу перетворювача «аналог-код», у якому відбувається перетворення цих сигналів у решітчасті функції $\bar{\omega}_x[nT]$, $\bar{\omega}_y[nT]$ та $\bar{\omega}_z[nT]$.

Схема ГДКШ наведена на рис. 26, де прийняті такі позначки: 1 – ротор гіроскопа; 2 – рамка; 3 – торсіон; 4 – потенціометр.

Припустимо, що основа гіроскопа обертається навколо осі z з кутовою швидкістю $\omega_z(t)$. У цьому разі ротор гіроскопа бере участь одночасно у двох обертаннях: власному обертанні щодо осі x з кутовою швидкістю $\omega_x(t)$ і в обертанні щодо осі z з кутовою швидкістю
$\omega_z(t)$.

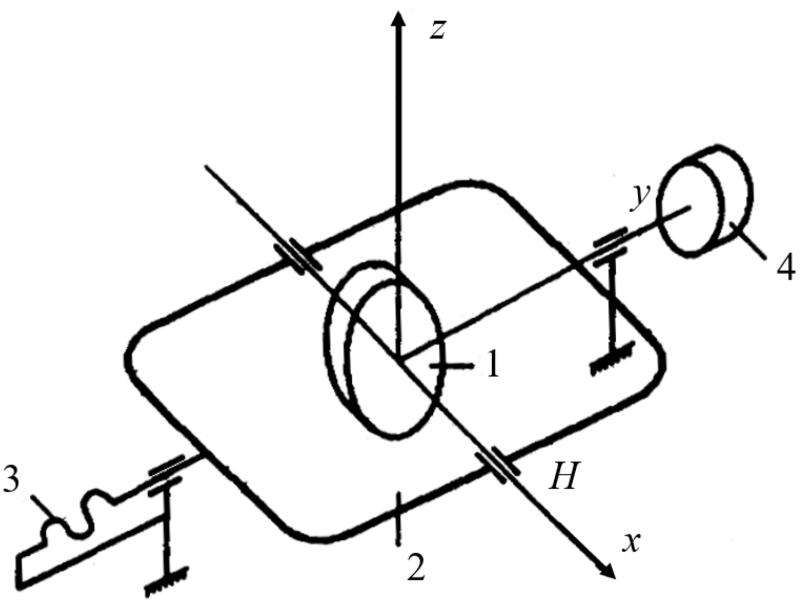

Рис. 26. Схема ГДКШ

За умови одночасної участі ротора 1 у двох обертаннях прискорення частинок маси ротора зумовлює появу сил інерції, рівнодійна яких створює гіроскопічний момент, спрямований уздовж осі y, який визначається формулою

$$M_{\Gamma} = H\omega_z(t), \tag{159}$$

де H – кінетичний момент ротора

$$H = I_{\text{р}}\ \omega,$$

$I_{\text{р}}$ – момент інерції ротора щодо осі власного обертання, який викликає обертання рамки разом із ротором щодо осі y.

Використовуючи принцип д’Аламбера, запишемо диференційне рівняння руху рамки

$$I_y \frac{d^2\beta(t)}{dt^2} + f_y \frac{d\beta(t)}{dt} + c_{\text{Т}}\beta(t) = H\omega_z(t), \tag{160}$$

де $\beta(t)$ – кут обертання рамки щодо осі y; I_y – момент інерції рамки з ротором щодо осі y; f_y – коефіцієнт в’язкого тертя в опорах рамки; $c_{\text{Т}}$ – коефіцієнт жорсткості торсіону 3.

З урахуванням рівняння потенціометра 4

$$\overline{\omega}(t) = k_\beta\ \beta(t)$$

рівняння (160) запишемо у вигляді

$$I_y \frac{d^2\overline{\omega}(t)}{dt^2} + f_y \frac{d\overline{\omega}(t)}{dt} + c_\text{Т}\overline{\omega}(t) = H \cdot k_\beta \omega_z(t). \qquad (161)$$

Обидві частини рівняння (161) поділимо на коефіцієнт

$$\frac{I_y}{c_\text{Т}} \frac{d^2\overline{\omega}(t)}{dt^2} + \frac{f_y}{c_\text{Т}} \frac{d\overline{\omega}(t)}{dt} + \overline{\omega}(t) = k_\beta \frac{H}{c_\text{Т}} \omega_z(t). \qquad (162)$$

З урахуванням познак

$$T_1^2 = \frac{I_y}{c_\text{Т}}; \quad T_2 = \frac{f_y}{c_\text{Т}}; \quad k = k_\beta\ \frac{H}{c_\text{Т}}$$

рівняння (162) запишемо в операторній формі

$$\left(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1\right)\overline{\omega}(t) = k\omega_z(t). \qquad (163)$$

Тоді передавальна функція ГДКШ набуває вигляду

$$W(s) = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}, \qquad (164)$$

тобто ГДКШ є аперіодична динамічна ланка другого порядку, або коливальна динамічна ланка.

Нехай кутові швидкості корпусу автомобіля щодо його основних центральних осей інерції становлять $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ і $\omega_z(t)$. Тоді, відповідно до рівняння (163), виміряні за допомогою ГДКШ кутові швидкості корпусу становлять $\overline{\omega}_x(t)$, $\overline{\omega}_y(t)$ і $\overline{\omega}_z(t)$, до того ж

$$\left(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1\right)\bar{\omega}_x(t) = k\omega_x(t);$$
$$\left(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1\right)\bar{\omega}_y(t) = k\omega_y(t); \qquad (165)$$
$$\left(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1\right)\bar{\omega}_z(t) = k\omega_z(t).$$

Не порушуючи загальності, покладемо коефіцієнт посилення ГДКШ рівним одиниці. У цьому випадку внаслідок рішення рівнянь (165) отримаємо корисний складник і високочастотну заваду, обумовлену власною динамікою ГДКШ:

$$\bar{\omega}_x(t) = \omega_x(t) + \Delta\omega_x(t);$$
$$\bar{\omega}_y(t) = \omega_y(t) + \Delta\omega_y(t); \qquad (166)$$
$$\bar{\omega}_z(t) = \omega_z(t) + \Delta\omega_z(t).$$

Зашумлені сигнали (166) надходять на входи ПАК, де перетворюються в решітчасті функції $\bar{\omega}_x[nT]$, $\bar{\omega}_y[nT]$ та $\bar{\omega}_z[nT]$, які фільтруються низькочастотними фільтрами Баттеруорта ФБ1, ФБ2, ФБ3. Будемо припускати, що фільтри Баттеруорта мають другий порядок із передавальними функціями (119) та рівняннями (120). Тоді для розглянутого прикладу рівняння фільтрації записуються у вигляді

$$\begin{aligned}
&\tilde{\omega}_x[nT] = a_1\left\{\bar{\omega}_x[nT] + 2\bar{\omega}_x\left[(n-1)T\right] + \bar{\omega}_x\left[(n-2)T\right]\right\} - \\
&-d_1\tilde{\omega}_x\left[(n-1)T\right] - d_2\tilde{\omega}_x\left[(n-2)T\right];\\
&\tilde{\omega}_y[nT] = a_1\left\{\bar{\omega}_y[nT] + 2\bar{\omega}_y\left[(n-1)T\right] + \bar{\omega}_y\left[(n-2)T\right]\right\} - \\
&-d_1\tilde{\omega}_y\left[(n-1)T\right] - d_2\tilde{\omega}_y\left[(n-2)T\right];\\
&\tilde{\omega}_z[nT] = a_1\left\{\bar{\omega}_z[nT] + 2\bar{\omega}_z\left[(n-1)T\right] + \bar{\omega}_z\left[(n-2)T\right]\right\} - \\
&-d_1\tilde{\omega}_z\left[(n-1)T\right] - d_2\tilde{\omega}_z\left[(n-2)T\right].
\end{aligned} \qquad (167)$$

Алгоритми БІС зводяться до відшукання значень параметрів Родріга – Гамільтона, пов’язаних із кутовими швидкостями об’єкта, що стабілізується, $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ і $\omega_z(t)$ диференційними рівняннями [11]

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_0(t) = -\frac{1}{2}\left[\omega_x(t)\lambda_1(t) + \omega_y(t)\lambda_2(t) + \omega_z(t)\lambda_3(t)\right];\\
&\dot{\lambda}_1(t) = \frac{1}{2}\left[\omega_x(t)\lambda_0(t) + \omega_z(t)\lambda_2(t) - \omega_y(t)\lambda_3(t)\right];\\
&\dot{\lambda}_2(t) = \frac{1}{2}\left[\omega_y(t)\lambda_0(t) + \omega_x(t)\lambda_3(t) - \omega_z(t)\lambda_1(t)\right];\\
&\dot{\lambda}_3(t) = \frac{1}{2}\left[\omega_z(t)\lambda_0(t) + \omega_y(t)\lambda_1(t) - \omega_x(t)\lambda_2(t)\right],
\end{aligned} \tag{168}$$

і які задовольняють умову

$$\lambda_0^2(t) + \lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t) + \lambda_3^2(t) = 1. \tag{169}$$

Алгоритми БІС для оцінки параметрів Родріга – Гамільтона $\lambda_0[nT]$, $\lambda_1[nT]$, $\lambda_2[nT]$ і $\lambda_3[nT]$в найпростішому вигляді можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\lambda_0[nT] = \lambda_0[(n-1)T] - \frac{T}{2}\{\tilde{\omega}_x[nT]\lambda_1[(n-1)T] +\\
&+\tilde{\omega}_y[nT]\lambda_2[(n-1)T] + \tilde{\omega}_z[nT]\lambda_3[(n-1)T]\};\\
&\lambda_1[nT] = \lambda_1[(n-1)T] + \frac{T}{2}\{\tilde{\omega}_x[nT]\lambda_0[(n-1)T] -\\
&-\tilde{\omega}_y[nT]\lambda_3[(n-1)T] + \tilde{\omega}_z[nT]\lambda_2[(n-1)T]\};\\
&\lambda_2[nT] = \lambda_2[(n-1)T] + \frac{T}{2}\{\tilde{\omega}_x[nT]\lambda_3[(n-1)T] +\\
&+\tilde{\omega}_y[nT]\lambda_0[(n-1)T] - \tilde{\omega}_z[nT]\lambda_1[(n-1)T]\};\\
&\lambda_3[nT] = \lambda_3[(n-1)T] + \frac{T}{2}\{-\tilde{\omega}_x[nT]\lambda_2[(n-1)T] +\\
&+\tilde{\omega}_y[nT]\lambda_1[(n-1)T] + \tilde{\omega}_z[nT]\lambda_0[(n-1)T]\}.
\end{aligned} \tag{170}$$

Варто зауважити, що точність обчислення параметрів Родріга – Гамільтона за допомогою алгоритму БІС (170), незважаючи на очевидну простоту алгоритму (170), не висока. Точність обчислення параметрів Родріга – Гамільтона може бути підвищена, якщо замість методу Ейлера наближеного рішення диференціальних рівнянь (168) використати реверсивний метод Гаусса – Зейделя, який полягає в такому:

- оскільки БЦОМ розв’язує різницеві рівняння (170) послідовно, то в праву частину кожного наступного рівняння (170) підставляються значення параметрів Родріга – Гамільтона, обчислені на попередніх кроках;
- відповідно до реверсивного методу Гаусса – Зейделя, на непарному кроці алгоритму обчислення порядок обчислення параметрів Родріга – Гамільтона становить $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_0$, а на парному кроці алгоритму порядок обчислення становить $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_0$;
- у процесі роботи алгоритму (170) коригується виконання умови (169), а саме параметр $\lambda_0[nT]$ обчислюється за допомогою співвідношення

$$\lambda_0[nT] = \sqrt{1 - \lambda_1^2[nT] - \lambda_2^2[nT] - \lambda_3^2[nT]}.$$

Остаточно алгоритм оцінки параметрів Родріга – Гамільтона має такий вигляд:

- непарний крок роботи алгоритму

$$\begin{aligned}
&\lambda_1[nT] = \lambda_1[(n-1)T] + \frac{T}{2}\{\tilde{\omega}_x[nT]\lambda_0[(n-1)T] - \\
&-\tilde{\omega}_y[nT]\lambda_3[(n-1)T] + \tilde{\omega}_z[nT]\lambda_2[(n-1)T]\}; \\
&\lambda_2[nT] = \lambda_2[(n-1)T] + \frac{T}{2}\{\tilde{\omega}_x[nT]\lambda_3[(n-1)T] + \\
&+\tilde{\omega}_y[nT]\lambda_0[(n-1)T] - \tilde{\omega}_z[nT]\lambda_1[(n-1)T]\}; \qquad (171) \\
&\lambda_3[nT] = \lambda_3[(n-1)T] + \frac{T}{2}\{-\tilde{\omega}_x[nT]\lambda_2[(n-1)T] + \\
&+\tilde{\omega}_y[nT]\lambda_1[(n-1)T] + \tilde{\omega}_z[nT]\lambda_0[(n-1)T]\}; \\
&\lambda_0[nT] = \sqrt{1 - \lambda_1^2[nT] - \lambda_2^2[nT] - \lambda_3^2[nT]};
\end{aligned}$$

- парний крок роботи алгоритму

$$\lambda_3[nT] = \lambda_3[(n-1)T] + \frac{T}{2}\{-\tilde{\omega}_x[nT]\lambda_2[(n-1)T] +$$
$$+\tilde{\omega}_y[nT]\lambda_1[(n-1)T] + \tilde{\omega}_z[nT]\lambda_0[(n-1)T]\};$$
$$\lambda_2[nT] = \lambda_2[(n-1)T] + \frac{T}{2}\{\tilde{\omega}_x[nT]\lambda_3[(n-1)T] + \tag{172}$$
$$+\tilde{\omega}_y[nT]\lambda_0[(n-1)T] - \tilde{\omega}_z[nT]\lambda_1[(n-1)T]\};$$
$$\lambda_0[nT] = \sqrt{1 - \lambda_1^2[nT] - \lambda_2^2[nT] - \lambda_3^2[nT]}.$$

Величина кутового відхилення поздовжньої осі корпусу автомобіля від заданого водієм напрямку руху автомобіля під час гальмування обчислюється за формулою

$$\psi[nT] = 2\lambda_0[nT]\lambda_3[nT]. \tag{173}$$

Відповідно до структурної схеми обчислена решітчаста функція кутового відхилення (117) подається на вхід фільтра Ланцоша для оцінювання кутової швидкості повороту корпусу автомобіля $\omega_\psi[nT]$. Якщо фільтр Ланцоша має другий порядок із передавальною функцією (147), то оцінювання решітчастої функції здійснюється за допомогою такого алгоритму:

$$\omega_\psi[nT] = c_0\psi[nT] + c_1\psi[(n-1)T] - c_1\psi[(n-3)T] - c_0\psi[(n-4)T], \tag{174}$$

а решітчаста функція алгоритму керування $u[nT]$ – за допомогою алгоритму

$$u[nT] = k_\psi\psi[nT] + k_{\dot{\psi}}\omega_\psi[nT]. \tag{175}$$

Потім цифровий сигнал управління (175) подається на перетворювач «код-аналог», на виході якого має місце кусково-безперервна функція

$$u(t)=\begin{cases} u[nT] & \text{при } nT \le t < (n+1)T; \\ u[(n+1)T] & \text{при } (n+1)T \le t < (n+2)T. \end{cases} \tag{176}$$

Отже, алгоритми, що реалізує БЦОМ, записуються у вигляді співвідношень (167), (171)–(176).

Контрольні запитання й завдання до розділу 2

1. У чому полягає сутність методів синтезу цифрових нерекурсивних фільтрів?
2. Запишіть передавальну функцію цифрового нерекурсивного фільтра Баттеруорта другого порядку.
3. Запишіть рівняння фільтра Ланцоша другого порядку.
4. Накресліть схему цифрового стабілізатора, виконаного за послідовно-паралельною схемою.
5. Накресліть схему цифрового ПД-стабілізатора, виконаного за паралельною схемою.
6. Запишіть узагальнену передавальну функцію цифрового ПД-стабілізатора, виконаного за послідовно-паралельною схемою.
7. Опишіть рівняння БІНС у параметрах Родріга – Гамільтона.

РОЗДІЛ 3
ПАРАМЕТРИЧНИЙ СИНТЕЗ ЗАМКНУТИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

3.1. Постановка задачі параметричного синтезу замкнутої дискретної системи

Розробка будь-якої замкнутої системи автоматичного керування зводиться до послідовності розв’язання пов’язаних між собою задач аналізу й синтезу. Розв’язання задачі аналізу САК зводиться до аналізу її динамічних властивостей і насамперед до аналізу стійкості САК. Розв’язання задачі синтезу САК зводиться або до вибору структури САК та чисельних значень її варійованих параметрів (структурно-параметричний синтез), або тільки до вибору чисельних значень варійованих параметрів за умови заданої структури САК (параметричний синтез). Методи структурно-параметричного синтезу САК, до яких належить принцип максимуму Л. С. Понтрягіна, метод динамічного програмування Р. Беллмана і теорія аналітичного конструювання оптимальних регуляторів О. А. Красовського та О. М. Льотова, не знайшли широкого застосування в інженерній практиці внаслідок того, що всі вони приводять до структури регулятора, який використовує інформацію про всі компоненти вектора стану об’єкта керування, отримання якої пов’язано зі значними, а часом і нездоланними труднощами. У зв’язку з цим значного поширення набули методи параметричного синтезу САК, основані на знаходженні значень варійованих параметрів регулятора заздалегідь обраної структури.

Нехай замкнута дискретна САК надана у вигляді, зображеному на рис. 27.

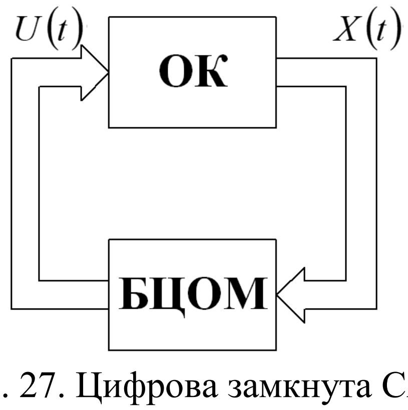

Рис. 27. Цифрова замкнута САК

БЦОМ реалізує такий алгоритм керування:

$$U\left[nT\right] = K \cdot X\left[nT\right], \qquad (177)$$

де $U[nT]$ – решітчаста m-вимірна вектор-функція, що відповідає вектору керування $U(t)$; $X[nT]$ – решітчаста n-вимірна вектор-функція, що відповідає вектору стану $X(t)$.

Об'єкт керування ОК належить до безперервної частини замкнутої дискретної системи, збурений рух якої описується векторно-матричним диференційним рівнянням

$$\dot{X}\left(t\right) = A \cdot X\left(t\right) + B \cdot U\left(t\right), \qquad (178)$$

де A – власна матриця об'єкта керування розмірності $n \times n$; B – матриця керування розмірності $n \times m$.

Запишемо різницеве рівняння, що пов'язує початковий стан безперервної частини системи (178) $X[kT]$ з її кінцевим станом $X[(k+1)T]$ на кожному періоді дискретності [12]

$$X\left[\left(k+1\right)T\right] = \Phi \cdot X\left[kT\right] + H \cdot U\left[kT\right], \qquad (179)$$

де матриці Φ і H розмірності $n \times n$ та $n \times m$ відповідно визначаються формулами

$$\Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i T^i \quad ; \qquad (180)$$

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\left(i+1\right)!} A^i T^{i+1} \right] B. \qquad (181)$$

Кількість врахованих членів матричних рядів (180) і (181) залежить від величини періоду квантування T. Зазвичай у використанні сучасних БЦОМ із малим періодом квантування з достатнім рівнем точності вважають

$$\Phi = E + A \cdot T; \; H = B \cdot T. \qquad (182)$$

Підставимо співвідношення (177) в різницеве рівняння (179).

Унаслідок отримуємо різницеве рівняння замкнутої дискретної системи

$$X\left[(k+1)T\right]=\left[\Phi+H\cdot K\right]\cdot X\left[kT\right]. \tag{183}$$

Тоді характеристичне рівняння замкнутої дискретної системи записується у вигляді

$$\det\left[\Phi+H\cdot K-E\cdot z\right]=0. \tag{184}$$

Задачу параметричного синтезу замкнутої дискретної системи сформулюємо таким чином. Потрібно знайти значення елементів матриці варійованих параметрів K, таких, щоб замкнута дискретна система була стійка й задовольняла необхідні критерії якості, серед яких найбільш поширеними є запас стійкості та швидкодія.

3.2. Розв'язання задачі параметричного синтезу дискретної САК, яка забезпечує максимальний запас стійкості та максимальну швидкодію замкнутої дискретної САК

Скориставшись методом W-перетворення, у співвідношенні (184) зробимо заміну

$$z=\frac{1+w}{1-w} \tag{185}$$

і отримаємо нове характеристичне рівняння щодо комплексної величини w

$$A(w)=\det\left[\Phi+H\cdot K-E\frac{1+w}{1-w}\right]=0. \tag{186}$$

Як приклад розглянемо характеристичне рівняння замкнутої дискретної САК курсовою стійкістю автомобіля (54). Потрібно знайти значення варійованих констант алгоритму (45) k_{ψ} і $k_{\dot{\psi}}$, що доставляють замкнутій САК максимальний запас стійкості та швидкодію.

У характеристичному рівнянні (54) зробимо заміну [19]

$$w = \alpha + j\omega. \tag{187}$$

Унаслідок маємо:

$$\begin{aligned}
&X\left(\alpha,\omega,k_{\psi},k_{\dot\psi}\right) = 8\alpha\left(\alpha^2 - 3\omega^2\right) + \left(\alpha^2 - \omega^2\right)\times \\
&\times\left(8 - 2k_{\text{a}}T^2k_{\psi} - 4k_{\text{a}}Tk_{\dot\psi}\right) + 4\alpha k_{\text{a}}Tk_{\dot\psi} + 2k_{\text{a}}T^2k_{\psi} = 0; \\
&Y\left(\alpha,\omega,k_{\psi},k_{\dot\psi}\right) = 8\omega\left(3\alpha^2 - \omega^2\right) + 2\alpha\omega\times \\
&\times\left(8 - 2k_{\text{a}}T^2k_{\psi} - 4k_{\text{a}}Tk_{\dot\psi}\right) + 4k_{\text{a}}Tk_{\dot\psi}\omega = 0.
\end{aligned} \tag{188}$$

Якщо $\alpha = 0$, система (188) вироджується в систему (56), (57).

Співвідношення (188) подамо у вигляді системи двох алгебраїчних рівнянь із двома невідомими

$$\begin{aligned}
&2k_{\text{a}}T^2\left(\alpha^2 - \omega^2 - 1\right)k_{\psi} + 4k_{\text{a}}T\left(\alpha^2 - \omega^2 - \alpha\right)k_{\dot\psi} = \\
&= 8\alpha\left(\alpha^2 - 3\omega^2\right) + 8\left(\alpha^2 - \omega^2\right); \\
&4\alpha k_{\text{a}}T^2k_{\psi} + 4k_{\text{a}}T\left(2\alpha - 1\right)k_{\dot\psi} = 8\left(3\alpha^2 - \omega^2\right) + 16\alpha.
\end{aligned} \tag{189}$$

Покладемо $k_{\text{a}} = -10^{-1}\ \text{В}^{-1}\cdot\text{с}^{-2}$ та за допомогою співвідношень (189) побудуємо в площині варійованих параметрів $\left(k_{\psi},k_{\dot\psi}\right)$ системи лінії рівного ступеня стійкості за умови зміни ω від нуля до нескінченності в разі різних від'ємних значень величини α і різних значень періоду квантування T (рис. 28–30). Аналіз наведених рисунків дозволяє зробити висновок про те, що зі зростанням величини періоду квантування БЦОМ область стійкості замкнутої дискретної системи зменшується.

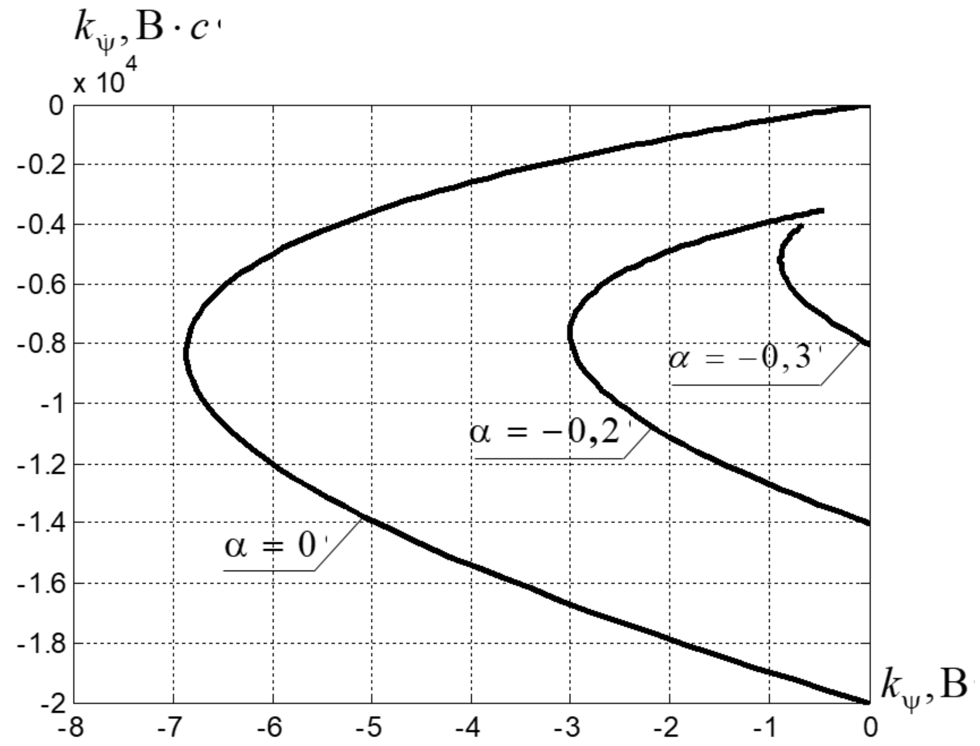

Рис. 28. Лінії рівного ступеня стійкості замкнутої САК за умови $T = 1 \cdot 10^{-3}$ с

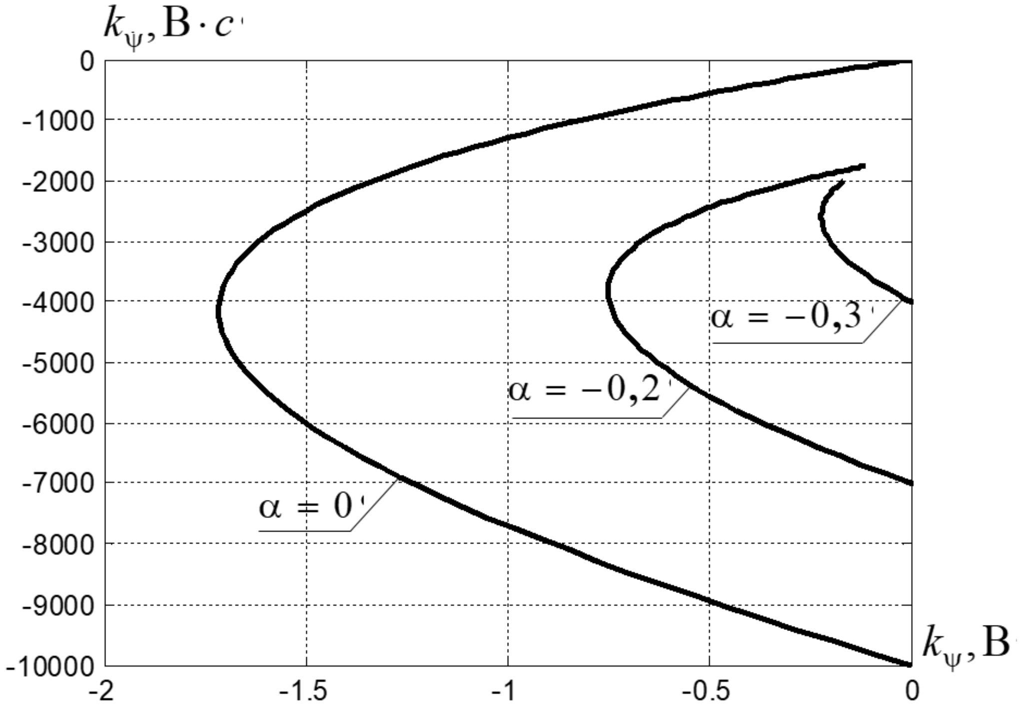

Рис. 29. Лінії рівного ступеня стійкості замкнутої САК за умови $T = 2 \cdot 10^{-3}$ с

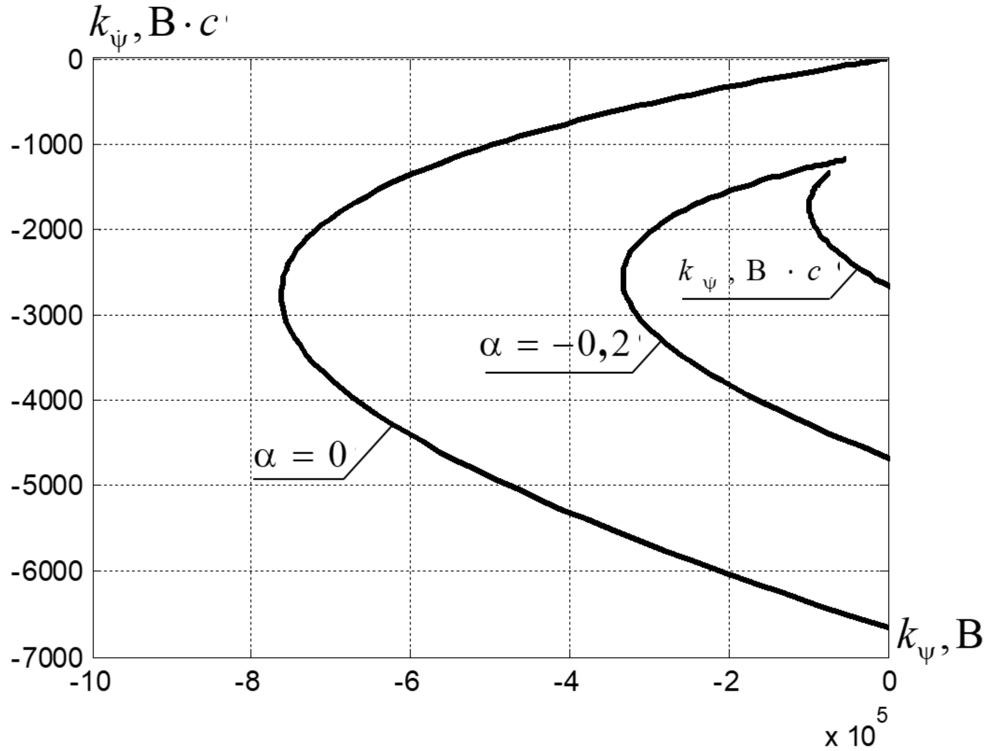

Рис. 30. Лінії рівного ступеня стійкості замкнутої САК за умови $T = 3 \cdot 10^{-3}$ с

Максимальний запас стійкості замкнутої дискретної САК курсовою стійкістю автомобіля в розглянутому прикладі становить

$$\alpha^* = |\alpha| = 0,3.$$

Значення варійованих параметрів цифрової САК, які забезпечують максимальний запас стійкості та максимальну швидкодію замкнутій САК, відповідають точкам, з яких виходять лінії рівного ступеня стійкості, що відповідають $\alpha = -\alpha^*$.

Ці значення наведені в табл. 4.

Таблиця 4

Оптимальні значення варійованих параметрів САК

T, с / k_ψ^*, k_ψ^*	$1 \cdot 10^{-3}$ с	$2 \cdot 10^{-3}$ с	$3 \cdot 10^{-3}$ с
k_ψ, В	$-0,7 \cdot 10^6$	$-0,2 \cdot 10^6$	$-0,7 \cdot 10^5$
k_ψ, В·с	$-0,4 \cdot 10^4$	$-0,2 \cdot 10^4$	$-0,12 \cdot 10^4$

3.3. Алгоритмічний метод параметричного синтезу цифрових САК

Перехід від математичної моделі збуреного руху об’єкта керування, поданої у вигляді матричного диференційного рівняння (178), до матричного різницевого рівняння (179) призводить до зниження точності розв’язання задачі параметричного синтезу цифрового автоматичного регулятора, яка залежить від кількості врахованих членів матричних рядів (180) і (181). Зі збільшенням кількості врахованих членів матричні ряди (180) і (181) ускладнюються, що призводить до значних труднощів у розв’язанні задачі параметричного синтезу. У зв’язку з цим доцільно скористатися викладеним у роботі [14] алгоритмічним методом параметричного синтезу динамічних систем, основаним на безпосередньому обчисленні інтегрального квадратичного функціоналу на рішеннях математичної моделі замкнутої дискретної системи

$$I(K) = \int_0^{\tau} \sum_{i=1}^{m} \beta_i^2 x_i^2 (t,k) dt, \tag{190}$$

де $x_i(t,k)\left(i=\overline{1,m}\right)$ – основні координати замкнутої цифрової САК, що найбільшою мірою характеризують її динамічні властивості [16]; k – вектор варійованих параметрів САК; m – кількість врахованих основних координат; β_i – вагові коефіцієнти функціоналу (190), які підлягають вибору; τ – час аналізу динамічних процесів.

Задачею параметричного синтезу цифрового автоматичного регулятора замкнутої САК є відшукання вектора варійованих параметрів САК $k \in G_k$ на множині допустимих значень G_k, який доставляє мінімум інтегральному квадратичному функціоналу (190). Така постановка задачі параметричного синтезу виявилася можливою у зв’язку з останніми досягненнями сучасної теорії керування, розвитком засобів обчислювальної техніки й програмного забезпечення [15].

Розглянемо розв’язання задачі параметричного синтезу цифрового автоматичного регулятора системи курсової стійкості автомобіля, структурна схема якої подана на рис. 10. На відміну від задачі аналізу стійкості цифрової САК курсовою стійкістю автомобіля, розглянутої в підрозділі 1.6, будемо враховувати динаміку електрогідравлічного підсилювача й, замість алгебраїчного рівняння (37), яке зв'язує вихідний і вхідний сигнали ЕГП, розглянемо диференційне рівняння [14]

$$T_1^2 \frac{d^2 \Delta p(t)}{dt^2} + T_2 \frac{d \Delta p(t)}{dt} + \Delta p(t) = k_{\text{егп}} u(t), \tag{191}$$

де T_1 і T_2 – постійні часу ЕГП.

Отже, збурений рух безперервної частини замкнутої САК курсовою стійкістю автомобіля описується диференційними рівняннями (34) та (191).

Алгоритм керування, що реалізує бортова ЦОМ, у цьому випадку описується залежністю

$$u[nT] = k_\psi \psi[nT] + k_{\dot{\psi}} \omega_\psi [nT]. \tag{192}$$

Основними координатами в алгоритмі керування, обраному у вигляді (192), є кут $\psi(t)$ та кутова швидкість $\omega_\psi(t)$.

У розгляді задачі параметричного синтезу САК курсовою стійкістю автомобіля будемо нехтувати високочастотними перешкодами в каналах керування, припускаючи, що вони повністю заглушуються фільтрами Баттеруорта, уведеними в схему рис. 25. У зв'язку з цим математична модель дискретної частини замкнутої САК є сукупністю співвідношень (192) і (176), а адитивний функціонал (190) для цієї задачі запишемо у вигляді

$$I(k) = \int_0^\tau \left[\beta_1^2 \psi^2(t) + \beta_2^2 \dot{\psi}^2(t) \right] dt, \tag{193}$$

де k – двовимірний вектор варійованих параметрів

$$k = \begin{bmatrix} k_\psi & k_{\dot{\psi}} \end{bmatrix}^T \in G_k, \tag{194}$$

де G_k – множина допустимих значень вектора k, що є областю стійкості замкнутої системи в площині варійованих параметрів $\left(k_\psi, k_{\dot\psi}\right)$ [14].

Відомо [17], що області стійкості дискретної системи розташовуються всередині області стійкості відповідної безперервної системи, скорочуються в розмірах за умови зростання періоду квантування T й асимптотично прагнуть до області стійкості безперервної системи в разі необмеженого зменшування періоду квантування. Тому множину G_k будемо будувати в припущенні, що замкнута САК є безперервною. За цих умов область стійкості дискретної системи буде розташована всередині побудованої області.

Отже, припустимо, що САК курсовою стійкістю автомобіля є безперервною, що реалізує закон керування у вигляді

$$u(t) = k_\psi \psi(t) + k_{\dot\psi} \dot\psi(t). \tag{195}$$

Введемо вектор стану замкнутої безперервної САК

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta p(t) \\ \Delta \dot p(t) \\ \psi(t) \\ \dot\psi(t) \end{bmatrix} \tag{196}$$

і запишемо рівняння збуреного руху замкнутої безперервної САК:

$$\begin{aligned}
&\dot x_1(t) = x_2(t); \\
&\dot x_2(t) = -\frac{1}{T_1^2} x_1(t) - \frac{T_2}{T_1^2} x_2(t) - \frac{k_{\text{егп}}}{T_1^2} k_\psi x_3(t) - \frac{k_{\text{егп}}}{T_1^2} k_{\dot\psi} x_4(t); \\
&\dot x_3(t) = x_4(t); \\
&\dot x_4(t) = k_{\text{авт}} x_1(t);
\end{aligned} \tag{197}$$

Систему диференційних рівнянь (197) запишемо у векторно-матричній формі

$$\dot X(t) = A(k) \cdot X(t), \tag{198}$$

де матриця $A(K)$ записується

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{T_1^2} & -\dfrac{T_2}{T_1^2} & -\dfrac{k_{\text{егп}}}{T_1^2}k_\psi & -\dfrac{k_{\text{егп}}}{T_1^2}k_\psi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{\text{авт}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{199}$$

а характеристичне рівняння подається у вигляді

$$\det\left[A(k)-Es\right]=0. \tag{200}$$

Підставляючи матрицю (199) у рівняння (200), запишемо характеристичне рівняння замкнутої безперервної САК, яке, з урахуванням формули (40), набуває вигляду

$$T_1^2 s^4 + T_2 s^3 + s^2 + k_{\text{а}} k_{\dot\psi} s + k_{\text{а}} k_\psi = 0. \tag{201}$$

У характеристичному рівнянні (201) здійснимо заміну $s = j\omega$

$$T_1^2\omega^4 - jT_2\omega^3 - \omega^2 + jk_{\text{а}}k_{\dot\psi}\omega + k_{\text{а}}k_\psi = 0. \tag{202}$$

У співвідношенні (202) виокремимо дійсну й уявну частини та дорівняємо їх нулю:

$$X\left(\omega, k_\psi, k_{\dot\psi}\right) = T_1^2\omega^4 - \omega^2 + k_{\text{а}}k_\psi = 0; \tag{203}$$

$$Y\left(\omega, k_\psi, k_{\dot\psi}\right) = -T_2\omega^3 + k_{\text{а}}k_{\dot\psi}\omega = 0. \tag{204}$$

Із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (203) і (204) маємо

$$k_\psi = \frac{1}{k_{\text{а}}}\omega^2\left(1 - T_1^2\omega^2\right); \tag{205}$$

$$k_{\dot\psi} = \frac{1}{k_{\text{а}}}\omega^2 T_2. \tag{206}$$

Змінюючи ω від нуля до $\omega = \dfrac{1}{T_1}$, отримуємо область стійкості замкненої безперервної системи курсової стійкості автомобіля, яку в першому наближенні можна вважати множиною допустимих векторів G_k (рис. 31). Значення параметрів об’єкта в процесі побудови множини G_k дорівнювали: $k_{\text{а}} = -10^{-1}$ $\text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$; $T_1 = 0{,}01$ с; $T_2 = 0{,}0055$ с.

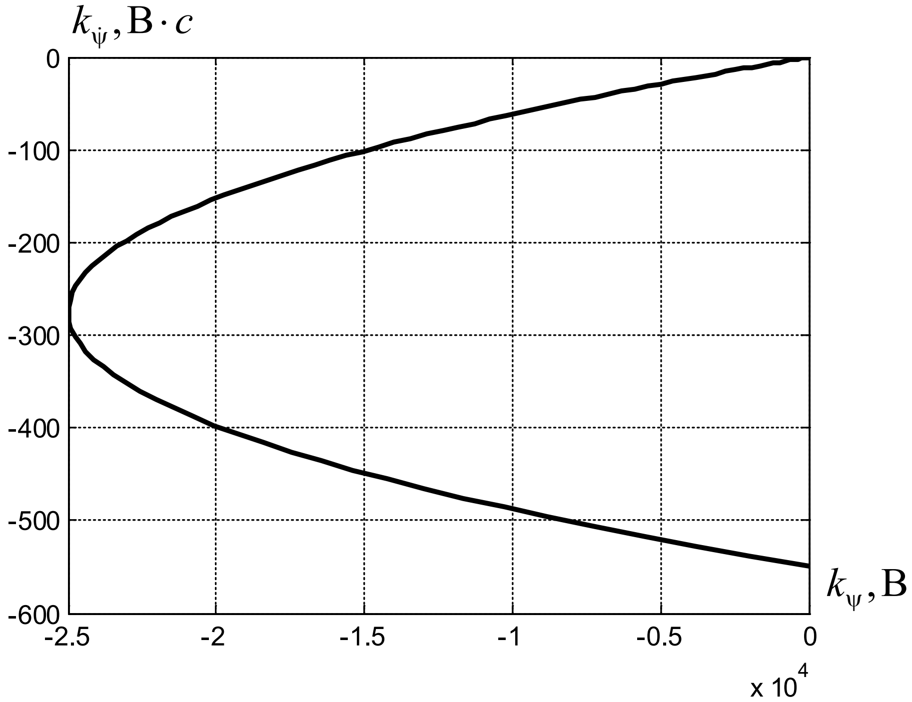

Рис. 31. Область стійкості замкнутої безперервної САК

Порівняння областей стійкості цифрових САК, що наведені на рис. 28–30 і побудовані без урахування власної динаміки ЕГП, з областю стійкості безперервної САК, що показана на рис. 31, свідчить про те, що врахування власної динаміки ЕГП у математичній моделі збуреного руху безперервної частини САК за допомогою рівняння (191) приводить до суттєвого зменшення області стійкості G_k, і врахування власної динаміки ЕГП у процесі вирішення задач синтезу САК курсовою стійкістю автомобіля є обов’язковим.

Необхідно також пам’ятати, що вибір області стійкості, яка подана на рис. 31 як перше наближення області дозволених значень варійованих параметрів алгоритму керування, є досить евристичним припущенням, пов’язаним із тим, що побудова області стійкості замкнутої дискретної системи є складною задачею, точність вирішення якої залежить від кількості врахованих членів матричних рядів (180) і (181). Це питання окремо розглядається у підрозділі 3.5.

Після відшукання множини допустимих векторів k варійованих параметрів САК переходимо до задачі відшукання вектора $k \in G_k$, що доставляє мінімум адитивному функціоналу (194) за допомогою алгоритмічного методу параметричного синтезу динамічних систем, викладеного в роботі [14]. Використовуючи концепцію збуренонезбуреного руху А. М. Ляпунова, будемо припускати, що зовнішні збурення, що діють на об’єкт управління (автомобіль), у математичної моделі відсутні, а результатом їхньої дії є миттєвий вихід системи зі стану сталої рівноваги в момент $t = 0$ в деякий стан, обумовлений початковими умовами математичної моделі замкнутої системи. У момент $t = 0$ замкнута система надається самій собі й повертається в початковий сталий режим, до того ж на траєкторії системи обчислюється функціонал (194) за умови деякого стартового значення вектора k

$$k^0 \in G_k .$$

Потім, використовуючи програмний продукт *Optimization Toolbox* пакета MATLAB або продукт *Minimize* пакета MATHCAD, кожен з яких реалізує метод Нелдера-Міда пошуку екстремуму функції багатьох змінних [15], на рішеннях математичної моделі збуреного руху замкнутої САК відшукуємо мінімум адитивного функціоналу (193).

3.4. Вибір вагових коефіцієнтів адитивного інтегрального квадратичного функціоналу

Інтегральний квадратичний функціонал (190) відтворює комплекс вимог до системи стабілізації, що полягає, по-перше, у вимозі стійкості замкнутої САК і, по-друге, у високій точності стабілізації або у високій якості процесів стабілізації. Що менше значення визначеного інтеграла (190), то вища якість процесів стабілізації.

Подаємо функціонал (190) в такому вигляді:

$$I(k) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i^2 \int_0^{\tau} x_i^2(t,k)\,dt = \sum_{i=1}^{m} \beta_i^2 I_i(k), \tag{207}$$

де функціонали $I_i(k), \left(i = \overline{1, m}\right)$, обчислені за окремими основними координатами замкнутої САК, називаються окремими функціоналами.

Зрозуміло, що у формуванні адитивного функціоналу (203) необхідно певним чином вибрати значення вагових коефіцієнтів $\beta_i, \left(i = \overline{1, m}\right)$. На цю обставину звернув увагу основоположник теорії аналітичного конструювання оптимальних регуляторів О. М. Льотов у роботі [18]. Задачу вибору значень вагових коефіцієнтів адитивного функціоналу вперше розв'язав учень О. М. Льотова – професор М. Є. Салуквадзе [19]. Подальший розвиток методу було здійснено професором А. М. Вороніним [20; 21], а також авторами цього посібника [22].

Компоненти вектора стану $X(t)$ мають різні розмірності, отже, різні розмірності мають окремі функціонали $I_i(k), \left(i = \overline{1, m}\right)$ та вагові коефіцієнти $\beta_i, \left(i = \overline{1, m}\right)$. Зважаючи на це, введемо нормовані значення окремих функціоналів і вагових коефіцієнтів

$$\overline{I_i}(k) = \frac{1}{x_{i\max}^2} \int_0^{\tau} x_i^2(t,k)\,dt = \frac{I_i(k)}{x_{i\max}^2}; \tag{208}$$

$$\overline{\beta_i} = \beta_i x_{i\max}; \left(i = \overline{1, m}\right), \tag{209}$$

де $x_{i\max}$ – максимально можливе значення компоненти $x_i(t)$ вектора стану $X(t)$ в процесі, що стабілізується. Тоді адитивний функціонал (207) набуває вигляду

$$I(k) = \sum_{i=1}^{m} \overline{\beta}_i^2 \, \overline{I}_i(k), \tag{210}$$

до того ж у співвідношенні (210) всі окремі функціонали $\overline{I_i}(k),\left(i=\overline{1,m}\right)$ мають однакові розмірності (секунди), а нормовані вагові коефіцієнти $\overline{\beta_i},\left(i=\overline{1,m}\right)$ безрозмірні.

Мінімізація функціоналу (210) за умови заданих значень вагових коефіцієнтів $\overline{\beta_i},\left(i=\overline{1,m}\right)$ не викликає ускладнень. Водночас спроба мінімізації функціоналу (210) за $\overline{\beta_i},\left(i=\overline{1,m}\right)$ без обмежень на ці коефіцієнти приводить до тривіального рішення

$$\overline{\beta_i}=0,\left(i=\overline{1,m}\right),$$

за умови якого функціонал (210) дорівнює нулю. У зв’язку з цим на коефіцієнти $\overline{\beta_i},\left(i=\overline{1,m}\right)$ накладемо обмеження

$$\sum_{i=1}^{m}\beta_i=1. \tag{211}$$

Позначимо через $\overline{I_i}^*,\left(i=\overline{1,m}\right)$ мінімальні значення окремих функціоналів (208), отримані в разі мінімізації кожного з цих функціоналів окремо. Тоді за умови фіксованих значень вагових коефіцієнтів $\overline{\beta_i},\left(i=\overline{1,m}\right)$ мінімально можливе значення функціоналу становить

$$I(k)=\sum_{i=1}^{m}\overline{\beta}_i^2\overline{I_i}^*. \tag{212}$$

Знайдемо мінімум функціоналу (212) за $\overline{\beta_i},\left(i=\overline{1,m}\right)$ у випадку обмеження (211). Для розв’язання цієї задачі на умовний екстремум складемо функцію Лагранжа

$$F=\sum_{i=1}^{m}\overline{\beta}_i^2\overline{I_i}^*+\lambda\left(1-\sum_{i=1}^{m}\overline{\beta_i}\right), \tag{213}$$

де λ – множник Лагранжа, і запишемо умову мінімуму функції (213)

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{\beta_i}} = 2\overline{\beta_i}\overline{I_i}^{*} - \lambda = 0, \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{214}$$

З рівнянь (214) маємо

$$\overline{\beta_i} = \frac{\lambda}{2\overline{I_i}^{*}}, \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{215}$$

Підставимо співвідношення (215) у формулу (211). Унаслідок отримуємо вираз для множника Лагранжа

$$\lambda = \frac{2}{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{\overline{I_i}^{*}}}. \tag{216}$$

Підставляючи (216) у (215), отримуємо

$$\overline{\beta_i} = \frac{1}{\overline{I_i}^{*} \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{\overline{I_i}^{*}}}, \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{217}$$

З урахуванням формул (208) і (209) співвідношення (217) набуває вигляду

$$\beta_i = \frac{x_{i\max}}{I_i^{*} \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{x_{i\max}^2}{I_i^{*}}}, \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{218}$$

Щодо задачі параметричного синтезу САК курсовою стійкістю автомобіля інтегральний квадратичний функціонал (194) запишемо у вигляді

$$I\left(k\right) = \beta_1^2 \int\limits_0^{\tau} \psi^2\left(t,k\right) dt + \beta_2^2 \int\limits_0^{\tau} \dot{\psi}^2\left(t,k\right) dt, \tag{219}$$

де окремі функціонали визначаються формулами:

$$I_1(k)=\int_0^{\tau}\psi^2(t,k)dt;\; I_2(k)=\int_0^{\tau}\dot{\psi}^2(t,k)dt. \qquad (220)$$

Алгоритм розв’язання задачі параметричного синтезу цифрової САК курсовою стійкістю автомобіля наведений на рис. 32 у вигляді трьох послідовно з’єднаних обчислювальних блоків.

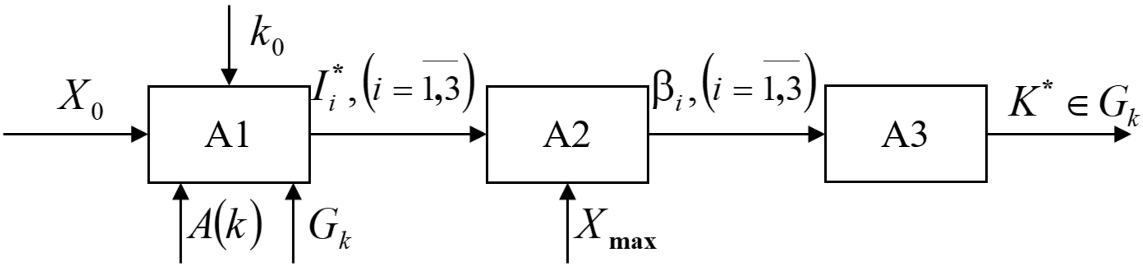

Рис. 32. Структурно-логічна схема алгоритму розв’язання задачі параметричного синтезу

Блок А1 реалізує математичну модель замкнутої САК курсовою стійкістю автомобіля, що містить диференційні рівняння збуреного руху безперервної частини САК (34) і (191), перетворювач безперервних функцій часу в решітчасті функції, а також математичну модель дискретної частини системи, яка описується співвідношеннями (192) і (176).

Блок А1 реалізує також процедуру *Optimization Toolbox* програмного пакету MATLAB або процедуру *Minimize* програмного пакету MATHCAD відповідно до окремих функціоналів (220). До входів блоку А1 подаються вектор початкових умов X_0 математичної моделі безперервної частини САК, значення постійних і варійованих параметрів замкнутої САК (елементи матриці $A(k)$), чисельні характеристики множини G_ψ, яка є множиною допустимих векторів $k \in G_k$. І нарешті, до входу блоку А1 подаються значення координат стартової точки $k_0 \in G_k$. Блок А1 здійснює пошук мінімумів окремих функціоналів (220) $I_i^*, (i=\overline{1,2})$.

З виходу блоку А1 інформація надходить до входу блоку А2, який реалізує алгоритм обчислення вагових коефіцієнтів адитивного функціоналу (219) відповідно до формул:

$$\beta_1 = \frac{\psi_{\max}}{I_1^*\left(\frac{\psi_{\max}^2}{I_1^*} + \frac{\dot{\psi}_{\max}^2}{I_2^*}\right)}; \ \beta_2 = \frac{\dot{\psi}_{\max}}{I_2^*\left(\frac{\psi_{\max}^2}{I_1^*} + \frac{\dot{\psi}_{\max}^2}{I_2^*}\right)}. \qquad (221)$$

Значення величин (221) подаються до входу блоку А3, який, як і блок А1, реалізує математичну модель замкнутої САК, а також зазначену вище процедуру мінімізації щодо адитивного функціоналу (219). Унаслідок на виході блоку А3 маємо значення варійованих параметрів k_{ψ} і $k_{\dot{\psi}}$, що забезпечують мінімум адитивному функціоналу (219).

Після використання описуваного алгоритмічного методу параметричного синтезу САК курсовою стійкістю автомобіля значення варійованих параметрів становлять: $k_{\psi}^* = 7{,}98\,\text{В}$; $k_{\dot{\psi}}^* = 0{,}28\,\text{В}\cdot\text{с}$.

На рис. 33 наведені графіки процесів, що стабілізуються, у замкнутій САК за умови отриманих значень варійованих параметрів САК і наступних значень постійних параметрів і початкових умов: $k_{\text{а}} = -0{,}1\,\text{В}^{-1}\cdot\text{с}^{-2}$; $T_1 = 0{,}01\,\text{с}$; $T_2 = 0{,}0055\,\text{с}$; $\psi_0 = 0{,}1\,\text{рад}$; $\dot{\psi}_0 = 1\,\text{с}^{-1}$; $\Delta p(0) = 0$; $\Delta\dot{p}(0) = 0$.

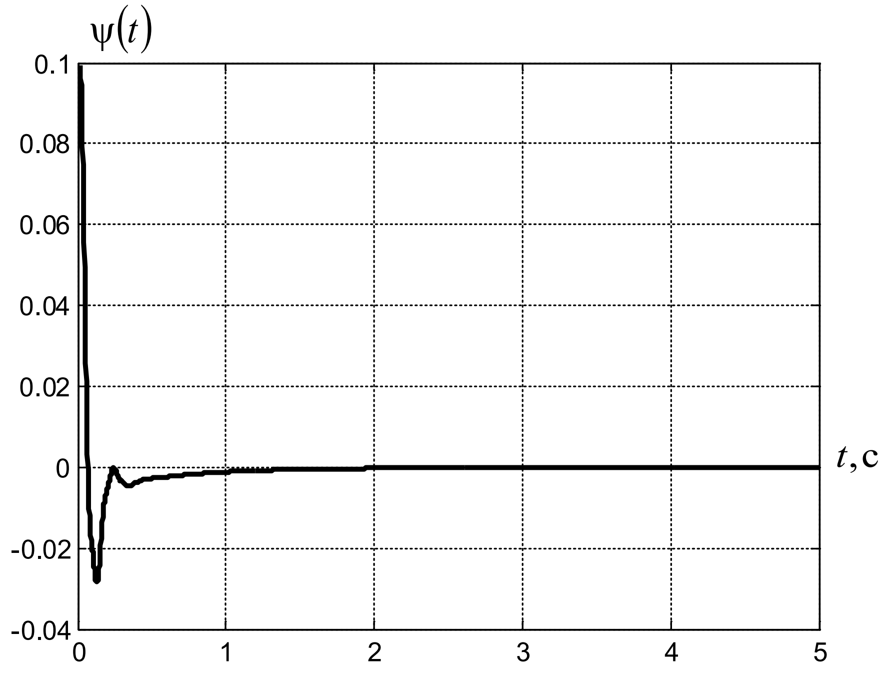

Рис. 33. Перехідні процеси в замкнутій САК

3.5. Вибір області дозволених значень варійованих параметрів алгоритму керування системи курсової стійкості автомобіля

В одному з попередніх підрозділів пропонувалося обирати областю дозволених значень варійованих констант алгоритму керування системи курсової стійкості автомобіля G_k область стійкості безперервної САК з посиланням на той факт, що область стійкості дискретної системи міститься всередині області стійкості відповідної безперервної системи, а побудова області стійкості замкнутої дискретної системи є досить складною процедурою.

У цьому підрозділі досліджується залежність конфігурації області стійкості замкнутої дискретної системи курсової стійкості автомобіля від кількості врахованих членів матричних рядів (180) і (181). Вважається, що збурений рух безперервної частини системи описується диференційними рівняннями (34) і (191), а бортова ЦОМ реалізує алгоритм керування у вигляді (192).

Будемо розглядати й порівнювати два варіанти застосування матричних рядів (180) і (181). Перший варіант – лінійна залежність матричних рядів від періоду квантування T, яка подана формулами (182), і другий варіант – квадратична залежність матричних рядів від T, яка подана такими формулами:

$$\Phi = E + AT + \frac{1}{2}A^2T^2; \quad H = BT + \frac{1}{2}ABT^2. \qquad (222)$$

Рівняння (34) і (191) запишемо у векторно-матричній формі (178) щодо вектора стану

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta p(t) \\ \Delta \dot{p}(t) \\ \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix}.$$

У цьому разі матриці A і B становлять

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\text{авт}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{T_1^2} & -\dfrac{T_2}{T_1^2} \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_{\text{егп}}}{T_1^2} \end{bmatrix}. \qquad (223)$$

Для першого варіанта використання формул (182) характеристичне рівняння (184) замкнутої дискретної системи (183) за умови підставлення в нього матриць (223) записується у вигляді

$$\begin{bmatrix} 1-z & T & 0 & 0 \\ 0 & 1-z & k_{\text{авт}}T & 0 \\ 0 & 0 & 1-z & T \\ -\dfrac{k_{\text{егп}}}{T_1^2}k_{\psi}T & -\dfrac{k_{\text{егп}}}{T_1^2}k_{\dot{\psi}}T & -\dfrac{1}{T_1^2} & 1-z-\dfrac{T_2}{T_1^2}T \end{bmatrix} =$$

$$=(1-z)^4 + A_1^{\mathrm{I}}(1-z)^3 + A_2^{\mathrm{I}}(1-z)^2 + A_3^{\mathrm{I}}(1-z) + A_4^{\mathrm{I}} = 0. \qquad (224)$$

У коефіцієнтах характеристичного рівняння (224) верхній індекс означає перший розглянутий варіант застосування формул (182). У цьому випадку коефіцієнти характеристичного рівняння (224) визначаються формулами:

$$A_1^{\mathrm{I}} = -\frac{T_2}{T_1^2}T;\ A_2^{\mathrm{I}} = -\frac{1}{T_1^2}T^2;\ A_3^{\mathrm{I}} = -k_{\text{авт}}\frac{k_{\text{егп}}}{T_1^2}k_{\dot{\psi}}T^3;\ A_4^{\mathrm{I}} = k_{\text{авт}}\frac{k_{\text{егп}}}{T_1^2}k_{\psi}T^4. \qquad (225)$$

Для другого варіанта застосування формул (222) характеристичне рівняння (184) набуває такого вигляду:

$$\begin{bmatrix} 1-z & T & 0 & 0 \\ 0 & 1-z & k_{\text{авт}}T & \frac{1}{2}k_{\text{авт}}T^2 \\ \frac{1}{2}\frac{k_{\text{егп}}}{T_1^2}k_{\psi}T^2 & \frac{1}{2}\frac{k_{\text{егп}}}{T_1^2}k_{\dot\psi}T^2 & 1-z-\frac{T^2}{2T_1^2} & T-\frac{T_2}{2T_1^2}T^2 \\ \left(\begin{array}{l}\frac{k_{\text{егп}}}{T_1^2}T- \\ -\frac{T_2 k_{\text{егп}}}{2T_1^4}T^2\end{array}\right)k_{\psi} & \left(\begin{array}{l}\frac{k_{\text{егп}}}{T_1^2}T- \\ -\frac{T_2 k_{\text{егп}}}{2T_1^4}T^2\end{array}\right)k_{\dot\psi} & \frac{T}{T_1^2}\left(\begin{array}{l}1- \\ -\frac{T_2}{2T_1^2}T\end{array}\right) & \begin{array}{l}1-z-\frac{T_2}{T_1^2}T- \\ -\frac{1}{2T_1^2}\left(1-\frac{T_2^2}{T_1^2}\right)T^2\end{array} \end{bmatrix} = \quad (226)$$

$$=(1-z)^4+A_1^{\text{II}}(1-z)^3+A_2^{\text{II}}(1-z)^2+A_3^{\text{II}}(1-z)+A_4^{\text{II}}=0.$$

До того ж

$$A_1^{\text{II}}=-\frac{T}{T_1^2}\left[T_2+T\left(1-\frac{T_2^2}{T_1^2}\right)\right];$$

$$A_2^{\text{II}}=\frac{T^3}{2T_1^4}\left[T_2+T\left(1-\frac{T_2^2}{T_1^2}\right)\right]+\frac{T_2^2}{T_1^2}\left(1-\frac{T_2}{2T_1^2}T\right)^2+$$

$$+k_{\text{авт}}k_{\text{егп}}\frac{T^4}{4T_1^2}k_{\psi}+k_{\text{авт}}k_{\text{егп}}\frac{T^3}{2T_1^2}k_{\dot\psi}+k_{\text{авт}}k_{\text{егп}}\frac{T^3}{2T_1^2}\left(1-\frac{T_2}{2T_1^2}T\right)k_{\dot\psi};$$

$$A_3^{\text{II}}=-k_{\text{авт}}k_{\text{егп}}\frac{T^4}{2T_1^4}\left[T_2+\frac{T}{2}\left(1-\frac{T_2^2}{T_1^2}\right)\right]k_{\dot\psi}-$$

$$-k_{\text{авт}}k_{\text{егп}}\frac{T^3}{T_1^2}\left(1-\frac{T_2}{2T_1^2}T\right)^2k_{\dot\psi}-k_{\text{авт}}k_{\text{егп}}\frac{T^4}{2T_1^2}k_{\psi}-$$

$$-k_{\text{авт}}k_{\text{егп}}\frac{T^5}{4T_1^4}\left[T_2+\frac{T}{2}\left(1-\frac{T_2^2}{T_1^2}\right)\right]k_{\psi}-k_{\text{авт}}k_{\text{егп}}\frac{T^4}{2T_1^2}\left(1-\frac{T_2}{2T_1^2}T\right)^2k_{\psi}; \quad (227)$$

$$A_4^{\text{II}}=k_{\text{авт}}k_{\text{егп}}\left\{\frac{T^5}{2T_1^4}\left[T_2+\frac{T}{2}\left(1-\frac{T_2^2}{T_1^2}\right)\right]+\frac{T^4}{T_1^2}\left(1-\frac{T_2}{2T_1^2}T\right)^2\right\}k_{\psi}\quad.$$

За умови малих значень T визначник (226) вироджується у визначник (224), а співвідношення (227) наближаються до співвідношень (225).

Відповідно до формул (227), коефіцієнти характеристичного рівняння (226) A_2^{II} і A_3^{II} подаємо у вигляді

$$A_2^{\mathrm{II}} = A_{20}^{\mathrm{II}} + A_{21}^{\mathrm{II}} k_{\psi} + A_{22}^{\mathrm{II}} k_{\dot{\psi}};$$
$$A_3^{\mathrm{II}} = A_{31}^{\mathrm{II}} k_{\psi} + A_{32}^{\mathrm{II}} k_{\dot{\psi}},$$

де

$$A_{20}^{\mathrm{II}} = \frac{T^3}{2T_1^4}\left[T_2 + T\left(1 - \frac{T_2^2}{T_1^2}\right)\right] + \frac{T_2^2}{T_1^2}\left(1 - \frac{T_2}{2T_1^2}T\right)^2;$$

$$A_{21}^{\mathrm{II}} = k_{\text{авт}} k_{\text{егп}} \frac{T^4}{4T_1^2};$$

$$A_{22}^{\mathrm{II}} = k_{\text{авт}} k_{\text{егп}} \frac{T^3}{2T_1^2}\left(2 - \frac{T_2}{2T_1^2}T\right);$$

$$A_{31}^{\mathrm{II}} = -\frac{1}{2} k_{\text{авт}} k_{\text{егп}} \left\{\frac{T^5}{2T_1^4}\left[T_2 + \frac{T}{2}\left(1 - \frac{T_2^2}{T_1^2}\right)\right] + \frac{T^4}{T_1^2}\left(2 - \frac{T_2}{2T_1^2}T\right)^2\right\};$$

$$A_{32}^{\mathrm{II}} = -k_{\text{авт}} k_{\text{егп}} \left\{\frac{T^4}{2T_1^4}\left[T_2 + \frac{T}{2}\left(1 - \frac{T_2^2}{T_1^2}\right)\right] + \frac{T^3}{T_1^2}\left(1 - \frac{T_2}{2T_1^2}T\right)^2\right\}. \quad (228)$$

Характеристичні рівняння обох варіантів, що розглядаються, приведемо до спільної форми

$$\begin{gathered}(1-z)^4 + A_1(1-z)^3 + \left[A_{20} + A_{21}k_{\psi} + A_{22}k_{\dot{\psi}}\right](1-z)^2 + \\ + \left[A_{31}k_{\psi} + A_{32}k_{\dot{\psi}}\right](1-z) + A_4 = 0.\end{gathered} \quad (229)$$

Для першого варіанта коефіцієнти характеристичного рівняння (229) визначаються співвідношеннями (225), якщо $A_{21} = 0$;

$A_{22} = 0$; $A_{31} = 0$, а для другого варіанта ці коефіцієнти визначаються формулами (227) і (228).

Замкнена цифрова система стабілізації є стійкою в тому випадку, якщо всі корені її характеристичного рівняння (184) розташовані всередині кола одиничного радіуса комплексної площини z (критерій Шур-Кона [2]). Для побудови областей стійкості замкнутої цифрової системи стабілізації в площині варійованих констант $\left(k_{\psi}, k_{\dot{\psi}}\right)$ застосуємо метод W-перетворення, відповідно до якого білінійне перетворення (25) визначає конформне відображення кола одиничного радіуса в комплексній площині z в уявну вісь комплексної площини w. Здійснюючи в характеристичному рівнянні (229) заміну (25) отримуємо нове характеристичне рівняння щодо комплексної змінної, відповідно до якого можна використовувати всі положення теорії стійкості безперервних динамічних систем, зокрема метод побудови областей стійкості замкнутої системи в просторі варійованих параметрів алгоритму стабілізації.

У характеристичному рівнянні (229) здійснимо заміну (25). Унаслідок маємо

$$1 - z = 1 - \frac{1+w}{1-w} = -\frac{2w}{1-w}, \tag{230}$$

а характеристичне рівняння (229) із застосуванням трикутника Паскаля [24] записується у вигляді

$$\begin{aligned}
&16w^4 + 8A_1 w^4 + 4\left(A_{20} + A_{21}k_{\psi} + A_{22}k_{\dot{\psi}}\right)w^4 + \\
&+2\left(A_{31}k_{\psi} + A_{32}k_{\dot{\psi}}\right)w^4 + A_4 k_{\psi} w^4 - \\
&-8A_1 w^3 - 8\left(A_{20} + A_{21}k_{\psi} + A_{22}k_{\dot{\psi}}\right)w^3 - \\
&-6\left(A_{31}k_{\psi} + A_{32}k_{\dot{\psi}}\right)w^3 - 4A_4 k_{\psi} w^3 + \\
&+4\left(A_{20} + A_{21}k_{\psi} + A_{22}k_{\dot{\psi}}\right)w^2 + 6\left(A_{31}k_{\psi} + A_{32}k_{\dot{\psi}}\right)w^2 + 6A_4 k_{\psi} w^2 - \\
&-2\left(A_{31}k_{\psi} + A_{32}k_{\dot{\psi}}\right)w - 4A_4 k_{\psi} w + A_4 k_{\psi} = 0.
\end{aligned} \tag{231}$$

У новому характеристичному рівнянні (231) здійснимо заміну $w = j\omega$, виокремимо дійсну та уявну частини й дорівняємо їх нулю.

Унаслідок отримуємо систему двох алгебраїчних рівнянь із двома невідомими k_ψ та $k_{\dot\psi}$:

$$\begin{aligned} K(T,\omega)k_\psi + L(T,\omega)k_{\dot\psi} &= M(T,\omega); \\ P(T,\omega)k_\psi + Q(T,\omega)k_{\dot\psi} &= N(T,\omega), \end{aligned} \tag{232}$$

де відповідні коефіцієнти системи (232) визначаються такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &K(T,\omega) = (4A_{21} + 2A_{31} + A_4)\omega^4 - (4A_{21} + 6A_{31} + 6A_4)\omega^2 + A_4; \\ &L(T,\omega) = (4A_{22} + 2A_{32})\omega^4 - (4A_{22} + 6A_{32})\omega^2; \\ &M(T,\omega) = -(16 + 8A_1 + 4A_{20})\omega^4 + 4A_{20}\omega^2; \\ &P(T,\omega) = (8A_{21} + 6A_{31} + 4A_4)\omega^2 - (2A_{31} + 4A_4); \\ &Q(T,\omega) = (8A_{22} + 6A_{32})\omega^2 - 2A_{32}; \\ &N(T,\omega) = -8(A_1 + A_{20})\omega^2. \end{aligned} \tag{233}$$

Відповідно до правила Крамера [24] рішення системи (232) відшукується у вигляді

$$k_\psi = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad k_{\dot\psi} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{234}$$

де відповідні визначники дорівнюють:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} K(T,\omega) & L(T,\omega) \\ P(T,\omega) & Q(T,\omega) \end{vmatrix} = K(T,\omega)Q(T,\omega) - P(T,\omega)L(T,\omega); \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} M(T,\omega) & L(T,\omega) \\ N(T,\omega) & Q(T,\omega) \end{vmatrix} = M(T,\omega)Q(T,\omega) - N(T,\omega)L(T,\omega); \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} K(T,\omega) & M(T,\omega) \\ P(T,\omega) & N(T,\omega) \end{vmatrix} = K(T,\omega)N(T,\omega) - P(T,\omega)M(T,\omega). \end{aligned} \tag{235}$$

Чисельні значення параметрів об'єкта стабілізації оберемо рівними: $k_{\text{авт}} = -0,5 \cdot 10^{-5}$ Па$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$; $T_1 = 0,02$ с; $T_2 = 0,04$ с; $k_{\text{егп}} = 10^4$ Па $\cdot$ В$^{-1}$.

Змінюючи ω від нуля до нескінченності, за допомогою співвідношень (234) і (235) побудуємо межі областей стійкості замкнутої системи курсової стійкості автомобіля для двох варіантів матричних рядів (182) і (222) за умови різних значень періоду квантування БЦОМ відповідно до рис. 34–36.

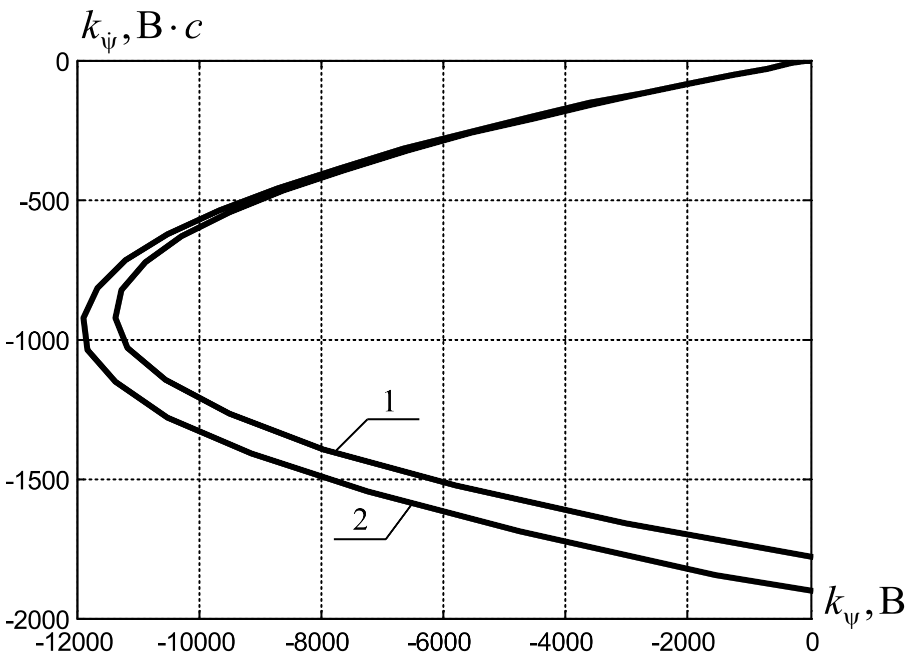

Рис. 34. Межі областей стійкості замкнутої дискретної САК за умови $T = 0,001$ с: 1 – перший варіант; 2 – другий варіант

Аналіз наведених рисунків дозволяє зробити такі висновки:

– збільшення періоду квантування БЦОМ T призводить до зменшення області стійкості системи курсової стійкості автомобіля;
– урахування членів матричних рядів, що містять квадратичні щодо T члени, призводить до збільшення області стійкості системи курсової стійкості автомобіля.

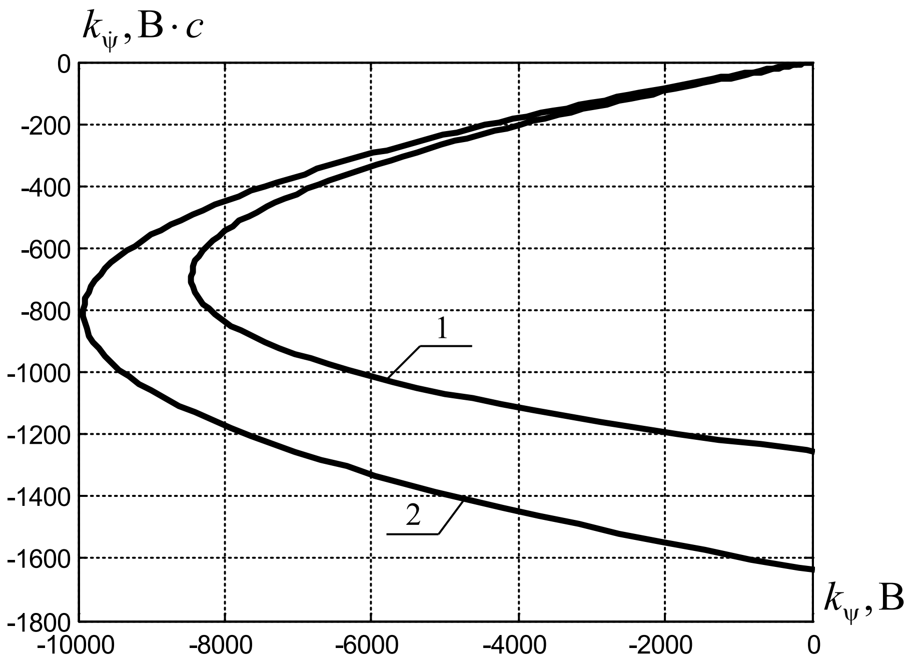

Рис. 35. Межі областей стійкості замкнутої дискретної САК за умови $T = 0{,}005$ с: 1 – перший варіант; 2 – другий варіант

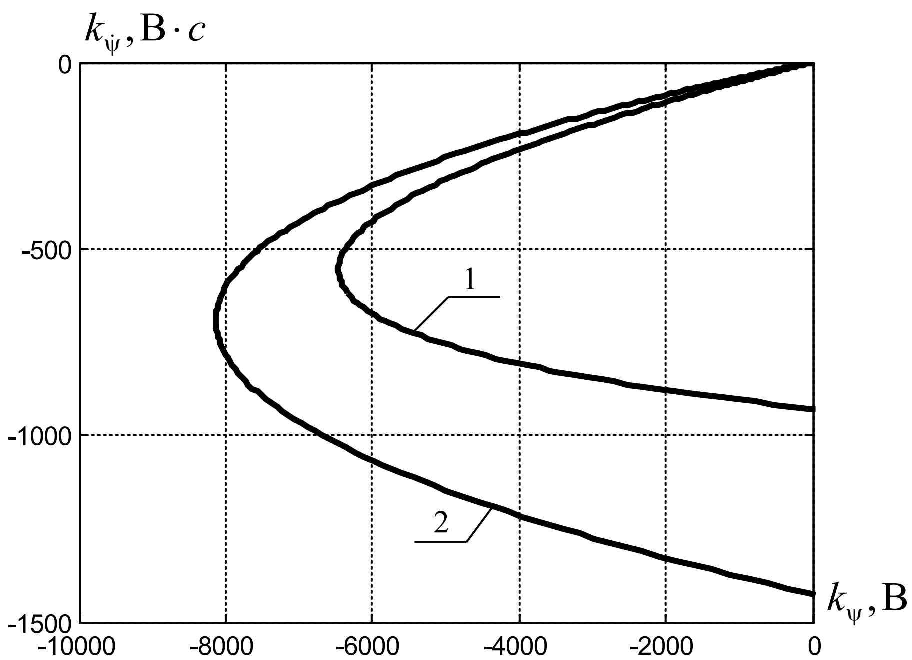

Рис. 36. Межі областей стійкості замкнутої дискретної САК за умови $T = 0{,}01$ с: 1 – перший варіант; 2 – другий варіант

Контрольні запитання й завдання до розділу 3

1. Що є математичною моделлю замкнутої дискретної САК?
2. Що таке математична модель безперервної частини замкнутої дискретної системи?
3. Що таке математична модель дискретної частини замкнутої дискретної системи?
4. Опишіть характеристичне рівняння замкнутої дискретної системи.
5. Що називається швидкодією замкнутої САК?
6. Що називається запасом стійкості замкнутої САК?
7. Сформулюйте проблему параметричного синтезу замкнутої дискретної системи.
8. Поясніть сутність алгоритмічного методу синтезу дискретних САК.
9. Поясніть методику вибору вагових коефіцієнтів адитивного функціоналу якості.
10. Сформулюйте послідовність вибору області дозволених значень варійованих параметрів алгоритму керування замкнутої цифрової САК.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Похідні важливих елементарних функцій

Функція	Похідна	Функція	Похідна
C (const)	0	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$
x	1	$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg_a e \approx \frac{0,4343}{x}$
x''	nx^{n-1}	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{1}{x''}$	$-\frac{1}{x^{n+1}}$	$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathrm{arc\,tg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{cosec}^2 x$
e^x	e^x	$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x \sec x$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{cosec}\, x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x\ \mathrm{crcec}\, x$
a^x	$a^x \ln x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Функція	Похідна	Функція	Похідна
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arc\,ctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{cth}\, x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
$\mathrm{arc\,sec}\, x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{Arsh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{arc\,cosec}\, x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{Arch}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{Arth}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\mathrm{th}\, x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathrm{Arcth}\, x$	$-\frac{1}{1-x^2}$

Додаток 2

Таблиця основних інтегралів

Степеневі функції

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1;\ \ x \neq 0;\ \text{если}\ \ n < 0)$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{n+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1\ -\ \text{действительное},\ \ x < 0)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \quad (x \neq 0)$$

Показникові функції

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a \neq 1)$$

Тригонометричні функції

$$\int \sin x\, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| \quad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| \quad (x \neq k\pi)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \quad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \quad (x \neq kx)$$

Гіперболічні функції

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x$$

$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x$$

$$\int \operatorname{th} x\, dx = \ln \operatorname{ch} x$$

$$\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln\left|\operatorname{sh} x\right| \quad (x \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$$

Дрібно-раціональні функції $(a \neq 0)$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{Arcth}\frac{x}{a} & (|x| < a), \\ \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| & (a \neq 0) \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{Arcth}\frac{x}{a} & (|x| > a), \\ \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| & (a \neq 0) \end{cases}$$

Ірраціональні функції $(a \neq 0)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \quad (|x| < 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \begin{cases} \operatorname{Arsh}\left(\frac{x}{a}\right), \\ \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) \end{cases} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \begin{cases} \operatorname{Arch}\left(\frac{x}{a}\right), \\ \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| \quad (|x| > a) \end{cases}$$

Додаток 3

Зображення за Лапласом функцій часу

Зображення $L[f(t)]$	Оригінал $f(t)$
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{p^2}$	1
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{-at}-be^{-bt}\right)$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{p}{(p+a)^2}$	$e^{-at}(1-at)$
$\frac{1}{p^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\mathrm{sh}(at)$
$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\mathrm{ch}(at)$
$\frac{1}{p^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\sin(at)$

Зображення $L\left[f(t)\right]$	Оригінал $f(t)$
$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\dfrac{1}{(p+b)^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}e^{-bt}\sin(at)$
$\dfrac{p}{(p+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\left(\cos(at)-\dfrac{b}{a}\sin(at)\right)$
$\dfrac{1}{p^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2$
$\dfrac{1}{p^2(p+a)}$	$\dfrac{1}{a^2}e^{-at}+at-1$
$\dfrac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{ab(a-b)}\left[(a-b)+be^{-at}-ae^{-bt}\right]$
$\dfrac{1}{p(p+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}\left(1-e^{-at}-ate^{-at}\right)$
$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\dfrac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\times$ $\times\left[(c-b)e^{-at}+(a-c)e^{-bt}+(b-a)e^{-ct}\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\dfrac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\times$ $\times\left[a(b-c)e^{-at}+b(c-a)e^{-bt}+c(a-b)e^{-ct}\right]$
$\dfrac{p^2}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\dfrac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\times$ $\times\left[a^2(c-b)e^{-at}+b^2(a-c)e^{-bt}+c^2(b-a)e^{-ct}\right]$

Зображення $L\left[f(t)\right]$	Оригінал $f(t)$
$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2}\left(e^{-at}-e^{-bt}-(b-a)te^{-bt}\right)$
$\dfrac{p}{(p+a)(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2}\left\{-ae^{-at}+\left[a+bt(b-a)e^{-bt}\right]\right\}$
$\dfrac{p^2}{(p+a)(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2}\left[a^2e^{-at}+b\left(b-2a-b^2t+abt\right)e^{-bt}\right]$
$\dfrac{1}{(p+a)^3}$	$\dfrac{t^2}{2}e^{-at}$
$\dfrac{p}{(p+a)^3}$	$e^{-at}t\left(1-\dfrac{a}{2}t\right)$
$\dfrac{p^2}{(p+a)^3}$	$e^{-at}\left(1-2at+\dfrac{a^2}{2}t^2\right)$
$\dfrac{1}{p\left[(p+b)^2+a^2\right]}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[1-e^{-bt}\left(\cos(at)+\dfrac{b}{a}\sin(at)\right)\right]$
$\dfrac{1}{p\left(p^2+a^2\right)}$	$\dfrac{1}{a^2}(1-\cos(at))$
$\dfrac{1}{(p+a)\left(p^2+b^2\right)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[e^{-bt}+\dfrac{a}{b}\sin(bt)-\cos(bt)\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)\left(p^2+b^2\right)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[-ae^{-at}+a\cos(bt)+b\sin(bt)\right]$
$\dfrac{p^2}{(p+a)\left(p^2+b^2\right)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(a^2e^{-at}-ab\sin(bt)+b^2\cos(bt)\right)$

Зображення $L\left[f(t)\right]$	Оригінал $f(t)$
$\dfrac{1}{(p+a)\left[(p+b)^2+c^2\right]}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2+c^2}\left[e^{-at}-e^{-bt}\cos(ct)+\dfrac{a-b}{c}e^{-bt}\sin(ct)\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)\left[(p+b)^2+c^2\right]}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2+c^2}\times$ $\times\left[-ae^{-at}+ae^{-bt}\cos(ct)-\dfrac{ab-b^2-c^2}{c}e^{-bt}\sin(ct)\right]$
$\dfrac{p^2}{(p+a)\left[(p+b)^2+c^2\right]}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2+c^2}\Big[a^2e^{-at}+\left((a-b)^2+c^2-a^2\right)e^{-bt}\cos(ct)-$ $-\left(ac+b\left(c-\dfrac{(a-bb)}{c}\right)\right)e^{-bt}\sin(ct)\Big]$
$\dfrac{1}{p^4}$	$\dfrac{1}{6}t^3$
$\dfrac{1}{p^3(p+a)}$	$\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{a^2}t+\dfrac{1}{2a}t^2-\dfrac{1}{a^3}e^{-at}$
$\dfrac{1}{p^2(p+a)(p+b)}$	$-\dfrac{a+b}{a^2b^2}+\dfrac{1}{ab}t+\dfrac{1}{a^2(b-a)}e^{-at}+\dfrac{1}{b^2(a-b)}e^{-bt}$
$\dfrac{1}{p^2(p+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}t\left(1+e^{-at}\right)+\dfrac{2}{a^3}\left(e^{-at}-1\right)$
$\dfrac{1}{(p+a)^2(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(a-b)^2}\left[e^{-at}\left(t+\dfrac{2}{a-b}\right)+e^{-bt}\left(t-\dfrac{2}{a-b}\right)\right]$
$\dfrac{1}{(p+a)^4}$	$\dfrac{1}{6}t^3e^{-at}$
$\dfrac{p}{(p+a)^4}$	$\dfrac{1}{2}t^2e^{-at}-\dfrac{a}{6}t^3e^{-at}$

Зображення $L\left[f(t)\right]$	Оригінал $f(t)$
$\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)\left(p^2+b^2\right)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left[\dfrac{1}{a}\sin(at)-\dfrac{1}{b}\sin(bt)\right]$
$\dfrac{p}{\left(p^2+a^2\right)\left(p^2+b^2\right)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left[\cos(at)-\cos(bt)\right]$
$\dfrac{p^2}{\left(p^2+a^2\right)\left(p^2+b^2\right)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left[-a\sin(at)+b\sin(bt)\right]$
$\dfrac{p^3}{\left(p^2+a^2\right)\left(p^2+b^2\right)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left[-a^2\cos(at)+b^2\cos(bt)\right]$
$\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{2a^2}\left[\dfrac{1}{a}\sin(at)-t\cos(at)\right]$
$\dfrac{p}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{2a}t\sin(at)$
$\dfrac{p^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{2a}\left(\sin(at)+at\cos(at)\right)$
$\dfrac{p^3}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{2}\left(2\cos(at)-at\sin(at)\right)$
$\dfrac{1}{\left[(p+b)^2+a^2\right]^2}$	$\dfrac{e^{-bt}}{2a^2}\left[\dfrac{1}{a}\sin(at)-t\cos(at)\right]$
$\dfrac{1}{p^2\left(p^2+a^2\right)}$	$\dfrac{1}{a^2}\left(t-\dfrac{1}{a}\sin(at)\right)$

Додаток 4

Z-перетворення решітчастих функцій

Зображення $F(z)$	Оригінал $f[nT]$
z^{-k}	$\delta[(n-k)T]$
$\frac{z}{z-1}$	$1[nT]$
$\frac{z}{z-e^{aT}}$	e^{anT}
$\frac{zT}{(z-1)^2}$	nT
$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$	$(nT)^2$
$\frac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$	$\sin anT$
$\frac{z(z-\cos aT)}{z^2-2z\cos aT+1}$	$\cos anT$
$\frac{z\,\mathrm{sh}\,aT}{z^2-2z\,\mathrm{ch}\,aT+1}$	$\mathrm{sh}\,anT$
$\frac{z(z-\mathrm{ch}\,aT)}{z^2-2z\,\mathrm{ch}\,aT+1}$	$\mathrm{ch}\,anT$
$\frac{3T^3 z(z+1)}{(z-1)^4}+\frac{T^3 z(z+2)}{(z-1)^3}$	$(nT)^3$

Додаток 5

Трикутник Паскаля

Для обчислення коефіцієнтів характеристичних рівнянь (184) і (186) доцільно використовувати трикутник Паскаля з метою обчислення коефіцієнтів бінома Ньютона Φ, H, де n – степінь характеристичного полінома. Порядок побудови трикутника Паскаля полягає в такому. У верхньому рядку записуються дві одиниці. Усі наступні рядки починаються й закінчуються одиницями, а проміжні числа отримуються складанням сусідніх чисел рядка, що розташований вище.

1	1										$n=1$
1	2	1									$n=2$
1	3	3	1								$n=3$
1	4	6	4	1							$n=4$
1	5	10	10	5	1						$n=5$
1	6	15	20	15	6	1					$n=6$
1	7	21	35	35	21	7	1				$n=7$
1	8	28	56	70	56	28	8	1			$n=8$
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		$n=9$
1	10	45	120	210	252	210	120	45	9	1	$n=10$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – Москва: Наука, 1971. – 288 с.

2. Ту Ю. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. – Москва: Машиностроение, 1964. – 703 с.

3. Александров Є. Є., Козлов Є. П., Кузнєцов Б. І. Автоматичне керування рухомими об’єктами і технологічними процесами. Т. 1. Теорія автоматичного керування. – Харків: НТУ «ХПІ», 2002. – 490 с.

4. Alexsandrov Ye., Aleksandrova T., Morhun Ya. Parametric synthesis of the electronic control unit of the course stability system of the car // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2019. – No. 6 (102). – P. 39–45.

5. АЛЕКСАНДРОВ Є. Є. ОСНОВИ АВТОМОБІЛЬНОЇ АВТОМАТИКИ. – ХАРКІВ: ХНАДУ, 2010. – 172 С.

6. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры. – Москва: Недра, 1984. – 221 с.

7. Aleksandrov Ye., Aleksandrova T., Kostianyk I. Parametric Synthesis of the Digital Invariant Stabilizer for a Non-Stationary Object // Advanced Information Systems, 2020. – No. 1, Vol 4. – P. 39–44.

8. Александров Е. Е., Александрова Т. Е. Математическое моделирование, системный анализ и синтез динамических систем. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2014. – 200 с.

9. Александрова Т. Е., Кононенко В. А., Лазаренко А. А. Сравнительный анализ цифровых ПД-стабилизаторов подвижных объектов с низкочастотными фильтрами Баттеруорта и Ланцоша // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2011. – № 1. – С. 148–152.

10. Александров Е. Е., Волонцевич Д. О., Подригало М. А. Повышение устойчивости и управляемости колесных машин в тормозных режимах. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – 320 с.

11. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – Москва: Наука, 1973. – 320 с.

12. Васильев С. К., Захаров В. Н., Прохоров Ю. Ф. Кибернетика в системах военного назначения. – Москва: Воениздат, 1979. – 263 с.

13. Орурк И. А. Новые методы синтеза линейных и некоторых нелинейных динамических систем. – Москва; Ленинград: Наука, 1965. – 207 с.

14. Александров Є. Є., Александрова Т. Є., Овчаренко Ю. Є. Підвищення технічних та ергономічних характеристик об’єктів військового призначення. – Харків: ХНАДУ, 2019. – 176 С.

15. Александров Е. Е., Александрова Т. Е., Северин В. П. Основы Современной теории управления. – Харьков: ХНАДУ, 2019. – 324 с.

16. Александров Е. Е., Александрова Т. Е. Метод главной координаты в теории стабилизируемых систем // Проблемы управления и информатики. – 2017. – № 2. – С. 65–75.

17. Параметрический синтез цифровой системы курсовой устойчивости автомобиля / Е. Е. Александров, Т. Е. Александрова, И. В. Костяник,

Я. Ю. Моргун // Автомобіль і електроніка. Сучасні технології. – Харків: ХНАДУ, 2020. – № 17. – С. 69–76.

18. Летов А. М. Динамика полета и управления. – Москва: Наука, 1969. – 312 с.

19. Салуквадзе М. Е. Об оптимизации векторных функционалов // Автоматика и телемеханика. – 1971. – № 9. – С. 5–15.

20. Воронин А. Н. Многокритериальный синтез динамических систем. – Київ: Наукова думка, 1992. – 160 с.

21. Векторная оптимизация динамических систем / А. Н. Воронин, Ю. К. Зиатдинов, А. И. Козлов, В. С. Чабанюк. – Київ: Техніка, 1999. – 284 с.

22. Александров Е. Е., Александрова Т. Е. Выбор оптимизируемого функционала в задачах параметрического синтеза систем стабилизации // Артиллерийское и стрелковое вооружение. – 2004. – № 2. – С. 23–26.

23. Бесекерский В. А. Цифровые автоматические системы. – Москва: Наука, 1976. – 575 с.

24. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – Москва: Наука, 1986. – 544 с.

Навчальне видання

Євгеній Євгенович АЛЕКСАНДРОВ,
Тетяна Євгенівна АЛЕКСАНДРОВА,
Ірина Віталіївна КОСТЯНИК,
Михайло Павлович ХОЛОДОВ

ТЕОРІЯ ЦИФРОВИХ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ КОЛІСНИХ ТА ГУСЕНИЧНИХ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск

Редактор *Л. В. Кузьміна*

Комп’ютерна верстка *Н. А. Купіної*

План 2022 р. Поз. 1
Підписано до друку 26.08.2022 р. Формат 60×84 1/16.
Гарнітура Times New Roman Cyr.
Ум. друк. арк. 6,5. Обл.-вид. арк. 8,2.
Зам. № 16/22-В. Наклад сайт.

ВИДАВНИЦТВО
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету
Видавництво ХНАДУ, 61002, Харків-МСП, вул. Ярослава Мудрого, 25.
Тел. /факс: (057)700-38-64; 707-37-03,
e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України про внесення суб’єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції, серія № ДК №897 від 17.04 2002 р.