

УДК 539.3

## ДОСЛІДЖЕННЯ РІЗНИХ МОДЕЛЕЙ ДОРОЖНЬОЇ КОНСТРУКЦІЇ ЗА НЕСТАЦІОНАРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

О.В. Воропай, доцент, к.т.н., С.І. Поваляєв, доцент, к.т.н.,  
В.Т. Гришакін, асистент, к.т.н., ХНАДУ

*Анотація.* При моделюванні було використано теорію тонких пластин Кірхгофа та теорію пружних пластин середньої товщини типу Тимошенка. Розглянуто можливість урахування в'язкопружних властивостей матеріалу пластини. Отримано аналітичні залежності для параметрів напружено-деформованого стану дорожньої конструкції та проведено числовий експеримент.

*Ключові слова:* дорожня конструкція, моделювання, пластини, основа, коливання, переміщення, деформація.

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ДОРОЖНОЙ КОНСТРУКЦИИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

А.В. Воропай, доцент, к.т.н., С.И. Поваляев, доцент, к.т.н.,  
В.Т. Гришакин, ассистент, к.т.н., ХНАДУ

*Аннотация.* При моделировании были использованы теория тонких пластин Кирхгофа и теория упругих пластин средней толщины типа Тимошенко. Рассмотрена возможность учета вязкоупругих свойств материала пластины. Получены аналитические зависимости для параметров напряженно-деформированного состояния дорожной конструкции и проведен численный эксперимент.

*Ключевые слова:* дорожная конструкция, моделирование, пластины, основание, колебания, перемещения, деформация.

## INVESTIGATION OF VARIOUS MODELS OF ROAD STRUCTURES UNDER NON-STATIONARY LOADING

A. Voropay, Associate Professor, Candidate of Technical Science,  
S. Povalyaev, Associate Professor, Candidate of Technical Science,  
V. Grishakin, Assistant Professor, Candidate of Technical Science, KhNAHU

*Abstract.* The theory of thin Kirhgoff plates and the Timoshenko's refined theory of medium thickness plates were used. The possibility of using plate material viscoelastic properties were taken into account. Analytical dependences for road structure stress-strain state parameters were received and a numerical experiment was conducted.

*Key words:* road construction, modeling, plate, base, vibration, displacement, deformation.

### Вступ

Для дослідження напружено-деформованого стану та відновлення навантажень, що діють на дорожню конструкцію, а також ідентифікації її параметрів необхідно, щоб математи-

чна модель достатньо точно відображала нестационарні деформаційні процеси, що відбуваються в дорожній конструкції. Особливу увагу цьому необхідно приділити під час розв'язання так званих обернених задач механіки, коли за заданими переміщеннями або

деформаціями дорожнього одягу слід встановити навантаження, що спричинило деформування, або визначити невідомі параметри дорожньої конструкції.

### Аналіз публікацій

З огляду на те, що моделювання дорожньої конструкції є актуальною проблемою прикладного характеру, їй присвячено достатньо багато наукових праць, зокрема [1–3]. Проте уточнення моделей і розробка моделей для розв'язання обернених задач є важливим напрямом роботи. У статті [4] було підкреслено, що для розв'язання саме цих задач однією з найбільш перспективних, з погляду простоти за достатньої адекватності опису властивостей дорожньої конструкції, є модель динамічного навантаження пружної ізотропної пластини, що лежить на пружній інерційній основі типу Власова–Леонтьєва [5].

### Мета і постановка задачі

Метою запропонованої роботи є вибір моделі дорожньої конструкції, яка б найбільш адекватно відображала деформаційні процеси, що відбуваються в дорожній конструкції. Розглянуто декілька моделей дорожньої конструкції різного рівня складності, отримано чисельні результати розрахунку параметрів напружено-деформованого стану і проведено їх аналіз. Дорожню конструкцію було представлено у вигляді пластини на пружній основі, а при моделюванні самої пластини було використано 2 різні теорії:

- тонких пластин Кірхгофа з урахуванням в'язкопружних властивостей матеріалу пластини (дорожнього покриття) та без їх урахування;
- теорію пружних пластин середньої товщини типу Тимошенка.

### Моделювання основи

Контакт між пластиною й основою приймемо двостороннім. Вертикальні переміщення основи описуються функцією  $\psi(z)$ , тобто  $w_0(x, y, z, t) = w(x, y, t) \cdot \psi(z)$ . При цьому функція розподілу напружень у матеріалі основи, відповідно до матеріалу [5], може мати як лінійний характер, так і нелінійний, наприклад

$$\psi(z) = \frac{\text{sh}(\gamma(H-z))}{\text{sh}(\gamma H)}, \quad (1)$$

де  $H$  – товщина шару основи, що стискається;  $\gamma$  – об'ємна вага матеріалу основи;  $R(x, y, t)$  – реакція пружної основи.

Відповідно до методики, запропонованої в монографії [5], величина реакції визначається у формі

$$R(x, y, t) = -2t_f \Delta w(x, y, t) + k_f \cdot w(x, y, t) + m_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$\text{де } t_f = \frac{E_0}{4(1+\nu_0)} \int_0^H \psi^2(z) dz;$$

$$k_f = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \int_0^H \psi'^2(z) dz; \quad m_f = \rho_{\text{гр}} \int_0^H \psi^2(z) dz;$$

$$E_0 = \frac{E_{\text{гр}}}{1-\nu_{\text{гр}}^2}; \quad \nu_0 = \frac{\nu_{\text{гр}}}{1-\nu_{\text{гр}}}.$$

Коефіцієнти реакції основи на пластину визначалися за такими залежностями [5]

$$k_f = \frac{E_0 \gamma}{2m(1-\nu_0^2)} \sqrt{\frac{\sinh(\gamma^*) \cosh(\gamma^*) + \gamma^*}{\sinh(\gamma^*)^2}} = 5,793 \cdot 10^7, \frac{\text{Па}}{\text{м}};$$

$$t_f = \frac{E_0 m}{8\gamma(1+\nu_0)} \sqrt{\frac{\sinh(\gamma^*) \cosh(\gamma^*) - \gamma^*}{\sinh(\gamma^*)^2}} = 2,844 \cdot 10^7, \text{Па} \cdot \text{м};$$

$$m_f = \rho_0 \sqrt{\frac{\sinh(\gamma^*) \cosh(\gamma^*) - \gamma^*}{\sinh(\gamma^*)^2}} = 1,274 \cdot 10^3, \frac{\text{кг}}{\text{м}^2};$$

$$\text{де } \gamma^* = \frac{H\gamma}{m}.$$

### Модель пластини Кірхгофа

Розглянемо тонку пластину (Кірхгофа), що лежить на пружній одношаровій інерційній основі типу Власова–Леонтьєва [5]. Рівняння, що описує процес коливання такої пластини, наведено в роботах [4, 6].

Модель, що враховує дисипацію енергії коливань пластини, описується диференціальним рівнянням (4)

$$\left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t}\right) D \Delta \Delta w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = P(x, y, t) - R(x, y, t), \quad (4)$$

де  $\alpha$  – час релаксації деформацій.

Відзначимо, що ця модель коливань прямокутної пластини, з урахуванням в'язкопружних властивостей, базується на гіпотезі Кельвіна–Фойгта.

Розв'язок рівняння (4) було знайдено у вигляді подвійного ряду Фур'є

$$w(x, y, t) = \sum_k \sum_n w_{kn}(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m}. \quad (5)$$

Розв'язок рівняння (4) відносно прогинів пластини було отримано з використанням перетворення Лапласа. Власні частоти коливань (згідно з моделлю Кірхгофа – одномодова апроксимація) можуть бути визначені у вигляді [7]

$$w_{kn}(t) = \frac{4}{lm(m_1 + m_f)} \times \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) \sin(\mu_j y_0) e^{-\tilde{n}_{kn}(t-\tau)} \times \frac{\sin \tilde{p}_{\partial_k}(t-\tau)}{\tilde{p}_{\partial_k}} d\tau, \quad \text{если } \tilde{p}_{\partial_{kn}} > 0; \quad (6)$$

$$w_{kn}(t) = \frac{4}{lm(m_1 + m_f)} \times \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) \sin(\mu_j y_0) e^{-\tilde{n}_{kn}(t-\tau)} \times \frac{\text{sh} \tilde{p}_{\partial_k}(t-\tau)}{\tilde{p}_{\partial_k}} d\tau, \quad \text{если } \tilde{p}_{\partial_{kn}} < 0,$$

де  $\tilde{p}_{\partial_{kn}} = \sqrt{\tilde{p}_{kn}^2 - \tilde{n}_{kn}^2}$ ;  $m_1 = \rho \cdot h$ ;

$$F_{kn}^L(s) \rightarrow P(t) \sin \lambda_k V_0 t \sin \mu_n y_0; \quad \mu_n = \frac{\pi}{m};$$

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}; \quad 2\tilde{n}_{kn} = \frac{\alpha D}{m_1 + m_f} (\lambda_k^2 + \mu_n^2)^2;$$

$$\tilde{p}_{kn}^2 = \frac{D(\lambda_k^2 + \mu_n^2)^2 - 2t_f(\lambda_k^2 + \mu_n^2) + k_f}{m_1 + m_f}.$$

### Модель пластини середньої товщини

Систему рівнянь, яка описує процес коливання прямокутної пластини середньої товщини, що лежить на основі, наведено в роботі [4]. Розв'язок цієї системи у припущенні нульових початкових умов для шарнірно-обпертої пластини на пружній основі отримано у вигляді [4]

$$w_0(x, y, t) = \int_0^t P(\tau) K^W(x, y, t - \tau) d\tau;$$

$$\psi_x(x, y, t) = \int_0^t P(\tau) K^{\Psi_x}(x, y, t - \tau) d\tau; \quad (7)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \int_0^t P(\tau) K^{\Psi_y}(x, y, t - \tau) d\tau,$$

де  $K^W(x, y, t)$ ,  $K^{\Psi_x}(x, y, t)$ ,  $K^{\Psi_y}(x, y, t)$  – ядра відповідних інтегралів Дюамеля (згорток) виду

$$K^W(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kn}^f}{\Delta_{kn}^f} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} \times \left[ \Omega_{1kn}^f \omega_{1kn}^f \cdot \sin \omega_{1kn}^f t - \Omega_{2kn}^f \omega_{2kn}^f \cdot \sin \omega_{2kn}^f t \right];$$

$$K^{\Psi_x}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kn}^f b \lambda_k^*}{\Delta_{kn}^f} \cos \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} \times \left[ \frac{\sin \omega_{1kn}^f t}{\omega_{1kn}^f} - \frac{\sin \omega_{2kn}^f t}{\omega_{2kn}^f} \right];$$

$$K^{\Psi_y}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kn}^f b \mu_n^*}{\Delta_{kn}^f} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{m} \times \left[ \frac{\sin \omega_{1kn}^f t}{\omega_{1kn}^f} - \frac{\sin \omega_{2kn}^f t}{\omega_{2kn}^f} \right].$$

Тут  $\lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left( \frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right)$ ;  $\lambda_k^* = \pi \frac{k}{l}$ ;  $\mu_n^* = \pi \frac{n}{m}$ ;

$$a_1 = \frac{G'h}{\rho h + m_f}; \quad a_2 = \frac{2t_f}{\rho h + m_f}; \quad a_3 = \frac{k_f}{\rho h + m_f};$$

$$b = \frac{G'h}{\rho \cdot I}; \quad d = \frac{D}{\rho \cdot I};$$

$$\Delta_{kn}^f = \sqrt{(\lambda_{kn}^2 (a_1 + a_2 + d) + a_3 + b)^2 - 4 \left[ \lambda_{kn}^2 (\lambda_{kn}^2 d (a_1 + a_2) + a_3 d + a_2 b) + a_3 b \right]};$$

$$\omega_{1kn}^f = \sqrt{0.5 \left[ (\lambda_{kn}^2 (a_1 + a_2 + d) + a_3 + b) + \Delta_{kn}^f \right]};$$

$$\Omega_{1kn}^f = \omega_{1kn}^f - \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{1kn}^f};$$

$$\omega_{2kn}^f = \sqrt{0.5 \left[ (\lambda_{kn}^2 (a_1 + a_2 + d) + a_3 + b) - \Delta_{kn}^f \right]};$$

$$\Omega_{2kn}^f = \omega_{2kn}^f - \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{2kn}^f}.$$

Причому  $\omega_{1kn}^f$ ,  $\omega_{2kn}^f$  – власні частоти коливань (згідно з моделлю типу Тимошенка – двомодова апроксимація).

Вкажемо, що на основі залежностей (7) нескладно отримати вирази для напружень і деформацій у довільній точці пластини.

Для деформацій аналітичні вирази можна

одержати на основі формул:  $\varepsilon_x = z \cdot \frac{\partial \psi_x}{\partial x}$  і

$\varepsilon_y = z \cdot \frac{\partial \psi_y}{\partial y}$  з використанням співвідношень

для  $\varepsilon_x$  та  $\varepsilon_y$  із (7), а саме

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, t) &= \int_0^t P_z(\tau) K^{ex}(x, y, t - \tau) d\tau; \\ \varepsilon_y(x, y, t) &= \int_0^t P_z(\tau) K^{ey}(x, y, t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{де } K^{ex}(x, y, t) &= -\frac{h}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kn}^f \cdot b \cdot \lambda_k^{*2}}{\Delta_{kn}^f} \times \\ &\times \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \left[ \frac{\sin \omega_{1kn}^f t}{\omega_{1kn}^f} - \frac{\sin \omega_{2kn}^f t}{\omega_{2kn}^f} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K^{ey}(x, y, t) &= -\frac{h}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kn}^f \cdot b \cdot \mu_n^{*2}}{\Delta_{kn}^f} \times \\ &\times \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \left[ \frac{\sin \omega_{1kn}^f t}{\omega_{1kn}^f} - \frac{\sin \omega_{2kn}^f t}{\omega_{2kn}^f} \right]. \end{aligned}$$

Слід зазначити, що в ядрах виразів (7) та (8) коефіцієнти  $C_{kn}^f$  є коефіцієнтами розкладання функції зовнішнього навантаження в ряди Фур'є.

У випадку випробувань дорожньої конструкції рухомими навантаженнями (рис. 1, 2) в коефіцієнтах  $C_{kn}^f$  потрібно замінити параметр, що відповідає координаті  $x$ , на  $V_0 \cdot t$ , де  $V_0$  – швидкість руху навантаження. При мо-

делюванні контактних навантажень може бути враховано, що пляма контакту автомобільної шини з дорожнім полотном має круглу або еліптичну форму (рис. 2).

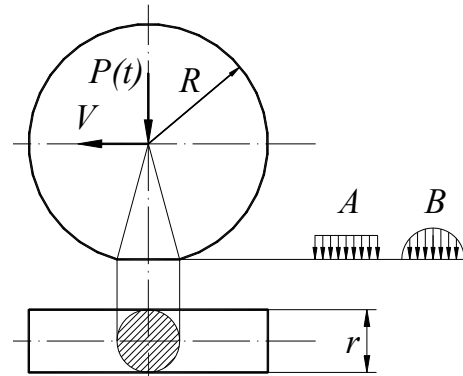


Рис. 1. Схема навантаження колесом

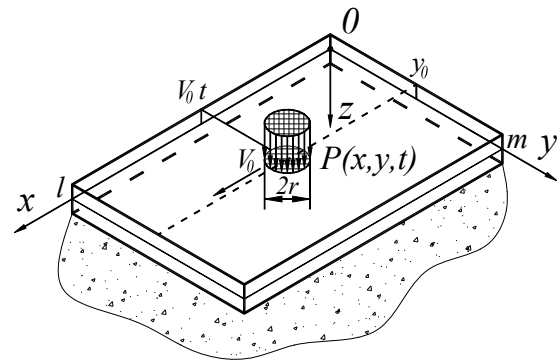


Рис. 2. Схема пластини, що лежить на основі, для моделювання дорожньої конструкції

Наприклад, у випадку навантаження дороги колесом (кругла рухома пляма контакту з рівномірним розподілом тиску по області)

$C_{kn}^f$  можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} C_{kn}^f &= \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot h + m_0} \cdot \frac{2\pi \cdot r}{\lambda_{kn}} \cdot J_1(\lambda_{kn} r) \times \\ &\times \sin \left( \frac{k\pi \cdot V_0 \cdot t}{l} \right) \cdot \sin \left( \frac{n\pi \cdot y_0}{m} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

### Числовий розрахунок

Далі наведено розрахунки напружено-деформованого стану для розглянутої моделі дорожньої конструкції за таких вихідних даних:

постійні дорожнього покриття: щільність  $\rho = 2250 \text{ кг/м}^3$ ; модуль пружності  $E = 3,2 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ; коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ ; товщина пластини (дорожнього покриття)  $h = 0,1 \text{ м}$ .

Постійні пружної основи: щільність  $\rho_0 = 2000 \text{ кг/м}^3$ ; модуль пружності  $E_0 = 1,53 \cdot 10^8 \text{ Па}$ ; коефіцієнт Пуассона  $\nu_0 = 0$ ; глибина основи (нормальні переміщення цих точок вважалися рівними 0)  $H = 1,5 \text{ м}$ .

Довжина пластини (досліджуваної ділянки дороги)  $l = 10 \text{ м}$ . Ширина пластини  $m = 3,5 \text{ м}$ . Координати лінії траєкторії рухомого навантаження  $y_0 = 1,75 \text{ м}$ . Координати точки, в якій обчислювалися прогини і деформації пластини, а також точки прикладення нерухомого навантаження  $x_s = 5 \text{ м}$ ,  $y_s = 1,75 \text{ м}$  (геометричний центр пластини). Швидкість рухомого навантаження  $V = 25 \text{ м/с}$ .

Величина рухомого навантаження  $P = 32000 \text{ Н}$ ; при розрахунках з рівномірно розподіленим по колу навантаженням  $p = 352453,85 \text{ Па}$  радіус плями контакту колеса з дорогою  $r = 0,17 \text{ м}$ . Число кроків за часом – 500. Розглянутий проміжок часу  $T = 0,4 \text{ с}$ .

На рис. 3 представлено зіставлення прогинів пластини при дії рухомого навантаження на дорожню конструкцію (механічну систему, що складається із пластини і пружної основи), які було отримано для розглянутих моделей.

На рис. 3 крива 1 – розрахована на основі теорії тонких пластин Кірхгофа; крива 2 – розрахована на основі теорії тонких пластин Кірхгофа з урахуванням дисипації (в'язкопружних властивостей матеріалу пластини – дорожнього покриття); крива 3 – розрахована на основі уточненої теорії пластин середньої товщини типу Тимошенка. Відзначимо, що вертикальна вісь  $Oz$ , вздовж якої відкладено прогини пластини, спрямована вниз.

Однією з переваг моделювання дорожньої конструкції у вигляді саме пластини середньої товщини, що лежить на основі, є можливість легко отримати аналітичні вирази для деформацій та напружень.

На рис. 4 представлено результати розрахунку деформацій пластини: крива 1 – поздовжня деформація  $\varepsilon_x(t)$ , крива 2 – поперечна деформація  $\varepsilon_y(t)$ .

На рис. 5 представлено двовимірну епіюру прогину пластини у момент часу  $t = 0,2 \text{ с}$ , що відповідає знаходженню рухомого навантаження точно посередині пластини.

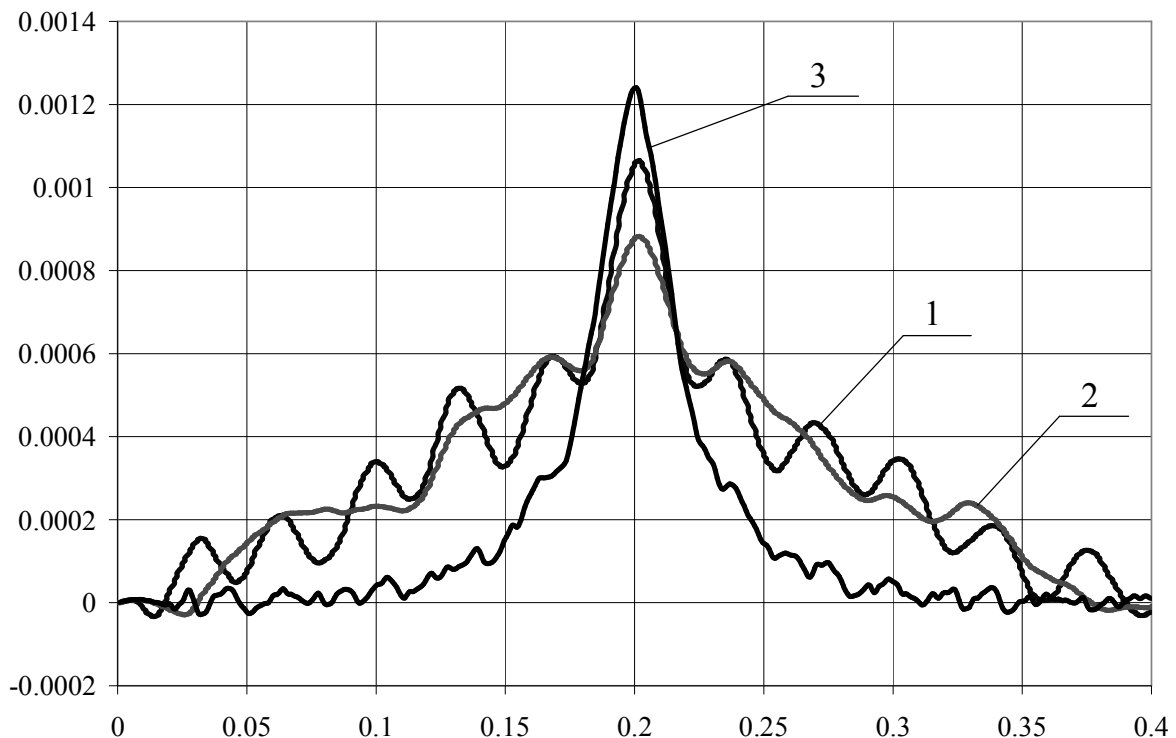


Рис. 3. Зіставлення прогинів пластини за різними моделями

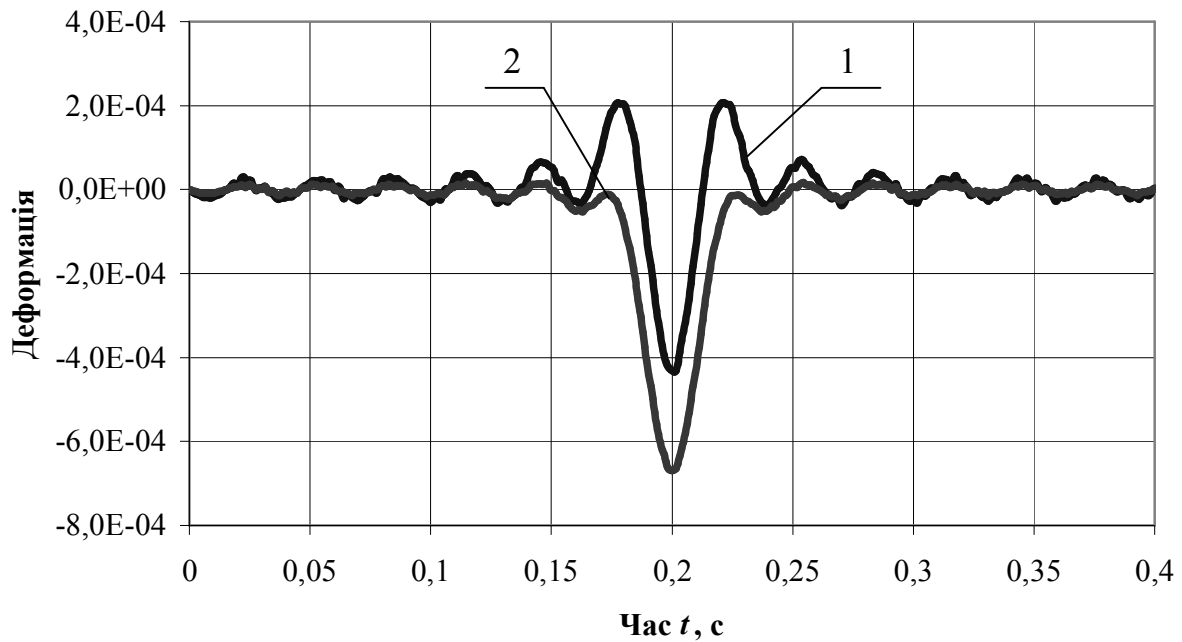


Рис. 4. Результати розрахунку деформацій пластини

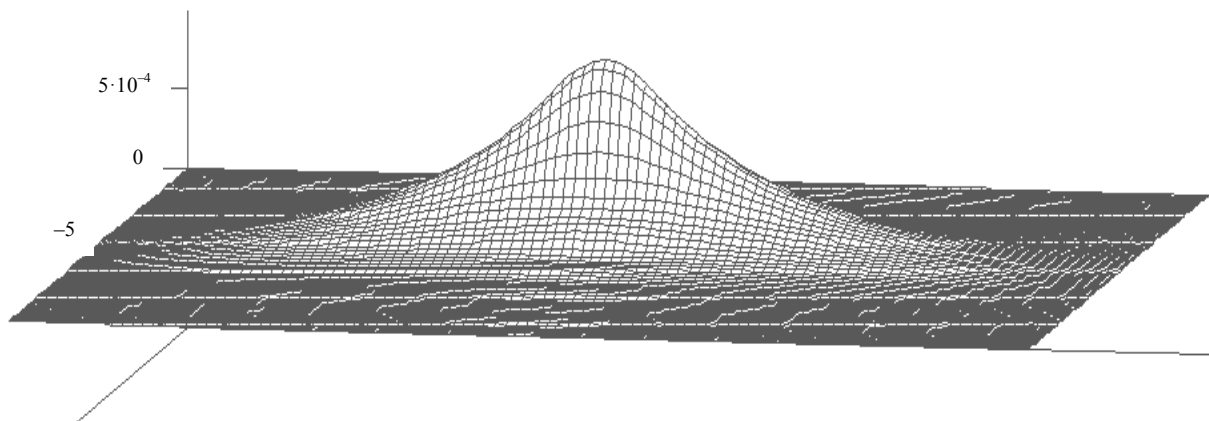


Рис. 5. Епюра прогину пластини

### Висновки

На основі отриманих у роботі аналітико-чисельних залежностей та чисельних розрахунків, виконаних для різних типів динамічних моделей дорожньої конструкції, результати яких у графічному вигляді наведено на рис. 3–5, можна зробити такі висновки:

1. Модель дорожньої конструкції, що складається з тонкої пластини теорії типу Кірхгофа та пружної інерційної основи є більш простою, але дозволяє враховувати дисипацію енергії коливань, тобто в'язкопружні властивості матеріалу покриття без особливих ускладнень.

2. Модель, яка базується на уточненій теорії типу Тимошенка, більш точно моделює нестационарні деформаційні процеси для пластин середньої товщини (оскільки є двомодовою апроксимацією та дозволяє отримати розв'язки, близькі до тривимірної теорії пружності). Прогин та дотичні переміщення в теорії типу Тимошенка (а тому і деформації) є незалежними змінними. Урахування в'язкопружних властивостей в рамках цієї теорії вносить значні ускладнення математичного характеру без значного уточнення результатів.

3. Числові результати розрахунків для обох моделей, які було розглянуто, добре узгоджуються.

## Література

1. Углова Е.В. Моделирование деформирования нежестких дорожных конструкций при воздействии движущегося транспорта / Е.В. Углова // Изв. вузов. Сер. Строительство. – 2009. – № 3–4. – С. 31–35.
2. Матвиенко Ф.В. Моделирование деформации дорожной конструкции от воздействия транспортного потока / Ф.В. Матвиенко, А.Н. Канищев, В.В. Волков // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. – 2009. – № 3. – С. 67–72.
3. Смирнов А.В. Теоретические и экспериментальные исследования работоспособности нежестких дорожных одежд: автореф. дис. на соискание ученой степени доктора техн. наук: спец. 05.23.11 «Проектирование и строительство дорог, метрополитенов, аэродромов, мостов и транспортных тоннелей» / А.В. Смирнов. – М., 1991. – 38 с.
4. Вибір моделі дорожньої конструкції для розв'язку задач ідентифікації за нестаціоного навантаження / Є.Г. Янютін, Д.І. Богдан, О.В. Воропай, С.І. Поваляєв // Автомобільний транспорт. – 2010. – №27. – С. 148–152.
5. Власов В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.И. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960. – 492 с.
6. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1960. – 186 с.
7. Гринев В.Б. Идентификация подвижного нагружения, воздействующего на вязкоупругую пластину на упругом основании / В.Б. Гринев, Е.Г. Янютин, В.Т. Гришакин // Вісник НТУ «ХП». – 2011. – №13. – С. 69–74.

Рецензент: В.К. Жданюк, професор, д.т.н., ХНАДУ.

Стаття надійшла до редакції 15 грудня 2011 р.