

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ
УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять, РГР та СРС
з дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика»

для студентів денної та заочної форм навчання
напряму підготовки
G19 (192) – «Будівництво та цивільна інженерія»



Харків 2025

Укладачі: Нескреба Е.Є., Воропай О.В., Карпенко В. О.

Кафедра деталей машин та теорії механізмів і машин

Нескреба Е. Є., Воропай О. В., Карпенко В. О. Методичні вказівки до практичних занять, РГР та СРС з дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика» для студентів денної та заочної форм навчання напряму підготовки G19 (192) – «Будівництво та цивільна інженерія». Х.: ХНАДУ, 2025. 124 С.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ	4
1. ЗАДАЧА С1. ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТІЛА.....	6
1.1. Короткі теоретичні відомості.....	6
1.2. Завдання та вихідні дані	13
1.3. Алгоритм розв'язання задачі С1	20
1.4. Приклади розв'язання задачі С1	21
2. ЗАДАЧА С2. ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТІЛА ПРИ РІЗНИХ ВАРІАНТАХ ЗАКРІПЛЕННЯ.....	26
2.1. Завдання та вихідні дані	26
2.2. Алгоритм розв'язання задачі С2.....	35
2.3. Приклади розв'язання задачі С2.....	35
3. ЗАДАЧА С3. ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТІЛА (СИСТЕМА ДВОХ ТІЛ).....	43
3.1. Короткі теоретичні відомості.....	43
3.2. Завдання та вихідні дані	46
3.3. Алгоритм розв'язання задачі С3.....	53
3.4. Приклад розв'язання задачі С3	54
4. ЗАДАЧА С4. РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ ФЕРМ.....	58
4.1. Короткі теоретичні відомості.....	58
4.2. Завдання та вихідні дані	61
4.3. Алгоритм розв'язання задачі С4.....	68
4.4. Приклади розв'язання задачі С4.....	69
5. ЗАДАЧА С5. РІВНОВАГА СИЛ З УРАХУВАННЯМ ЗЧЕПЛЕННЯ (ТЕРТЯ СПОКОЮ)	82
5.1. Короткі теоретичні відомості.....	82
5.2. Завдання та вихідні дані	86
5.3. Алгоритм розв'язання задачі С5.....	93
5.4. Приклад розв'язання задачі С5	94
6. ЗАДАЧА С6. ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ ЦЕНТРУ ТЯЖІННЯ ТВЕРДИХ ТІЛ	98
6.1. Короткі теоретичні відомості.....	98
6.2. Завдання та вихідні дані	103
6.3. Алгоритм розв'язання задачі С6.....	110
6.4. Приклади розв'язання задачі С6.....	112
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	118
ДОДАТОК.....	119

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Теоретична механіка – наука, в якій вивчаються загальні закони механічного руху та механічної взаємодії матеріальних тіл.

Курс теоретичної механіки складається з трьох основних розділів: статика (С), кінематика (К) і динаміка (Д).

Розрахунково-графічна робота (РГР) з дисципліни теоретична механіка є самостійною роботою студента. Вона включає розв'язання задач, які дозволять закріпити знання, отримані на лекціях і практичних заняттях. Кількість задач, що підлягають розв'язанню в рамках РГР, визначається викладачем, який проводить практичні заняття в залежності від обсягів курсу окремо для кожної спеціальності.

Крім розв'язку задач РГР і підготовки до занять (лекційних та практичних), студент повинен самостійно вивчити ті теми дисципліни, які не розглядаються детально на лекціях. Також крім теоретичних відомостей до окремих етапів виконання РГР, ці методичні вказівки (МВ) містять також варіанти завдань і розгорнуті докладні приклади розв'язання та оформлення запропонованих задач.

Варіант завдання студенту призначає викладач, який веде практичні заняття в академічній групі. Для вибору завдання може використовуватися або порядковий номер студента у списку групи, або останні дві цифри номера студентського квитка.

Кожне розв'язане та оформлене завдання має бути захищене студентом під час його здачі. При виявленні несамотійності розв'язання задач або пред'явленні до захисту завдань не свого варіанту студенту призначається новий варіант, за яким він повинен виконати завдання повторно.

Студент, який не виконав РГР і не захистив хоча б одне з завдань, до заліку або іспиту з теоретичної механіки не допускається.

На іспит виноситься весь матеріал, опрацьований на лекціях, практичних заняттях та під час виконання РГР та СРС.

Гарне засвоєння курсу теоретичної механіки, а особливо розділу «Статика» для студентів дорожньо-будівельних спеціальностей, потребує не тільки глибокого вивчення теорії, а й набуття твердих навичок у вирішенні задач. Для цього необхідно самостійно розв'язати велику кількість задач. Тож дані методичні вказівки окрім самих завдань мають також досить детально розібрані приклади розв'язання подібних задач та рекомендовані алгоритми (послідовності) яких варто дотримуватися для ефективного розв'язку заданих задач та засвоєння викладених тем.

Статика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються методи перетворення систем сил в еквівалентні системи та встановлюються умови рівноваги сил, прикладених до твердого тіла.

До розділу «Статика» відносяться задачі С1, С2, С3, С4, С5, С6.

В задачі **С1** необхідно виконати аналіз заданої конструкції, скласти рівняння рівноваги еквівалентної системи та визначити реакції опор (величини та напрями) твердого тіла, а також виконати перевірку отриманого розв'язку.

В задачі **C2** необхідно виконати аналіз заданої конструкції, скласти рівняння рівноваги еквівалентної системи та визначити величину заданої в завданні досліджуваної реакції для трьох варіантів закріплення твердого тіла, для варіанту, де значення цієї реакції має найменший модуль також потрібно визначити всі інші опорні реакції, а також виконати перевірку отриманого розв'язку.

В задачі **C3** необхідно виконати аналіз заданої конструкції (система двох тіл), скласти рівняння рівноваги еквівалентної системи, визначити реакції опор (величини та напрями) та реакцію в проміжному шарнірі, а також виконати перевірку отриманого розв'язку

Задача **C4** присвячена розрахунку фермових конструкцій, а саме потрібно визначити зусилля в стержнях заданої статично-визначеної.

В задачі **C5** необхідно дослідити рівновагу системи з урахуванням наявності зчеплення (сухого тертя), а саме визначити мінімальне або максимальне значення зовнішньої прикладеної сили та реакції в опорах системи, що знаходиться в спокої.

В задачі **C6** потрібно визначити положення центру тяжіння твердого тіла, в залежності від варіанту тверде тіло може бути представлено у вигляді плоскої фігури, плоскої ферми або об'ємного твердого тіла.

Для спрощення процесу розв'язання задач РГР в даних методичних вказівках містяться основні допоміжні матеріали, що наведені в додатку.

1. ЗАДАЧА С1. ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТІЛА

1.1. Короткі теоретичні відомості

Приступаючи до вивчення статички, варто визначити основні поняття механіки, що зустрічаються в цьому розділі.

Основні поняття статички.

Механічним рухом називається зміна з плином часу взаємного положення матеріальних точок в просторі.

Механічною взаємодією називається така взаємодія матеріальних тіл, що змінює або прагне змінити характер їх механічного руху.

Матеріальне тіло, розміри якого в досліджуваних конкретних умовах можна не враховувати, називають **матеріальною точкою**. Матеріальна точка має масу та здатність взаємодіяти з іншими тілами. Наприклад, при вивченні руху планет Сонячної системи навколо Сонця їх розмірами у порівнянні з їх відстанями від Сонця нехтують та розглядають ці планети як матеріальні точки.

Системою матеріальних точок (механічною системою) називається така сукупність матеріальних точок, в якій положення та рух кожної точки залежать від положення та руху інших точок цієї системи.

В теоретичній механіці розглядаються тільки такі тіла, відстані між будь-якими точками яких залишаються незмінними. Такі тіла називаються **абсолютно твердими**.

Вважаючи тіла абсолютно твердими, *не враховують деформацій, які виникають в реальних тілах*. Це значно спрощує вивчення дії сил на тіло та умов, при яких ці сили урівноважуються.

Тверде тіло може знаходитися в стані спокою або руху деякого характеру. Кожен з цих станів умовно називають **кінематичним станом тіла**.

Надважливим поняттям в теоретичній механіці є поняття сили.

Сила – міра механічної взаємодії тіл, визначаюча інтенсивність та напрямок цієї взаємодії.

Сила характеризується трьома елементами:

- числове значення (модуль або величина);
- напрямок;
- точка прикладання.

Сила зображується вектором (рис. 1.1). Пряма, по якій направлена сила, називається **лінією дії сили**. За одиницю сили в Міжнародній системі одиниць – СІ приймається **ньютон (Н)**.

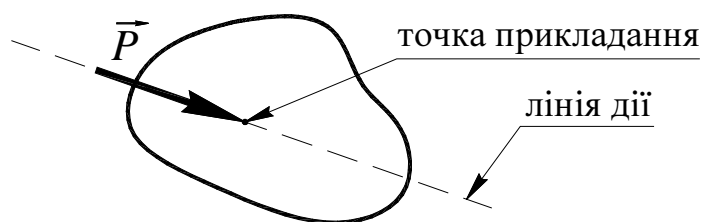


Рисунок 1.1

Сукупність декількох сил, діючих на тіло, називається **системою сил**.

Системи сил, під дією кожної з яких тверде тіло знаходиться в однаковому кінематичному стані, називається **рівнодіючою**.

Сила, що рівна за модулем рівнодіючій та спрямована по лінії її дії в протилежну сторону, називається **урівноважуючою**.

Система сил, яка будучи прикладеною до твердого тіла, знаходиться в спокої, не виводить його з цього стану, називається системою **взаємно урівноважувальних сил**.

Сили, діючі на механічну систему, діляться на дві групи: зовнішні та внутрішні сили.

Зовнішніми називаються сили, діючі на матеріальні точки (тіла) даної системи з боку матеріальних точок (тіл), що не належать цій системі.

Внутрішніми називаються сили взаємодії між матеріальними точками (тілами) досліджуваної системи.

Основною задачею статyki є дослідження умов рівноваги зовнішніх сил, прикладених до абсолютно твердого тіла.

Для вивчення курсу статyki твердого тіла розглянемо аксіоми, що лежать в основі цього курсу. Ці аксіоми сформульовані на основі спостережень та вивчення навколишніх явищ реального світу. Деякі основні закони механіки Галілея – Ньютона є одночасно і аксіомами статyki.

1. Аксіома інерції. Під дією взаємно урівноважувальних сил матеріальна точка (тіло) знаходиться в стані спокою або рухається прямолінійно та рівномірно.

Аксіома інерції виражає встановлений Галілеєм закон інерції.

2. Аксіома рівноваги двох сил. Дві сили, прикладені до твердого тіла, взаємно урівноважуються тільки в тому випадку, якщо їх модулі рівні і вони направлені по одній прямій в протилежні сторони.

3. Аксіома приєднання або виключення урівноважувальних сил. Дія системи сил на тверде тіло не змінюється, якщо до неї додати або з неї виключити систему взаємно урівноважувальних сил.

Наслідок аксіоми. Не змінюючи кінематичного стану абсолютно твердого тіла, силу можна переносити уздовж її лінії дії, зберігаючи незмінними її модуль та напрямок.

4. Аксіома паралелограма сил. Рівнодіюча двох сил, які перетинаються, прикладена в точці їх перетину та зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах (рис. 1.2).

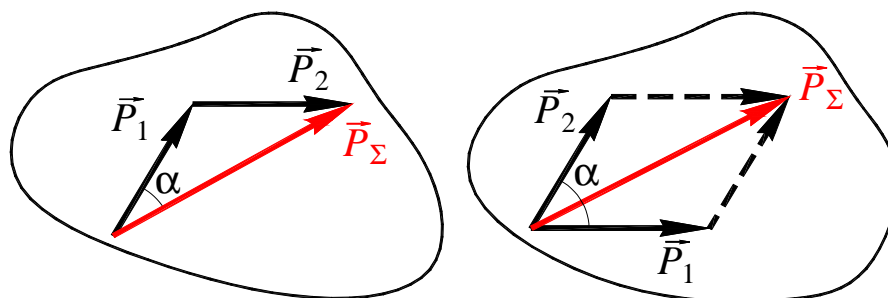


Рисунок 1.2

Дане положення, гарно відоме з елементарного курсу фізики, виражається наступною геометричною рівністю:

$$\vec{P}_\Sigma = \vec{P}_1 + \vec{P}_2.$$

Модуль рівнодіючої сили визначається наступною формулою:

$$P_\Sigma = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha},$$

де α – кут між напрямками сил \vec{P}_1 і \vec{P}_2 .

5. Аксиома рівності дії та протидії. Будь-якій дії відповідає рівна та протилежно спрямована протидія.

Ця аксіома стверджує, що сили дії один на одного тіл рівні за модулем та направлені по одній прямій в протилежні сторони. Таким чином, в природі не існує односторонньої дії сили. Будучи прикладеними до різних тіл, ці сили не урівноважуються.

Аксиома дії та протидії встановлена Ньютоном та відома як один з основних законів класичної механіки.

6. Аксиома збереження рівноваги сил, прикладених до тіла, що може деформуватися при його затвердінні. Рівновага сил, прикладених до тіла, що може деформуватися, зберігається при його затвердінні.

Тверде тіло, на переміщення якого не накладено жодних обмежень, називається **вільним твердим тілом**.

Тіло, обмежуюче вільність руху даного твердого тіла, є по відношенню до нього **в'яззю**.

Всі сили, що діють на невільне тверде тіло, наряду з поділом на зовнішні та внутрішні можна розділити на **задані або активні сили** та **реакції в'язей**.

Реакцією в'язі називається сила або система сил, що виражає механічну дію в'язі на тіло.

Одним з основних положень механіки є **принцип звільнення твердих тіл від в'язей**, згідно до якого невільне тверде тіло можна розглядати як вільне, на яке окрім заданих сил діють реакції в'язей.

Нехай, наприклад, на гладкій нерухомій горизонтальній поверхні знаходиться в спокої куля (рис. 1.3,а). Площина, обмежуюча рух кулі, є для неї в'яззю.

Якщо подумки звільнити кулю від в'язі (рис. 1.3,б), то для утримання його в спокої до нього в точці дотику з площиною потрібно прикласти силу \vec{N} , рівну вазі кулі \vec{G} за модулем на протилежну їй за напрямом. Сила \vec{N} і є реакцією площини. Тоді куля, звільнена від в'язі, буде вільним тілом, на яке діють задана сила \vec{G} та реакція площини \vec{N} .

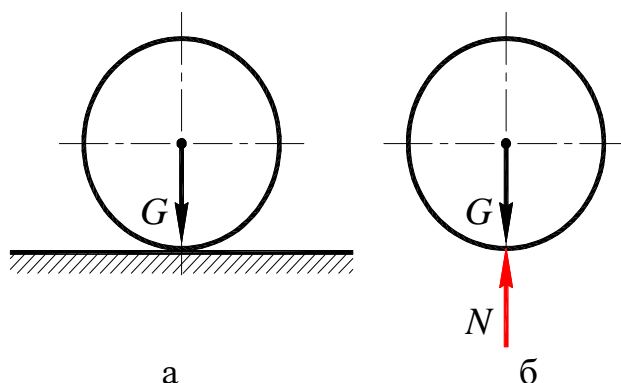


Рисунок 1.3

Гладка площина не протидіє переміщенню тіла уздовж площини під дією заданих сил (рис. 1.4,а), але не допускає його переміщення в напрямі, перпендикулярному площині. Тому дія площини на тіло виражається нормальною реакцією \vec{N} (рис. 1.4,б).

Реакція гладкої площини направлена перпендикулярно площині.

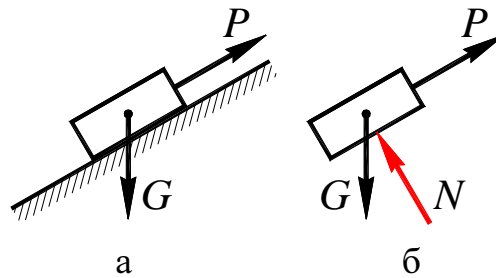


Рисунок 1.4

Якщо до кінця B нитки AB , закріпленої в точці A , підвісити вантаж вагою \vec{G} (рис. 1.5,а), то реакція \vec{S} нитки буде прикладена до вантажу в точці B , рівна за модулем його вазі \vec{G} та направлена вертикально вгору (рис. 1.5,б).

Реакція нитки направлена уздовж нитки.

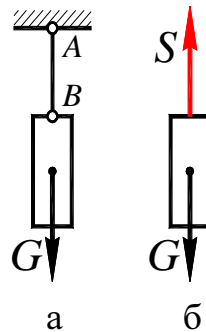


Рисунок 1.5

Нехай балка вагою \vec{G} в точці B спирається на гладку поверхню, а в точках A і D – на гладкі горизонтальну та вертикальну площини (рис. 1.6). Тоді реакції опорної поверхні та опорних площин будуть мати вказані на рис. 1.6 напрямки.

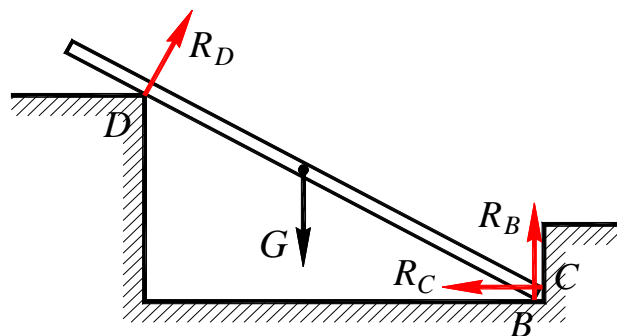


Рисунок 1.6

Для визначення кожної реакції необхідно знати три її елементи: модуль, напрям і точку прикладання. Точка прикладання реакції, як правило, буває відома. Напрямок реакції відомий лише для деяких типів в'язей.

Якщо існують два взаємно перпендикулярних напрями на площині, в одному з яких в'язь перешкоджає переміщенню тіла, а в іншому – ні, то напрям її реакції протилежний першому напрямку.

Розглянемо основні типи опор та їх реакції.

На рис. 1.7 показані основні типи опор:

- а – шарнірно-нерухома опора (нерухомий шарнір);
- б – шарнірно-рухома опора (рухомий шарнір);
- в – жорстке защемлення (жорстке закладення);
- г – ковзаюче закладення;
- д – біковзаюче закладення (подвійне закладення).

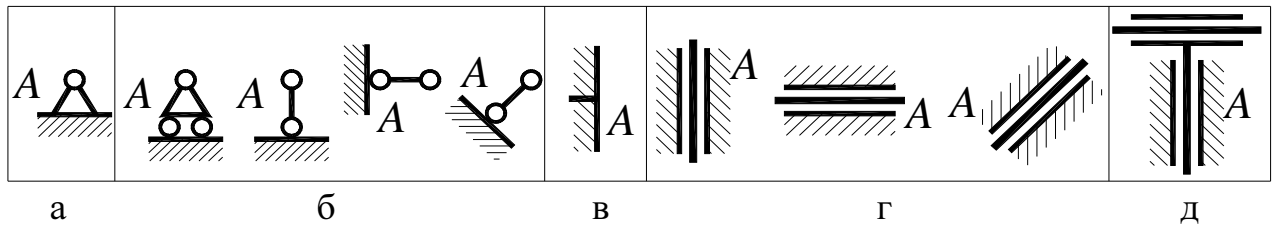


Рисунок 1.7

На рис. 1.8 зображено реакції що виникають в кожному з розглянутих типів опор.

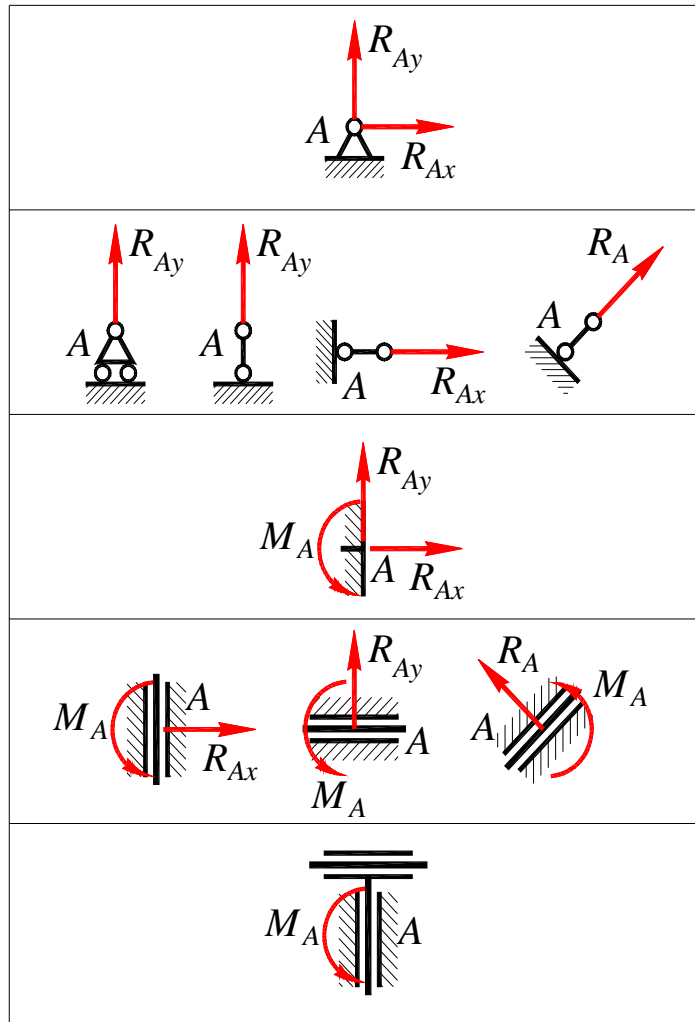


Рисунок 1.8

Моментом сили відносно точки називається добуток модуля сили на плече (h), взятий зі знаком плюс або мінус:

$$M = \pm P \cdot h$$

Якщо силу виражати в *ньютон*ах, а плече – в *метрах*, то момент сили буде виражатися в *ньютон-метрах* (Н·м).

Плече – найкоротша відстань між лінією дії сили та точкою, відносно якої визначається момент сили (довжина перпендикуляра, опущеного з точки на лінію дії сили) (рис. 1.9,а).

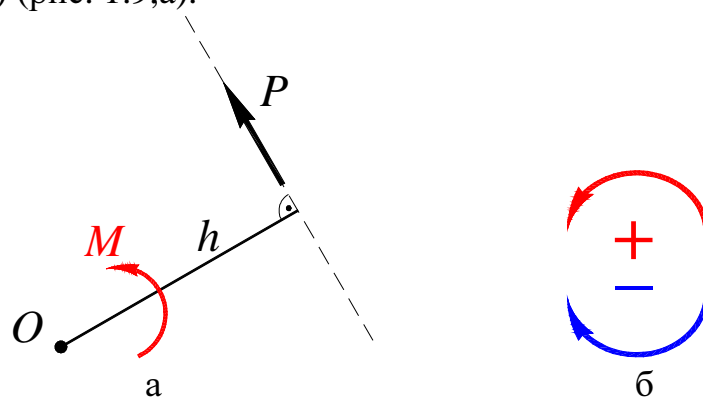


Рисунок 1.9

Момент сили вважається *додатним*, якщо сила намагається обертати площину в бік, протилежний обертанню годинникової стрілки, та *від'ємним* – в бік обертання годинникової стрілки (рис. 1.9,б).

Алгоритм визначення моменту сили відносно точки:

- 1) провести лінію дії сили;
- 2) з точки, відносно якої визначається момент, опустити перпендикуляр на лінію дії сили;
- 3) обчислити довжину цього перпендикуляра;
- 4) визначити знак моменту;
- 5) обчислити добуток модуля сили на знайдене плече.

Момент сили \vec{P} відносно точки O зображується вектором \vec{M}_O , прикладеним в цій точці та направленим перпендикулярно площині, в якій розташовані сила і точка, в такий бік, щоб дивлячись назустріч цьому вектору, бачити силу \vec{P} прагнучою обертати цю площину в бік, протилежний обертанню годинникової стрілки (рис. 1.10).

Модуль моменту сили відносно точки може бути виражений подвоєною площею трикутника OAB (рис. 1.10).

Якщо з точки O в точку прикладання сили A провести радіус-вектор \vec{r} , то вектор моменту сили можна виразити векторним добутком:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{P}$$

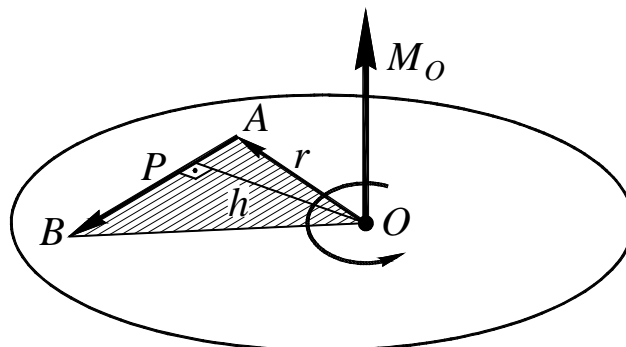


Рисунок 1.10

Момент сили відносно точки дорівнює нулю в тому випадку, якщо лінія дії сили проходить через цю точку, тобто $h = 0$ (рис. 1.11).

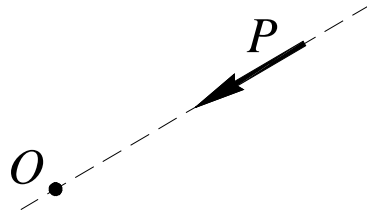


Рисунок 1.11

Деякі допоміжні матеріали, що можуть знадобитися при розв'язанні задач представлені в додатку, а саме тригонометричні залежності, відомі з базового курсу геометрії.

1.2. Завдання та вихідні дані

Визначити реакції в опорах твердого тіла, що перебуває у статичній рівновазі. Вихідні схеми представлені на рис. 1.12 – 1.14, відповідні вихідні дані наведено в табл. 1.1 – 1.4. Розміри на рисунках вказані в метрах.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані до задачі С1 (набір 1)

Номер варіанту	G , кН	P , кН	M , кНм	q , кН/м	α , град
1	12	14	16	7	30
2	14	10	20	6	60
3	10	12	8	5	60
4	10	–	12	6	30
5	–	20	7	8	45
6	–	16	10	8	60
7	–	10	12	8	45
8	18	15	12	10	60
9	12	12	16	10	30
10	14	12	8	8	30
11	–	8	12	4	45
12	8	8	8	–	45
13	8	12	10	8	30
14	10	8	15	12	45
15	10	10	8	8	60
16	15	8	–	5	45
17	28	10	–	5	45
18	28	14	18	–	30
19	–	10	15	5	45
20	–	14	8	5	45
21	–	15	16	5	30
22	–	20	24	10	30
23	–	15	20	10	30
24	–	20	15	10	60
25	–	16	24	8	45
26	–	20	16	5	30
27	8	10	20	8	45
28	–	16	24	10	30
29	–	8	16	4	15
30	16	20	24	–	30

Таблиця 1.2 – Вихідні дані до задачі С1 (набір 2)

Номер варіанту	G , кН	P , кН	M , кНм	q , кН/м	α , град
1	10	20	18	5	30
2	8	12	15	5	60
3	14	8	12	10	60
4	16	–	10	5	30
5	–	10	8	4	45
6	–	12	8	4	60
7	–	8	10	4	45
8	14	10	8	5	60
9	8	8	10	5	30
10	8	10	12	4	30
11	–	8	10	5	45
12	12	8	10	–	45
13	10	12	10	4	30
14	8	10	12	6	45
15	8	8	10	4	60
16	16	12	–	4	45
17	20	8	–	2	45
18	25	8	12	–	30
19	–	10	12	2	45
20	–	18	12	2	45
21	–	10	8	2	30
22	–	12	16	5	30
23	–	10	15	5	30
24	–	12	8	5	60
25	–	8	15	4	45
26	–	10	16	2	30
27	10	8	20	4	45
28	–	12	16	5	30
29	–	10	8	5	15
30	16	8	20	–	30

Таблиця 1.3 – Вихідні дані до задачі С1 (набір 3)

Номер варіанту	G , кН	P , кН	M , кНм	q , кН/м	α , град
1	15	15	12	8	30
2	10	15	18	8	60
3	8	14	16	8	60
4	12	–	20	8	30
5	–	8	15	5	45
6	–	14	6	5	60
7	–	12	8	6	45
8	20	8	10	8	60
9	10	10	12	8	30
10	12	14	10	5	30
11	–	10	12	8	45
12	8	12	10	–	45
13	12	16	8	5	30
14	12	10	14	8	45
15	12	10	14	5	60
16	18	14	–	8	45
17	24	6	–	4	45
18	22	11	15	–	30
19	–	8	10	4	45
20	–	16	10	4	45
21	–	12	15	4	30
22	–	15	20	8	30
23	–	12	16	8	30
24	–	15	10	8	60
25	–	10	20	5	45
26	–	12	8	4	30
27	12	14	16	5	45
28	–	10	20	8	30
29	–	12	16	8	15
30	12	14	24	–	30

Таблиця 1.4 – Вихідні дані до задачі С1 (набір 4*)

Номер варіанту	G , кН	P , кН	M , кНм	q , кН/м	α , град
1	10	5	20	1	30
2	12	8	10	4	60
3	4	8	5	2	60
4	14	–	8	3	30
5	–	6	7	1	45
6	–	10	4	2	60
7	–	6	5	1	45
8	16	7	6	2	60
9	6	6	4	2	30
10	10	8	9	1	30
11	–	4	7	0,5	45
12	10	6	8	–	45
13	12	10	6	2	30
14	10	6	10	1	45
15	4	4	4	2	60
16	20	10	–	2	45
17	25	5	–	0,5	45
18	20	10	10	–	30
19	–	4	8	1	45
20	–	10	6	0,5	45
21	–	8	7	0,5	30
22	–	10	8	1	30
23	–	7	10	2	30
24	–	6	7	1,5	60
25	–	14	20	0,5	45
26	–	16	14	1	30
27	5	4	8	2,5	45
28	–	10	7	3	30
29	–	6	8	1	15
30	15	10	14	–	30

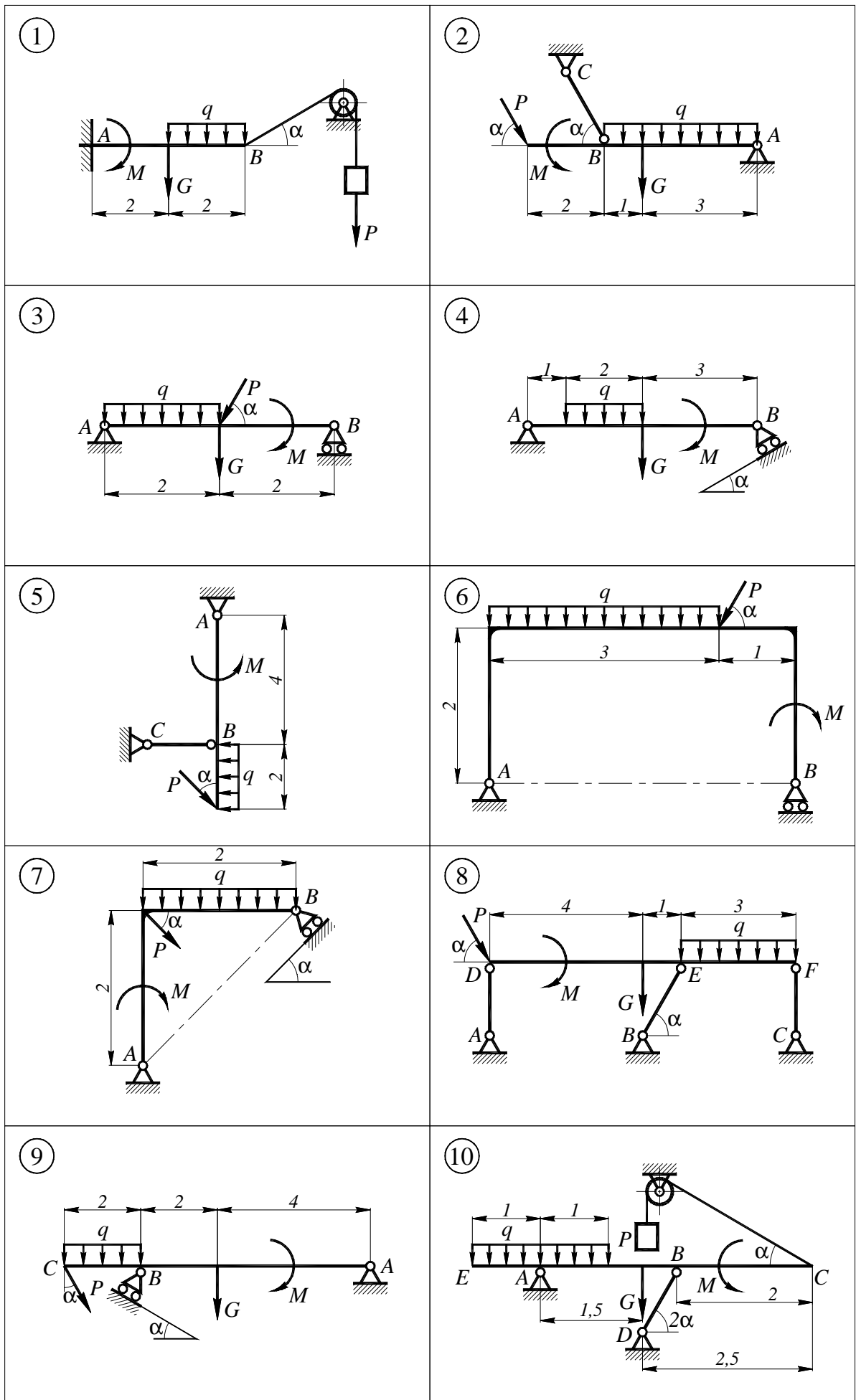


Рисунок 1.12 – Вихідні схеми до задачі С1 (1-10)

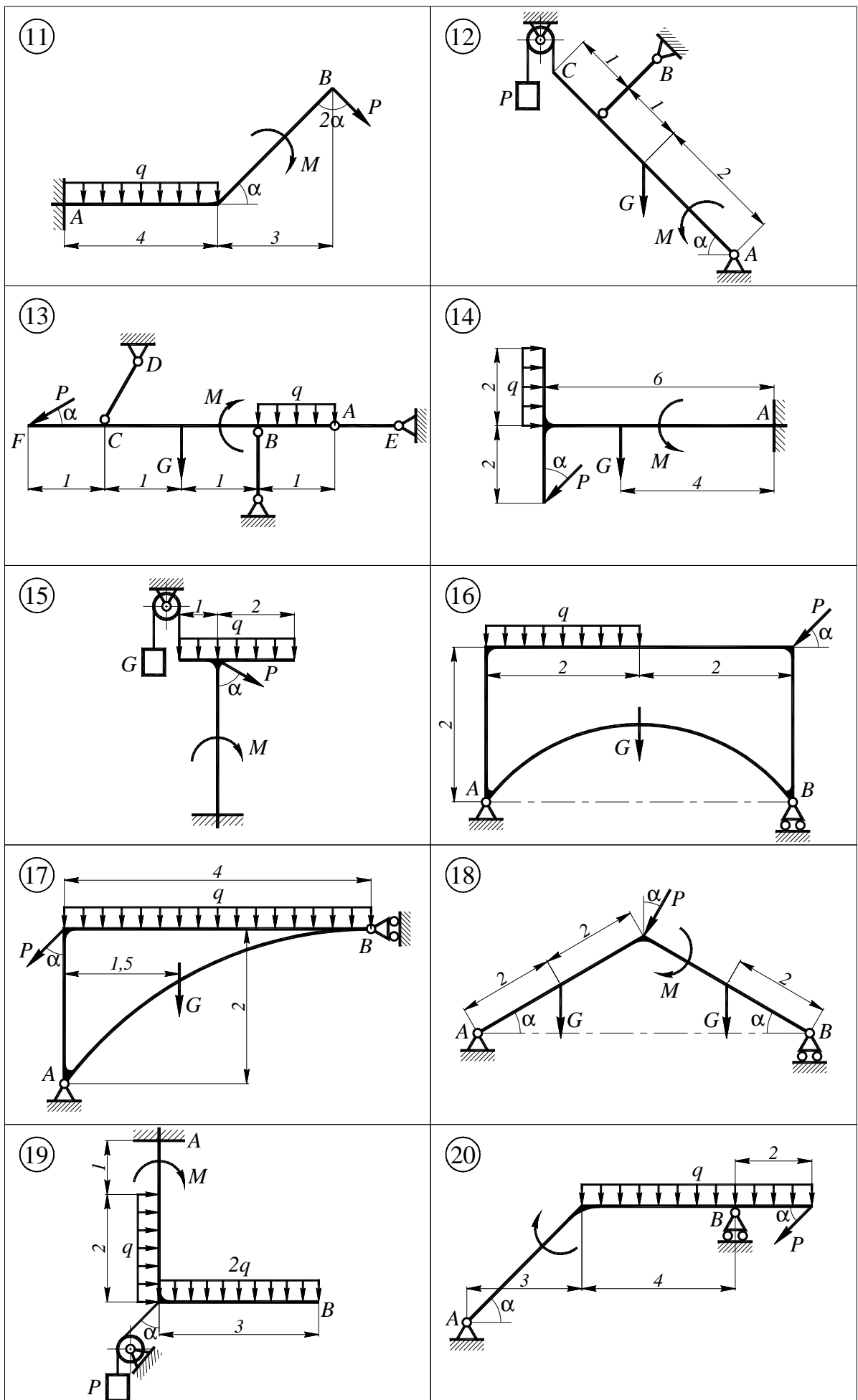


Рисунок 1.13 – Вихідні схеми до задачі С1 (11-20)

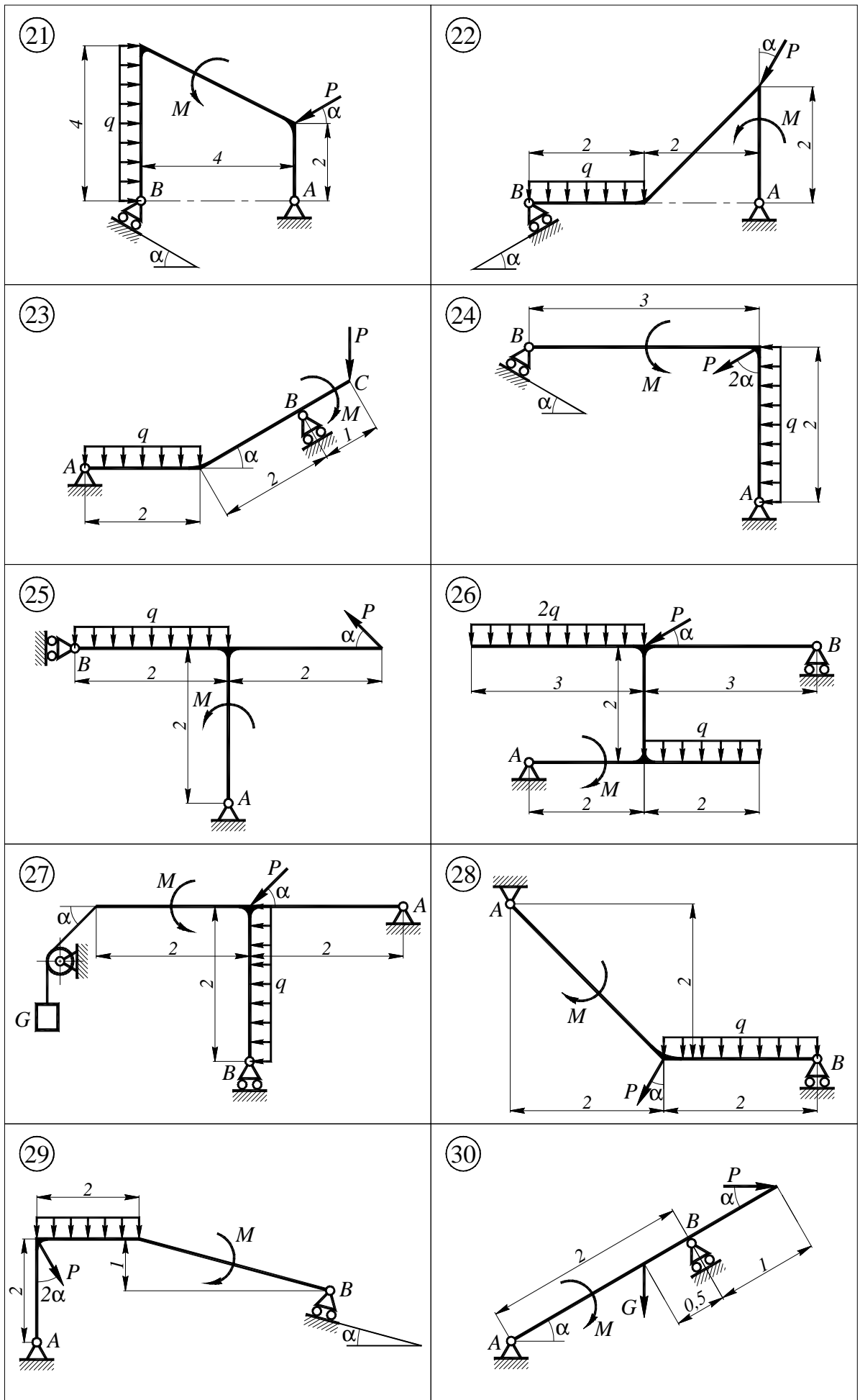


Рисунок 1.14 – Вихідні схеми до задачі С1 (21-30)

1.3. Алгоритм розв'язання задачі С1

Задачі на рівновагу (визначення реакцій опор) твердого тіла при наявності довільної плоскої системи сил рекомендується розв'язувати в наступній послідовності:

1) виділити тверде тіло (конструкцію), рівновагу якого потрібно дослідити;

2) виконати аналіз заданої конструкції, визначити типи в'язей (опор), визначити кількість невідомих реакцій;

3) обрати найбільш зручну систему осей декартових координат;

4) звести задану систему до еквівалентної:

4.1) базуючись на принципі звільнення від в'язей, замінити опори реакціями;

4.2) рівномірно-розподілене навантаження замінити еквівалентною зосередженою силою;

4.3) якщо до конструкції прикладена сила під деяким кутом – розкласти її на складові, тобто визначити її проекції на осі декартової системи координат Ox та Oy ;

4.4) якщо до конструкції за допомогою нерозтяжної нитки підвішений деякий вантаж – перенести уздовж нитки силу вантажу та прикласти у відповідній точці конструкції, після обчислити проекції цієї сили на осі Ox та Oy ;

5) для еквівалентної системи записати систему трьох рівнянь рівноваги твердого тіла на площині:

$$\begin{cases} \sum P_{ix} = 0; \\ \sum P_{iy} = 0; \\ \sum M(P_i) = 0. \end{cases}$$

При цьому варто намагатися скласти рівняння таким чином, щоб в нього входила тільки одна невідома величина. Для цього осі координат доцільно направити так, щоб деякі невідомі сили були перпендикулярними до цих осей. Тоді величини цих невідомих сил у відповідні рівняння не увійдуть. Центр моментів, тобто точку, відносно якої має бути складено рівняння рівноваги моментів, потрібно обрати в точці перетину ліній дій двох невідомих сил.

6) розв'язати систему рівнянь відносно невідомих та визначити відповідні шукані реакції;

7) записати відповідь.

1.4. Приклади розв'язання задач С1

В завданнях типу С1 необхідно визначити реакції в опорах твердого тіла, що знаходиться в положенні статичної рівноваги.

Розглянемо декілька прикладів розв'язання подібних задач.

Приклад розв'язання задачі №1

Дано: схема (рис. 1.15); $P = 10$ кН; $q = 5$ кН/м; $M = 10$ кНм; $\alpha = 60$ град.

Знайти: реакції опор.

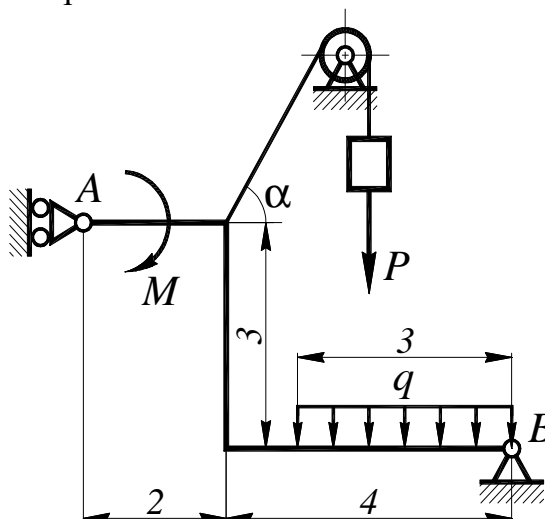


Рисунок 1.15 – Вихідна схема до завдання

Розв'язання

1. Виконуємо аналіз заданої конструкції (рис. 1.15).

Конструкція представлена у вигляді ломаного стрижня, закріпленого в двох точках A і B . В точці A конструкція закріплена шарнірно-рухомою опорою, в точці B – шарнірно-нерухомою опорою. Конструкція навантажена зовнішніми факторами, а саме моментом M , рівномірно-розподіленим навантаженням інтенсивністю q , також за допомогою нерозтягнутої гнучкої нитки, перекинutoї через блок, під кутом α до конструкції підвішений вантаж P .

2. Перетворюємо задану систему (рис. 1.15) на еквівалентну (рис. 1.16).

2.1. Використовуючи принцип звільнення від в'язей, замінюємо опори реакціями.

2.2. Вантаж P переносимо вздовж нитки в точку її закріплення до конструкції та розкладаємо на складові, обчислюємо проєкції сили на осі декартової системи координат Ox та Oy :

$$P_x = P \cdot \cos \alpha = 10 \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН};$$

$$P_y = P \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = 10 \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}.$$

2.3. Рівномірно розподілене навантаження замінюємо еквівалентною зосередженою силою Q :

$$Q = q \cdot l = 5 \cdot 3 = 15 \text{ кН}.$$

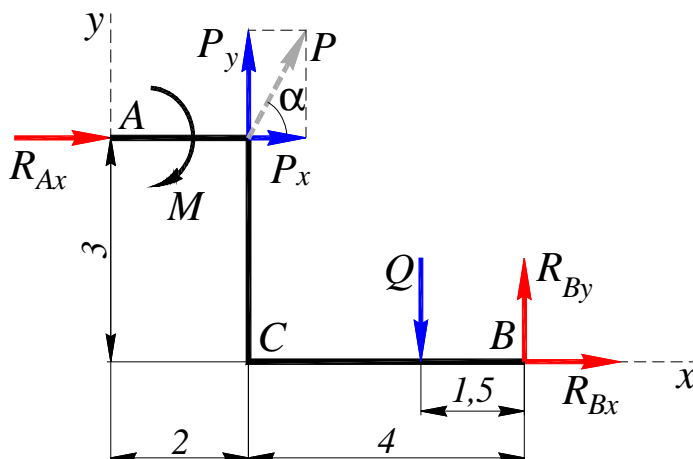


Рисунок 1.16 – Еквівалентна система

3. Визначаємо реакції опор.

Невідомими є реакції опор R_{Ax} , R_{Bx} та R_{By} (на рис. 1.16 зображені червоним кольором).

За умовою задачі, система знаходиться в положенні статичної рівноваги, відповідно можемо записати систему з трьох рівнянь рівноваги твердого тіла на площині:

$$\begin{cases} \sum P_{ix} = 0; \\ \sum P_{iy} = 0; \\ \sum M(P_i) = 0. \end{cases}$$

Запишемо рівняння рівноваги для системи (рис. 1.16):

$$\begin{cases} \sum P_{ix} = R_{Ax} + P_x + R_{Bx} = 0; \\ \sum P_{iy} = P_y - Q + R_{By} = 0; \\ \sum M_B(P_i) = -R_{Ax} \cdot 3 - M - P_y \cdot 4 - P_x \cdot 3 + Q \cdot 1,5 = 0. \end{cases}$$

Примітка. Рівняння моментів запишемо відносно точки B , як більш зручної, адже в такому разі в рівнянні фігурує одна невідома – R_{Ax} .

Шляхом розв'язання рівнянь рівноваги, знаходимо невідомі реакції.

З першого рівняння запишемо:

$$R_{Ax} + R_{Bx} = -P_x.$$

З другого рівняння можемо знайти величину реакції R_{By} :

$$R_{By} = Q - P_y = 15 - 8,66 = 6,34 \text{ кН.}$$

З третього рівняння знаходимо реакцію R_{Ax} :

$$R_{Ax} = \frac{Q \cdot 1,5 - M - P_y \cdot 4 - P_x \cdot 3}{3} = \frac{15 \cdot 1,5 - 10 - 8,66 \cdot 4 - 5 \cdot 3}{3} = -12,38 \text{ кН.}$$

Примітка. Знак «-» показує, що насправді сила реакції опори R_{Ax} направлена в протилежний бік, від обраного на схемі (рис. 1.16).

Підставляючи значення знайденої реакції R_{Ax} в перше рівняння рівноваги, знайдемо – R_{Bx} :

$$R_{Bx} = -P_x - R_{Ax} = -5 - (-37,14) = 7,38 \text{ кН}.$$

4. Виконуємо перевірку*

Як було зазначено, задана система знаходиться в положенні статичної рівноваги, відповідно повинні виконуватися відповідні умови. Перевіримо умову рівності нулю суми моментів всіх сил відносно будь-якої з точок, наприклад відносно точки C (рис. 1.16):

$$\begin{aligned} \sum M_C(P_i) &= -R_{Ax} \cdot 3 - M - P_x \cdot 3 - Q \cdot 2,5 + R_{By} \cdot 4 = \\ &= 12,38 \cdot 3 - 10 - 5 \cdot 3 - 15 \cdot 2,5 + 6,34 \cdot 4 = 0. \end{aligned}$$

Умова виконується, відповідно реакції визначено вірно.

Відповідь: $R_{Ax} = -12,38 \text{ кН}$, $R_{Bx} = 7,38 \text{ кН}$, $R_{By} = 6,34 \text{ кН}$.

Приклад розв'язання задачі №2

Дано: схема (рис. 1.17); $P = 8 \text{ кН}$; $q = 4 \text{ кН/м}$; $M = 20 \text{ кНм}$; $\alpha = 45 \text{ град}$.

Знайти: реакції опор.

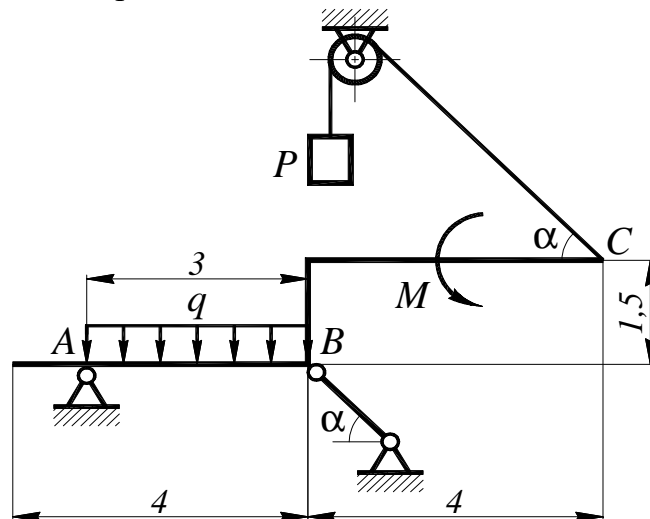


Рисунок 1.17 – Вихідна схема до завдання

Розв'язання

1. Виконуємо аналіз заданої конструкції (рис. 1.17).

Конструкція представлена у вигляді ломаного стрижня, закріпленого в двох точках A і B . В точці A конструкція закріплена шарнірно-нерухомою опорою, в точці B – за допомогою стрижня (шарнірно-рухомою опорою). Конструкція навантажена зовнішніми факторами, а саме моментом M , рівномірно-розподіленим навантаженням інтенсивністю q , також за допомогою нерозтяжної гнучкої нитки, перекинutoї через блок, під кутом α до конструкції підвішений вантаж P .

2. Перетворюємо задану систему (рис. 1.17) на еквівалентну (рис. 1.18).

2.1. Використовуючи принцип звільнення від в'язей, замінюємо опори реакціями.

2.2. Вантаж P переносимо вздовж нитки в точку її закріплення до конструкції C та розкладаємо на складові, обчислюємо величину проекції сили на осі декартової системи координат Ox та Oy :

$$P_x = P \cdot \cos \alpha = 8 \cdot \cos 45^\circ = 8 \cdot 0,707 = 5,656 \text{ кН};$$

$$P_y = P \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = 8 \cdot \cos 45^\circ = 8 \cdot 0,707 = 5,656 \text{ кН}.$$

2.3. Рівномірно розподілене навантаження замінюємо еквівалентною зосередженою силою Q :

$$Q = q \cdot l = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кН}.$$

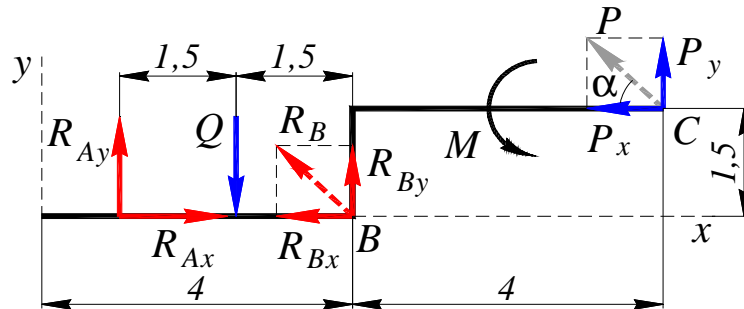


Рисунок 1.18 – Еквівалентна система

3. Визначаємо реакції опор.

Невідомими є реакції опор R_{Ax} , R_{Ay} , та R_B (на рис. 1.18 зображені червоним кольором). Причому реакцію R_B розкладаємо на складові R_{Bx} та R_{By} , після визначення будь-якої зі складових зможемо знайти R_B .

За умовою задачі, система знаходиться в положенні статичної рівноваги, відповідно можемо записати систему з трьох рівнянь рівноваги твердого тіла на площині:

$$\begin{cases} \sum P_{ix} = 0; \\ \sum P_{iy} = 0; \\ \sum M(P_i) = 0. \end{cases}$$

Запишемо рівняння рівноваги для системи (рис. 1.18):

$$\begin{cases} \sum P_{ix} = R_{Ax} - R_{Bx} - P_x = 0; \\ \sum P_{iy} = R_{Ay} - Q + R_{By} + P_y = 0; \\ \sum M_A(P_i) = -Q \cdot 1,5 + R_{By} \cdot 3 + M + P_x \cdot 1,5 + P_y \cdot 7 = 0. \end{cases}$$

Шляхом розв'язання рівнянь рівноваги, знаходимо невідомі реакції.

З першого рівняння запишемо:

$$R_{Ax} - R_{Bx} = P_x.$$

З другого рівняння запишемо:

$$R_{Ay} + R_{By} = Q - P_y.$$

З третього рівняння знаходимо реакцію R_{Ax} :

$$R_{By} = \frac{Q \cdot 1,5 - M - P_x \cdot 1,5 - P_y \cdot 7}{3} = \frac{12 \cdot 1,5 - 20 - 5,656 \cdot 1,5 - 5,656 \cdot 7}{3} = -16,692 \text{ кН}.$$

Обчислюємо величину повної реакції R_B :

$$R_B = \frac{R_{By}}{\cos 45^\circ} = \frac{-16,692}{0,707} = -23,61 \text{ кН}.$$

Також можемо обчислити складову R_{Bx} :

$$R_{Bx} = R_B \cdot \cos 45^\circ = -23,61 \cdot 0,707 = -16,692 \text{ кН}$$

Примітка. Знак « \leftarrow » показує, що насправді сила реакції опори R_B направлена в протилежний бік, від обраного на схемі (рис. 1.18).

Підставляючи значення знайденої складової R_{By} в друге рівняння рівноваги, знайдемо R_{Ay} :

$$R_{Ay} = Q - P_y - R_{By} = 12 - 5,656 + 16,692 = 23,036 \text{ кН.}$$

З першого рівняння знаходимо R_{Ax} :

$$R_{Ax} = R_{Bx} + P_x = -16,692 + 5,656 = -11,036 \text{ кН.}$$

Примітка. Знак « \leftarrow » показує, що насправді сила реакції R_{Ax} направлена в протилежний бік, від обраного на схемі (рис. 1.18).

4. Виконуємо перевірку*

Перевіримо умову рівності нулю суми моментів всіх сил відносно будь-якої з точок, наприклад відносно точки C (рис. 1.18):

$$\begin{aligned} \sum M_C(P_i) &= -R_{Ay} \cdot 7 + R_{Ax} \cdot 1,5 + Q \cdot 5,5 - R_{Bx} \cdot 1,5 - R_{By} \cdot 4 + M = \\ &= -23,036 \cdot 7 - 11,036 \cdot 1,5 + 12 \cdot 5,5 + 16,692 \cdot 1,5 + 16,692 \cdot 4 + 20 = 0. \end{aligned}$$

Умова виконується, відповідно реакції визначено вірно.

Відповідь: $R_{Ax} = -11,036 \text{ кН}$, $R_{Ay} = 23,036 \text{ кН}$, $R_B = -23,61 \text{ кН}$.

2. ЗАДАЧА С2. ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТІЛА ПРИ РІЗНИХ ВАРІАНТАХ ЗАКРІПЛЕННЯ

Задача С2 є більш розширеним аналогом задачі С1. В даному завданні потрібно окрім визначення реакцій опор виконати також їх порівняння (аналіз) в залежності від типів опор. Тобто, іншими словами, задача С2 закріплює знання та навички набуті при вивченні першої задачі.

Теоретичне підґрунтя до задачі С2 повністю розкрито в розділі 1.1.

2.1. Завдання та вихідні дані

На схемах зображено три варіанти закріплення бруса, вісь якого – ломана лінія. Задане навантаження та розміри у всіх трьох випадках однакові.

Визначити реакції в опорах для того способу закріплення бруса, при якому вказана реакція має найменший модуль.

Вихідні схеми представлені на рис. 2.1 – 2.4, відповідні вихідні дані наведено в табл. 2.1 – 2.4. Розміри на рисунках вказані в метрах.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані до задачі С2 (набір 1)

Номер варіанту	P , кН	M , кНм	q , кН/м	Досліджувана реакція
1	12	8	4	R_{Ay}
2	22	7	6	M_A
3	17	10	3	R_{By}
4	7	4	3	R_{By}
5	12	6	–	R_{Bx}
6	8	4	3	M_A
7	4	6	4	R_{Ax}
8	22	12	6	R_B
9	12	8	–	R_{Ay}
10	4	6	4	R_{Ax}
11	6	12	3	R_B
12	12	7	4	R_{Ay}
13	22	14	4	R_{Ay}
14	17	6	5	R_{Ay}
15	12	7	4	R_{Ax}
16	14	8	4	M_A
17	22	6	5	R_{Ay}
18	16	6	4	R_{Ax}
19	18	8	3	R_B
20	12	–	6	R_{Ay}
21	22	12	4	M_A
22	8	8	3	R_{Ay}
23	12	6	4	M_A
24	6	5	3	R_{Ay}
25	12	12	4	R_{Ax}
26	22	7	4	M_A
27	12	8	3	R_{Ax}
28	22	12	4	R_{Ay}
29	27	–	3	M_A
30	22	12	4	R_B

Таблиця 2.2 – Вихідні дані до задачі С2 (набір 2)

Номер варіанту	P , кН	M , кНм	q , кН/м	Досліджувана реакція
1	8	4	5	R_{Ay}
2	18	3	2	M_A
3	12	6	4	R_{By}
4	3	6	4	R_{By}
5	8	3	–	R_{Bx}
6	6	5	4	M_A
7	5	6	3	R_{Ax}
8	16	7	3	R_B
9	8	4	–	R_{Ay}
10	6	7	5	R_{Ax}
11	5	11	4	R_B
12	14	8	5	R_{Ay}
13	18	10	5	R_{Ay}
14	12	3	6	R_{Ay}
15	8	4	1	R_{Ax}
16	10	5	3	M_A
17	17	3	2	R_{Ay}
18	12	3	3	R_{Ax}
19	15	5	2	R_B
20	8	–	3	R_{Ay}
21	18	8	3	M_A
22	5	5	2	R_{Ay}
23	8	3	3	M_A
24	5	6	2	R_{Ay}
25	8	8	3	R_{Ax}
26	15	4	3	M_A
27	8	5	2	R_{Ax}
28	18	7	3	R_{Ay}
29	20	–	2	M_A
30	18	12	3	R_B

Таблиця 2.3 – Вихідні дані до задачі С2 (набір 3)

Номер варіанту	P , кН	M , кНм	q , кН/м	Досліджувана реакція
1	8	8	2	R_{Ay}
2	18	7	4	M_A
3	12	10	1	R_{By}
4	3	4	1	R_{By}
5	8	6	–	R_{Bx}
6	6	4	1	M_A
7	5	6	2	R_{Ax}
8	16	12	4	R_B
9	8	8	–	R_{Ay}
10	6	6	2	R_{Ax}
11	7	12	1	R_B
12	14	7	2	R_{Ay}
13	18	14	2	R_{Ay}
14	12	6	3	R_{Ay}
15	8	7	2	R_{Ax}
16	10	8	2	M_A
17	17	6	3	R_{Ay}
18	12	6	2	R_{Ax}
19	15	8	1	R_B
20	8	–	4	R_{Ay}
21	18	12	2	M_A
22	5	8	1	R_{Ay}
23	8	6	2	M_A
24	5	5	1	R_{Ay}
25	8	12	2	R_{Ax}
26	15	7	2	M_A
27	8	8	1	R_{Ax}
28	18	12	2	R_{Ay}
29	20	–	1	M_A
30	18	12	2	R_B

Таблиця 2.4 – Вихідні дані до задачі С2 (набір 4*)

Номер варіанту	P , кН	M , кНм	q , кН/м	Досліджувана реакція
1	10	6	2	R_{Ay}
2	20	5	4	M_A
3	15	8	1	R_{By}
4	5	2	1	R_{By}
5	10	4	–	R_{Bx}
6	6	2	1	M_A
7	2	4	2	R_{Ax}
8	20	10	4	R_B
9	10	6	–	R_{Ay}
10	2	4	2	R_{Ax}
11	4	10	1	R_B
12	10	5	2	R_{Ay}
13	20	12	2	R_{Ay}
14	15	4	3	R_{Ay}
15	10	5	2	R_{Ax}
16	12	6	2	M_A
17	20	4	3	R_{Ay}
18	14	4	2	R_{Ax}
19	16	6	1	R_B
20	10	–	4	R_{Ay}
21	20	10	2	M_A
22	6	6	1	R_{Ay}
23	10	4	2	M_A
24	4	3	1	R_{Ay}
25	10	10	2	R_{Ax}
26	20	5	2	M_A
27	10	6	1	R_{Ax}
28	20	10	2	R_{Ay}
29	25	–	1	M_A
30	20	10	2	R_B

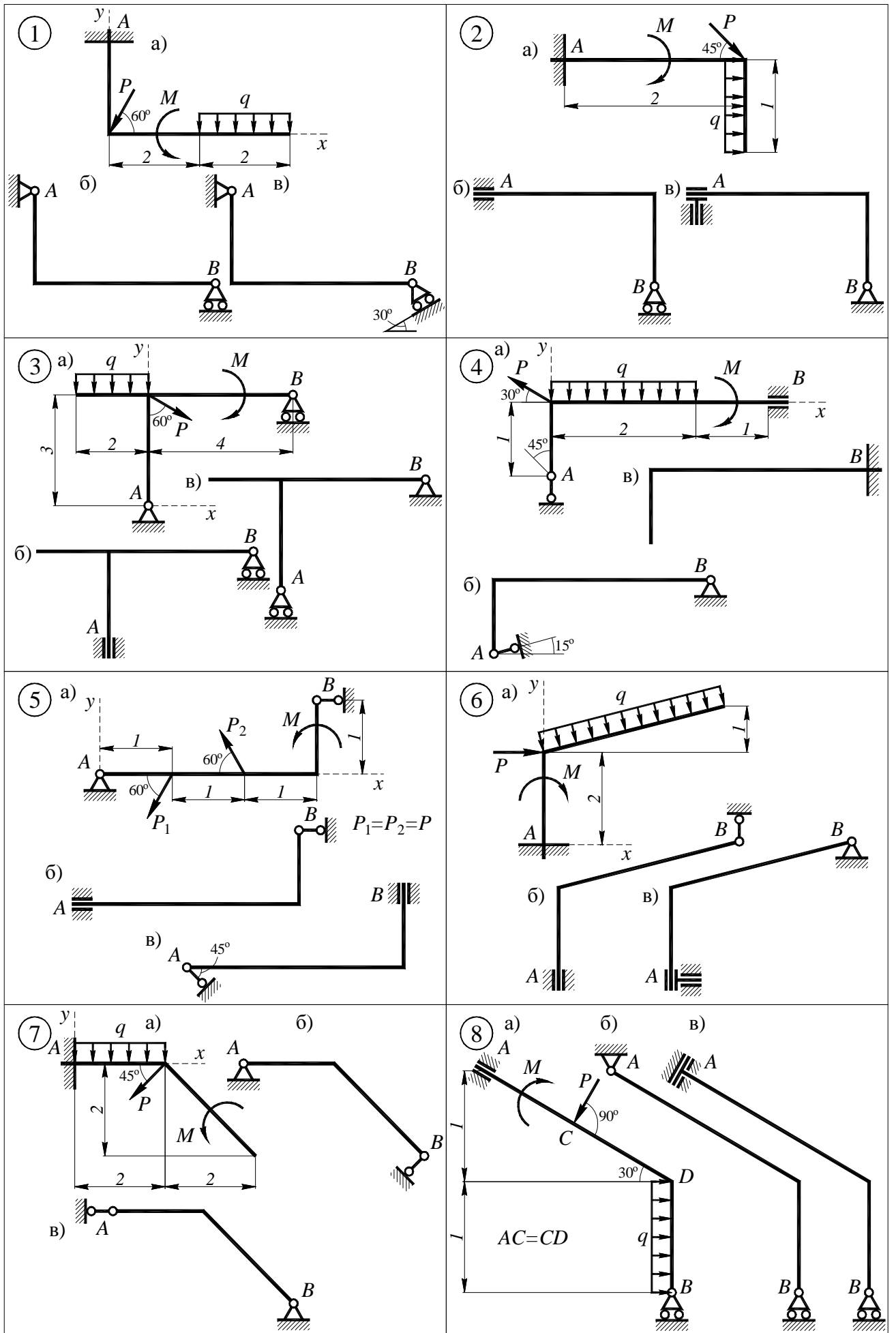


Рисунок 2.1 – Вихідні схеми до задачі С2 (1-8)

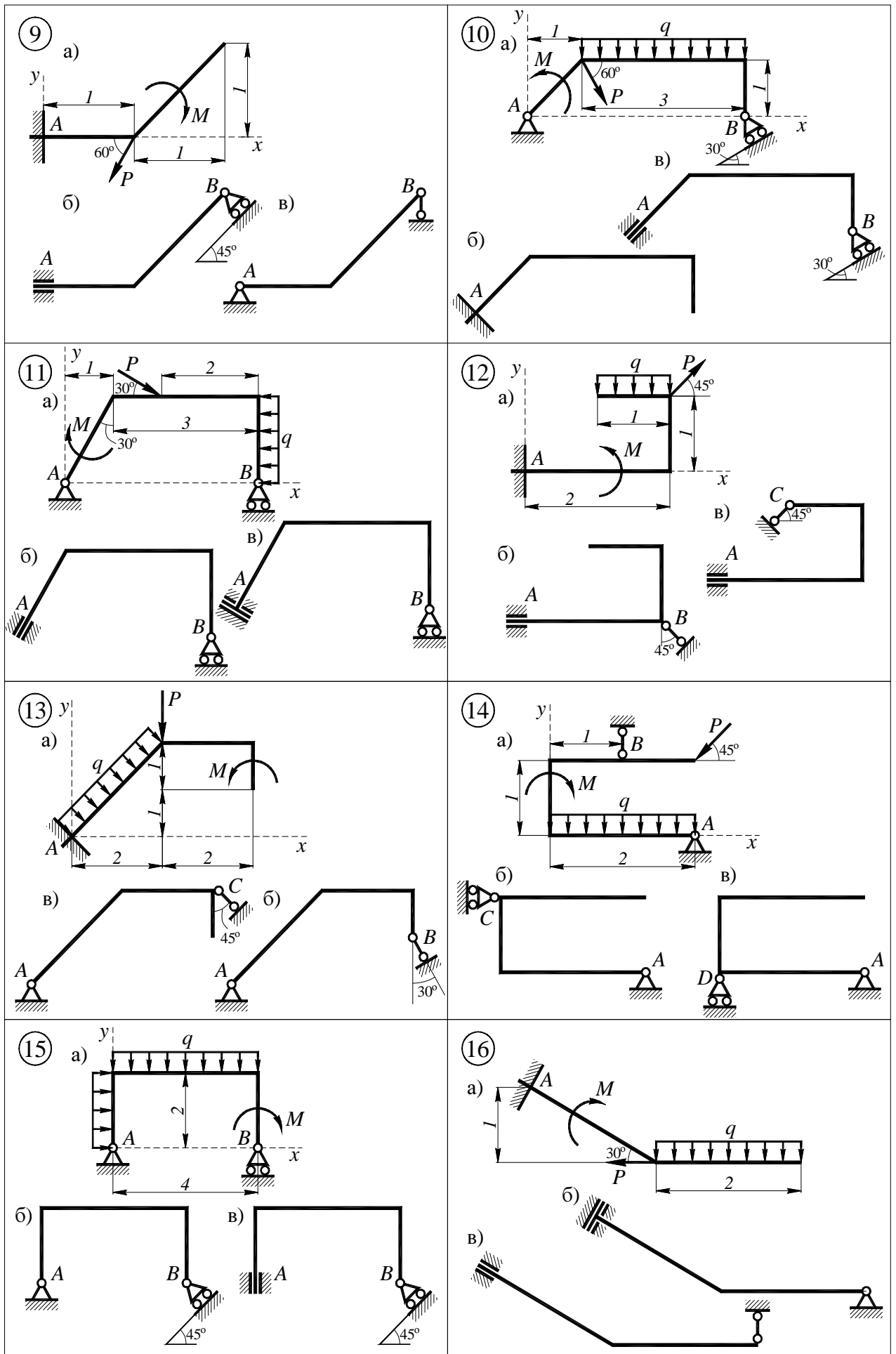


Рисунок 2.2 – Вихідні схеми до задачі C2 (9-16)

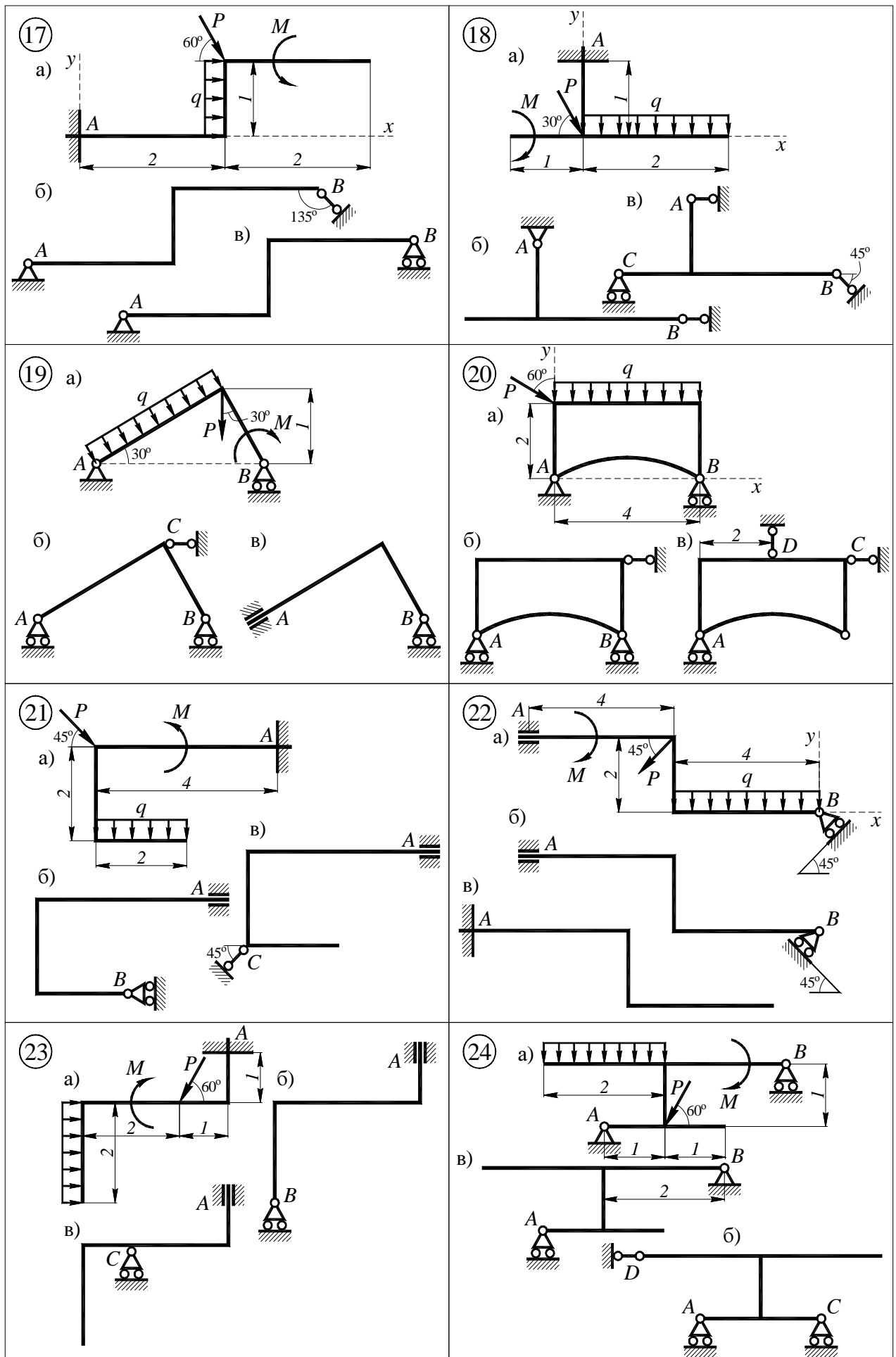


Рисунок 2.3 – Вихідні схеми до задачі С2 (17-24)

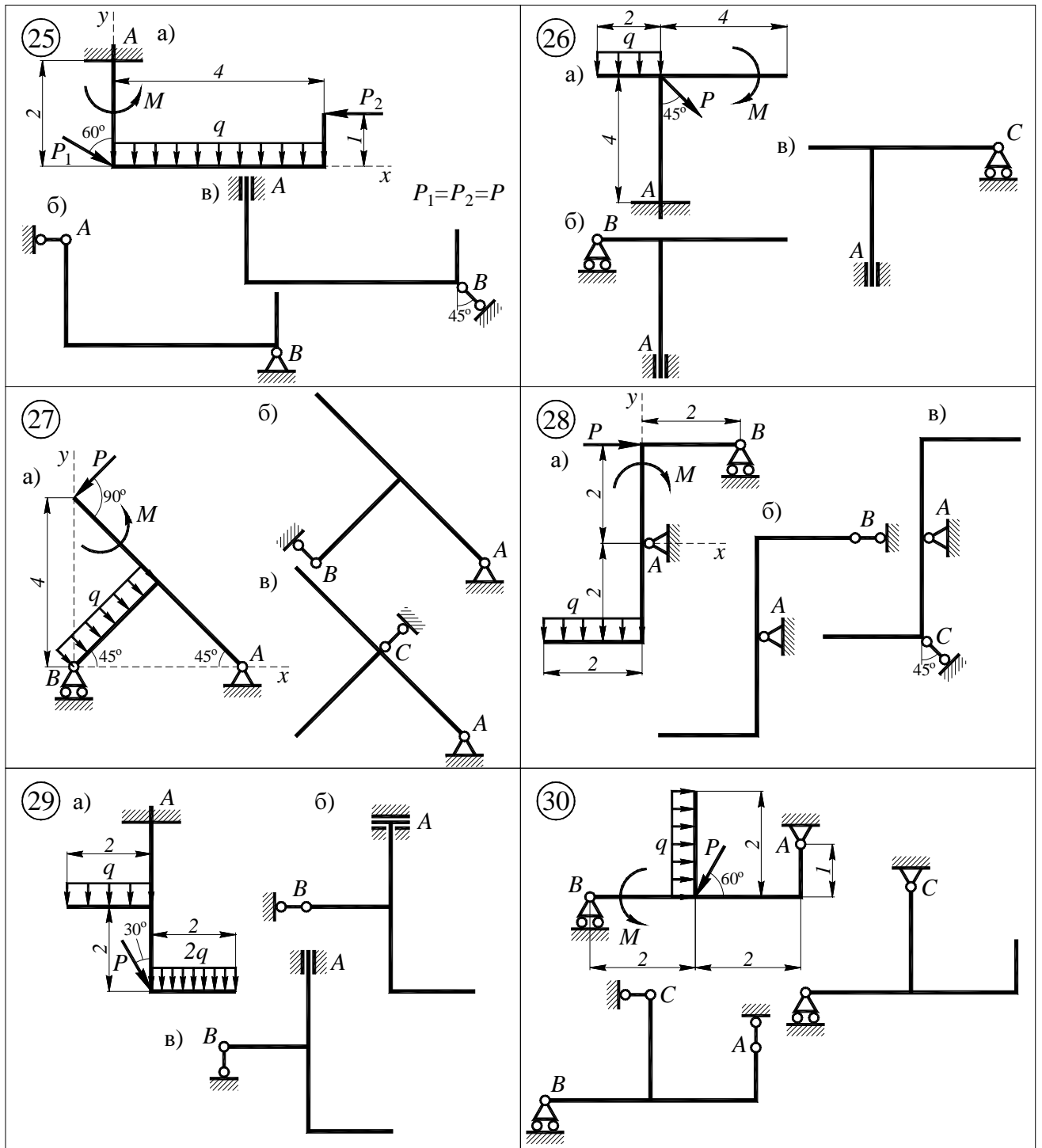


Рисунок 2.4 – Вихідні схеми до задачі С2 (25-30)

2.2. Алгоритм розв'язання задачі С2

Задачі на рівновагу (визначення реакцій опор) твердого тіла при наявності довільної плоскої системи сил та при різних варіантах закріплення конструкції, рекомендується розв'язувати в наступній послідовності:

1) виділити тверде тіло (конструкцію), рівновагу якого потрібно дослідити;

2) виконати аналіз заданої конструкції, визначити типи в'язей (опор) в кожному з трьох варіантів закріплень (а, б, в);

3) обрати найбільш зручну систему осей декартових координат;

4) звести задану систему до еквівалентної:

4.1) базуючись на принципі звільнення від в'язей, замінити опори реакціями;

4.2) рівномірно-розподілене навантаження замінити еквівалентною зосередженою силою;

4.3) якщо до конструкції прикладена сила під деяким кутом – розкласти її на складові, тобто визначити її проекції на осі декартової системи координат Ox та Oy ;

5) визначити значення заданої досліджуваної реакції для всіх трьох варіантів закріплень:

5.1) для кожної схеми, необхідно скласти рівняння рівноваги таким чином, щоб в них залишилися лише одна невідома – досліджувана реакція;

5.2) розв'язати рівняння для кожної схеми відносно досліджуваної реакції;

5.3) порівняти результати та обрати схему з найменшим модулем заданої реакції;

6) для еквівалентної системи з найменшим значенням досліджуваної реакції записати систему рівнянь рівноваги твердого тіла на площині;

7) розв'язати систему рівнянь відносно невідомих та визначити дві відповідні реакції;

8) записати відповідь у вигляді таблиці.

2.3. Приклади розв'язання задачі С2

В завданнях типу С2 необхідно визначити реакції в опорах твердого тіла, що знаходиться в положенні статичної рівноваги, для того варіанту закріплення, при якому вказана в завданні досліджувана реакція має найменше значення.

Розглянемо декілька прикладів розв'язання задачі С2

Приклад розв'язання задачі №1

Дано: схема (рис. 2.5); $P = 10$ кН; $q = 3$ кН/м; $M = 16$ кНм,

досліджувана реакція – R_{Ax} .

Знайти: реакції опор при найменшому значенні R_{Ax} .

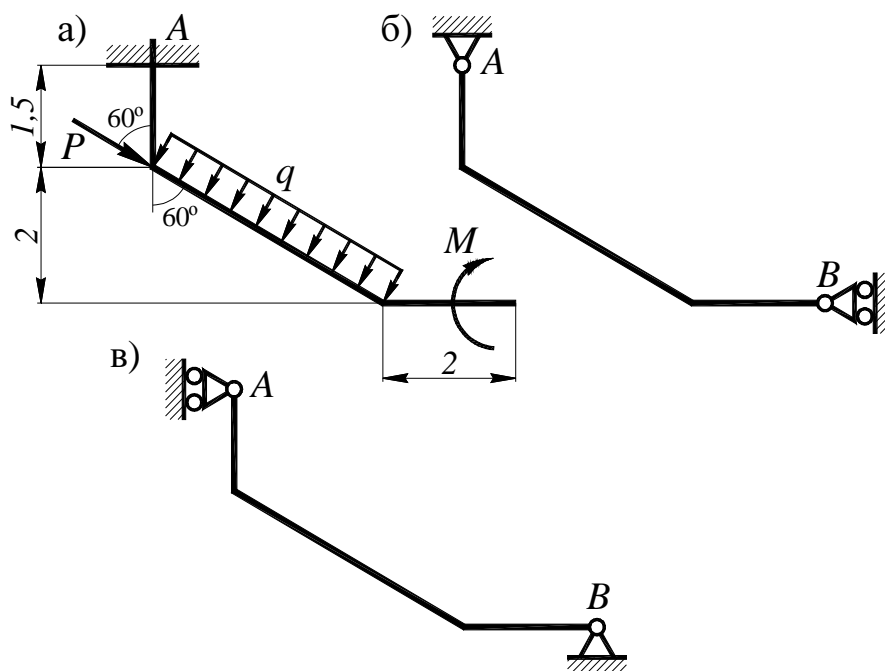


Рисунок 2.5 – Вихідна схема до завдання

Розв'язання

1. Виконуємо аналіз заданої конструкції (рис. 2.5).

Конструкція представлена у вигляді ломаного стрижня, закріпленого різними варіантами опор. В першому випадку (а), конструкція закріплена в точці А опорою жорстке защемлення. В другому випадку (б), конструкція закріплена в двох точках А і В, в точці А – шарнірно-нерухомою опорою, а в точці В – шарнірно-рухомою опорою. В третьому випадку (в), конструкція закріплена в двох точках А і В, в точці А – шарнірно-рухомою опорою, а в точці В – опорою ковзаюче защемлення. Конструкція навантажена зовнішніми факторами, а саме моментом M , рівномірно-розподіленим навантаженням інтенсивністю q , та силою P .

2. Перетворюємо задану систему (рис. 1) на еквівалентну (рис. 2.6).

2.1. Використовуючи принцип звільнення від в'язей, замінюємо опори реакціями.

2.2. Силу P розкладаємо на складові, обчислюємо проекції сили на осі декартової системи координат Oy та Ox :

$$P_y = P \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН};$$

$$P_x = P \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}.$$

2.3. Рівномірно розподілене навантаження замінюємо еквівалентною зосередженою силою Q :

$$Q = q \cdot l = 3 \cdot (2 / \cos 60^\circ) = 3 \cdot 4 = 12 \text{ кН}.$$

Обчислюємо проекції сили Q на осі декартової системи координат Oy та Ox :

$$Q_x = Q \cdot \cos 60^\circ = 12 \cdot 0,5 = 6 \text{ кН};$$

$$Q_y = Q \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot 0,866 = 10,392 \text{ кН.}$$

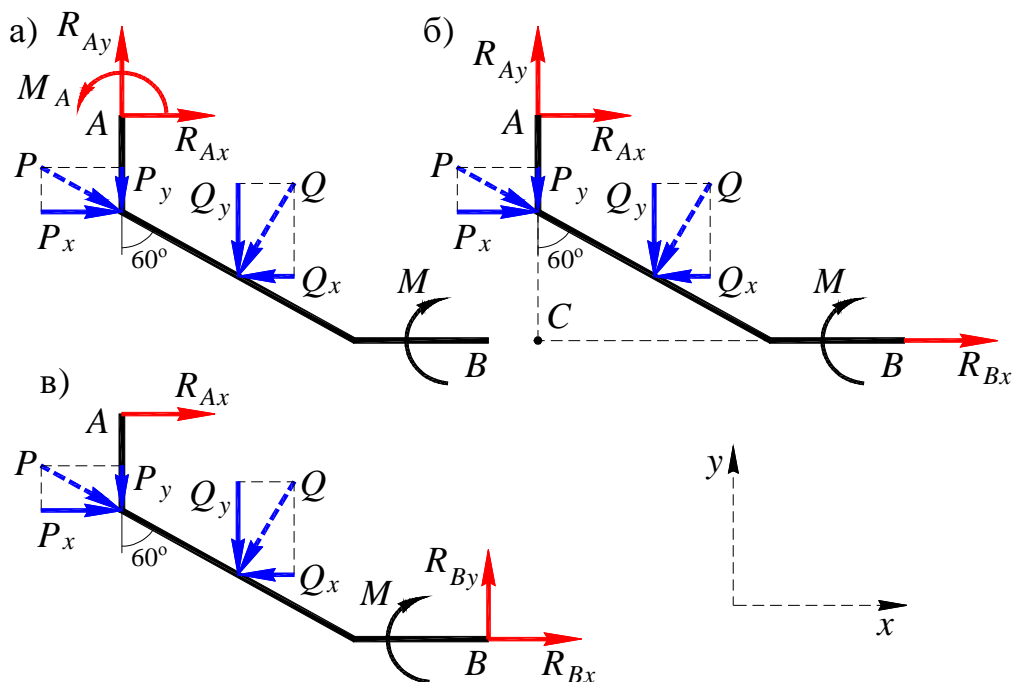


Рисунок 2.6 – Еквівалентна система

3. Визначаємо значення досліджуваної реакції R_{Ax} для трьох різних варіантів закріплень конструкції (рис. 2.6).

Окремо для кожного з варіантів закріплень (а, б, в) визначимо R_{Ax} . Для цього необхідно скласти по одному рівнянні рівноваги для кожного з випадків, причому таким чином, щоб ці рівняння містили саме одну невідому – R_{Ax} .

При способі закріплення (а), можемо скласти рівняння суми проекцій всіх сил на вісь x :

$$\sum P_{ix} = 0; R_{Ax} + P_x - Q_x = 0.$$

З цього рівняння знаходимо значення досліджуваної реакції:

$$R_{Ax} = Q_x - P_x = 6 - 8,66 = -2,66 \text{ кН.}$$

Примітка. Знак « \leftarrow » показує, що насправді сила реакції опори R_{Ax} в схемі закріплення (а) направлена в протилежний бік, від обраного на схемі (рис. 2.6,а).

Розглянемо варіант закріплення (б), складемо рівняння суми моментів всіх сил відносно точки C :

$$\sum M_C(P_i) = 0; -R_{Ax} \cdot 3,5 - P_x \cdot 2 + Q_x \cdot 1 - Q_y \cdot (2 \cdot \cos 30^\circ) - M = 0.$$

З цього рівняння знаходимо значення досліджуваної реакції:

$$\begin{aligned} R_{Ax} &= \frac{Q_x - Q_y \cdot (2 \cdot \cos 30^\circ) - P_x \cdot 2 - M}{3,5} = \\ &= \frac{6 - 10,392 \cdot 2 \cdot 0,866 - 8,66 \cdot 2 - 16}{3,5} = -12,95 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Розглянемо варіант закріплення (в), складемо рівняння суми моментів всіх сил відносно точки B :

$$\sum M_B(P_i) = 0;$$

$$-R_{Ax} \cdot 3,5 - P_x \cdot 2 + P_y \cdot (4 \cdot \cos 30^\circ + 2) + Q_x \cdot 1 + Q_y \cdot (2 \cdot \cos 30^\circ + 2) - M = 0.$$

З цього рівняння знаходимо значення досліджуваної реакції:

$$R_{Ax} = \frac{P_y \cdot (4 \cdot \cos 30^\circ + 2) + Q_x + Q_y \cdot (2 \cdot \cos 30^\circ + 2) - P_x \cdot 2 - M}{3,5} =$$

$$= \frac{5 \cdot (4 \cdot 0,866 + 2) + 6 + 10,392 \cdot (2 \cdot 0,866 + 2) - 8,66 \cdot 2 - 16}{3,5} = 11,08 \text{ кН.}$$

Таким чином, найменше значення реакції виходить при закріпленні конструкції за схемою (а). Для цієї схеми необхідно визначити значення всіх реакцій опор.

4. Визначаємо реакції опор для схеми (а).

Невідомими залишились реакції опор R_{Ay} та M_A (на рис. 2.6,а зображені червоним кольором).

Як відомо, для системи, що знаходиться в положенні статичної рівноваги, можемо записати систему з трьох рівнянь рівноваги твердого тіла на площині. Для знаходження невідомих реакцій вирішимо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \sum P_{iy} = 0; \\ \sum M(P_i) = 0. \end{cases}$$

Запишемо рівняння рівноваги для системи (рис. 2.6,а):

$$\begin{cases} \sum P_{iy} = R_{Ay} - P_y - Q_y = 0; \\ \sum M_A(P_i) = M_A + P_x \cdot 1,5 - Q_y \cdot (2 \cdot \cos 30^\circ) - Q_x \cdot 2,5 - M = 0. \end{cases}$$

Примітка. Рівняння моментів запишемо відносно точки A , як більш зручної, адже в такому разі в рівнянні фігурує одна невідома – M_A .

Шляхом розв'язання рівнянь рівноваги, знаходимо невідомі реакції.

З першого рівняння запишемо:

$$R_{Ay} = P_y + Q_y = 5 + 10,392 = 15,392 \text{ кН.}$$

З другого рівняння можемо знайти величину реакції M_A :

$$M_A = Q_y \cdot (2 \cdot \cos 30^\circ) + Q_x \cdot 2,5 + M - P_x \cdot 1,5 =$$

$$= 10,392 \cdot (2 \cdot 0,866) + 6 \cdot 2,5 + 16 - 8,66 \cdot 1,5 = 36 \text{ кНм.}$$

5. Виконуємо перевірку*

Як було зазначено, задана система знаходиться в положенні статичної рівноваги, відповідно повинні виконуватися відповідні умови. Перевіримо умову рівності нулю суми моментів всіх сил відносно будь-якої з точок, наприклад відносно точки B (рис. 2.6):

$$\begin{aligned} \sum M_B(P_i) &= -R_{Ax} \cdot 3,5 - R_{Ay} \cdot (4 \cdot \cos 30^\circ + 2) + P_y \cdot (4 \cdot \cos 30^\circ + 2) + M_A - \\ &\quad - P_x \cdot 2 + Q_y \cdot (2 \cdot \cos 30^\circ + 2) + Q_x \cdot 1 - M = \\ &= 2,66 \cdot 3,5 - 15,392 \cdot (4 \cdot 0,866 + 2) + 5 \cdot (4 \cdot 0,866 + 2) + 36 - \\ &\quad - 8,66 \cdot 2 + 10,392 \cdot (2 \cdot 0,866 + 2) + 6 - 16 = 0. \end{aligned}$$

Умова виконується, відповідно можемо зробити висновок, що реакції визначено вірно.

Відповідь: значення досліджуваної реакції для всіх варіантів закріплень, а також реакцій для схеми (а) зведемо в таблицю:

Схема	Досліджувана реакція	Реакції	
	R_{Ax} , кН	R_{Ay} , кН	M_A , кНм
а	-2,66	15,392	36
б	-12,95	—	—
в	11,08	—	—

Приклад розв'язання задачі №2

Дано: схема (рис. 2.7); $P = 10$ кН; $q = 5$ кН/м; $M = 30$ кНм, досліджувана реакція – M_A .

Знайти: реакції опор при найменшому значенні M_A .

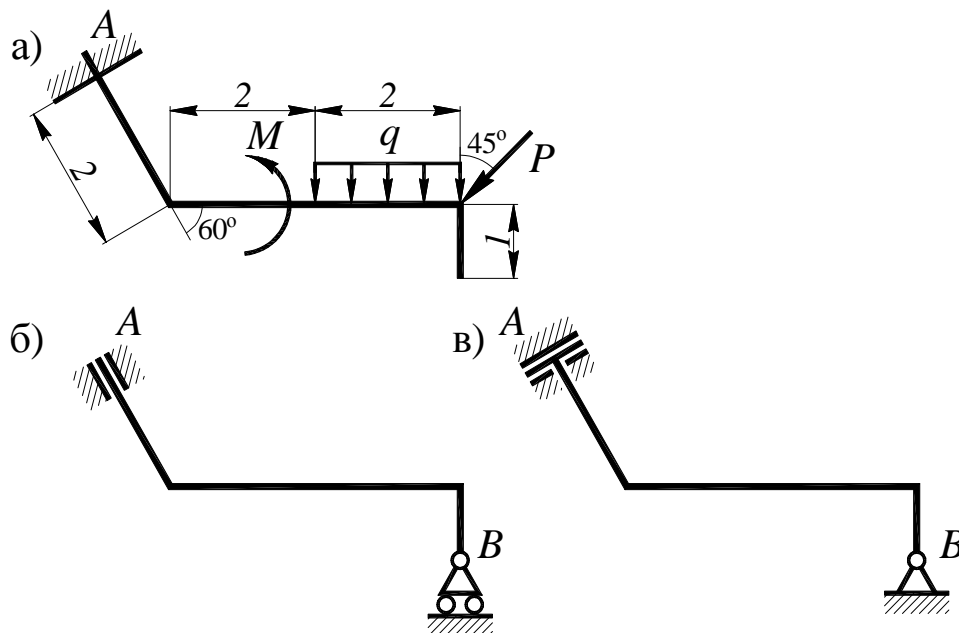


Рисунок 2.7 – Вихідна схема до завдання

Розв'язання

1. Виконуємо аналіз заданої конструкції (рис. 2.7).

Конструкція представлена у вигляді ломаного стрижня, закріпленого різними варіантами опор. В першому випадку (а), конструкція закріплена в точці А опорою – жорстке заземлення. В другому випадку (б), конструкція

закріплена в двох точках A і B , в точці A – ковзаюче защемлення, а в точці B – шарнірно-рухомою опорою. В третьому випадку (в), конструкція закріплена в двох точках A і B , в точці A – ковзаюче (біковзаюче) защемлення, а в точці B – шарнірно-нерухомою опорою. Конструкція навантажена зовнішніми факторами, а саме моментом M , рівномірно-розподіленим навантаженням інтенсивністю q , та силою P .

2. Перетворюємо задану систему (рис. 1) на еквівалентну (рис. 2.8).

2.1. Використовуючи принцип звільнення від в'язей, замінюємо опори реакціями.

2.2. Силу P розкладаємо на складові, обчислюємо проекції сили на осі декартової системи координат Oy та Ox :

$$P_y = P \cdot \cos 45^\circ = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ кН};$$

$$P_x = P \cdot \sin 45^\circ = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ кН}.$$

2.3. Рівномірно розподілене навантаження замінюємо еквівалентною зосередженою силою Q :

$$Q = q \cdot l = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН}.$$

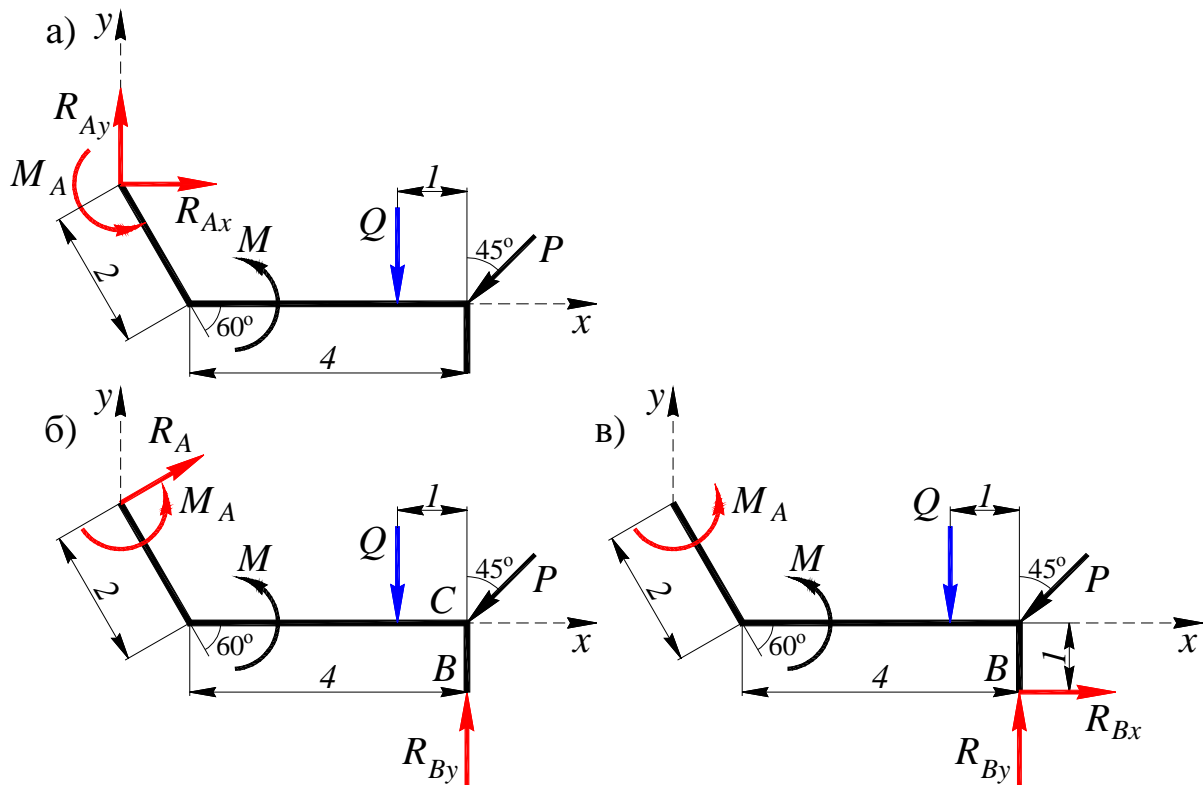


Рисунок 2.8 – Еквівалентна система

3. Визначаємо значення досліджуваної реакції M_A для трьох різних варіантів закріплень конструкції (рис. 2.8).

Окремо для кожного з варіантів закріплень (а, б, в) визначимо M_A . Для цього необхідно скласти рівняння рівноваги для кожного з випадків, причому таким чином, щоб ці рівняння містили саме одну невідому – M_A .

При способі закріплення (а), можемо скласти рівняння суми моментів всіх сил відносно точки A (рис. 2.8,а):

$$\sum M_A(P_i) = 0;$$

$$M_A + M - Q(2 \cdot \cos 60^\circ + 3) - P \cdot \cos 45^\circ(2 \cdot \cos 60^\circ + 4) - P \cdot \cos 45^\circ(2 \cdot \cos 30^\circ) = 0.$$

З цього рівняння знаходимо значення досліджуваної реакції:

$$M_A = -M + Q(2 \cdot \cos 60^\circ + 3) + P \cdot \cos 45^\circ(2 \cdot \cos 60^\circ + 4) + P \cdot \cos 45^\circ(2 \cdot \cos 30^\circ) = \\ = -30 + 10 \cdot (2 \cdot 0,5 + 3) + 10 \cdot 0,707 \cdot (2 \cdot 0,5 + 4) + 10 \cdot 0,707 \cdot (2 \cdot 0,866) = 57,6 \text{ кНм.}$$

Розглянемо варіант закріплення (б).

При даному варіанті закріплення, знаходження реакції M_A дещо ускладнюється, так як необхідно скласти рівняння рівноваги таким чином, щоб в нього не входили інші невідомі реакції R_A та R_{By} . Тобто рівняння моментів потрібно скласти відносно такої точки, що лежить на перетині ліній дії зазначених невідомих реакцій. При такому варіанті значно ускладниться пошук геометричних параметрів (плечей) для складання рівняння рівноваги.

Для спрощення задачі, спочатку визначимо одну з осьових реакцій в опорах, а потім складемо рівняння моментів відносно «зручної» точки та визначимо досліджувану реакцію M_A .

Складемо рівняння суми проекцій всіх сил на вісь x (рис. 2.8,б):

$$\sum P_{ix} = 0; R_A \cdot \cos 30^\circ - P \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

З цього рівняння знаходимо значення досліджуваної реакції:

$$R_A = \frac{P \cdot \cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{10 \cdot 0,707}{0,866} = 8,164 \text{ кН.}$$

Далі можемо скласти рівняння рівноваги для моментів всіх сил відносно, наприклад, точки C :

$$\sum M_C(P_i) = 0;$$

$$-R_A \cdot \cos 30^\circ \cdot (2 \cdot \cos 30^\circ) - R_A \cdot \cos 60^\circ \cdot (2 \cdot \cos 60^\circ + 4) + M_A + M + Q \cdot 1 = 0.$$

З цього рівняння знаходимо значення досліджуваної реакції:

$$M_A = R_A \cdot \cos 30^\circ \cdot (2 \cdot \cos 30^\circ) + R_A \cdot \cos 60^\circ \cdot (2 \cdot \cos 60^\circ + 4) - M - Q \cdot 1 = \\ = 8,164 \cdot 0,866 \cdot 2 \cdot 0,866 + 8,164 \cdot 0,5 \cdot (2 \cdot 0,5 + 4) - 30 - 10 = -7,34 \text{ кНм.}$$

Примітка. Знак «-» показує, що насправді сила реакції опори M_A в схемі закріплення (б) направлена в протилежний бік, від обраного на схемі (рис. 2.8,б).

Розглянемо варіант закріплення (в), складемо рівняння суми моментів всіх сил відносно точки B :

$$\sum M_B(P_i) = 0; M_A + M + Q \cdot 1 + P \cdot \cos 45^\circ \cdot 1 = 0.$$

Звідси знаходимо значення досліджуваної реакції M_A :

$$M_A = -M - Q \cdot 1 - P \cdot \cos 45^\circ \cdot 1 = \\ = -30 - 10 - 10 \cdot 0,707 = -47,07 \text{ кНм.}$$

Примітка. Знак «—» показує, що насправді сила реакції опори M_A в схемі закріплення (в) направлена в протилежний бік, від обраного на схемі (рис. 2.8,в).

Таким чином, найменше модуль реакції виходить при закріпленні конструкції за схемою (б). Для цієї схеми необхідно визначити також значення інших реакцій опор.

4. Визначаємо реакції опор для схеми (б).

Невідомою залишилась тільки реакція опори $B - R_{By}$ (рис. 2.8,б). Для знаходження невідомої реакції складаємо рівняння рівноваги суми проекції всіх сил на вісь y :

$$\sum P_{iy} = 0; R_A \cdot \cos 60^\circ - Q - P \cdot \cos 45^\circ + R_{By} = 0$$

Шляхом розв'язання рівняння рівноваги відносно невідомої реакції, знаходимо її:

$$\begin{aligned} R_{By} &= Q + P \cdot \cos 45^\circ - R_A \cdot \cos 60^\circ = \\ &= 10 + 10 \cdot 7,07 - 8,164 \cdot 0,5 = 12,988 \text{ кН}. \end{aligned}$$

5. Виконуємо перевірку для схеми (б)*

Так як задана система знаходиться в положенні статичної рівноваги, то відповідно повинні виконуватися відповідні умови рівноваги. Перевіримо умову рівності нулю суми моментів всіх сил відносно будь-якої з точок, наприклад відносно точки прикладання зосередженої сили Q (рис. 2.8,б):

$$\begin{aligned} \sum M_Q(P_i) &= M_A - R_A \cdot \cos 30^\circ \cdot (2 \cdot \cos 30^\circ) - R_A \cdot \cos 60^\circ \cdot (2 \cdot \cos 60^\circ + 3) + M - \\ &- P \cdot \cos 45^\circ \cdot 1 + R_{By} \cdot 1 = -7,34 - 8,164 \cdot 0,866 \cdot 2 \cdot 0,866 - 8,164 \cdot 0,5 \cdot (2 \cdot 0,5 + 3) + 30 - \\ &- 10 \cdot 0,707 \cdot 1 + 12,988 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Умова виконується, відповідно можемо зробити висновок, що реакції визначено вірно.

Відповідь: значення досліджуваної реакції для всіх варіантів закріплень, а також реакцій для схеми (б) зведемо в таблицю:

Схема	Досліджувана реакція	Реакції	
	M_A , кН	R_A , кН	R_{By} , кНм
а	57,6	8,164	12,988
б	-7,34	—	—
в	-47,07	—	—

3. ЗАДАЧА СЗ. ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТІЛА (СИСТЕМА ДВОХ ТІЛ)

3.1. Короткі теоретичні відомості

В статиці твердого тіла, наряду з рівновагою одного тіла, розглядаються **поєднані системи матеріальних тіл**, тобто сукупності твердих тіл, дотичних один до одного своїми поверхнями, або з'єднаних між собою шарнірами, гнучкими нитками та стержнями.

Важливою задачею статики системи твердих тіл є визначення реакції в'язей (опор). Для цього основним являється **спосіб розчленування**, при якому наряду з рівновагою всієї системи тіл **розглядається рівновага окремих тіл** (або груп тіл системи). При цьому **всі інші тіла системи та відповідні в'язі подумки відкидаються, а їх дія на тіло, рівновага якого досліджується, замінюється реакціями**.

Варто зазначити, що при дослідженні рівноваги всієї системи твердих тіл, реакції в'язей між тілами, що входять в систему, **не повинні враховуватися та входять в рівняння рівноваги, як внутрішні, взаємно-зрівноважені сили**. А при розгляді рівноваги кожного тіла окремо, або будь-якої групи тіл, що входять в систему, відповідні реакції в'язей, які були подумки розчленовані, **стають зовнішніми силами та входять в рівняння рівноваги**.

Розглянемо в якості прикладу систему твердих тіл (рис. 3.1).

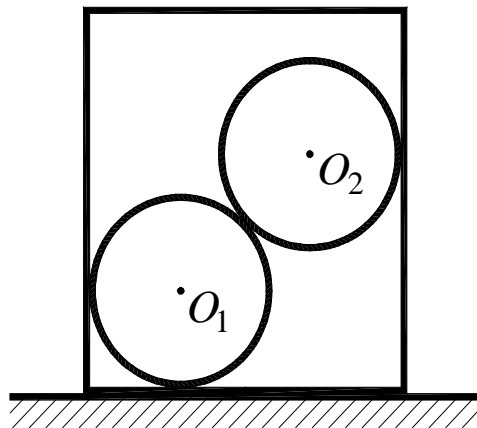


Рисунок 3.1

Всередині циліндричної поверхні (рис. 3.1) розташовані дві кулі. Ця система складається з трьох твердих тіл, кулі O_1 , кулі O_2 та циліндричної поверхні, що контактують один з одним. На дану систему накладена одна зовнішня в'язь – гладка горизонтальна підлога.

При розв'язанні задач рівноваги системи тіл недостатньо, як правило, розглядати рівновагу всієї системи в цілому. Для всієї системи умови рівноваги зводяться або до трьох рівнянь рівноваги для плоскої системи сил, або до двох рівнянь для плоскої системи паралельних сил. В цьому випадку число невідомих може бути більшим перерахованих рівнянь.

Однак за таких умов система ще не стає статично-невизначеною, так як якщо розділити систему на окремі тверді тіла та скласти рівняння рівноваги для кожного з них, то число нових невідомих реакцій може бути менше числа

нових рівнянь рівноваги. Якщо число всіх складених таким чином незалежних рівнянь рівноваги для всієї системи та окремих її частин буде рівно числу всіх невідомих, то така задача є статично-визначеною.

Розглянемо вищевикладений матеріал на прикладі (рис. 3.2).

Міст складається з двох частин, з'єднаних між собою шарніром C та прикріплених до берегових упорів шарнірами A і B (трьохшарнірна арка). Вага кожної частини мосту $G_1 = G_2$, їх центри тяжіння D і E . На мосту знаходяться два вантажі у вигляді рівномірно-розподіленого навантаження q_1 та q_2 .

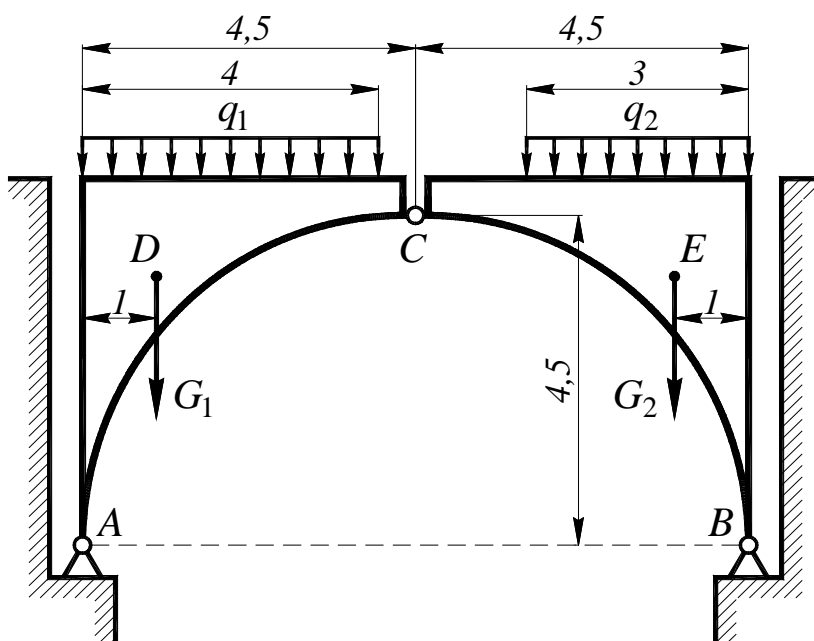


Рисунок 3.2

Застосовуючи принцип звільнення від в'язей, подумки відкинемо шарнірно-нерухомі опори в точках A і B та замінимо їх дію силами реакцій. Таким чином для системи твердих тіл, що складається з двох напіварок (рис. 3.3), можна скласти три рівняння рівноваги, в той час як число невідомих реакцій дорівнює чотирьом. Тим не менше, задача є статично-визначеною.

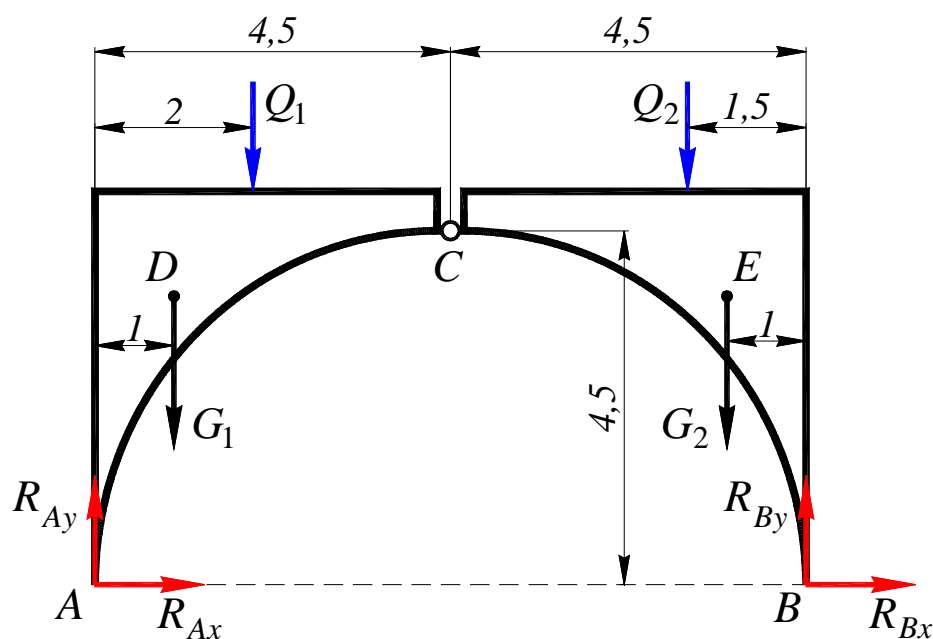


Рисунок 3.3

Розглянемо рівновагу будь-якої однієї частини мосту (рис. 3.4).

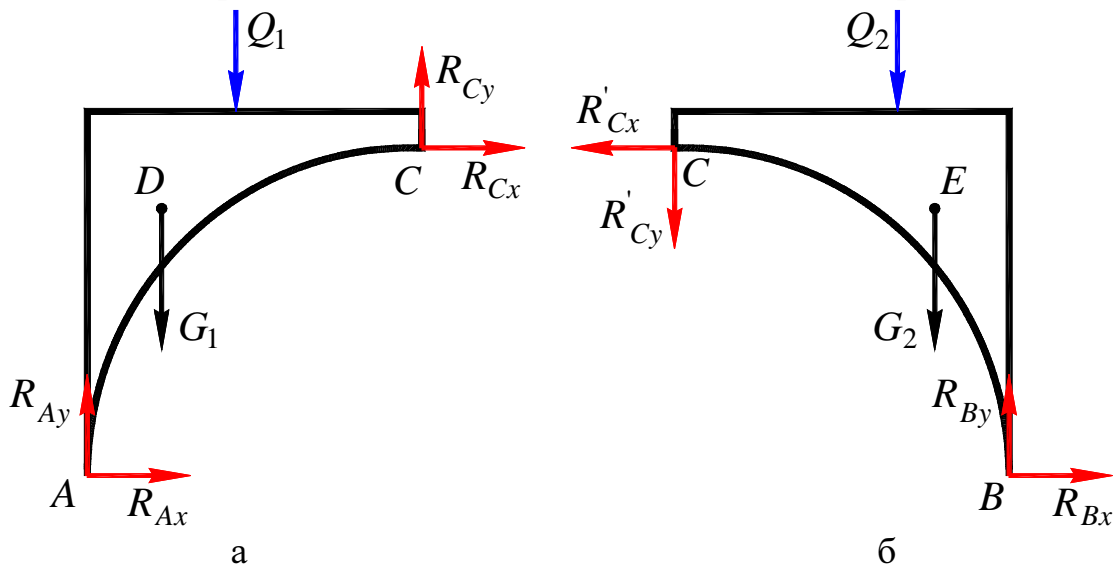


Рисунок 3.4

На ліву напіварку діють задані сила тяжіння G_1 та зосереджена сила Q_1 , що еквівалентна рівномірно-розподіленому навантаженню q_1 . Відкидаючи подумки шарніри A і C разом з правою напіваркою, замінюємо їх дію силами реакцій. Реакція в точці A представлена двома вже раніше обраними складовими R_{Ax} та R_{Ay} , реакція в точці C також невідома по величині та за напрямком, визначається складовими R_{Cx} та R_{Cy} . Для лівою частини можна скласти три рівняння рівноваги, тоді як нових невідомих тільки дві R_{Cx} та R_{Cy} . Таким чином, розглядаючи рівняння всього мосту (арки) та окремо його лівою частини, отримаємо шість рівнянь рівноваги та шість невідомих, тобто задача є статично-визначеною. Ця ж задача може бути розв'язана й іншим способом, якщо розглянути рівновагу лівою частини (рис. 3.4,а) та окремо рівновагу правої частини (рис. 3.4,б). І в такому випадку число рівнянь рівноваги дорівнює числу невідомих (шести).

На основі п'ятої аксіоми статички (принцип рівності дії та протидії) складові R'_{Cx} та R'_{Cy} реакції проміжного шарніра C , прикладені до правої частини мосту, рівні за модулем та направлені прямо протилежно відповідним складовим R_{Cx} та R_{Cy} реакції того ж шарніра C , прикладеним до лівою частини мосту:

$$\vec{R}'_{Cx} = -\vec{R}_{Cx}; \vec{R}'_{Cy} = -\vec{R}_{Cy}.$$

Примітка. Задача називається **статично-визначеною**, якщо число невідомих дорівнює числу незалежних рівнянь рівноваги. Якщо ж число невідомих перевищує число незалежних рівнянь рівноваги, то задача називається **статично-невизначеною** (не може бути розв'язана методами статички), зазвичай задачі такого типу розглядаються в курсі «Опір матеріалів», з урахуванням можливих деформацій конструкції.

3.2. Завдання та вихідні дані

Визначити реакції опор та тиск в проміжному шарнірі складеної конструкції. Схеми конструкцій представлені на рис. 3.5 – 3.7. Вихідні дані наведені в табл. 3.1 – 3.4.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані до задачі С3 (набір 1)

Номер варіанту	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кНм	q , кН/м
1	12	–	26	7
2	9	10	20	–
3	10	12	28	9
4	12	–	32	8
5	14	–	31	7
6	13	16	–	6
7	15	10	24	5
8	13	7	22	4
9	12	–	26	5
10	9	–	28	6
11	13	6	31	7
12	12	7	25	8
13	8	12	21	9
14	10	–	29	8
15	9	11	23	7
16	12	8	30	6
17	10	13	27	5
18	11	14	23	4
19	9	10	33	5
20	11	14	28	6
21	12	15	29	7
22	14	20	31	8
23	16	15	30	9
24	11	20	25	8
25	14	16	34	7
26	13	13	19	6
27	8	10	32	5
28	15	15	29	4
29	13	8	31	5
30	14	20	28	7

Таблиця 3.2 – Вихідні дані до задачі С3 (набір 2)

Номер варіанту	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кНм	q , кН/м
1	10	–	28	5
2	8	12	25	–
3	11	8	22	6
4	16	–	27	5
5	10	–	28	4
6	12	12	–	4
7	14	9	20	4
8	14	10	28	5
9	10	–	20	5
10	12	–	22	4
11	16	8	30	5
12	14	12	32	5
13	10	12	20	4
14	8	–	26	6
15	8	8	20	4
16	10	12	28	4
17	12	8	25	2
18	8	14	22	5
19	10	16	32	2
20	12	18	29	2
21	11	10	28	2
22	16	12	33	5
23	12	10	35	5
24	12	12	24	5
25	10	8	31	4
26	16	16	20	2
27	10	8	34	4
28	14	14	28	5
29	12	10	36	5
30	16	8	30	4

Таблиця 3.3 – Вихідні дані до задачі С3 (набір 3)

Номер варіанту	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кНм	q , кН/м
1	11	–	22	8
2	10	15	28	–
3	12	14	32	8
4	14	–	24	7
5	15	–	25	5
6	11	14	–	5
7	13	12	22	6
8	15	8	30	8
9	13	–	25	4
10	12	–	20	5
11	14	10	32	8
12	13	9	30	6
13	12	16	27	5
14	9	–	24	8
15	12	10	22	5
16	9	14	29	7
17	13	15	28	4
18	12	11	25	5
19	8	8	30	4
20	10	14	34	6
21	12	12	31	4
22	8	15	32	8
23	10	12	34	5
24	13	15	29	8
25	12	10	30	5
26	14	14	21	4
27	12	13	35	6
28	10	10	31	8
29	11	12	33	7
30	12	14	32	9

Таблиця 3.4 – Вихідні дані до задачі С3 (набір 4*)

Номер варіанту	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кНм	q , кН/м
1	6	–	25	0,8
2	5	8	26	–
3	8	10	33	1,1
4	10	–	25	1,3
5	12	–	27	1,0
6	14	12	–	0,8
7	16	8	18	1,4
8	12	6	20	1,0
9	14	–	28	1,4
10	8	–	26	0,9
11	15	10	29	1,0
12	15	8	28	1,5
13	7	6	23	1,1
14	5	–	30	0,9
15	6	10	21	1,5
16	8	11	31	0,8
17	9	15	26	1,1
18	7	16	27	0,8
19	6	18	35	1,4
20	7	16	32	0,8
21	8	17	30	1,2
22	5	6	34	1,5
23	14	10	36	1,2
24	10	13	28	1,3
25	11	10	33	1,0
26	15	15	18	1,4
27	11	14	36	2,5
28	12	12	30	1,1
29	10	9	35	1,3
30	9	10	29	1,5

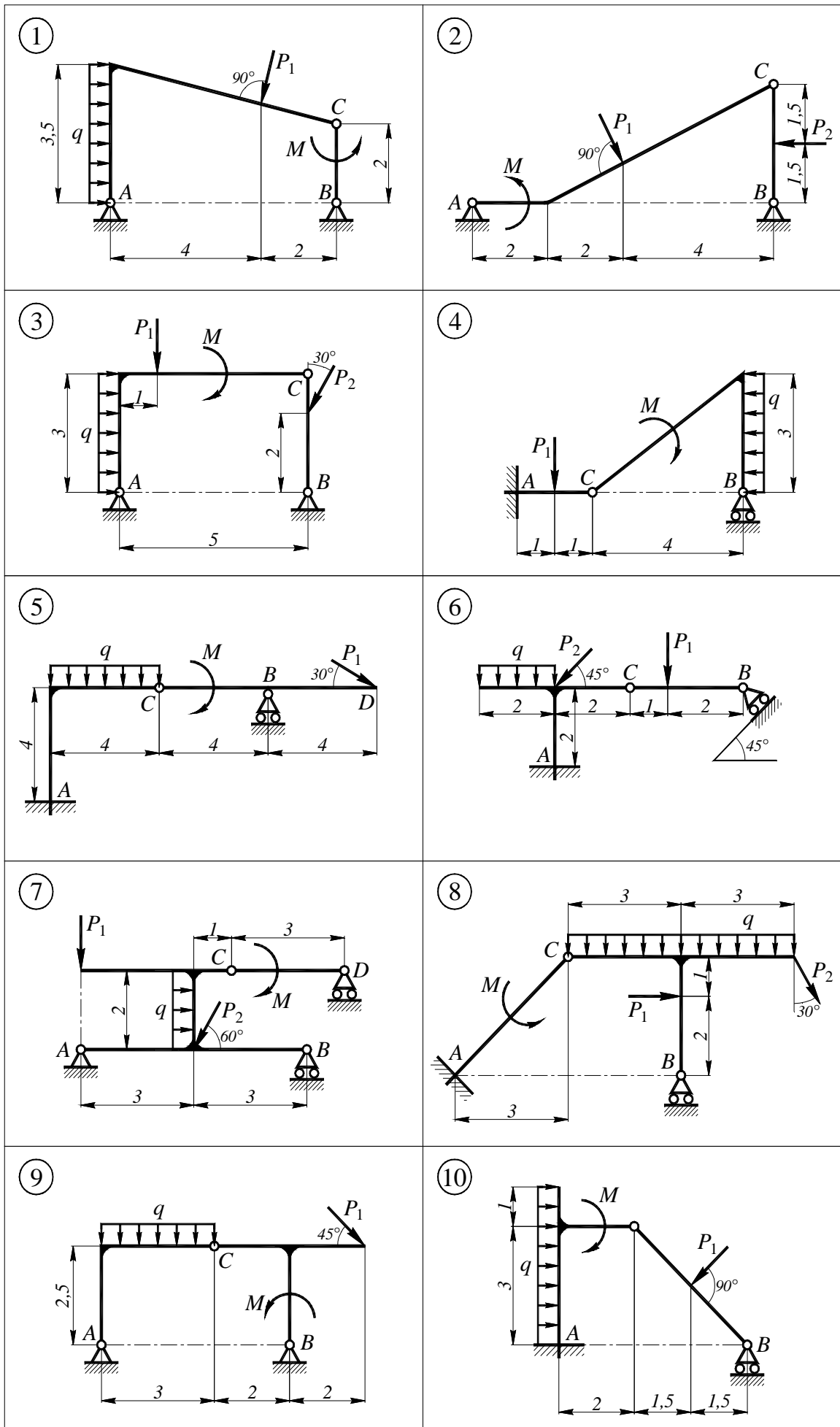


Рисунок 3.5 – Вихідні схеми до задачі С3 (1-10)

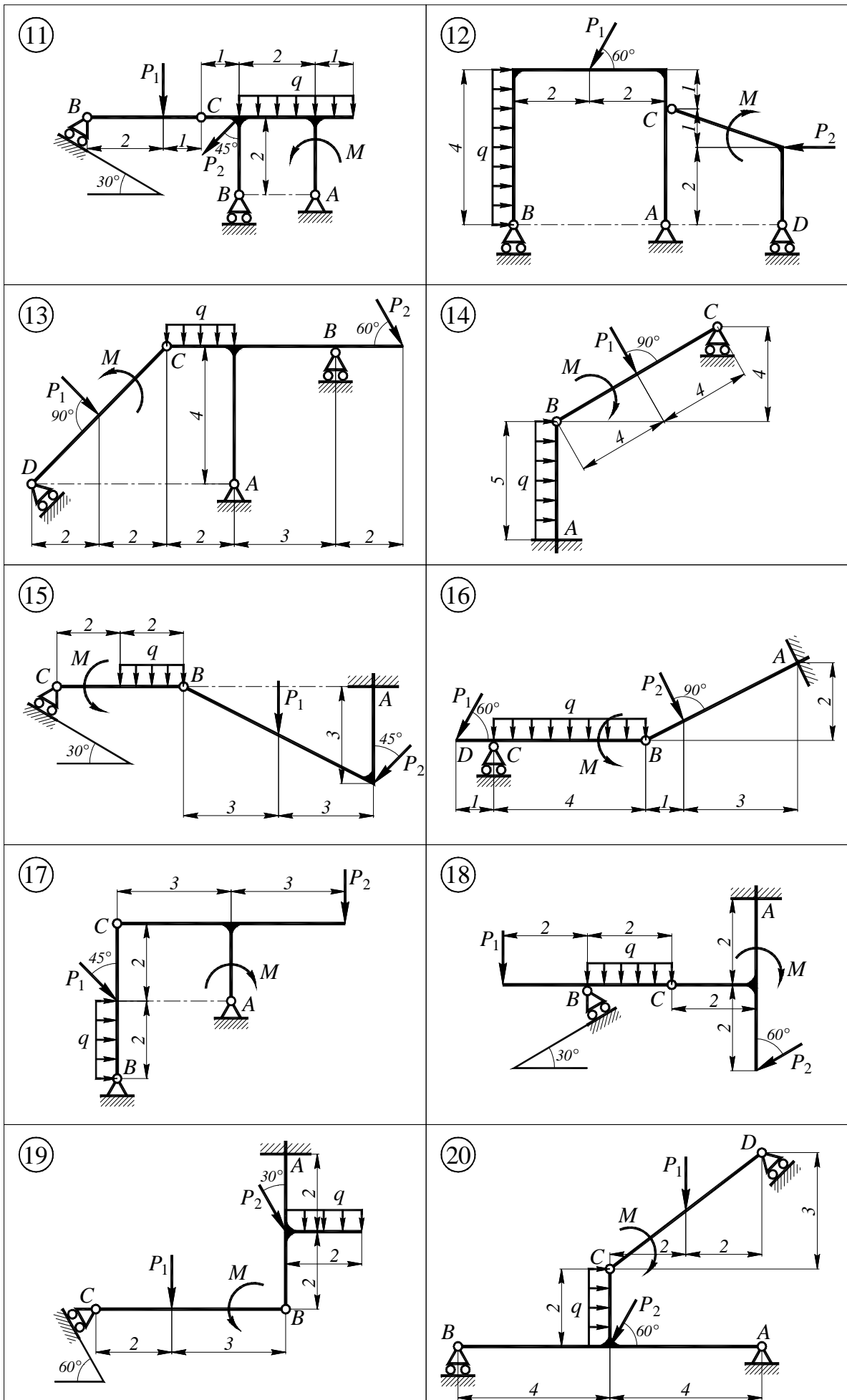


Рисунок 3.6 – Вихідні схеми до задачі С3 (11-20)

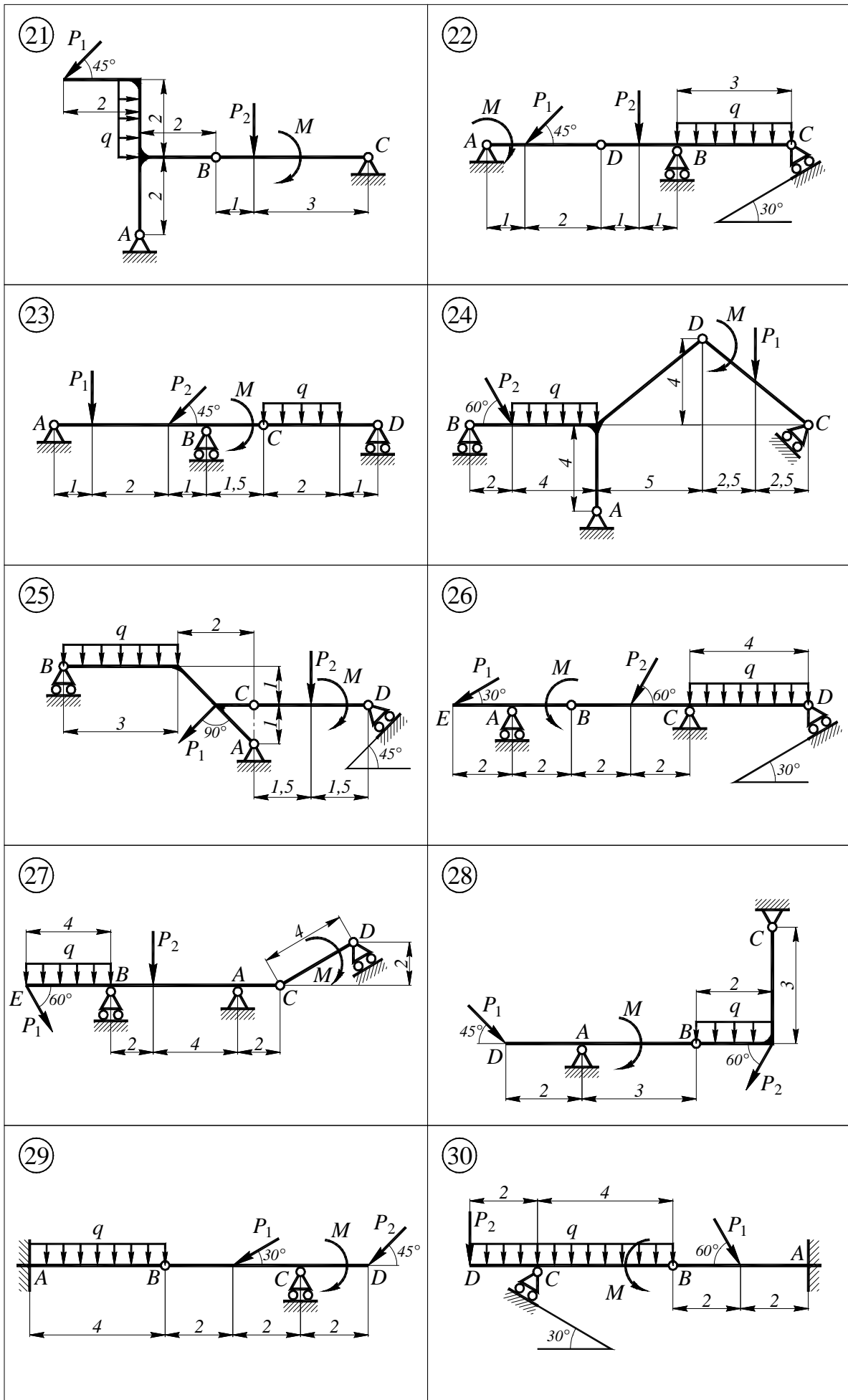


Рисунок 3.7 – Вихідні схеми до задачі С3 (21-30)

3.3. Алгоритм розв'язання задачі СЗ

Задачі на рівновагу системи твердих тіл, що знаходиться під дією довільної плоскої системи сил, рекомендується розв'язувати в наступній послідовності:

- 1) виділити систему твердих тіл та тверді тіла, що входять в систему, рівновагу яких потрібно дослідити;
- 2) виконати аналіз заданої конструкції, визначити типи в'язей (опор), визначити кількість невідомих реакцій;
- 3) звести задану систему до еквівалентної:

3.1) базуючись на принципі звільнення від в'язей, замінити опори реакціями;

3.2) рівномірно-розподілене навантаження замінити еквівалентною зосередженою силою;

4) порівняти число невідомих та число незалежних рівнянь рівноваги (ці числа мають бути рівними, якщо задача є статично-визначеною);

5) обрати найбільш зручну систему осей декартових координат, при цьому для кожного тіла та для всієї системи тіл може бути обрана своя система координат, або ж можна взяти одну систему осей для всіх тіл;

6) застосовуючи метод розчленування, розділити еквівалентну систему тіл на окремі складові (при заміні взаємодії твердих тіл силами реакції в'язей потрібно ввести сили реакції, прикладені до одного тіла, і на основі п'ятої аксіоми статички, тобто принципу рівності дії та протидії, обрати сили реакції, що діють на друге тіло, рівними по модулю та направленими прямо протилежно);

7) скласти рівняння рівноваги для кожного твердого тіла або для одного з твердих тіл та для всієї системи (при складанні рівнянь рівноваги доцільно осі координат і точки, відносно яких складаються рівняння моментів сил, обирати таким чином, щоб в рівняння входила тільки одна невідома величина).

8) розв'язати систему всіх рівнянь рівноваги та визначити невідомі величини;

9) записати відповідь у вигляді таблиці.

3.4. Приклад розв'язання задачі С3

В завданнях типу С3 необхідно визначити реакції в опорах та тиск в проміжному шарнірі складеної конструкції (системи двох твердих тіл), що знаходиться в положенні статичної рівноваги.

Дано: схема (рис. 3.8); $P = 10$ кН; $q = 4$ кН/м; $M = 20$ кНм.

Знайти: реакції опор A і B , а також тиск в проміжному шарнірі C .

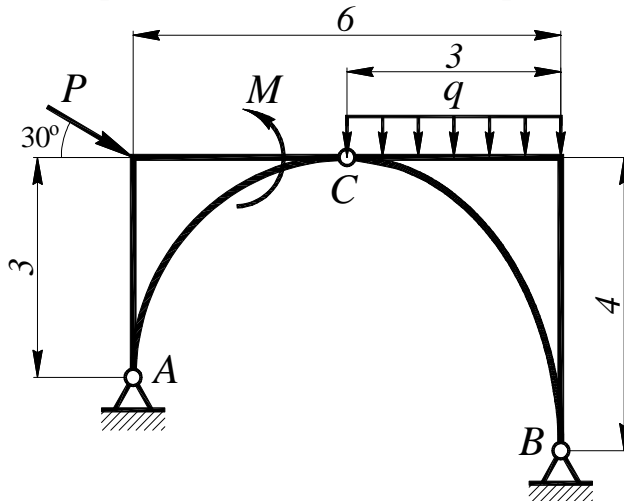


Рисунок 3.8 – Вихідна схема до завдання

Розв'язання

1. Виконуємо аналіз заданої системи (рис. 3.8).

Конструкція представлена у вигляді трьохшарнірної несиметричної арки, закріпленої в двох точках A і B шарнірно-нерухомими опорами. Система навантажена зовнішніми факторами, а саме моментом M , рівномірно-розподіленим навантаженням інтенсивністю q , та силою P .

2. Перетворюємо задану систему (рис. 3.8) на еквівалентну (рис. 3.9).

2.1. Використовуючи принцип звільнення від в'язей, замінюємо опори реакціями.

2.2. Силу P розкладаємо на складові, обчислюємо проекції сили на осі декартової системи координат Oy та Ox :

$$P_y = P \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН};$$

$$P_x = P \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}.$$

2.3. Рівномірно розподілене навантаження замінюємо еквівалентною зосередженою силою Q :

$$Q = q \cdot l = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кН}.$$

3. Порівнюємо число невідомих складових реакцій та число незалежних рівнянь рівноваги.

Число невідомих складових реакцій дорівнює чотирьом, а саме це реакції R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Bx} , R_{By} . Число незалежних рівнянь рівноваги, які можна скласти для еквівалентної системи (рис. 3.9) – три. Тож число рівнянь рівноваги менше числа невідомих реакцій, але при цьому задача не є статично-невизначеною.

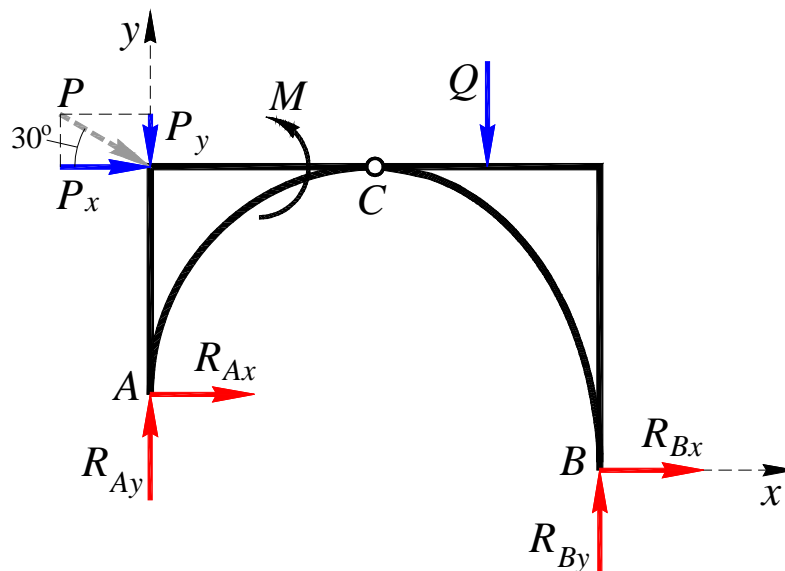


Рисунок 3.9 – Еквівалентна система

Якщо розділити систему, що зображена на рис. 3.9 на окремі складові (рис. 3.10), та замінити дію кожної з частин одне на одну реакціями, то можна скласти по три рівняння рівноваги для кожної з частин конструкції, тобто в сумі шість рівнянь. Кількість нових невідомих при цьому буде лише дві, адже згідно принципу рівності дії протидії – реакції в проміжному шарнірі для кожної частини конструкції будуть рівні одне одній та направлені прямо протилежно, тобто $\vec{R}_{Cx} = -\vec{R}'_{Cx}$, $\vec{R}_{Cy} = -\vec{R}'_{Cy}$. Таким чином отримуємо систему шести рівнянь, що містить шість невідомих складових.

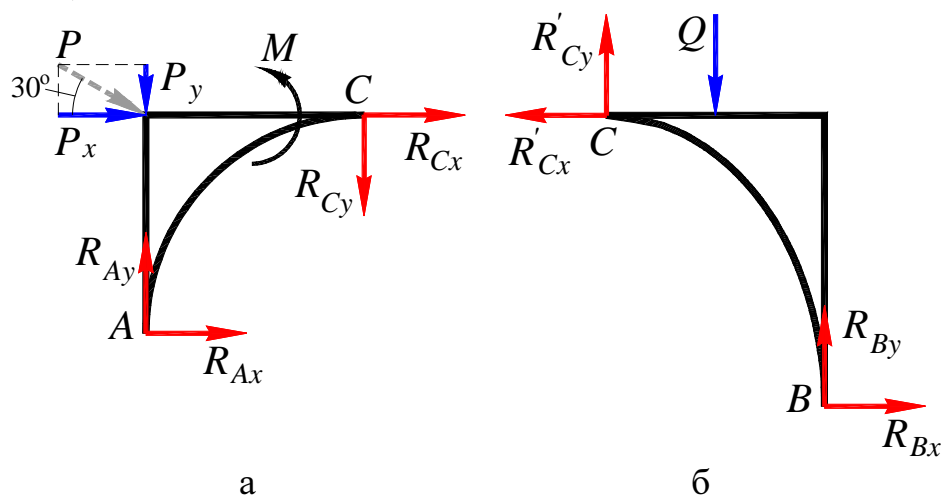


Рисунок 3.10 – Еквівалентна система з відокремленими частинами

3. Складаємо рівняння рівноваги для окремих частин конструкції (рис. 3.10,а) та (рис. 3.10,б).

На ліву частину (рис. 3.10,а) діють зовнішня задана сила P та момент M а також реакції опори в точці A та реакції від проміжного шарніра C та відкинutoї правої частини.

На праву частину (рис. 3.10,б) діють зосереджена сила Q , що еквівалентна рівномірно-розподіленому навантаженню q , а також реакції опори в точці B та реакції від проміжного шарніра C та відкинutoї лівої частини.

Рівняння рівноваги одразу запишемо у вигляді системи, що складається з трьох рівнянь для лівої та правої частини конструкції (рис. 3.10):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum P_{i x(l)} = 0; \\ \sum P_{i y(l)} = 0; \\ \sum M_A(P_i) = 0; \\ \sum P_{i x(n)} = 0; \\ \sum P_{i y(n)} = 0; \\ \sum M_B(P_i) = 0. \end{array} \right.$$

Примітка. Рівняння моментів складено таким чином щоб в них входили тільки такі невідомі як складові реакції в проміжному шарнірі C , тобто відносно точок A і B , адже в такому разі в рівняння не входять невідомі реакції опор. Індекси (л) та (п) вказують, що рівняння рівноваги складено для лівої та правої частини системи відповідно.

Запишемо рівняння для еквівалентної системи з відокремленими частинами (рис. 3.10):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum P_{i x(l)} = R_{Ax} + P_x + R_{Cx} = 0; \\ \sum P_{i y(l)} = R_{Ay} - P_y - R_{Cy} = 0; \\ \sum M_A(P_i) = -P_x \cdot 3 - R_{Cy} \cdot 3 - R_{Cx} \cdot 3 + M = 0; \\ \sum P_{i x(n)} = R_{Bx} - R'_{Cx} = 0; \\ \sum P_{i y(n)} = R_{By} - Q + R'_{Cy} = 0; \\ \sum M_B(P_i) = Q \cdot 1,5 + R'_{Cx} \cdot 4 - R'_{Cy} \cdot 3 = 0. \end{array} \right.$$

Можна побачити, що рівняння моментів для лівої та правої частини містять невідомі складові реакції в точці C , раніше вже було вказано, що $R_{Cx} = R'_{Cx}$, $R_{Cy} = R'_{Cy}$. Тобто можемо розглянути систему двох рівнянь, що містить дві невідомі та знайти тиск в проміжному шарнірі:

$$\left\{ \begin{array}{l} -P_x \cdot 3 - R_{Cy} \cdot 3 - R_{Cx} \cdot 3 + M = 0; \\ Q \cdot 1,5 + R_{Cx} \cdot 4 - R_{Cy} \cdot 3 = 0. \end{array} \right.$$

Дану систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) можна розв'язати декількома способами, що відомі з курсів алгебри та вищої математики. Розв'яжемо дану систему рівнянь методом Крамера. Для цього дещо перетворимо систему та представимо її в більш «зручному» вигляді.

$$\left\{ \begin{array}{l} -3R_{Cx} - 3R_{Cy} = 3P_x - M; \\ 4R_{Cx} - 3R_{Cy} = -1,5Q. \end{array} \right.$$

Розв'язуючи СЛАР методом Крамера отримаємо в загальному вигляді формули для обчислення невідомих реакцій:

$$R_{Cx} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad R_{Cy} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де Δ , Δ_1 , Δ_2 наступні визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3P_x - M & -3 \\ -1,5Q & -3 \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 3P_x - M \\ 4 & -1,5Q \end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = -3 \cdot (-3) - 4 \cdot (-3) = 9 + 12 = 21;$$

$$\Delta_1 = (3P_x - M)(-3) - (-1,5Q)(-3) = 5,98(-3) - (-18)(-3) = -17,94 - 54 = -71,94;$$

$$\Delta_2 = -3(-1,5Q) - 4(3P_x - M) = -3(-18) - 4(5,98) = 54 - 23,92 = 30,08.$$

Тепер можемо обчислити значення реакцій в проміжному шарнірі:

$$R_{Cx} = \frac{-71,94}{21} = -3,426 \text{ кН};$$

$$R_{Cy} = \frac{30,08}{21} = 1,432 \text{ кН}.$$

Примітка. Знак « $-$ » показує, що насправді складова сили реакції R_{Cx} направлена прямо протилежно, від напрямку обраного на схемі (рис. 3.10).

Підставляючи значення реакцій R_{Cx} та R_{Cy} в загальну систему рівнянь, зможемо знайти й реакції в опорах A і B .

$$R_{Ax} + P_x + R_{Cx} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = -P_x - R_{Cx} = -5,234 \text{ кН};$$

$$R_{Ay} - P_y - R_{Cy} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = P_y + R_{Cy} = 6,432 \text{ кН};$$

$$R_{Bx} - R'_{Cx} = 0 \Rightarrow R_{Bx} = R_{Cx} = -3,426 \text{ кН};$$

$$R_{By} - Q + R'_{Cy} = 0 \Rightarrow R_{By} = Q - R_{Cy} = 10,568 \text{ кН}.$$

4. Виконуємо перевірку*

Задана система знаходиться повинна знаходитися в положенні статичної рівноваги. Перевіримо умову рівності нулю суми моментів сил для всієї системи відносно будь-якої з точок, наприклад відносно точки C (рис. 3.9), таким чином в рівняння будуть входити реакції опор R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Bx} , R_{By} .

$$\begin{aligned} \sum M_C(P_i) &= R_{Ax} \cdot 3 - R_{Ay} \cdot 3 + P_y \cdot 3 + M - Q \cdot 1,5 + R_{By} \cdot 3 + R_{Bx} \cdot 4 = \\ &= -15,702 - 19,296 + 15 + 20 - 18 + 31,704 - 13,704 = 0. \end{aligned}$$

Умова виконується, відповідно можемо зробити висновок, що реакції визначено вірно.

Відповідь: результати обчислення реакцій опор A і B , а також тиску в проміжному шарнірі C зведемо в таблицю:

Реакції опор				Тиск в проміжному шарнірі	
R_{Ax} , кН	R_{Ay} , кН	R_{Bx} , кН	R_{By} , кН	$R_{Cx} = R'_{Cx}$, кН	$R_{Cy} = R'_{Cy}$, кН
-5,234	6,432	-3,426	10,568	-3,426	1,432

4. ЗАДАЧА С4. РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ ФЕРМ

4.1. Короткі теоретичні відомості

Фермою називається геометрично незмінна конструкція, що утворена прямолінійними стержнями, які шарнірно з'єднані між собою (рис. 4.1).

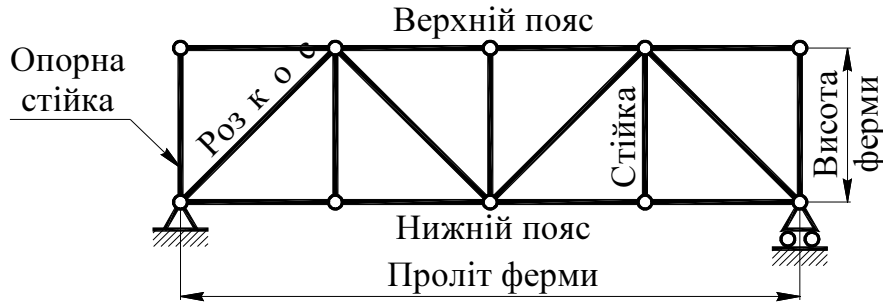


Рисунок 4.1

Фермові конструкції широко розповсюджені в будівництві та машинобудуванні завдяки поєднанню властивостей високої міцності та жорсткості, а також низькій матеріалоемності. Прикладами ферм в машинобудуванні є несучий кузов автомобіля, фюзеляж літака (рис. 4.2), в будівництві – фермові мости, опори ліній електропередач (рис. 4.3) тощо.

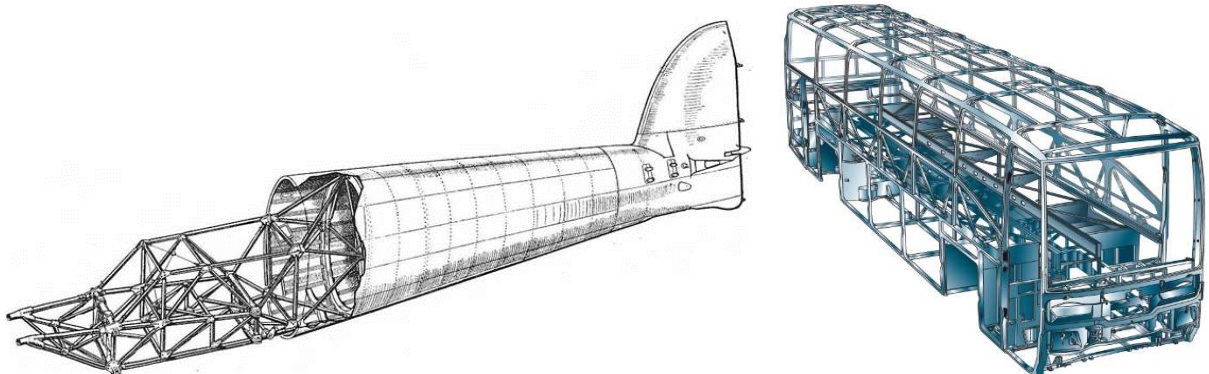


Рисунок 4.2



Рисунок 4.3

Як зазначено, ферма – геометрично незмінна (жорстка) конструкція, тобто її форма не змінюється при незмінних довжинах стержнів. Трикутник є геометрично незмінною формою, а чотирикутник геометрично змінною. Тож найпростішою фермою є трикутна (рис. 4.4).

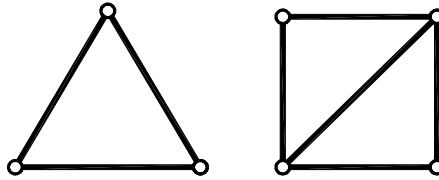


Рисунок 4.4

Шарнірні з'єднання кінців стержнів називаються **вузлами**.

Якщо осі всіх стержнів ферми лежать в одній площині, то її називають **плоскою фермою**.

Стержні плоскої ферми, що розташовані по верхньому контуру утворюють *верхній пояс*, а розташовані по нижньому контуру – *нижній пояс* ферми. Вертикальні стержні називаються *стійками*, а похилі стержні – *розкосами*.

Ферма є статично визначеною, якщо число вузлів n та число стержнів m задовільнять рівняння:

$$m = 2n - 3$$

Якщо число стержнів не задовільняє цьому рівнянню, то можливі два випадки:

$$m > 2n - 3,$$

ферма є статично невизначеною;

$$m < 2n - 3,$$

конструкція не є геометрично незмінною, отримує рухомість, тобто стає механізмом.

Методами статички може бути виконаний розрахунок тільки для статично визначених ферм. Розрахунок статично невизначених ферм виходить за рамки курсу теоретичної механіки, так як потребує урахування деформацій конструкції.

Розрахунок ферм полягає у визначенні реакцій опор та зусиль в стержнях.

При розрахунку ферм приймаються наступні **припущення**:

- стержні є абсолютно твердими тілами;
- сили ваги стержнів ферм не враховують, так як вони достатньо малі в порівнянні з зовнішніми прикладеними силами;
- зовнішні сили прикладені до вузлів ферми;
- шарніри, що з'єднують стержні ферми є ідеальними, тобто без тертя (реальні ферми не мають ідеальних шарнірів, однак таке припущення суттєво полегшує обчислення зусиль в стержнях ферми, а результати обчислень при цьому припущенні є цілком придатними для використання на практиці).

Всі перелічені припущення дозволяють вважати, що всі стержні ферми піддаються тільки розтягуванню або стисканню, так як до кожного стержня прикладені сили тільки на його кінцях. Відповідно, реакції стержнів будуть співпадати за напрямом зі стержнями.

Задані сили та реакції опор є зовнішніми силами по відношенню до всієї ферми, що розглядається як тверде тіло, зусилля в стержнях в цьому випадку – внутрішні сили. Тому для визначення зусиль необхідно, згідно загальному правилу, розглянути рівновагу частини ферми, для якої шукані зусилля є зовнішніми силами.

Розрахунок статично визначених ферм може бути здійснений наступними **трьома способами**:

- 1) спосіб вирізання вузлів;
- 2) побудовою діаграми Максвелла-Кремони;
- 3) методом перерізів (спосіб Ріттера).

Розглянемо **спосіб вирізання вузлів**. Цей спосіб полягає в тому, що подумки вирізають вузли ферми, прикладають до них відповідні зовнішні сили та реакції стержнів і складають рівняння рівноваги сил, прикладених до кожного вузла. Так як на початку розрахунку невідомо які стержні розтягнуті і які стиснуті, то умовно припускають, що всі стержні розтягнуті (реакції стержнів направлені від вузлів). Якщо в результаті розрахунку відповідь отримують зі знаком мінус, то відповідний стержень – стиснутий. Знайдені реакції стержнів рівні по модулю внутрішнім зусиллям в стержнях. Послідовність дослідження рівноваги вузлів зазвичай визначається умовою, що число невідомих сил, прикладених до вузла, не повинно перевищувати числа рівнянь рівноваги сил (двох для плоскої ферми і трьох для просторової).

В 1864 р. відомий англійський фізик Дж. Максвелл (1831-1879) і незалежно від нього в 1872 р. італійський математик Л. Кремона (1830-1903) запропонував графічний метод визначення зусиль в стержнях ферми, що отримав назву **діаграми Максвелла-Кремони**. Побудова діаграми полягає в з'єднанні силових багатокутників, що побудовані для всіх вузлів ферми, в один кресленик так, щоб жодне з зусиль не повторювалось двічі.

Метод перерізів (Ріттера) на відміну від інших способів дозволяє визначити зусилля в стержнях ферми **аналітично**.

Зусилля в стержнях можуть виявитися рівними нулю. Такі стержні називають *нульовими*.

Розглянемо **леми**, користуючись якими можна визначити нульові стержні плоскої ферми, не виконуючи її розрахунку.

Лема 1. Якщо в ненавантаженому вузлі плоскої ферми сходяться два стержні, то зусилля в цих стержнях дорівнюють нулю.

Лема 2. Якщо в ненавантаженому вузлі плоскої ферми сходяться три стержні, з яких два розташовані на одній прямій, то зусилля в третьому стержні дорівнює нулю. Зусилля в перших двох стержнях рівні між собою.

Лема 3. Якщо у вузлі плоскої ферми сходяться два стержні та до вузла прикладена зовнішня сила, лінія дії якої співпадає з віссю одного зі стержнів, то зусилля в цьому стержні дорівнює по модулю прикладеній силі, а зусилля в другому стержні дорівнює нулю.

4.2. Завдання та вихідні дані

Знайти способом Ріттера зусилля в стержнях 1, 2, 3, 4, 5 плоскої ферми. Схеми ферм представлені на рис. 4.5 – 4.7. Вихідні дані наведені в табл. 4.1 – 4.4.

Таблиця 4.1 – Вихідні дані до задачі С4 (набір 1)

Номер варіанту	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	P_4 , кН	P_5 , кН	a , м	h , м	α , град
1	6	6	6	22	28	–	–	–
2	6	11	23	31	–	–	–	30
3	10	5	20	20	–	4	12	–
4	10	30	55	–	–	–	–	–
5	5	5	20	20	–	–	–	30
6	15	24	15	15	24	–	–	30
7	6	12	24	–	–	–	–	30
8	15	25	40	–	–	4	10	–
9	15	24	30	–	–	–	–	–
10	24	15	15	24	–	–	–	45
11	15	24	45	–	–	–	–	45
12	15	24	28	28	–	4	12	–
13	15	15	15	24	24	–	–	45
14	15	15	15	15	24	–	–	–
15	15	24	15	–	–	3,2	2,4	–
16	15	24	24	28	–	–	–	–
17	15	24	24	–	–	4,2	7	–
18	15	45	24	24	–	4,2	7	–
19	15	15	45	24	–	4,2	7	–
20	15	45	24	–	–	–	–	–
21	15	24	15	45	–	4,2	5,6	–
22	15	15	24	28	–	–	–	–
23	6	15	15	45	24	–	–	–
24	15	24	24	–	–	2	2,8	–
25	15	24	24	–	–	2	2,8	–
26	15	24	24	–	–	2	2,8	–
27	15	24	15	–	–	2,8	4,2	–
28	24	24	15	–	–	–	–	–
29	15	24	24	45	–	2	2,8	–
30	15	15	24	28	28	–	–	–

Таблиця 4.2 – Вихідні дані до задачі С4 (набір 2)

Номер варіанту	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	P_4 , кН	P_5 , кН	a , м	h , м	α , град
1	8	8	8	24	32	–	–	–
2	8	15	24	32	–	–	–	30
3	12	8	24	24	–	2,5	7,5	–
4	12	28	44	–	–	–	–	–
5	8	8	28	28	–	–	–	30
6	12	28	12	12	28	–	–	30
7	8	16	32	–	–	–	–	30
8	12	28	32	–	–	2,4	6	–
9	12	28	32	–	–	–	–	–
10	20	12	12	20	–	–	–	45
11	12	28	44	–	–	–	–	45
12	12	28	32	32	–	2,5	7,5	–
13	12	12	12	20	28	–	–	45
14	12	12	12	12	28	–	–	–
15	12	28	12	–	–	2,4	1,8	–
16	12	28	28	32	–	–	–	–
17	12	28	28	–	–	3,3	5,5	–
18	12	44	28	28	–	3,3	5,5	–
19	12	12	44	28	–	3,3	5,5	–
20	12	44	28	–	–	–	–	–
21	12	28	12	44	–	3,3	4,4	–
22	12	12	28	32	–	–	–	–
23	8	12	12	32	28	–	–	–
24	12	28	28	–	–	2	2,2	–
25	12	28	28	–	–	2	2,2	–
26	12	28	28	–	–	2	2,4	–
27	12	28	12	–	–	2,4	3,6	–
28	28	28	12	–	–	–	–	–
29	12	28	28	44	–	2	2,4	–
30	12	12	28	32	30	–	–	–

Таблиця 4.3 – Вихідні дані до задачі С4 (набір 3)

Номер варіанту	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	P_4 , кН	P_5 , кН	a , м	h , м	α , град
1	7	7	7	27	31	–	–	–
2	7	12	22	28	–	–	–	30
3	8	4	16	16	–	3	9	–
4	8	32	48	–	–	–	–	–
5	7	7	25	25	–	–	–	30
6	8	25	8	8	25	–	–	30
7	7	14	21	–	–	–	–	30
8	8	25	35	–	–	2,8	7	–
9	8	25	35	–	–	–	–	–
10	25	8	8	25	–	–	–	45
11	8	25	42	–	–	–	–	45
12	8	25	35	35	–	3	9	–
13	8	8	8	25	25	–	–	45
14	8	8	8	8	25	–	–	–
15	8	25	8	–	–	2,8	2,1	–
16	8	25	25	35	–	–	–	–
17	8	25	25	–	–	3,6	6	–
18	8	42	25	25	–	3,6	6	–
19	8	8	42	25	–	3,6	6	–
20	8	42	25	–	–	–	–	–
21	8	25	8	42	–	3,6	4,8	–
22	8	8	25	35	–	–	–	–
23	7	8	8	42	25	–	–	–
24	8	25	25	–	–	2	2,5	–
25	8	25	25	–	–	2	2,5	–
26	8	25	25	–	–	2	2,5	–
27	8	25	8	–	–	2,5	3,75	–
28	25	25	8	–	–	–	–	–
29	8	25	25	42	–	2	2,5	–
30	8	8	25	35	35	–	–	–

Таблиця 4.4 – Вихідні дані до задачі С4 (набір 4*)

Номер варіанту	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	P_4 , кН	P_5 , кН	a , м	h , м	α , град
1	5	5	5	20	30	–	–	–
2	5	10	20	30	–	–	–	30
3	10	5	20	20	–	2	6	–
4	10	30	50	–	–	–	–	–
5	5	5	20	20	–	–	–	30
6	10	20	10	10	20	–	–	30
7	5	10	20	–	–	–	–	30
8	10	20	30	–	–	2	5	–
9	10	20	30	–	–	–	–	–
10	20	10	10	20	–	–	–	45
11	10	20	40	–	–	–	–	45
12	10	20	30	30	–	2	6	–
13	10	10	10	20	20	–	–	45
14	10	10	10	10	20	–	–	–
15	10	20	10	–	–	2	1,5	–
16	10	20	20	30	–	–	–	–
17	10	20	20	–	–	3	5	–
18	10	40	20	20	–	3	3,5	–
19	10	10	40	20	–	3	3,5	–
20	10	40	20	–	–	–	–	–
21	10	20	10	40	–	3	4	–
22	10	10	20	30	–	–	–	–
23	5	10	10	40	20	–	–	–
24	10	20	20	–	–	2	2,4	–
25	10	20	20	–	–	2	2,4	–
26	10	20	20	–	–	2	2,3	–
27	10	20	10	–	–	2	3,0	–
28	20	20	10	–	–	–	–	–
29	10	20	20	40	–	2	2,2	–
30	10	10	20	30	30	–	–	–

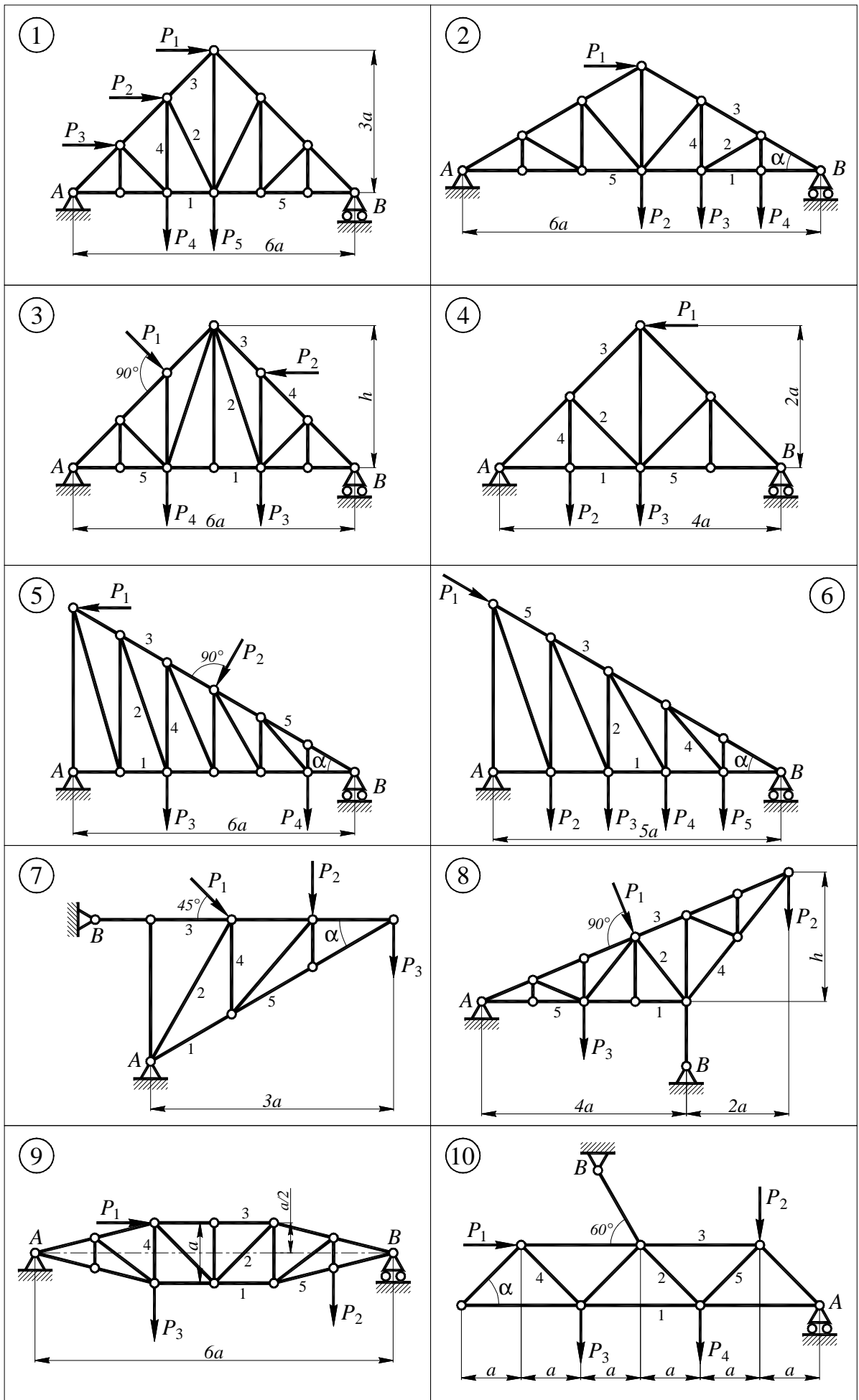


Рисунок 4.5 – Вихідні схеми до задачі С4 (1-10)

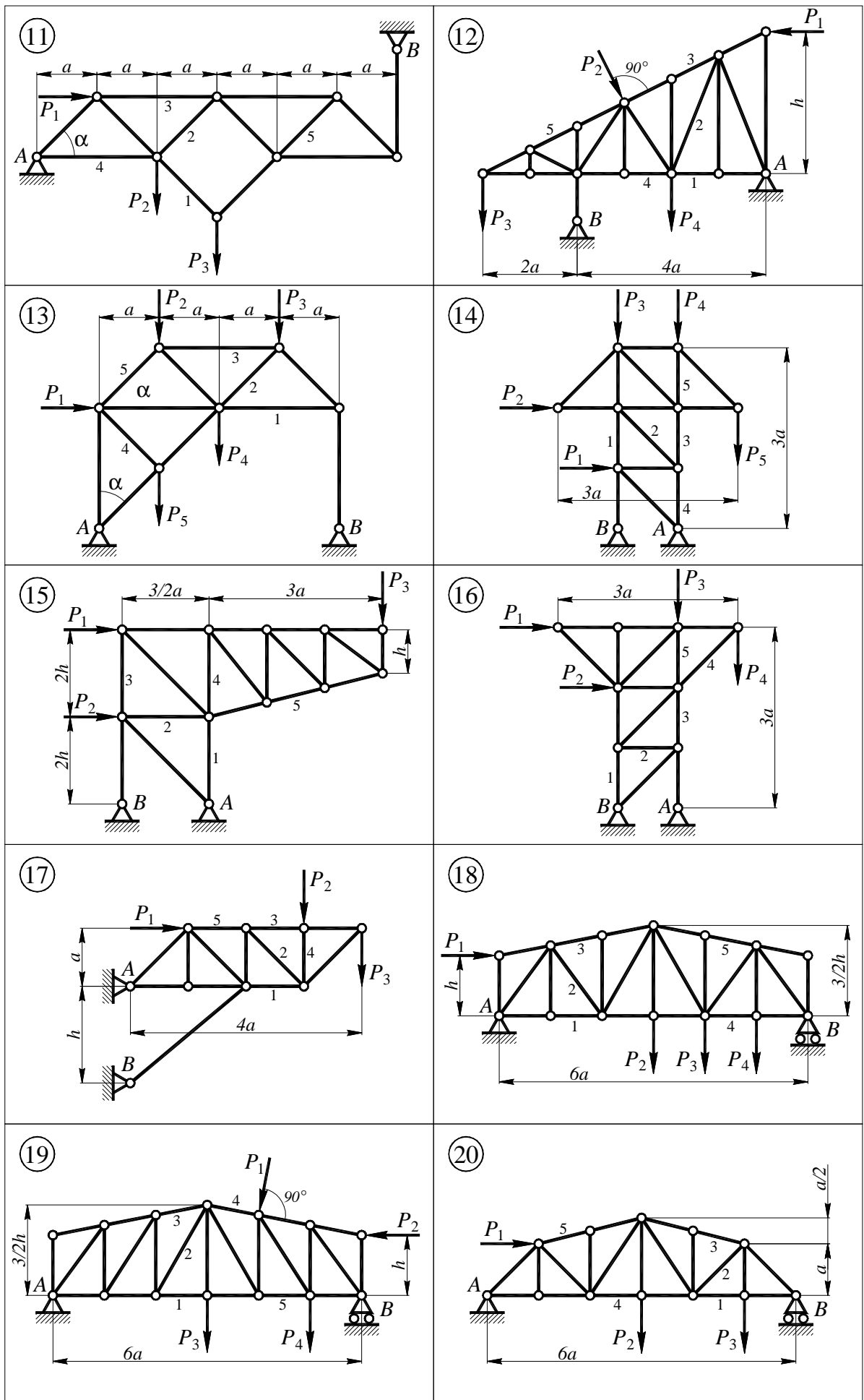


Рисунок 4.6 – Вихідні схеми до задачі С4 (11-20)

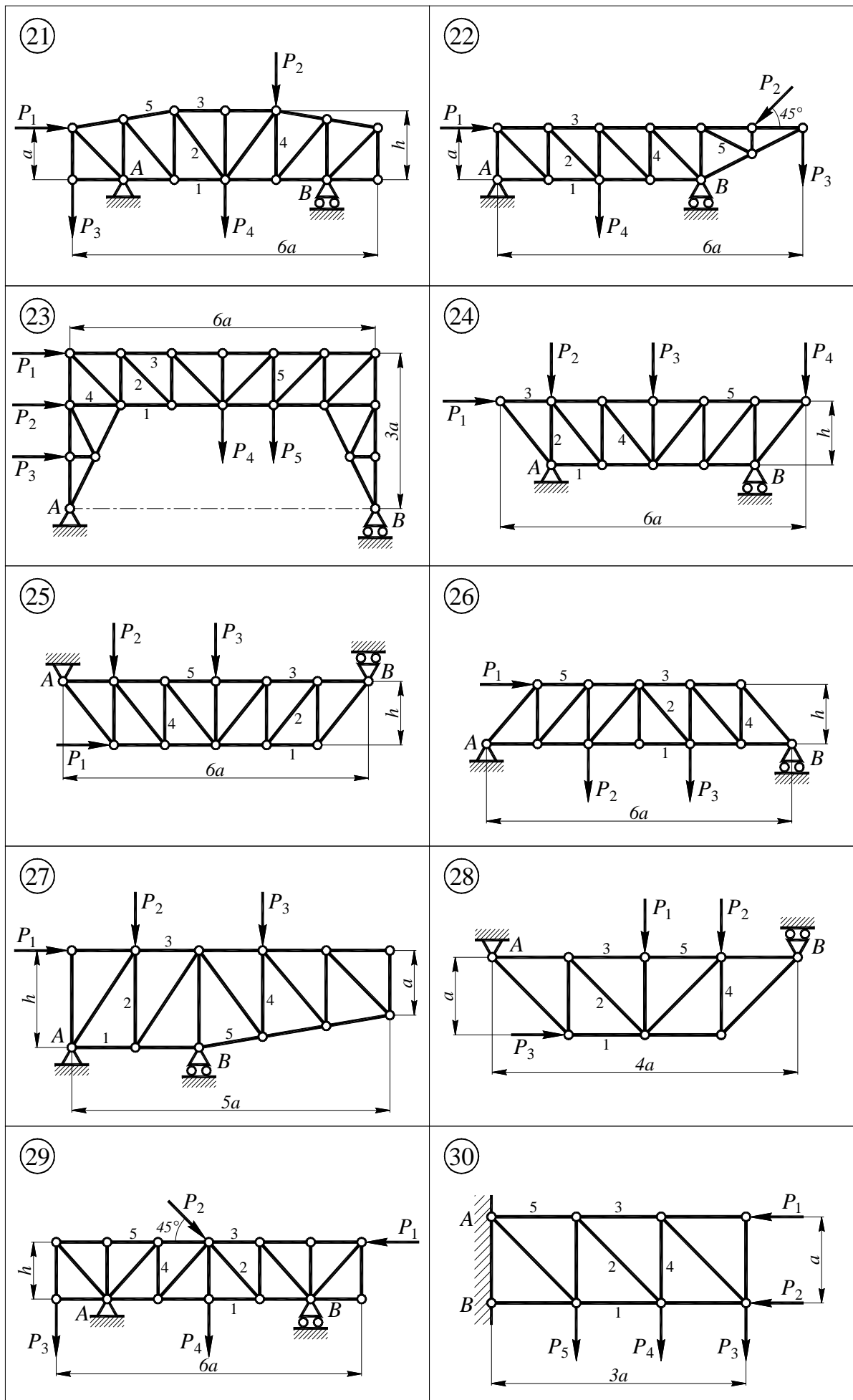


Рисунок 4.7 – Вихідні схеми до задачі С4 (21-30)

4.3. Алгоритм розв'язання задачі С4

Задачі на розрахунок плоских ферм методом перерізів (спосіб Ріттера) рекомендується розв'язувати в наступній послідовності:

1) визначити опорні реакції, розглядаючи рівновагу ферми як твердого тіла, що знаходиться під дією плоскої системи сил:

1.1) базуючись на принципі звільнення від в'язей, замінити опори реакціями, отримаємо еквівалентну систему;

1.2) скласти рівняння рівноваги та розв'язати їх відносно невідомих реакцій;

2) подумки розрізати ферму, до якої прикладені всі зовнішні сили (в тому числі і знайдені опорні реакції), на дві частини, таким чином, щоб в перерізі були задані за умовою задачі стержні, а також щоб число розрізаних стержнів не перевищувало трьох;

3) замінити дію відкинутої частини шуканими зусиллями в розрізаних стержнях, вважаючи всі стержні розтягнутими, тобто спрямованими від вузлів (зусилля в стержнях, які не задані за умовою задачі, можна не визначати);

4) скласти рівняння рівноваги для частини ферми так, щоб в кожне з рівнянь входило одне невідоме зусилля: для цього складаємо рівняння моментів відносно точок перетину лінії дії двох невідомих; якщо два стержні паралельні, то складаємо рівняння проекцій на вісь, перпендикулярну до цих стержнів, в яке також ввійде одне невідоме зусилля;

5) розв'язуючи складені рівняння рівноваги, знаходимо шукані зусилля в стержнях; якщо у відповіді отримується знак мінус, то це означає, що стержень стиснутий, а не розтягнутий;

6) записати відповідь у вигляді таблиці.

4.4. Приклади розв'язання задачі С4

В завданнях типу С4 необхідно виконати розрахунок плоских ферм, тобто визначити опорні реакції та зусилля в зазначених за умовою задачі стержнях способом Ріттера.

Розглянемо декілька прикладів розв'язання задачі С4.

Приклад розв'язання задачі №1

Дано: схема ферми (рис. 4.8); $P_1 = 10$ кН; $P_2 = 8$ кН; $P_3 = 8$ кН; $P_4 = 6$ кН;
 $a = 2$ м.

Знайти: реакції опор, а також зусилля в стержнях 1, 2, 3, 4, 5 ферми.

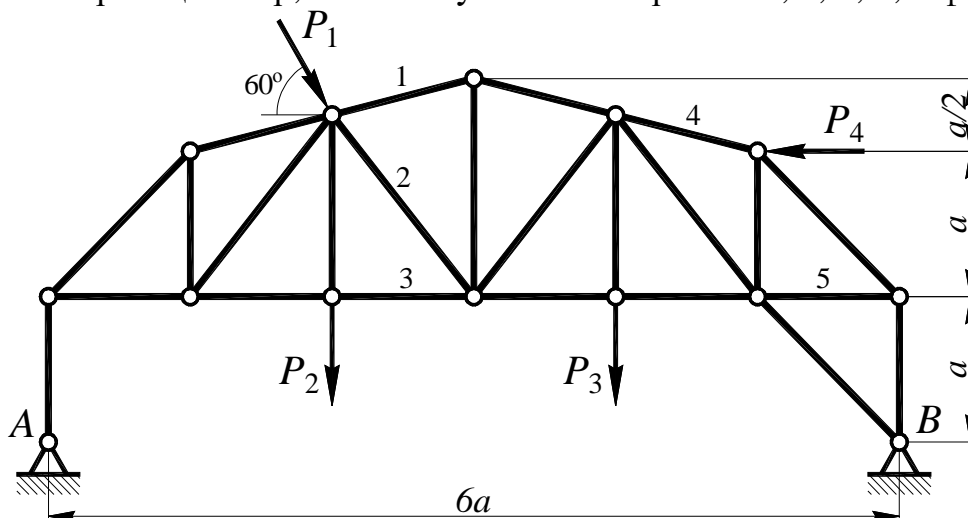


Рисунок 4.8 – Вихідна схема до завдання

Розв'язання

1. Виконуємо аналіз заданої системи (рис. 4.8).

Ферма закріплена за допомогою шарнірно нерухомої опори в точці B та опорного стержня що виходить з опори A , навантажена зовнішніми силами P_1, P_2, P_3, P_4 .

Перевіримо умову статичної визначеності заданої конструкції. Для цього підрахуємо кількість вузлів n та кількість стержнів ферми m , після чого перевіримо виконання умови:

$$m = 2n - 3.$$

Кількість вузлів ферми – $n = 13$;

Кількість стержнів ферми (без урахування опорного стержня) – $m = 23$.

Відповідно, умова виконується і задача є статично визначеною.

2. Перетворюємо задану систему (рис. 4.8) на еквівалентну (рис. 4.9).

2.1. Використовуючи принцип звільнення від в'язей, замінюємо опори реакціями, реакція опори A спрямована вздовж опорного стержня (вертикально).

2.2. Силу P_1 розкладаємо на складові, обчислюємо проекції сили на осі декартової системи координат Oy та Ox :

$$P_{1y} = P_1 \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН};$$

$$P_{1x} = P_1 \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}.$$

3. Визначаємо реакції опор ферми.

Число невідомих складових реакцій дорівнює трьом – R_A , R_{By} , R_{Bx} .

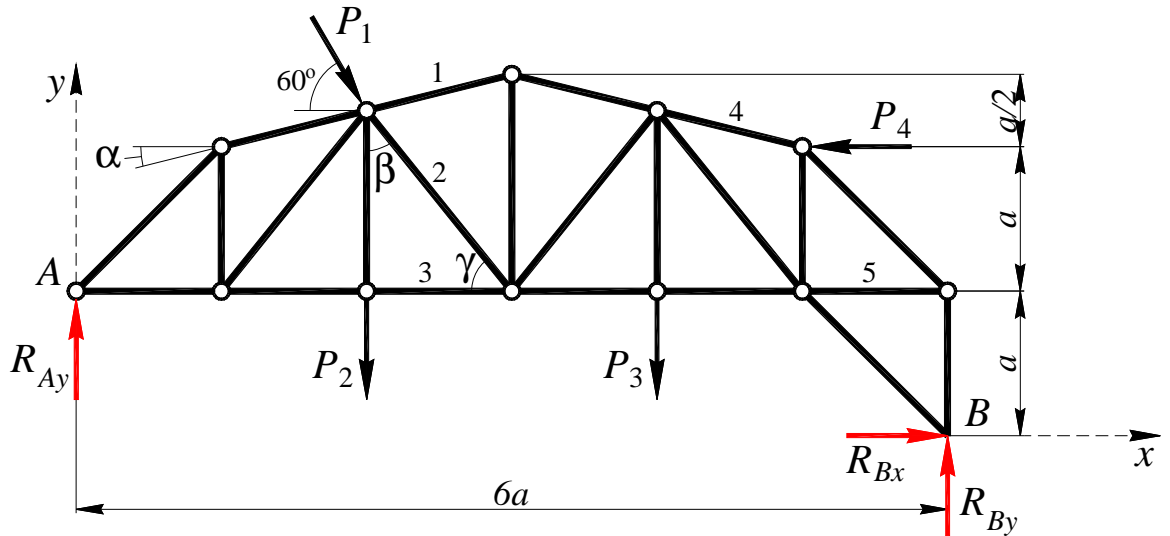


Рисунок 4.9 – Еквівалентна система

Для даної системи складемо систему трьох рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} \sum M_B(P_i) = -R_{Ay} \cdot 6a - P_{1x} \cdot (a + a/4) + P_{1y} \cdot 4a + P_2 \cdot 4a + P_3 \cdot 2a + P_4 \cdot 2a = 0; \\ \sum P_{ix} = P_{1x} + R_{Bx} - P_4 = 0; \\ \sum P_{iy} = R_{Ay} - P_{1y} - P_2 - P_3 + R_{By} = 0. \end{cases}$$

Підставляючи значення заданих сил, та обчислюємо реакції в опорах:

$$R_{Ay} = \frac{P_{1y} \cdot 4 - P_{1x} \cdot 1,25 + P_2 \cdot 4 + P_3 \cdot 2 + P_4 \cdot 2}{6} =$$

$$= \frac{8,66 \cdot 4 - 5 \cdot 1,25 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 6 \cdot 2}{6} = 14,732 \text{ кН};$$

$$R_{Bx} = P_4 - P_{1x} = 1 \text{ кН};$$

$$R_{By} = P_{1y} + P_2 + P_3 - R_{Ay} = 9,928 \text{ кН}.$$

4. Визначення зусиль в стержнях.

Далі переходимо до визначення зусиль в стержнях ферми, для цього будемо застосовувати метод перерізів (спосіб Ріттера). Для спрощення подальших обчислень, одразу визначимо геометричні параметри ферми – кути нахилу деяких стержнів α , β , γ (рис. 4.9):

$$\text{tg } \alpha = \frac{a/2}{2a} = 0,25 \Rightarrow \alpha = \text{arctg}(0,25) = 14,036^\circ;$$

$$\text{tg } \beta = \frac{a}{(a + a/4)} = 0,8 \Rightarrow \beta = \text{arctg}(0,8) = 38,66^\circ;$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{(a + a/4)}{a} = 1,25 \Rightarrow \gamma = \text{arctg}(1,25) = 51,34^\circ.$$

Метод перерізів полягає в тому, що виконується переріз ферми таким чином, щоб в ньому було не більше трьох стержнів (для того щоб число невідомих також дорівнювало не більше ніж три), дія відкинutoї в перерізі

частини ферми замінюється зусиллями в перерізаніх стержнях, вважаючи, що стержні є розтягнутими (зусилля спрямовані від вузлів), і далі досліджується рівновага окремої частини ферми. З рівнянь рівноваги для окремих частин ферми і знаходяться шукані зусилля в стержнях.

Перший переріз (рис. 4.10,а) виконуємо таким чином, щоб в ньому були три невідомі – зусилля в стержнях 1, 2, 3.

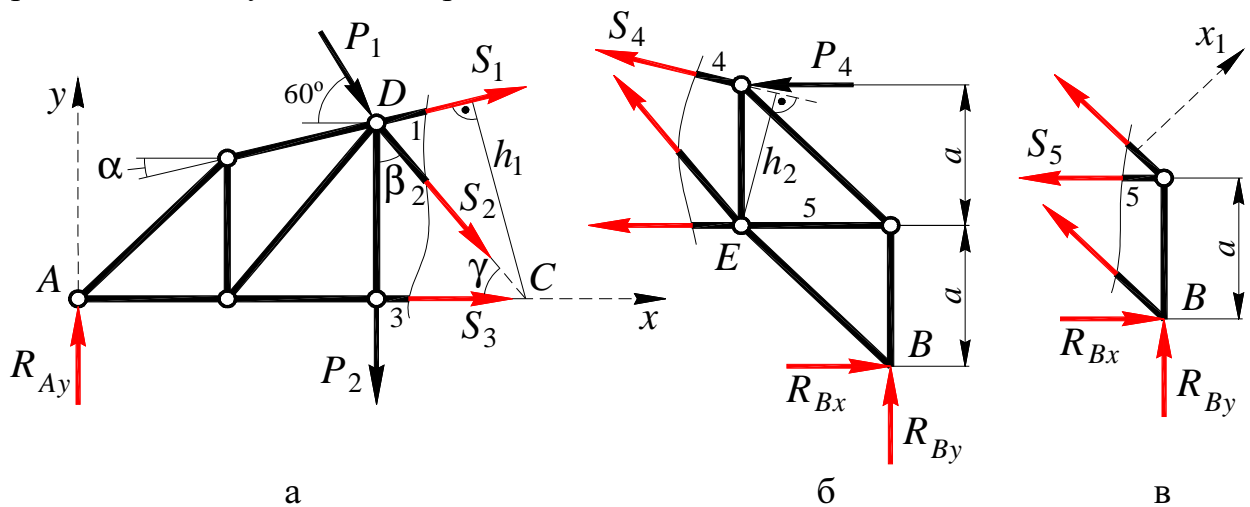


Рисунок 4.10

Для знаходження зусилля S_1 незалежно від S_2 та S_3 , складемо рівняння рівноваги для моментів всіх сил відносно точки C (рис. 4.10,а):

$$\sum M_C(P_i) = -R_{Ay} \cdot 3a - P_{1x} \cdot (a + a/2) + P_{1y} \cdot a - S_1 \cdot h_1 = 0,$$

де $h_1 = 1,5a \cdot \cos \alpha = 2,91$ м – плече зусилля S_1 відносно точки C .

Розв'язуємо дане рівняння відносно невідомого значення зусилля S_1 :

$$S_1 = \frac{P_{1y} \cdot a - R_{Ay} \cdot 3a - P_{1x} \cdot 1,5a}{h_1} = \frac{8,66 \cdot 2 - 14,732 \cdot 6 - 5 \cdot 3}{2,91} = -29,574 \text{ кН}.$$

Складаємо наступне рівняння рівноваги, суми проекцій всіх сил на вісь y :

$$\sum P_{iy} = R_{Ay} - P_{1y} - P_2 + S_1 \cdot \sin \alpha - S_2 \cdot \cos \beta = 0.$$

Знайдемо значення зусилля S_2 :

$$S_2 = \frac{R_{Ay} - P_{1y} - P_2 + S_1 \cdot \sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{14,732 - 8,66 - 8 - 29,574 \cdot 0,243}{0,781} = -11,655 \text{ кН}.$$

Примітка. Знак «-» показує, що насправді стержні 1 і 2 є стиснутими, а не розтягнутими.

Знаходимо значення зусилля S_3 , для цього складемо рівняння рівноваги для моментів всіх сил відносно точки D (рис. 3,а):

$$\sum M_D(P_i) = -R_{Ay} \cdot 2a + S_3 \cdot (a + a/4) = 0.$$

З даного рівняння знаходимо S_3 :

$$S_3 = \frac{2R_{Ay}}{1,25} = \frac{2 \cdot 14,732}{1,25} = 23,571 \text{ кН}.$$

Далі переходимо до дослідження рівноваги іншої частини ферми, що отримана в результаті перерізу показаного на рис. 3,б. В цій частині ферми необхідно знайти значення зусилля в стержні 4, тож складемо рівняння рівноваги моментів навколо точки E .

$$\sum M_E(P_i) = S_4 \cdot h_2 + R_{Bx} \cdot a + R_{By} \cdot a = 0,$$

де $h_2 = a \cdot \cos \alpha = 1,94$ м – плече зусилля S_4 відносно точки E .

В даному рівнянні одна невідома – зусилля S_4 , тож розв'язуємо рівняння відносно цього зусилля та знаходимо його:

$$S_4 = -\frac{(R_{Bx} + R_{By})a}{h_2} = -\frac{(1 + 9,928) \cdot 2}{1,94} = -12,266 \text{ кН}.$$

Примітка. Знак «-» показує, що насправді стержень 4 є стиснутим, а не розтягнутим.

Розглянемо рівновагу частини ферми на рис. 3,в. В цій частині ферми необхідно знайти значення зусилля в стержні 5. Складемо рівняння рівноваги, суми проекцій всіх сил на вісь x_1 , адже в такому рівнянні буде тільки одне невідоме зусилля – S_5 .

$$\sum P_{i x_1} = -S_5 \cdot \cos 45^\circ + R_{Bx} \cdot \cos 45^\circ + R_{By} \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

З цього рівняння знаходимо S_5 :

$$S_5 = R_{Bx} + R_{By} = 1 + 9,928 = 10,928 \text{ кН}.$$

Перевірку правильності розрахунку ферми можна виконати шляхом складання рівнянь рівноваги для окремих частин ферми таким чином, щоб в рівняння входило знайдені раніше зусилля в стержнях (рис. 4.10) або ж шляхом перевірки рівноваги окремих вузлів (метод вирізання вузлів).

Відповідь: результати обчислення реакцій опор A і B та зусиль в стержнях 1, 2, 3, 4, 5 зводимо в таблицю:

Реакції опор			Зусилля в стержнях				
R_{Ay} , кН	R_{Bx} , кН	R_{By} , кН	S_1 , кН	S_2 , кН	S_3 , кН	S_4 , кН	S_5 , кН
14,732	1	9,928	-29,574	-11,655	23,571	-12,266	10,928

Приклад розв'язання задачі №2*

Даний приклад є більш розширеним. Розв'язання задачі представлено трьома способами. Студенти, які претендують на високий бал, за вказівкою викладача, також можуть виконати задачу С4 3-ма способами.

Розглянемо приклад розв'язання задачі на розрахунок плоскої ферми з застосуванням трьох основних способів: метод вирізання вузлів; метод перерізів (спосіб Ріттера); побудовою діаграми Максвелла-Кремони.

Дано: схема ферми (рис. 4.11); $P_1 = 10$ кН; $P_2 = 8$ кН; $P_3 = 6$ кН; $P_4 = 10$ кН; $a = 4$ м.

Знайти: реакції опор, а також зусилля в усіх стержнях ферми.

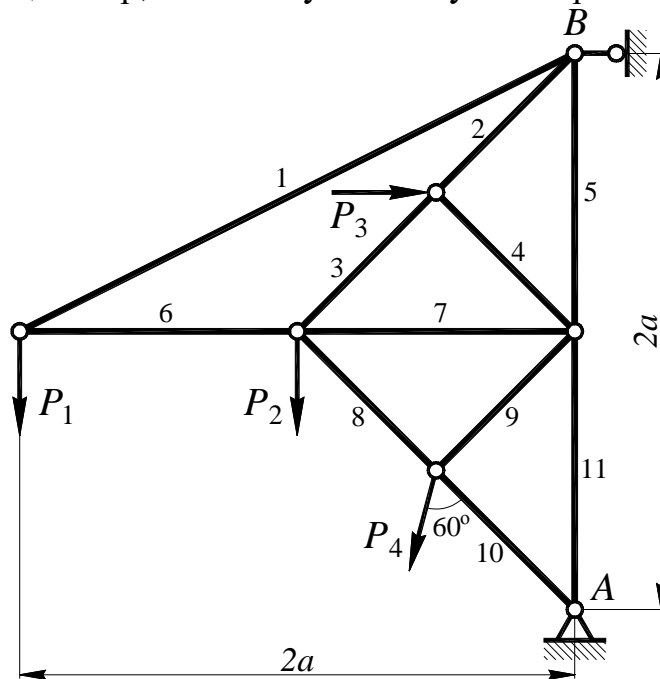


Рисунок 4.11 – Вихідна схема до завдання

Розв'язання

1. Виконуємо аналіз заданої системи (рис. 4.11).

Ферма закріплена за допомогою шарнірно нерухомої опори в точці A та опорного стержня в точці B , навантажена зовнішніми силами P_1, P_2, P_3, P_4 .

Перевіримо умову статичної визначеності заданої конструкції. Для цього підрахуємо кількість вузлів n та кількість стержнів ферми m , після чого перевіримо виконання умови:

$$m = 2n - 3.$$

Кількість вузлів ферми – $n = 7$;

Кількість стержнів ферми (без урахування опорного стержня) – $m = 11$.

$$11 = 2 \cdot 7 - 3$$

Відповідно, умова виконується і задача є статично визначеною.

2. Перетворюємо задану систему (рис. 1) на еквівалентну (рис. 4.12).

2.1. Використовуючи принцип звільнення від в'язей, замінюємо опори реакціями, реакція опори B спрямована вздовж опорного стержня (вертикально).

2.2. Силу P_4 розкладаємо на складові, обчислюємо проекції сили на осі декартової системи координат y та x :

$$P_{4y} = P_4 \cdot \cos 15^\circ = 10 \cdot 0,966 = 9,659 \text{ кН};$$

$$P_{4x} = P_4 \cdot \cos 75^\circ = 10 \cdot 0,259 = 2,588 \text{ кН}.$$

3. Визначаємо реакції опор ферми.

Число невідомих складових реакцій дорівнює трьом – R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx} .

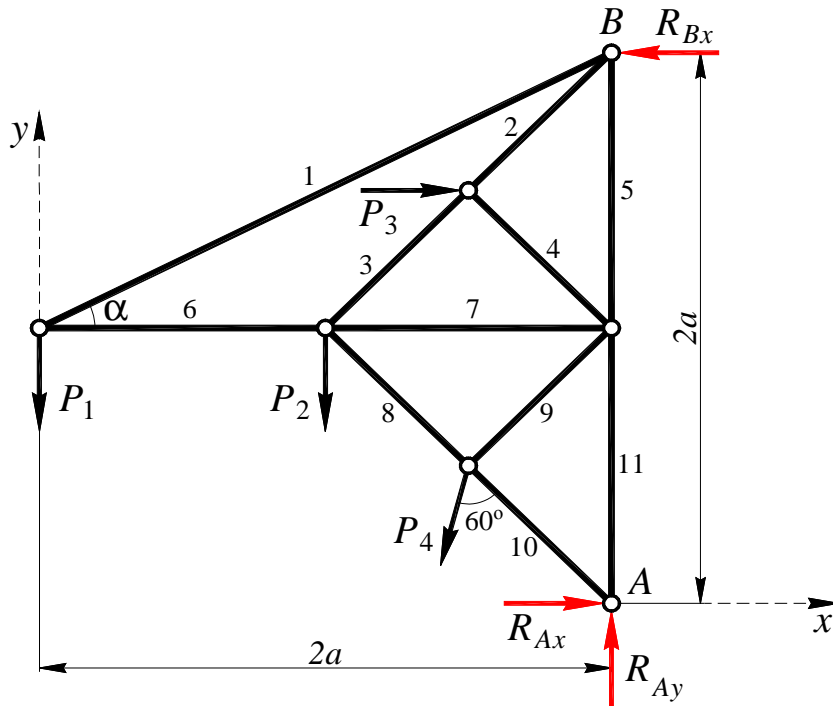


Рисунок 4.12 – Еквівалентна система

Для даної системи складемо систему трьох рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} \sum M_A(P_i) = 0; P_1 \cdot 2a + P_2 \cdot a - P_3 \cdot 1,5a + P_{4x} \cdot 0,5a + P_{4y} \cdot 0,5a + R_{Bx} \cdot 2a = 0; \\ \sum P_{ix} = 0; R_{Ax} + P_3 - P_{4x} - R_{Bx} = 0; \\ \sum P_{iy} = 0; -P_1 - P_2 - P_{4y} + R_{Ay} = 0. \end{cases}$$

Підставляючи значення заданих зовнішніх сил, обчислюємо реакції в опорах:

$$R_{Bx} = \frac{-P_1 \cdot 2 - P_2 + P_3 \cdot 1,5 - P_{4x} \cdot 0,5 - P_{4y} \cdot 0,5}{2} =$$

$$= \frac{-10 \cdot 2 - 8 + 6 \cdot 1,5 - 2,588 \cdot 0,5 - 9,659 \cdot 0,5}{2} = -12,562 \text{ кН};$$

$$R_{Ax} = -P_3 + P_{4x} + R_{Bx} = -6 + 2,588 - 12,562 = -15,974 \text{ кН};$$

$$R_{Ay} = P_1 + P_2 + P_{4y} = 10 + 8 + 9,659 = 27,659 \text{ кН}.$$

Примітка. Знак «-» показує, що насправді реакції опор R_{Ax} , R_{Bx} направлені прямо протилежно від напрямку показаного на рис. 4.12.

4. Визначення зусиль в стержнях.

Далі переходимо до визначення зусиль в стержнях ферми, для цього будемо застосовувати спосіб вирізання вузлів, метод побудови діаграми Максвелла-Кремони, а також для стержнів 8, 9 та 11 знайдемо зусилля методом перерізів (спосіб Ріттера).

Для спрощення подальших обчислень, одразу визначимо кут нахилу стержня 1 – α (рис. 4.12):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2a} = 0,5 \Rightarrow \alpha = \arctg(0,5) = 26,565^\circ.$$

4.1. Метод вирізання вузлів

На рис. 4.13 представлено вузли ферми з прикладеними до них реакціями стержнів та зовнішніми навантаженнями.

Розглянемо послідовно рівновагу кожного з вузлів плоскої ферми, причому починати варто з вузлів, кількість невідомих для яких не перевищує двох, адже для кожного вузла можна скласти тільки два незалежні рівняння рівноваги (суми проекцій сил на осі). Почнемо з дослідження рівноваги вузла C (рис. 4.13). На цей вузол діє зовнішня сила P_1 та реакції стержнів 1 і 6.

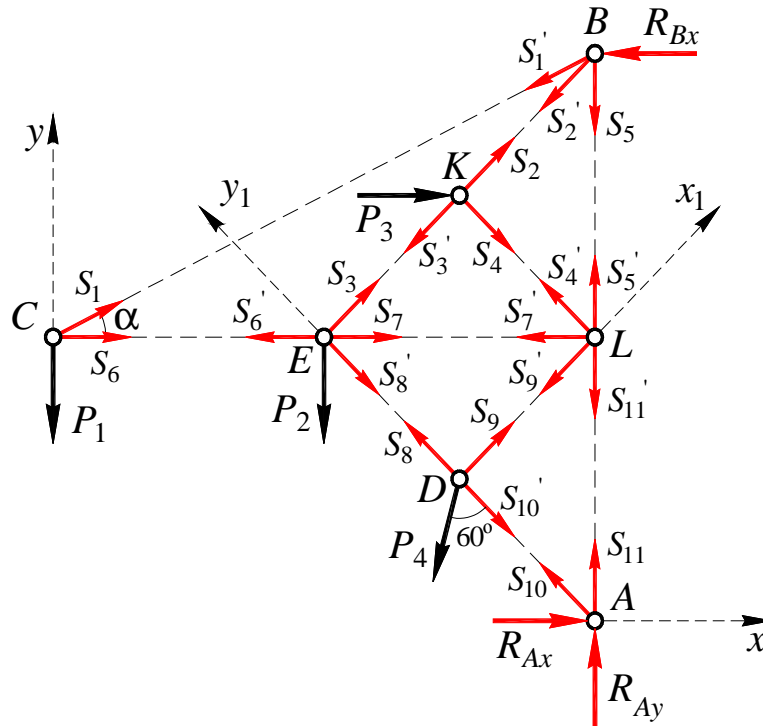


Рисунок 4.13 – Вузли ферми

Складемо для вузла C рівняння рівноваги, суми проекцій на вісь y :

$$\sum P_{iy} = -P_1 + S_1 \cdot \sin \alpha = 0.$$

З цього рівняння знаходимо S_1 :

$$S_1 = \frac{P_1}{\sin \alpha} = \frac{10}{0,447} = 22,361 \text{ кН}.$$

Далі, складаємо рівняння суми проекцій всіх сил на вісь x :

$$\sum P_{ix} = S_1 \cdot \cos \alpha + S_6 = 0.$$

Звідси знаходимо значення S_6 :

$$S_6 = -S_1 \cdot \cos \alpha = -22,361 \cdot 0,894 = -20 \text{ кН}.$$

Переходимо до наступного вузла A . До нього прикладені дві складові реакції опори R_{Ax} , R_{Ay} , а також реакції стержнів 10 і 11.

Для вузла A (рис. 3) складаємо рівняння суми проекцій всіх сил на вісь x :

$$\sum P_{ix} = R_{Ax} - S_{10} \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

З цього рівняння знаходимо S_{10} :

$$S_{10} = \frac{R_{Ax}}{\cos 45^\circ} = \frac{-15,974}{0,707} = -22,59 \text{ кН}.$$

Далі, складаємо рівняння суми проекцій всіх сил на вісь y :

$$\sum P_{i_y} = S_{11} + S_{10} \cdot \cos 45^\circ + R_{Ay} = 0.$$

Відповідно, з цього рівняння знайдемо S_{11} :

$$S_{11} = -S_{10} \cdot \cos 45^\circ - R_{Ay} = 22,59 \cdot 0,707 - 27,659 = -11,686 \text{ кН}.$$

Переходимо до наступного вузла D . До нього прикладена зовнішня сила P_4 , а також реакції стержнів 8, 9 і 10. При дослідженні рівноваги цього вузла буде зручно ввести нові осі x_1 , y_1 . При складанні рівнянь суми проекцій сил на ці осі, зможемо одразу визначити невідомі S_8 , S_9 .

Рівняння суми проекцій всіх сил на вісь x_1 буде мати вигляд:

$$\sum P_{i_{x_1}} = S_9 - P_4 \cdot \cos 30^\circ = 0.$$

Звідси знайдемо значення S_9 :

$$S_9 = P_4 \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}.$$

Далі, складаємо рівняння суми проекцій всіх сил на вісь y_1 :

$$\sum P_{i_{y_1}} = S_8 - S'_{10} - P_4 \cdot \cos 60^\circ = 0.$$

Дане рівняння містить одну невідому – S_8 , тому можемо виразити її з цього рівняння:

$$S_8 = S'_{10} + P_4 \cdot \cos 60^\circ = -22,59 + 10 \cdot 0,5 = -17,59 \text{ кН}.$$

Переходимо до дослідження рівноваги вузла E . Даний вузол навантажений силою P_2 та реакціями стержнів 3, 6, 7 і 8.

Складемо для вузла E рівняння суми проекцій всіх сил на вісь y :

$$\sum P_{i_y} = -P_2 - S'_8 \cdot \cos 45^\circ + S_3 \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

Розв'яжемо дане рівняння відносно S_3 :

$$S_3 = \frac{P_2 + S'_8 \cdot \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{8 - 17,59 \cdot 0,707}{0,707} = -6,276 \text{ кН}.$$

Складемо рівняння сил на вісь x :

$$\sum P_{i_x} = S_7 + S_3 \cdot \cos 45^\circ - S'_6 + S'_8 \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

Знаходимо S_7 :

$$S_7 = -S_3 \cdot \cos 45^\circ + S'_6 - S'_8 \cdot \cos 45^\circ = 6,276 \cdot 0,707 - 20 + 17,59 \cdot 0,707 = -3,124 \text{ кН}.$$

Розглянемо рівновагу вузла K . Вузол навантажений силою P_3 та реакціями стержнів 2, 3, 4. При складанні рівнянь рівноваги для цього вузла також скористаємось осями x_1 та y_1 .

Складаємо рівняння рівноваги сил на вісь x_1 :

$$\sum P_{i_{x_1}} = S_2 - S'_3 + P_3 \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

З рівняння знаходимо S_2 :

$$S_2 = S'_3 - P_3 \cdot \cos 45^\circ = -6,276 - 6 \cdot 0,707 = -10,519 \text{ кН}.$$

Складаємо рівняння рівноваги сил на вісь y_1 :

$$\sum P_{i_{y_1}} = -P_3 \cdot \cos 45^\circ - S_4 = 0.$$

З рівняння знаходимо S_4 :

$$S_4 = -P_3 \cdot \cos 45^\circ = -6 \cdot 0,707 = -4,243 \text{ кН}.$$

Розглянемо рівновагу вузла B . Вузол навантажений реакцією R_{Bx} та реакціями стержнів 1, 2, 5.

Складаємо рівняння рівноваги сил на вісь y :

$$\sum P_{iy} = -S_1 \cdot \sin \alpha - S_2' \cdot \cos 45^\circ - S_5 = 0.$$

Знайдемо значення S_5 :

$$S_5 = -S_1 \cdot \sin \alpha - S_2' \cdot \cos 45^\circ = -22,361 \cdot 0,447 + 10,519 \cdot 0,707 = -2,562 \text{ кН}.$$

Примітка. Знаки «-» показують, що насправді стержні 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 не є розтягнутими як вказано на рис. 3, а є стиснутими, та їх реакції спрямовані прямо протилежно від вказаних на рисунку напрямків.

4.2. Визначення зусиль в стержнях ферми побудовою діаграми Максвелла-Кремони

Побудова діаграми Максвелла Кремони полягає в з'єднанні силових багатокутників, що побудовані для всіх вузлів ферми, в один кресленик так, щоб жодне з зусиль не повторювалось двічі.

Розташовуємо зовнішні сили та реакції опор таким чином, щоб вони лежали поза контуром ферми. Частини площини, обмежені контуром ферми та лініями зовнішніх сил, позначимо літерами C, D, E, F, G, H, J, K . Частини площини, що обмежені стержнями ферми, позначимо літерами L, M, N, O, R, S, T . Вузли ж тепер, на відміну від способу вирізання вузлів, позначимо цифрами $I, II, \dots VII$ (рис. 4.14). Сили будемо позначати двома малими літерами, що відповідають тим великим літерам, якими позначені дві суміжні площини, розмежовані лінією дії даної сили при обході контуру ферми за годинниковою стрілкою.

Побудову діаграми починаємо з побудови багатокутника зовнішніх сил та реакцій опор. Цей багатокутник має бути замкненим, так як ферма знаходиться в рівновазі. Сили будемо відкладати в тому порядку, в якому вони зустрічаються при обході контуру ферми за годинниковою стрілкою.

Перед початком побудови, приймемо масштаб, в якому будемо зображувати сили на діаграмі:

$$\mu = \frac{1}{10} \text{ кН/мм}.$$

Таким чином, відкладаємо в масштабі спочатку вектор cd , що відповідає силі P_1 , до нього додаємо вектор de , який відповідає реакції R_{Bx} , далі вектор ef , що зображує силу P_3 , далі вектор fg – сила P_{4x} , потім вектор gh – сила реакції R_{Ax} , далі вектор hj – сила реакції R_{Ay} , за ним вектор jk – сила P_{4y} , і замикаючий вектор kc , який відповідає силі P_2 (рис. 4.15).

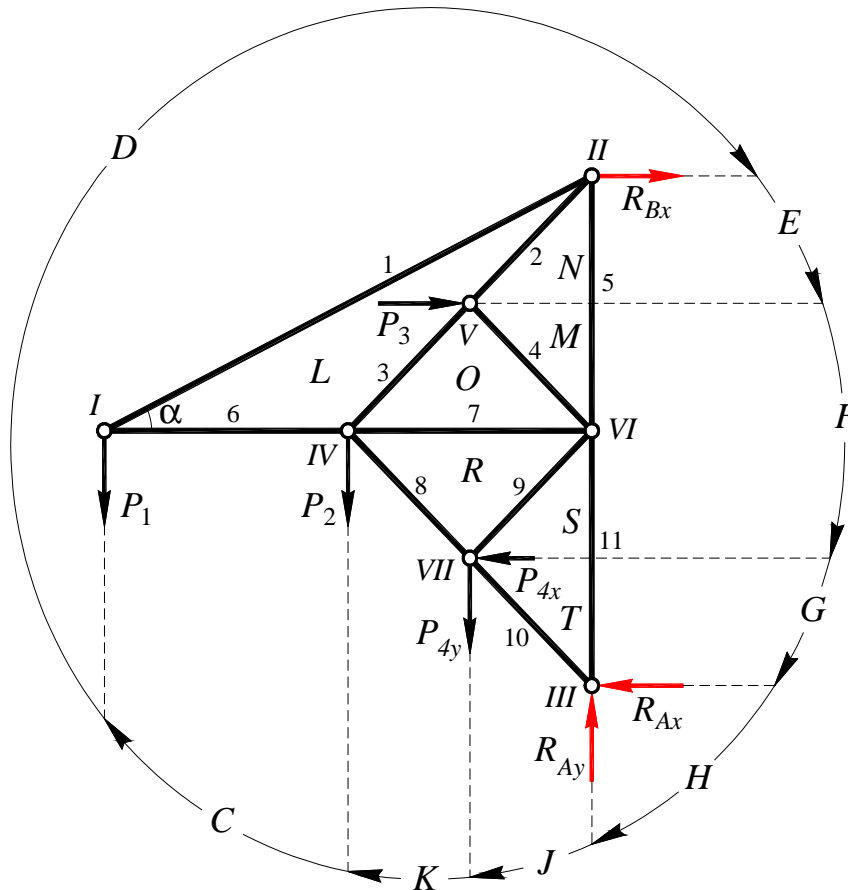


Рисунок 4.14

Побудувавши багатокутник зовнішніх сил та реакцій опор, переходимо до побудови багатокутників для всіх вузлів ферми, причому сили будемо відкладати в тому ж порядку, в якому вони зустрічаються при обході вузла за годинниковою стрілкою.

Розпочнемо з вузла *I*, в якому сходяться тільки два стержні. До вузла прикладена зовнішня сила P_1 , яка показана на діаграмі вектором cd , з точки d відкладаємо відрізок паралельний стержню 1, який першим зустрічається при обході вузла за годинниковою стрілкою. Так як багатокутник сил, прикладених до вузла має бути замкненим, то з точки c відкладаємо горизонтальний відрізок, що є паралельним стержню 6. На перетині відрізків паралельних стержням 1 та 6 отримуємо точку l . Всі сили даного багатокутника відкладаються послідовно в напрямі за годинниковою стрілкою, відповідно зусилля в першому стержні dl спрямовано від вузла та має знак «+» (стержень розтягнутий), зусилля в шостому стержні спрямовано до вузла та має знак «-» (стержень стиснутий).

Далі переходимо до вузла *II*. В цьому вузлі сходяться три стержні 1, 2 і 5, а також прикладена реакція опори R_{Bx} . Дана реакція на діаграмі зображена вектором de . При обході даного вузла за годинниковою стрілкою, першим зустрічається стержень 5, зображуємо його на діаграмі вертикальним вектором en . Наступний стержень 2, зусилля в цьому стержні буде зображено на діаграмі вектором nl , який є паралельним до цього стержня.

Наступний вузол *III*, в цьому вузлі сходяться два стержні 10 та 11, а також до вузла прикладені складові реакції R_{Ax} , R_{Ay} . На діаграмі вже побудовані вектори цих реакцій, вони зображені відрізками gh та hj . При

Останнім розглянемо вузол V . У вузлі сходяться стержні 2, 3 та 4, а також до вузла прикладена сила P_3 . Причому зусилля в стержнях 2 та 3 вже були зображені на діаграмі при дослідженні рівноваги попередніх вузлів. Тож необхідно знайти зусилля тільки в стержні 4. Для знаходження цього зусилля проводимо з точки N горизонтальну пряму, а з точки o пряму паралельну стержню 4, на перетині отримаємо точку m . Вектор om зображує на діаграмі зусилля в стержні 4.

Для визначення знаків зусиль варто розглянути багатокутники сил, прикладених до вузлів, в такому порядку як вони зустрічаються при обході вузлів за годинниковою стрілкою, якщо реакції в стержнях спрямовані до вузлів, то ці стержні є стиснутими та мають знак «-» і навпаки.

Вимірюючи на діаграмі довжини відповідних векторів, та помноживши їх на масштаб, отримаємо величини зусиль в стержнях. Результати зведені в таблиці.

Примітка. На діаграмі Максвелла-Кремони (рис. 4.15) вектори зусиль стержнях позначені з відповідними знаками.

4.3. Метод перерізів (спосіб Ріттера)

Методом перерізів виконаємо перевірку правильності визначення зусиль в стержнях 8, 9 та 11.

Метод перерізів полягає в тому, що виконується переріз ферми таким чином, щоб в ньому було не більше трьох стержнів (для того щоб число невідомих також дорівнювало не більше ніж три), дія відкинутої в перерізі частини ферми замінюється зусиллями в перерізаніх стержнях, що спрямовані в сторону відкинутої частини, і далі досліджується рівновага окремої частини ферми. З рівнянь рівноваги для окремих частин ферми і знаходяться шукані зусилля в стержнях.

Переріз (рис. 4.16) виконаємо таким чином, щоб в ньому були три невідомі – зусилля в стержнях 8, 9, 11.

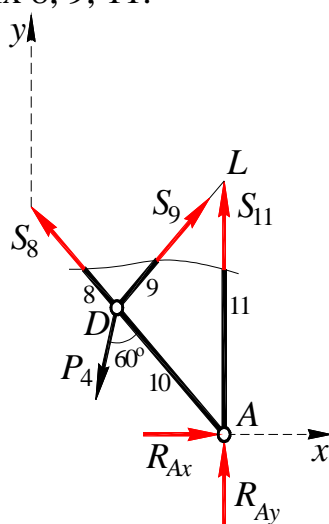


Рисунок 4.16

Для зображеної частини ферми складемо рівняння рівноваги моментів навколо точки L .

$$M_L(P_i) = 0; \quad -S_8 \cdot \left(\frac{0,5a}{\cos 45^\circ} \right) - P_{4x} \cdot 0,5a + P_{4y} \cdot 0,5a + R_{Ax} \cdot a = 0.$$

Звідси знаходимо S_8 :

$$S_8 = \frac{(-P_{4x} \cdot 0,5a + P_{4y} \cdot 0,5a + R_{Ax}a) \cdot \cos 45^\circ}{0,5a} =$$

$$= \frac{(-2,588 \cdot 0,5 \cdot 2 + 9,659 \cdot 0,5 \cdot 2 - 15,974 \cdot 2) \cdot 0,707}{0,5 \cdot 2} = -17,588 \text{ кН.}$$

Далі складемо рівняння моментів відносно точки A :

$$M_A(P_i) = 0; -S_9 \cdot \left(\frac{0,5a}{\cos 45^\circ} \right) + P_{4x} \cdot 0,5a + P_{4y} \cdot 0,5a = 0.$$

Звідси знаходимо S_9 :

$$S_9 = \frac{(P_{4x} \cdot 0,5a + P_{4y} \cdot 0,5a) \cdot \cos 45^\circ}{0,5a} = \frac{(2,588 \cdot 0,5 \cdot 2 + 9,659 \cdot 0,5 \cdot 2) \cdot 0,707}{0,5 \cdot 2} = 8,659 \text{ кН.}$$

Складаємо рівняння моментів відносно точки D :

$$M_D(P_i) = 0; S_{11} \cdot 0,5a + R_{Ax} \cdot 0,5a + R_{Ay} \cdot 0,5a = 0.$$

З даного рівняння знаходимо:

$$S_{11} = -R_{Ax} - R_{Ay} = 15,974 - 27,659 = -11,685 \text{ кН.}$$

Відповідь: реакції опор:

$$R_{Ay} = -12,562 \text{ кН}, R_{Ax} = -15,974 \text{ кН}, R_{Bx} = 27,659 \text{ кН.}$$

результати обчислення зусиль в стержнях зводимо в таблицю:

Метод	Зусилля в стержнях, кН										
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}
Вирізання вузлів	22,361	-10,519	-6,276	-4,243	-2,562	-20	-3,124	-17,59	8,66	-22,59	-11,686
Діаграма Максвелла-Кремони	22,361	-10,519	-6,277	-4,243	-2,562	-20	-3,123	-17,591	8,66	-22,591	-11,685
Спосіб Ріттера								-17,588	8,659		-11,685

Аналізуючи таблицю результатів розрахунку ферми, можемо сказати, що значення зусиль в стержнях, визначені різними способами збігаються з високою точністю. Похибка не перевищує 0,005%, та пов'язана виключно з округленнями при розрахунках. Тож всі методи є ефективними та точними.

5. ЗАДАЧА С5. РІВНОВАГА СИЛ З УРАХУВАННЯМ ЗЧЕПЛЕННЯ (ТЕРТЯ СПОКОЮ)

5.1. Короткі теоретичні відомості

Вперше дослідженням тертя займався *Леонардо да Вінчі*. Наприкінці XVII століття французький фізик *Амонтон* встановив незалежність сили тертя від величини поверхні дотикання тіл. Закони тертя були сформульовані французьким фізиком *Кулоном*.

Якщо до твердого тіла, що знаходиться в спокої на шорсткій горизонтальній площині (рис. 5.1), прикласти горизонтальну силу \vec{S} , то дія цієї сили спричинить появу сили зчеплення $\vec{F}_{зч} = -\vec{S}$, що являє собою силу протидії площині зміщення тіла. Завдяки зчепленню тіло залишається в спокої при зміні модуля сили \vec{S} від нуля до деякого значення S_{\max} . Це означає, що модуль сили зчеплення також змінюється від $F_{зч} = 0$ до $F_{зч} = F_{зч}^{\max}$ в момент початку руху.

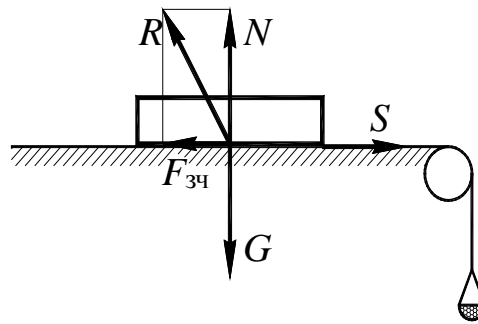


Рисунок 5.1

Як показують дослідження, модуль максимальної сили зчеплення пропорційний нормальному тиску N тіла на площину. В досліджуваному випадку $N = G$. Тоді:

$$F_{зч}^{\max} = f_{зч} N.$$

Коефіцієнт пропорційності $f_{зч} = F_{зч}^{\max} / N$ є абстрактним числом та називається **коефіцієнтом зчеплення**.

Коефіцієнт зчеплення залежить від матеріалу та фізичного стану контактуючих тіл та визначається експериментально. Його величина для матеріалів, що використовуються в техніці, зазвичай менше одиниці. Так як максимальне значення сили зчеплення дорівнює $f_{зч} N$, то модуль сили зчеплення завжди задовольняє умові:

$$F_{зч} \leq f_{зч} N.$$

Напрямок сили зчеплення протилежний напрямку того руху, який виник би під дією прикладених до тіла сил за відсутності зчеплення.

При ковзанні тіла по шорсткій поверхні до нього прикладена сила тертя ковзання. Напрямок цієї сили, що протидіє ковзанню, є протилежним напрямку швидкості тіла (рис. 5.2)

Модуль (величина) сили тертя ковзання пропорційний нормальному тиску:

$$F = fN.$$

Коефіцієнт пропорційності f називається **коефіцієнтом тертя ковзання** та визначається дослідним шляхом.

Коефіцієнт тертя ковзання є абстрактною величиною та залежить від матеріалу та фізичного стану поверхонь, між якими відбувається тертя, а також від швидкості руху тіла та питомого тиску.

Однак в елементарних розрахунках залежність коефіцієнта тертя ковзання від швидкості та питомого тиску часто не враховується.

Експериментально встановлено, що $f < f_{зч}$.

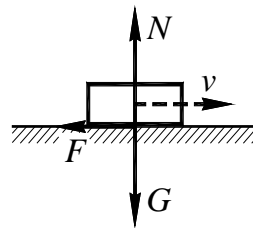


Рисунок 5.2

Реакція R реальної (шорсткої) поверхні на відміну від реакції ідеальної (гладкої) поверхні має дві складові: нормальну реакцію \vec{N} та силу зчеплення $\vec{F}_{зч}$ (або силу тертя \vec{F} при русі тіла).

Кут $\phi_{зч}$, що утворений реакцією шорсткої поверхні з нормаллю до поверхні в граничному стані спокою при $F_{зч} = F_{зч}^{max}$, називається **кутом зчеплення** (рис. 5.3).

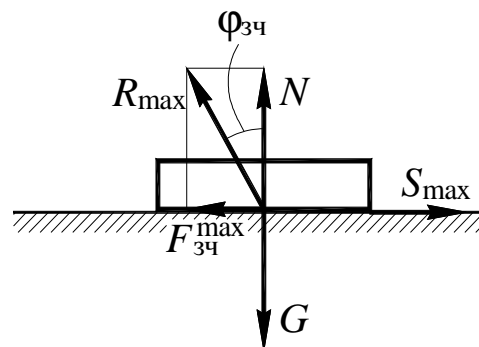


Рисунок 5.3

Тангенс кута зчеплення дорівнює коефіцієнту зчеплення:

$$\operatorname{tg} \phi_{зч} = F_{зч}^{max} / N = f_{зч} \text{ або } \phi_{зч} = \operatorname{arctg} f_{зч}.$$

Кут, тангенс якого дорівнює коефіцієнту тертя ковзання, називається **кутом тертя**.

Кут зчеплення можна визначити дослідним шляхом. Прилад для визначення кута зчеплення досить простий. Він являє собою похилу площину, кут нахилу якої α можна змінювати (рис. 5.4,а).

Зафіксуємо кут нахилу α площини OA , при якому розміщене на ній тіло знаходиться в граничному стані спокою та сила зчеплення досягає максимального значення. Побудуємо замкнений трикутник сил, що діють на тіло, та визначимо кут α (рис. 5.4,б):

$$\operatorname{tg} \alpha = F_{3\text{ч}}^{\max} / N = \operatorname{tg} \varphi_{3\text{ч}}, \quad \alpha = \varphi_{3\text{ч}},$$

тобто кут нахилу площини α , при якому тіло знаходиться в граничному стані спокою, дорівнює куту зчеплення $\varphi_{3\text{ч}}$.

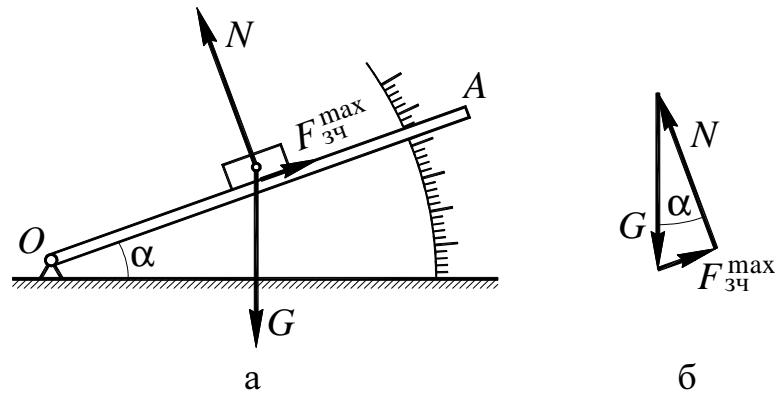


Рисунок 5.4

Значення коефіцієнту зчеплення для відповідних матеріалів (тіло–площина) можна визначити за таблицею тангенсів кутів, так як $f_{3\text{ч}} = \operatorname{tg} \varphi_{3\text{ч}}$.

Конус з вершиною в точці дотику тіл, твірна якого складає кут зчеплення з нормаллю до поверхонь тіл, називається **конусом зчеплення** (рис. 5.5). Поверхня конуса зчеплення являє собою геометричне місце максимальних реакцій опорної поверхні. Дійсно, максимальна реакція поверхні може займати різні положення на поверхні цього конуса, які залежать від напрямку сили \vec{S} , що прагне зрушити тіло (рис. 5.3). Простір всередині конуса являє собою сукупність можливих положень реакцій опорної поверхні в стані спокою.

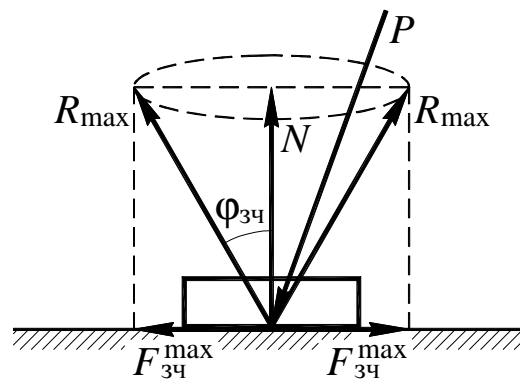


Рисунок 5.5

Нехай до тіла, що знаходиться в спокої прикладені сили (в тому числі вага тіла), лінія дії рівнодіючої \vec{P} яких лежить всередині конуса зчеплення (рис. 4). Ці сили не приведуть тіло до руху, так як сила \vec{P} буде урівноважена реакцією поверхні.

Розглянемо рівновагу сил, що діють на тяжкий брусок, що спирається на дві шорсткі площини (рис. 5.6). В точках A і B виникають реакції опор, лінії дії яких не виходять за межі конусів зчеплення. Провівши лінії $A-I$, $A-II$, $B-III$ та $B-IV$, які складають кути зчеплення $\varphi_{13\text{ч}}$ та $\varphi_{23\text{ч}}$ з перпендикулярами до опорних площин, поставленими в точках A і B , отримуємо границі конусів зчеплення. Чотирикутник, утворений цими лініями, всередині якого можуть перетинатися лінії дії реакцій опор A і B , називається областю рівноваги.

Брусок AB знаходиться під дією трьох сил: його вага \vec{G} та двох реакцій опор \vec{R}_A і \vec{R}_B . При рівновазі лінії дії цих трьох сил перетинаються в одній точці.

Так як будь-яка точка площини $klmn$ може бути точкою перетину лінії дії реакцій опор A і B , то брусок знаходиться в стану спокою, якщо лінія дії сили ваги бруска перетинає область рівноваги.

У випадку якщо лінія дії сили ваги проходить через точку k області рівноваги, брусок знаходиться в граничному стані спокою.

Брусок не може утриматися у вказаному на рисунку положенні, якщо лінія дії сили ваги проходить поза областю рівноваги.

Якщо брусок діє декілька заданих сил і вони приводяться до рівнодіючої сили, встановленими умовам повинна задовольняти ця рівнодіюча.

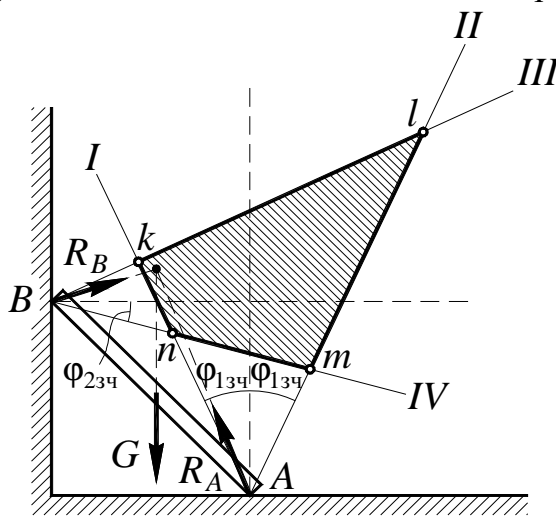


Рисунок 5.6

5.2. Завдання та вихідні дані

Визначити мінімальне (варіанти 1–20, 25, 26, 29, 30) або максимальне (варіанти 21–24, 27, 28) значення сили P та реакції опор системи, що знаходиться в спокої.

У варіантах 1–20 зчеплення (тертя спокою) врахувати тільки між гальмівною колодкою і барабаном. У варіантах 21–30 врахувати зчеплення у двох опорних точках тіла вагою G . Схеми варіантів представлені на рис. 5.7–5.9., а необхідні для розрахунку дані в табл. 5.1–5.4.

Таблиця 5.1 – Вихідні дані до задачі С5 (набір 1)

Номер варіанту	G	Q	a	b	c	α , град	Коефіцієнт зчеплення (коефіцієнт тертя спокою)	Точки, в яких визначаються реакції
	кН		м					
1	1,2	12	0,20	0,10	0,04	30	0,12	O, A
2	1		0,10	0,15		30	0,14	O, A, B
3	1,2	15	0,45	0,40	0,05	45	0,18	O, A
4	1,5	12	0,10	0,40	0,06		0,22	O, A
5	1,6	15	0,20	0,30	0,04	45	0,25	O, A
6	1,5	15	0,15	0,10		45	0,30	O, A, B
7	1,8	17	0,20	0,50	0,05	30	0,35	O, A
8	2	16	0,20	0,10		30	0,30	O, A, B
9	2	15	0,10	0,20		30	0,32	O, A, B
10	2	24	0,30	0,30	0,04	45	0,20	O, A
11	2	20	0,40	0,50	0,06		0,25	O, A
12	1,7	22	0,10	0,25		30	0,20	O, A, B
13	1,5	18	0,10	0,10		45	0,13	O, A, B
14	1,8	26	0,10	0,25	0,04	60	0,18	O, A
15	2	24	0,10	0,15		45	0,16	O, A, B
16	1	12	0,20	0,45	0,04	45	0,22	O, A
17	1,5	15	0,15	0,15		45	0,26	O, A, B, C
18	1,5	16	0,20	0,30	0,05	60	0,32	O, A
19	1,5	18	0,50	0,20	0,06	30	0,35	A, C, D
20	1,5	20	0,10	0,15			0,40	O, A, B
21	1,2		2	0,50		45	0,40	A, B, C, D
22	1,8		3	0,80		30	0,30	A, B, C, D
23	1,8		5	1,4			0,35	A, B, C
24	2,1		4	0,8			0,35	A, B, C, D
25	1,3		0,8	0,4		30	0,21	A, B, C, D
26	1,8		0,4				0,20	A, B, C
27	3		4	1		45	0,30	A, B, C, D
28	4		5	0,8		30	0,35	A, B, C, D
29	1,8		2	0,3		30	0,24	A, B, C
30	1,3		2	8		30	0,15	A, B, C, D

Таблиця 5.2 – Вихідні дані до задачі С5 (набір 2)

Номер варіанту	G	Q	a	b	c	α , град	Коефіцієнт зчеплення (коефіцієнт тертя спокою)	Точки, в яких визначаються реакції
	кН		м					
1	1,2	12	0,22	0,11	0,05	30	0,15	O, A
2	1		0,12	0,18		30	0,13	O, A, B
3	1,2	15	0,45	0,40	0,07	45	0,22	O, A
4	1,5	12	0,12	0,48	0,08		0,20	O, A
5	1,6	15	0,18	0,27	0,03	45	0,27	O, A
6	1,5	15	0,18	0,12		45	0,25	O, A, B
7	1,8	17	0,16	0,40	0,03	30	0,30	O, A
8	2	16	0,24	0,12		30	0,32	O, A, B
9	2	15	0,12	0,24		30	0,25	O, A, B
10	2	24	0,30	0,35	0,05	45	0,30	O, A
11	2	20	0,48	0,60	0,08		0,28	O, A
12	1,7	22	0,12	0,30		30	0,25	O, A, B
13	1,5	18	0,12	0,16		45	0,15	O, A, B
14	1,8	26	0,12	0,20	0,03	60	0,20	O, A
15	2	24	0,12	0,14		45	0,15	O, A, B
16	1	12	0,25	0,40	0,05	45	0,20	O, A
17	1,5	15	0,22	0,16		45	0,32	O, A, B, C
18	1,5	16	0,20	0,35	0,06	60	0,30	O, A
19	1,5	18	0,48	0,24	0,05	30	0,30	A, C, D
20	1,5	20	0,12	0,20			0,35	O, A, B
21	1,2		2,4	0,40		45	0,35	A, B, C, D
22	1,8		2,8	0,5		30	0,32	A, B, C, D
23	1,8		4	1,2			0,30	A, B, C
24	2,1		3,6	1,0			0,25	A, B, C, D
25	1,3		1	0,42		30	0,30	A, B, C, D
26	1,8		0,8				0,15	A, B, C
27	3		5	1,4		45	0,25	A, B, C, D
28	4		4	1		30	0,30	A, B, C, D
29	1,8		3,2	0,5		30	0,27	A, B, C
30	1,3		1,8	6		30	0,25	A, B, C, D

Таблиця 5.3 – Вихідні дані до задачі С5 (набір 3)

Номер варіанту	G	Q	a	b	c	α , град	Коефіцієнт зчеплення (коефіцієнт тертя спкою)	Точки, в яких визначаються реакції
	кН		м					
1	1	10	0,22	0,11	0,05	30	0,12	O, A
2	1,1		0,12	0,18		30	0,14	O, A, B
3	1,3	14	0,45	0,40	0,07	45	0,18	O, A
4	1,8	15	0,12	0,48	0,08		0,22	O, A
5	1,5	16	0,18	0,27	0,03	45	0,25	O, A
6	1,6	18	0,18	0,12		45	0,30	O, A, B
7	2	20	0,16	0,40	0,03	30	0,35	O, A
8	2,2	18	0,24	0,12		30	0,30	O, A, B
9	2,1	20	0,12	0,24		30	0,32	O, A, B
10	1,8	22	0,30	0,35	0,05	45	0,20	O, A
11	1,9	24	0,48	0,60	0,08		0,25	O, A
12	2	25	0,12	0,30		30	0,20	O, A, B
13	1,6	20	0,12	0,16		45	0,13	O, A, B
14	1,7	24	0,12	0,20	0,03	60	0,18	O, A
15	1,8	20	0,12	0,14		45	0,16	O, A, B
16	1,2	15	0,25	0,40	0,05	45	0,22	O, A
17	1,3	12	0,22	0,16		45	0,26	O, A, B, C
18	1,4	14	0,20	0,35	0,06	60	0,32	O, A
19	1,7	16	0,48	0,24	0,05	30	0,35	A, C, D
20	1,6	18	0,12	0,20			0,40	O, A, B
21	1		2,4	0,40		45	0,40	A, B, C, D
22	1,5		2,8	0,5		30	0,30	A, B, C, D
23	2		4	1,2			0,35	A, B, C
24	3		3,6	1,0			0,35	A, B, C, D
25	1		1	0,42		30	0,21	A, B, C, D
26	3		0,8				0,20	A, B, C
27	4		5	1,4		45	0,30	A, B, C, D
28	5		4	1		30	0,35	A, B, C, D
29	2		3,2	0,5		30	0,24	A, B, C
30	1		1,8	6		30	0,15	A, B, C, D

Таблиця 5.4 – Вихідні дані до задачі С5 (набір 4*)

Номер варіанту	G	Q	a	b	c	α , град	Коефіцієнт зчеплення (коефіцієнт тертя спокою)	Точки, в яких визначаютьс я реакції
	кН		м					
1	1	10	0,20	0,10	0,04	30	0,10	O, A
2	1,1		0,10	0,15		30	0,15	O, A, B
3	1,3	14	0,45	0,40	0,05	45	0,20	O, A
4	1,8	15	0,10	0,40	0,06		0,25	O, A
5	1,5	16	0,20	0,30	0,04	45	0,30	O, A
6	1,6	18	0,15	0,10		45	0,35	O, A, B
7	2	20	0,20	0,50	0,05	30	0,40	O, A
8	2,2	18	0,20	0,10		30	0,35	O, A, B
9	2,1	20	0,10	0,20		30	0,30	O, A, B
10	1,8	22	0,30	0,30	0,04	45	0,25	O, A
11	1,9	24	0,40	0,50	0,06		0,20	O, A
12	2	25	0,10	0,25		30	0,15	O, A, B
13	1,6	20	0,10	0,10		45	0,10	O, A, B
14	1,7	24	0,10	0,25	0,04	60	0,15	O, A
15	1,8	20	0,10	0,15		45	0,20	O, A, B
16	1,2	15	0,20	0,45	0,04	45	0,25	O, A
17	1,3	12	0,15	0,15		45	0,30	O, A, B, C
18	1,4	14	0,20	0,30	0,05	60	0,35	O, A
19	1,7	16	0,50	0,20	0,06	30	0,40	A, C, D
20	1,6	18	0,10	0,15			0,45	O, A, B
21	1		2	0,50		45	0,45	A, B, C, D
22	1,5		3	0,80		30	0,35	A, B, C, D
23	2		5	1,4			0,40	A, B, C
24	3		4	0,8			0,30	A, B, C, D
25	1		0,8	0,4		30	0,25	A, B, C, D
26	3		0,4				0,25	A, B, C
27	4		4	1		45	0,35	A, B, C, D
28	5		5	0,8		30	0,40	A, B, C, D
29	2		2	0,3		30	0,20	A, B, C
30	1		2	8		30	0,20	A, B, C, D

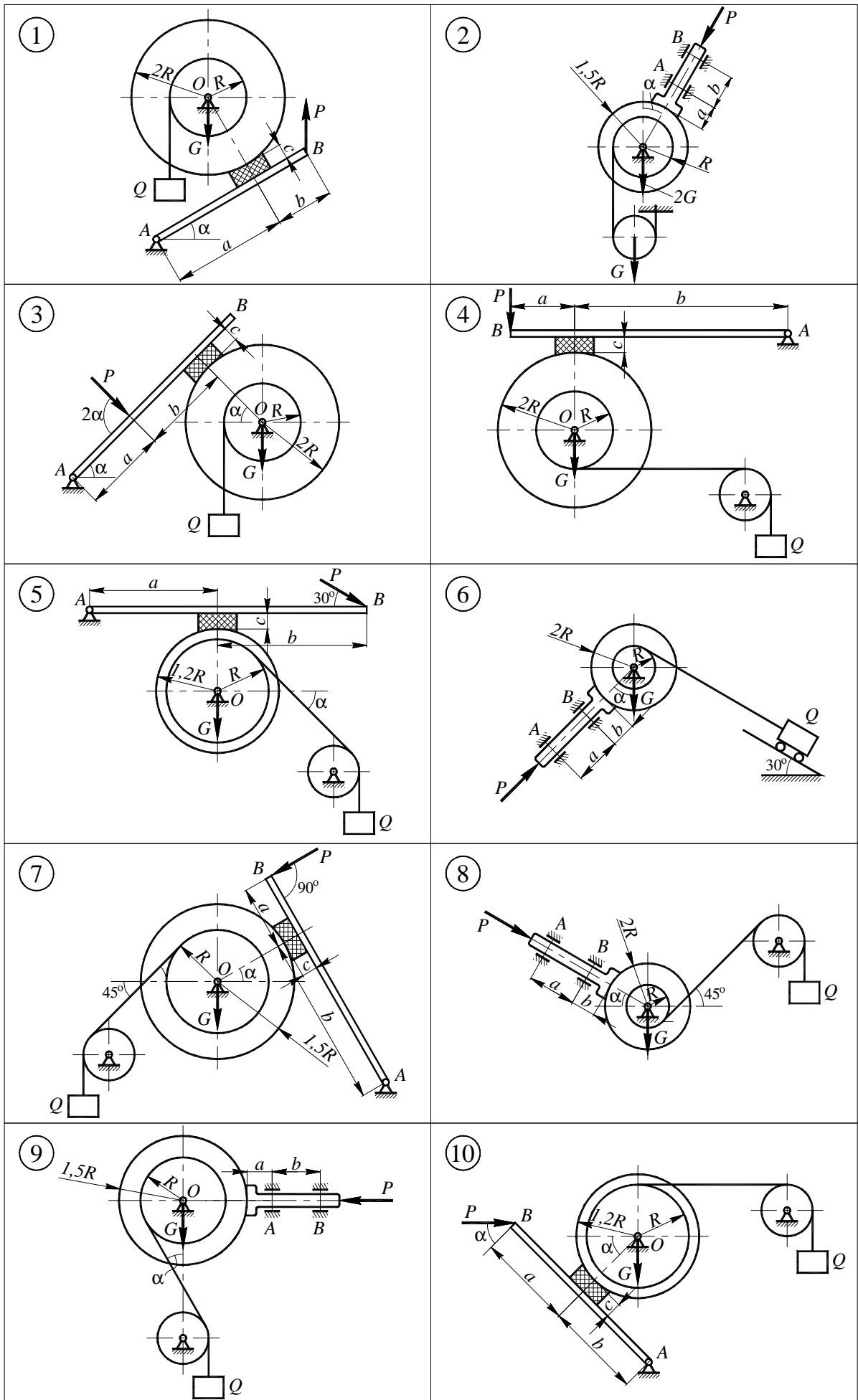


Рисунок 5.7 – Вихідні схеми до задачі С5 (1-10)

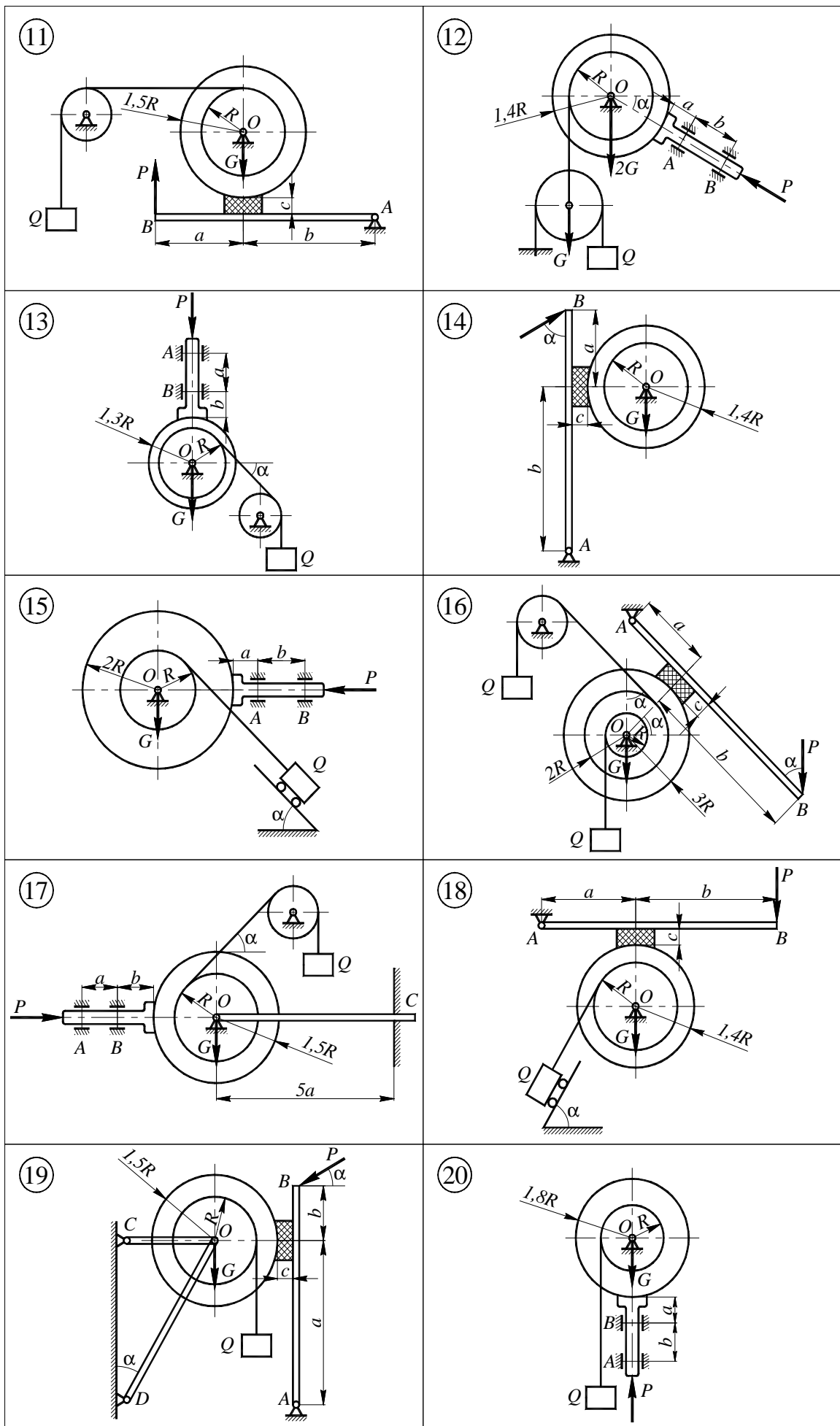


Рисунок 5.8 – Вихідні схеми до задачі С5 (11-20)

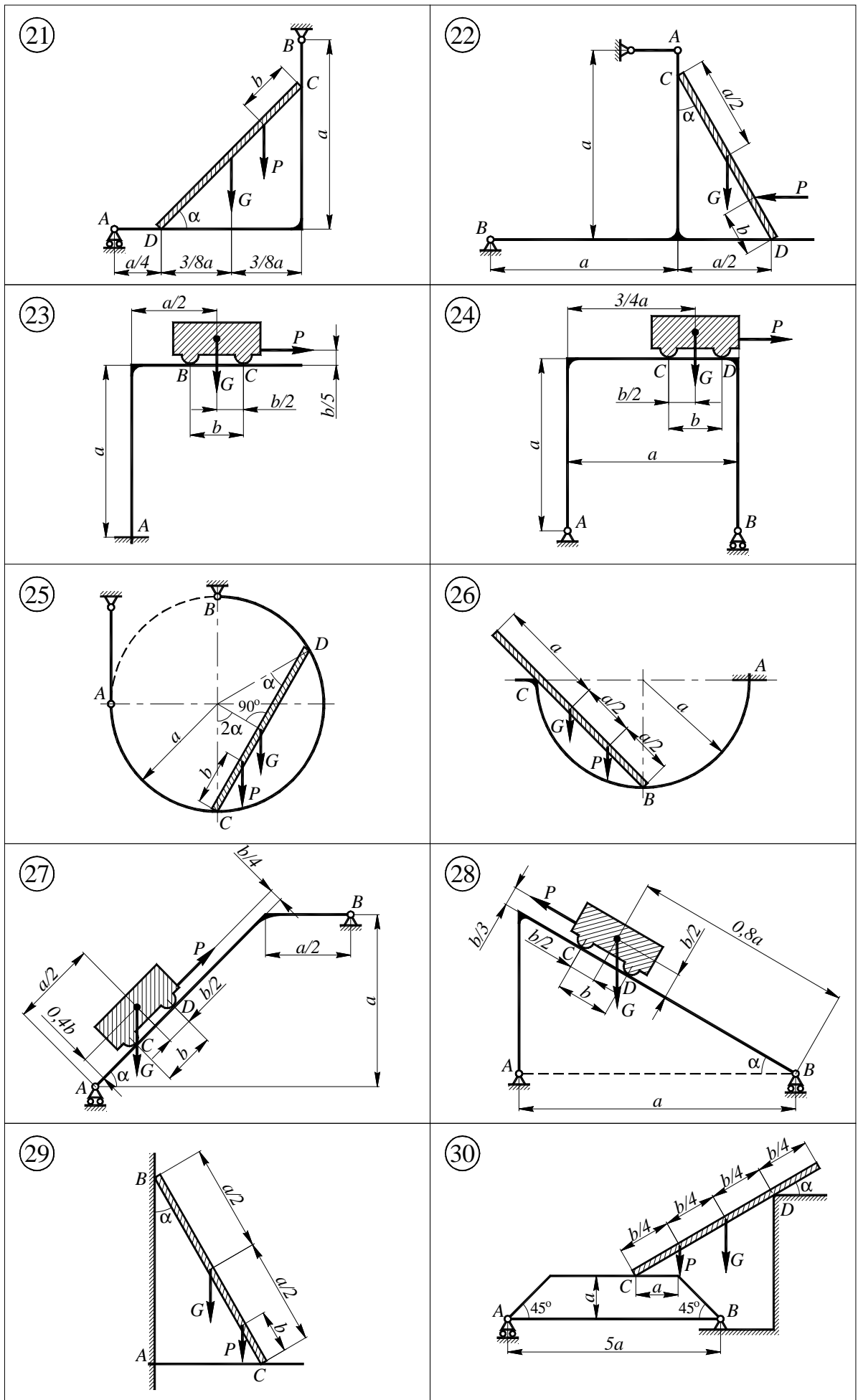


Рисунок 5.9 – Вихідні схеми до задачі С5 (21-30)

5.3. Алгоритм розв'язання задачі С5

Задачі на дослідження рівноваги систем твердих тіл з урахуванням наявності зчеплення (тертя спокою) рекомендується розв'язувати в наступній послідовності:

1) виконати аналіз заданої системи:

1.1) умовно розділити систему на окремі частини;

1.2) з'ясувати невідомі реакції, які в подальшому необхідно визначити;

2) використовуючи методи, відомі з вивчення попередніх розділів курсу, для кожної з окремих частин системи скласти еквівалентні схеми навантаження (прикласти сили та реакції, в тому числі силу зчеплення $F_{зч}$ між відповідними тілами);

3) дослідити рівновагу кожної частини (еквівалентної схеми) системи, а саме користуючись методиками, що вивчені при розв'язанні попередніх задач скласти рівняння рівноваги та розв'язуючи їх визначити невідомі параметри. Дослідження варто починати з «останньої» частини системи, зазвичай – вантаж;

записати відповідь.

5.4. Приклад розв'язання задачі С5

В завданнях типу С5 необхідно дослідити рівновагу системи сил з урахуванням тертя спокою (зчеплення), а саме визначити мінімальне або максимальне (в залежності від варіанту) значення зовнішньої прикладеної сили P та реакції опор системи, що знаходиться в спокої.

Дано: схема конструкції (рис. 5.10); $G = 1,8 \text{ кН}$; $Q = 12 \text{ кН}$; $f_{зч} = 0,20$; $a = 0,25 \text{ м}$; $b = 0,1 \text{ м}$, $c = 0,04 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$.

Знайти: мінімальне значення сили P , а також реакції опор R_{Ax} , R_{Ay} , R_C , R_D для системи, що знаходиться в спокої.

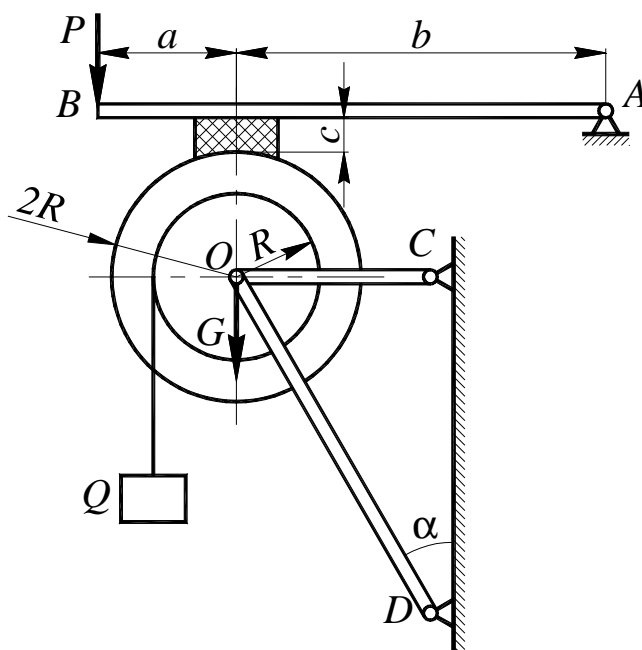


Рисунок 5.10 – Вихідна схема до завдання
Розв'язання

1. Виконуємо аналіз заданої системи (рис. 5.10).

Задану систему можна розділити на чотири складові: важіль з гальмівною колодкою (рис. 5.11,а); барабан (рис. 5.11,б); опора барабана (рис. 5.11,в), вантаж Q (рис. 5.11,г).

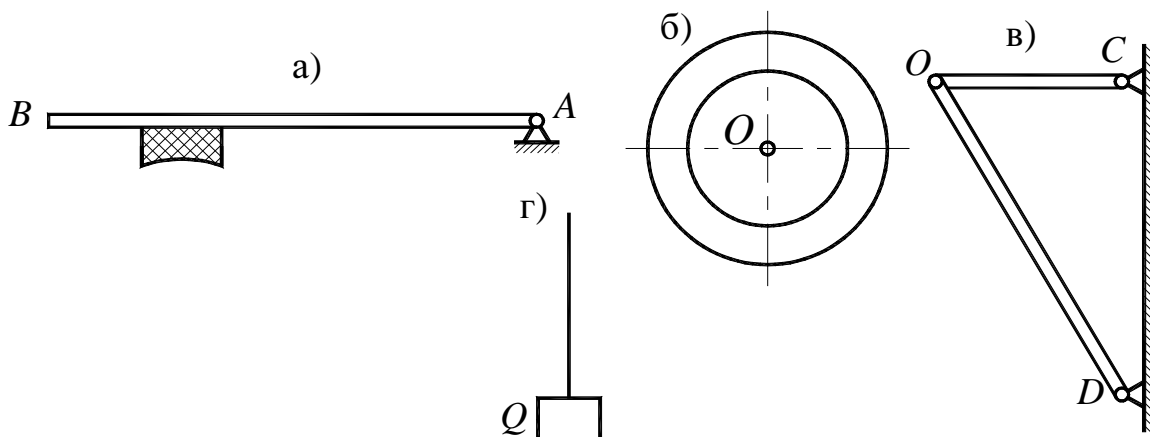


Рисунок 5.11 – Складові заданої системи

Для визначення необхідних за умовою задачі параметрів необхідно перейти до розгляду рівноваги кожної частини механізму.

2. Дослідження рівноваги окремих частин заданої конструкції (рис. 5.11).

Почнемо з дослідження системи сил, прикладених до вантажу (рис. 5.12). На дане тіло діють сила ваги вантажу Q та сила натягу нитки T , якою вантаж з'єднаний з барабаном.

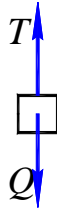


Рисунок 5.12

Розглядаючи тіло як матеріальну точку, можемо скласти рівняння рівноваги та визначити силу натягу нитки:

$$\sum P_{i,x} = T - Q = 0 \Rightarrow T = Q = 12 \text{ кН.}$$

Далі розглянемо рівновагу сил прикладених до барабана (рис. 5.13). Складемо систему рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} \sum M_O(P_i) = T' \cdot R - F_{зч} \cdot 2R = 0; \\ \sum P_{i,x} = F_{зч} - R_{Ox} = 0; \\ \sum P_{i,y} = R_{Oy} - T' - G - N = 0. \end{cases}$$

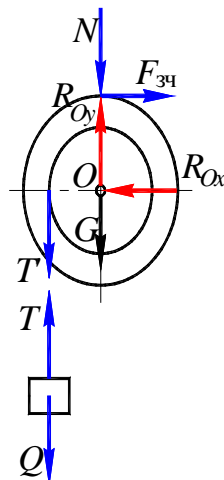


Рисунок 5.13

З рівняння рівноваги моментів знаходимо силу зчеплення:

$$F_{зч} = \frac{T'}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ кН.}$$

Далі, розв'язуючи рівняння рівноваги сил відносно осі x знаходимо складову реакції в опорі O :

$$R_{Ox} = F_{зч} = 6 \text{ кН.}$$

В стані граничної рівноваги сила зчеплення (тертя спокою) між барабаном та гальмівною колодкою визначається рівністю:

$$F_{зч} = f_{зч} N.$$

Відповідно, з даного рівняння можемо визначити нормальну реакцію що діє на барабан від гальмівної колодки:

$$N = \frac{F_{зч}}{f_{зч}} = \frac{6}{0,2} = 30 \text{ кН}.$$

Розв'язуючи рівняння рівноваги сил відносно осі y знаходимо складову реакції в опорі O :

$$R_{Oy} = T' + G + N = 12 - 1,8 + 30 = 40,2 \text{ кН}.$$

Розглянемо рівновагу сил, прикладених до опори барабана (рис. 5.14).

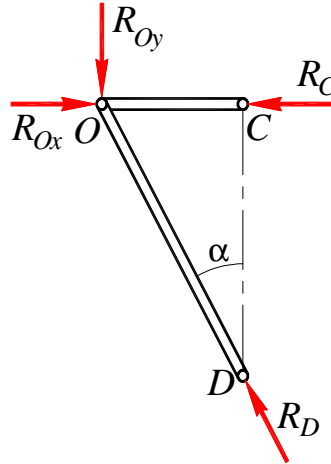


Рисунок 5.14

Складаємо рівняння рівноваги сил відносно осі y :

$$\sum P_{iy} = -R_{Oy} + R_D \cdot \cos \alpha = 0.$$

В даному рівнянні невідомою є тільки реакція в точці D опори. Відповідно, розв'язуючи його відносно необхідної реакції визначаємо її:

$$R_D = \frac{R_{Oy}}{\cos \alpha} = \frac{40,2}{\cos 30^\circ} = \frac{40,2}{0,866} = 46,42 \text{ кН}.$$

Складаємо рівняння рівноваги сил відносно осі x :

$$\sum P_{ix} = R_{Ox} - R_C - R_D \cdot \sin \alpha = 0.$$

В даному рівнянні невідомою є тільки реакція в точці C опори. Відповідно, розв'язуючи його відносно необхідної реакції визначаємо її:

$$R_C = R_{Ox} - R_D \cdot \sin \alpha = 6 - 46,42 \cdot \sin 30^\circ = 6 - 46,42 \cdot 0,5 = -17,21 \text{ кН}.$$

Примітка. Знак « \leftarrow » показує, що насправді реакція R_C має протилежний напрям від зображеного на розрахунковій схемі (рис. 5.14).

Далі переходимо до розгляду рівноваги системи сил прикладених до важеля з гальмівною колодкою (рис. 5.15).

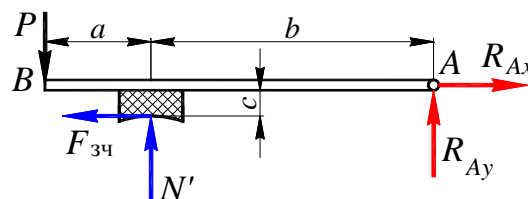


Рисунок 5.15

Складаємо рівняння рівноваги сил відносно осі x для даної розрахункової схеми:

$$\sum P_{ix} = -F_{зч} + R_{Ax} = 0.$$

Розв'язуючи рівняння рівноваги відносно невідомої складової реакції R_{Ax} , знаходимо її:

$$R_{Ax} = F_{зч} = 6 \text{ кН}.$$

Далі складаємо рівняння рівноваги для моментів сил відносно, наприклад, точки A :

$$\sum M_A(P_i) = P \cdot (a + b) - F_{зч} \cdot c - N' \cdot b = 0.$$

Дане рівняння також містить тільки одну невідому – мінімальне значення сили P^* . Тож розв'язуємо рівняння та знаходимо зовнішню силу P :

$$P_{\min} = \frac{F_{зч} \cdot c + N' \cdot b}{a + b} = \frac{6 \cdot 0,04 + 30 \cdot 0,1}{0,25 + 0,1} = 9,257 \text{ кН}.$$

Примітка. В досліджуваному стані рівноваги сила P є мінімальною.

Залишилось знайти значення складової реакції в точці A – R_{Ay} . Для визначення вказаної реакції складемо рівняння рівноваги сил відносно осі y :

$$\sum P_{iy} = -P + N' + R_{Ay} = 0.$$

Розв'язуючи дане рівняння визначаємо R_{Ay} :

$$R_{Ay} = P_{\min} - N' = 9,257 - 30 = -20,743 \text{ кН}.$$

Примітка. Знак «-» показує, що насправді реакція R_{Ay} має протилежний напрям від зображеного на розрахунковій схемі (рис. 5.15).

Відповідь: $P_{\min} = 9,257 \text{ кН}$; $R_{Ax} = 6 \text{ кН}$; $R_{Ay} = -20,743 \text{ кН}$,
 $R_C = -17,21 \text{ кН}$; $R_D = 46,42 \text{ кН}$.

6. ЗАДАЧА С6. ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ ЦЕНТРУ ТЯЖІННЯ ТВЕРДИХ ТІЛ

6.1. Короткі теоретичні відомості

Сили тяжіння окремих частинок тіла до Землі направлені *приблизно* до центру Землі (насправді лінії дії сил тяжіння двох матеріальних частинок, що лежать на земній поверхні та віддалені один від одної на відстані 31 м, утворюють кут, що дорівнює одній секунді). Так як розміри досліджуваних тіл малі в порівнянні з радіусом Землі, то ці сили можна вважати паралельними. Центр цієї системи, в якому прикладена вага тіла називається **центром тяжіння**, рівнодіюча паралельних сил тяжіння дорівнює їх сумі та називається вагою тіла:

$$G = \sum_{k=1}^n G_k .$$

Координати x_C , y_C , z_C центру тяжіння C твердого тіла задаються наближеними формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta G_k}{G}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n y_k \Delta G_k}{G}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n z_k \Delta G_k}{G},$$

де x_k , y_k , z_k – координати точки прикладання сили G_k , де $k = 1, 2, \dots, n$.

Положення центру тяжіння C твердого тіла по відношенню до його матеріальних частинок не залежить від стану твердого тіла. В подальшому будуть розглядатися однорідні тіла, для яких питома вага всіх їхніх матеріальних частинок стала.

Вага однорідного тіла визначається за формулою $G = \gamma V$, де V – об'єм тіла, γ – вага одиниці об'єму.

Аналогічно, вага кожної частинки визначається за формулою $\Delta G_k = \gamma \Delta v_k$, де Δv_k – об'єм елементарної частинки M_k тіла.

Підставляючи ці значення в формули координат центру тяжіння, отримаємо:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k x_k}{V}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k y_k}{V}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta v_k z_k}{V}.$$

Центр тяжіння однорідного тіла, що заповнює деякий об'єм, називається центром тяжіння цього об'єму.

Центр тяжіння плоскої фігури.

Однорідне тіло, що має форму тонкої пластини, можна розглядати як матеріальну плоску фігуру. Положення центру тяжіння плоскої фігури визначається двома координатами x_C та y_C (рис. 6.1).

Вагу однорідної пластини виразимо формулою $G = \rho S$, де S – площа плоскої фігури, ρ – вага одиниці її площі.

Розіб'ємо площу фігури на елементарні площинки. Вага кожної площинки M_k визначиться за формулою $\Delta G_k = \rho \Delta S_k$, де ΔS_k – її площа. Позначимо x_k, y_k координати центру тяжіння елементарної площинки M_k . Тоді координати центру тяжіння фігури визначається за допомогою формули:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta G_k}{G} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \rho \Delta S_k}{\rho \Delta S} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta S_k}{\Delta S}.$$

Таким чином,

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta S_k}{S}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n y_k \Delta S_k}{S},$$

де сумування розповсюджено на всі елементи площі.

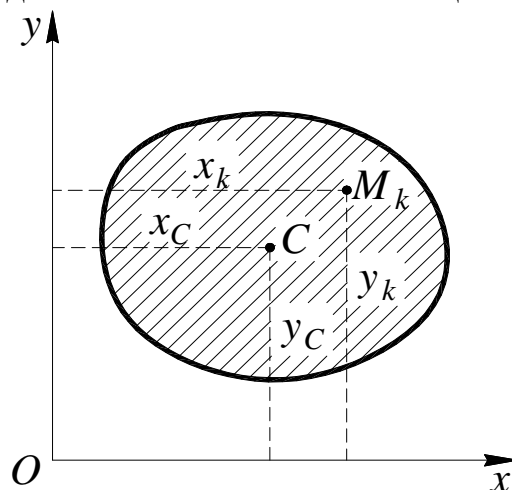


Рисунок 6.1

Ці формули показують, що координати x_C та y_C центру тяжіння однорідної пластини не залежать від сталої ρ , що характеризує густину пластини.

Сума добутків елементарних площин, що входять до складу площі фігури, на алгебраїчні значення їх відстаней до деякої осі називається **статичним моментом** площі фігури відносно цієї осі.

Позначаючи M_{S_x} і M_{S_y} статичні моменти площі плоскої фігури відносно осей x та y маємо:

$$M_{S_x} = \sum_{k=1}^n y_k \Delta S_k = S y_C; \quad M_{S_y} = \sum_{k=1}^n x_k \Delta S_k = S x_C.$$

Таким чином, статичний момент площі плоскої фігури відносно осі дорівнює добутку площі фігури на алгебраїчне значення відстані від центра тяжіння до цієї осі.

Якщо відомі статичні моменти площі плоскої фігури відносно координатних осей, то координати її центру тяжіння можна визначити за формулами:

$$x_C = \frac{M_{Sy}}{S}; \quad y_C = \frac{M_{Sx}}{S}.$$

Очевидно, що статичний момент площі плоскої фігури відносно осі, що проходить через центр тяжіння фігури, дорівнює нулю.

Центр тяжіння лінії.

Досить часто тверді тіла, які аналізуються в теоретичній механіці представлені у вигляді однорідних тіл, що мають велику довжину при відносно малій площі поперечного перерізу, наприклад, стержні плоскої ферми.

Розглянемо, наприклад, частину однорідної тонкої проволочки сталого перерізу, вісь якої розташована по дузі кривої AB (рис. 6.2). Вагу проволочки виразимо формулою $G = \rho L$, де L – довжина лінії AB , ρ – вага одиниці довжини проволочки. Розіб'ємо лінію AB на елементарні ділянки M_k довжиною Δl_k . Вага кожної ділянки визначиться за формулою:

$$\Delta G_k = \rho \Delta l_k.$$

Координати центру тяжіння елементарної ділянки позначимо x_k, y_k, z_k . Тоді координати центру тяжіння C досліджуваної частини проволочки можуть бути визначені за формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta G_k}{G} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \rho \Delta l_k}{\rho L},$$

або

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta l_k}{L}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n y_k \Delta l_k}{L}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n z_k \Delta l_k}{L}.$$

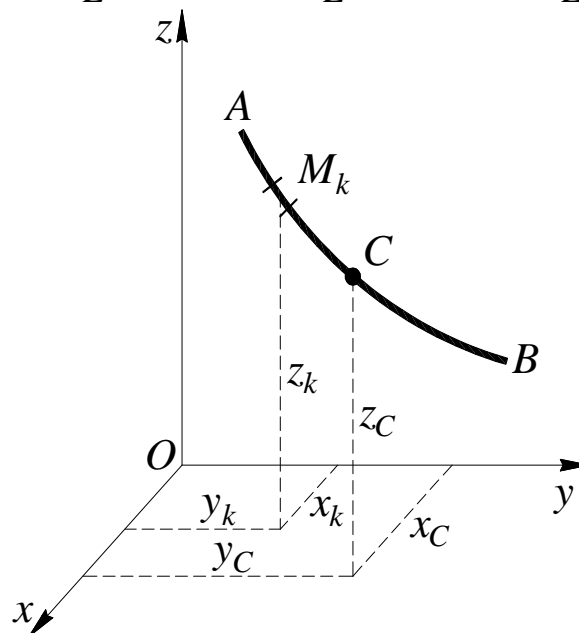


Рисунок 6.2

Формули показують, що координати центру тяжіння не залежать від сталої ρ , що характеризує густину проволочки.

Центр тяжіння однорідної тонкої проволочки сталого перерізу, вісь якої співпадає з деякою лінією, називається центром тяжіння цієї лінії.

Положення центрів тяжіння деяких твердих тіл найпростішої геометричної форми:

1) центр тяжіння площі однорідного прямокутного трикутника розташований в точці перетину його діагоналі;

2) центр тяжіння площі однорідного трикутника знаходиться в точці перетину його медіан;

3) центр тяжіння дуги однорідної окружності (рис. 6.3,а) знаходиться на осі симетрії, і його положення визначається координатами:

$$x_C = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \quad y_C = 0,$$

де r – радіус окружності;

α – половина центрального кута.

4) центр тяжіння площі однорідного кругового сектора (рис. 6.3,б) розташований на осі симетрії та має координати:

$$x_C = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \quad y_C = 0.$$

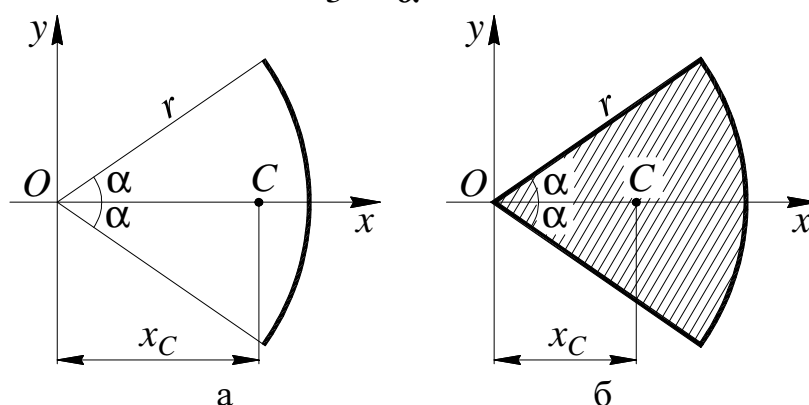


Рисунок 6.3

5) центр тяжіння C однорідної призми (рис. 6.4,а) знаходиться в середині відрізка, що з'єднує центри тяжіння C_1 і C_2 верхньої та нижньої основи цієї призми, тобто $C_1C = CC_2$;

б) центр тяжіння однорідної піраміди (рис. 6.4,б) лежить на відрізку, що з'єднує вершину O піраміди з центром тяжіння C_1 її основи, на відстані $1/4$ цього відрізка OC_1 від центру тяжіння C_1 основи піраміди, тобто $CC_1 = \frac{1}{4} OC_1$;

7) центр тяжіння однорідного кругового конуса (рис. 6.4,в) лежить на його висоті і віддалений на відстані однієї чверті висоти від основи конуса, тобто $AC = \frac{1}{4} OA$.

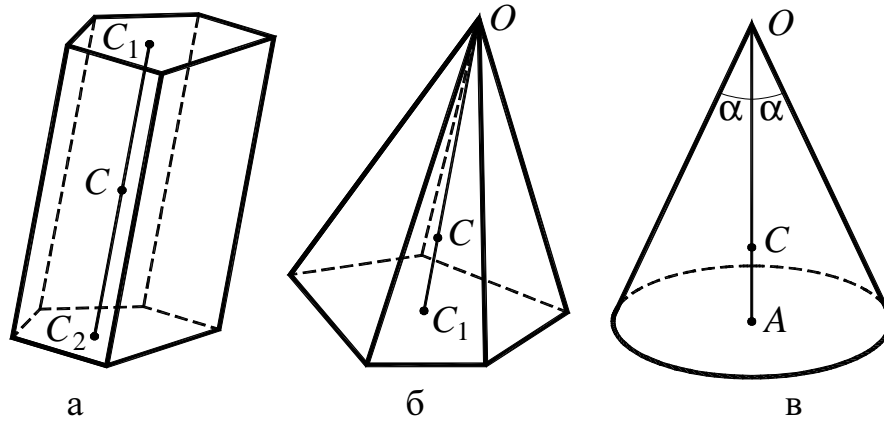


Рисунок 6.4

Найбільш розповсюдженим прийомом використання вище наведених формул для визначення положення центрів тяжіння є уявна розбивка однорідного твердого тіла на такі частини, положення центру тяжіння кожної з яких відомо, або легко може бути визначено.

Наприклад, при розбиванні площі однорідної плоскої фігури (рис. 6.5,а) на три частини положення її центру тяжіння $C(x_C, y_C, z_C)$ визначається формулами:

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 + x_2 \Delta s_2 + x_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3}; \quad y_C = \frac{y_1 \Delta s_1 + y_2 \Delta s_2 + y_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3}; \quad z_C = 0,$$

де x_1, y_1, z_1 – координати центру тяжіння C_1 першої частини плоскої фігури; Δs_1 – площа першої частини і т.д.

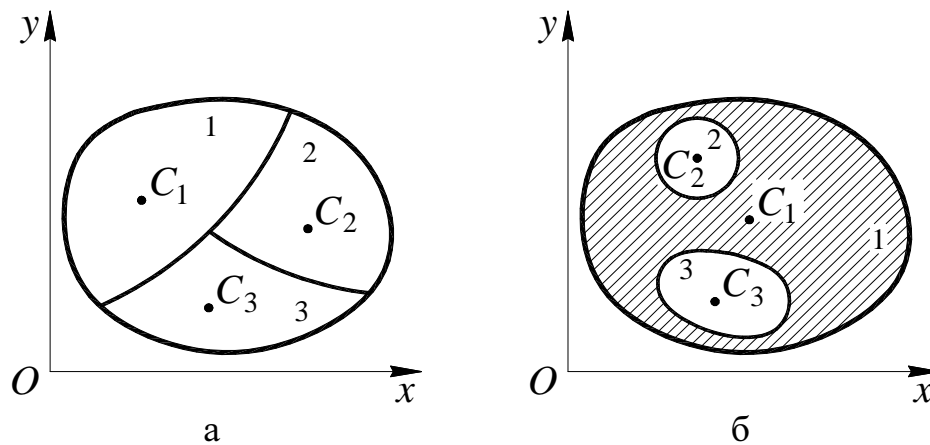


Рисунок 6.5

В деяких випадках доцільно замінити тверде тіло не сумою, а різницею окремих її частин. Так, наприклад, у випадку пластини з двома вирізами, що зображена на рис. 6.5,б,, її площу можна записати у вигляді різниці площ суцільної плоскої фігури 1 та двох вирізів 2 і 3, тобто $S = \Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3$. В цьому випадку положення центру тяжіння $C(x_C, y_C, z_C)$ однорідної плоскої фігури визначається формулами:

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 - x_2 \Delta s_2 - x_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3}; \quad y_C = \frac{y_1 \Delta s_1 - y_2 \Delta s_2 - y_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3}; \quad z_C = 0.$$

6.2. Завдання та вихідні дані

Знайти положення центру тяжіння твердих тіл, що представлені у вигляді плоскої фігури (варіанти 1, 4-6, 8-11, 14, 15, 17, 18, 20-23, 25, 28, 30), плоских ферм, складених з тонких однорідних стержнів однакової погонної ваги (варіанти 2, 7, 13, 16, 26, 29) та об'єму (варіанти 3, 12, 19, 24, 27).

Розрахункові схеми зображені на рис. 6.6 – 6.8, розміри наведені в табл. 6.1 – 6.4.

Таблиця 6.1 – Вихідні дані до задачі С6 (набір 1)

Номер варіанту	a , м	b , м	c , м	R_1 , м	R_2 , м
1	0,06	0,36	–	0,2	0,3
2	3	–	–	–	–
3	0,3	0,25	0,1	–	–
4	0,12	0,36	–	0,12	–
5	0,8	0,5	0,22	0,2	–
6	0,24	0,08	–	0,12	0,36
7	2	4	–	–	–
8	0,4	–	–	0,2	0,08
9	0,16	–	–	0,12	0,3
10	0,06	0,1	–	0,1	–
11	0,12	0,16	–	0,1	–
12	0,11	0,15	0,36	0,06	–
13	4,8	3	–	–	–
14	0,05	0,7	–	0,2	0,25
15	0,015	0,075	0,09	–	–
16	2,4	1,8	–	–	–
17	0,25	0,1	0,12	0,16	–
18	0,03	0,06	0,2	0,12	–
19	0,11	0,14	–	0,03	–
20	0,7	0,42	–	0,16	–
21	0,16	0,25	–	0,12	–
22	0,04	0,025	–	0,1	–
23	0,03	0,16	–	0,03	–
24	0,12	0,18	0,3	–	–
25	0,02	0,06	–	0,1	–
26	12	–	–	–	–
27	0,12	0,2	0,18	–	–
28	0,08	0,08	0,025	0,15	–
29	3	–	–	–	–
30	0,05	–	–	0,3	–

Таблиця 6.2 – Вихідні дані до задачі С6 (набір 2)

Номер варіанту	a , м	b , м	c , м	R_1 , м	R_2 , м
1	0,04	0,28	–	0,18	0,24
2	3,5	–	–	–	–
3	0,34	0,24	0,12	–	–
4	0,15	0,45	–	0,15	–
5	0,6	0,36	0,2	0,15	–
6	0,18	0,06	–	0,11	0,27
7	3	6	–	–	–
8	0,36	–	–	0,15	0,06
9	0,18	–	–	0,15	0,35
10	0,07	0,1	–	0,12	–
11	0,11	0,14	–	0,09	–
12	0,12	0,16	0,36	0,07	–
13	3,2	2	–	–	–
14	0,06	0,72	–	0,2	0,26
15	0,025	0,125	0,15	–	–
16	2,8	2,1	–	–	–
17	0,3	0,1	0,12	0,18	–
18	0,025	0,05	0,22	0,12	–
19	0,12	0,16	–	0,03	–
20	0,8	0,44	–	0,18	–
21	0,18	0,3	–	0,14	–
22	0,04	0,032	–	0,1	–
23	0,04	0,2	–	0,032	–
24	0,15	0,25	0,28	–	–
25	0,03	0,06	–	0,1	–
26	8	–	–	–	–
27	0,15	0,25	0,2	–	–
28	0,08	0,08	0,024	0,16	–
29	4	–	–	–	–
30	0,06	–	–	0,32	–

Таблиця 6.3 – Вихідні дані до задачі С6 (набір 3)

Номер варіанту	a , м	b , м	c , м	R_1 , м	R_2 , м
1	0,07	0,35	–	0,16	0,22
2	2,5	–	–	–	–
3	0,28	0,25	0,09	–	–
4	0,14	0,5	–	0,14	–
5	0,8	0,42	0,3	0,15	–
6	0,16	0,05	–	0,08	0,24
7	3,5	7	–	–	–
8	0,32	–	–	0,12	0,04
9	0,2	–	–	0,18	0,36
10	0,08	0,12	–	0,12	–
11	0,15	0,22	–	0,1	–
12	0,12	0,18	0,4	0,06	–
13	5,6	3,5	–	–	–
14	0,08	0,56	–	0,18	0,26
15	0,03	0,15	0,18	–	–
16	3,2	2,4	–	–	–
17	0,32	0,12	0,14	0,2	–
18	0,02	0,04	0,24	0,14	–
19	0,14	0,17	–	0,04	–
20	0,8	0,42	–	0,2	–
21	0,15	0,22	–	0,11	–
22	0,04	0,028	–	0,1	–
23	0,025	0,2	–	0,02	–
24	0,2	0,3	0,45	–	–
25	0,025	0,06	–	0,1	–
26	15	–	–	–	–
27	0,14	0,24	0,2	–	–
28	0,06	0,06	0,02	0,2	–
29	5	–	–	–	–
30	0,04	–	–	0,28	–

Таблиця 6.4 – Вихідні дані до задачі С6 (набір 4*)

Номер варіанту	a , м	b , м	c , м	R_1 , м	R_2 , м
1	0,05	0,3	–	0,15	0,2
2	2	–	–	–	–
3	0,25	0,2	0,1	–	–
4	0,1	0,3	–	0,1	–
5	0,7	0,4	0,2	0,15	–
6	0,2	0,07	–	0,1	0,3
7	2,5	5	–	–	–
8	0,3	–	–	0,16	0,05
9	0,15	–	–	0,1	0,25
10	0,05	0,07	–	0,1	–
11	0,1	0,15	–	0,08	–
12	0,1	0,14	0,35	0,05	–
13	4	2,5	–	–	–
14	0,04	0,6	–	0,16	0,2
15	0,02	0,1	0,12	–	–
16	2	1,5	–	–	–
17	0,26	0,08	0,1	0,15	–
18	0,02	0,04	0,15	0,1	–
19	0,1	0,13	–	0,025	–
20	0,65	0,4	–	0,15	–
21	0,15	0,2	–	0,1	–
22	0,04	0,03	–	0,1	–
23	0,02	0,14	–	0,02	–
24	0,1	0,15	0,25	–	–
25	0,02	0,04	–	0,08	–
26	10	–	–	–	–
27	0,1	0,17	0,15	–	–
28	0,075	0,075	0,02	0,12	–
29	3,5	–	–	–	–
30	0,05	–	–	0,25	–

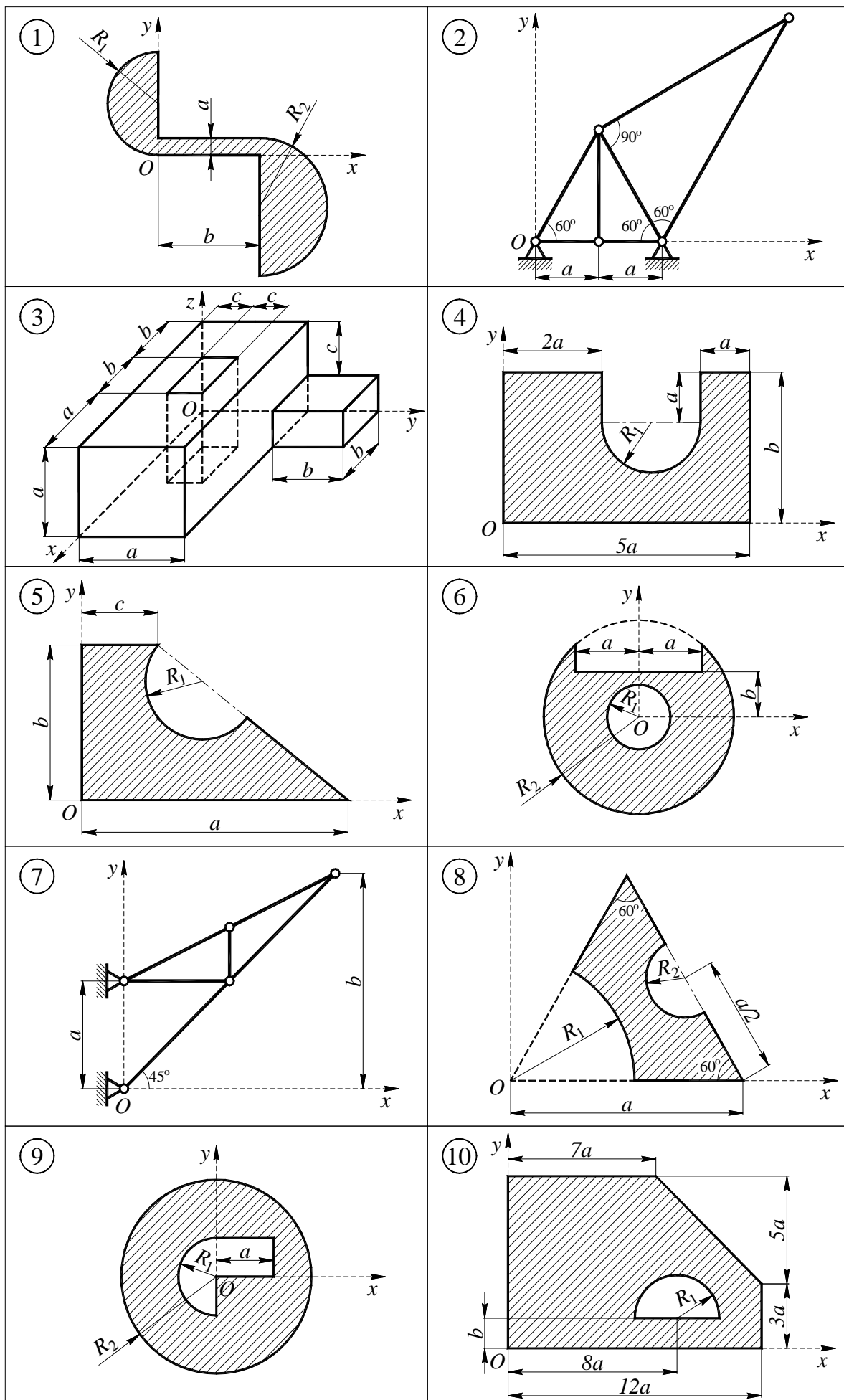


Рисунок 6.6 – Вихідні схеми до задачі С6 (1-10)

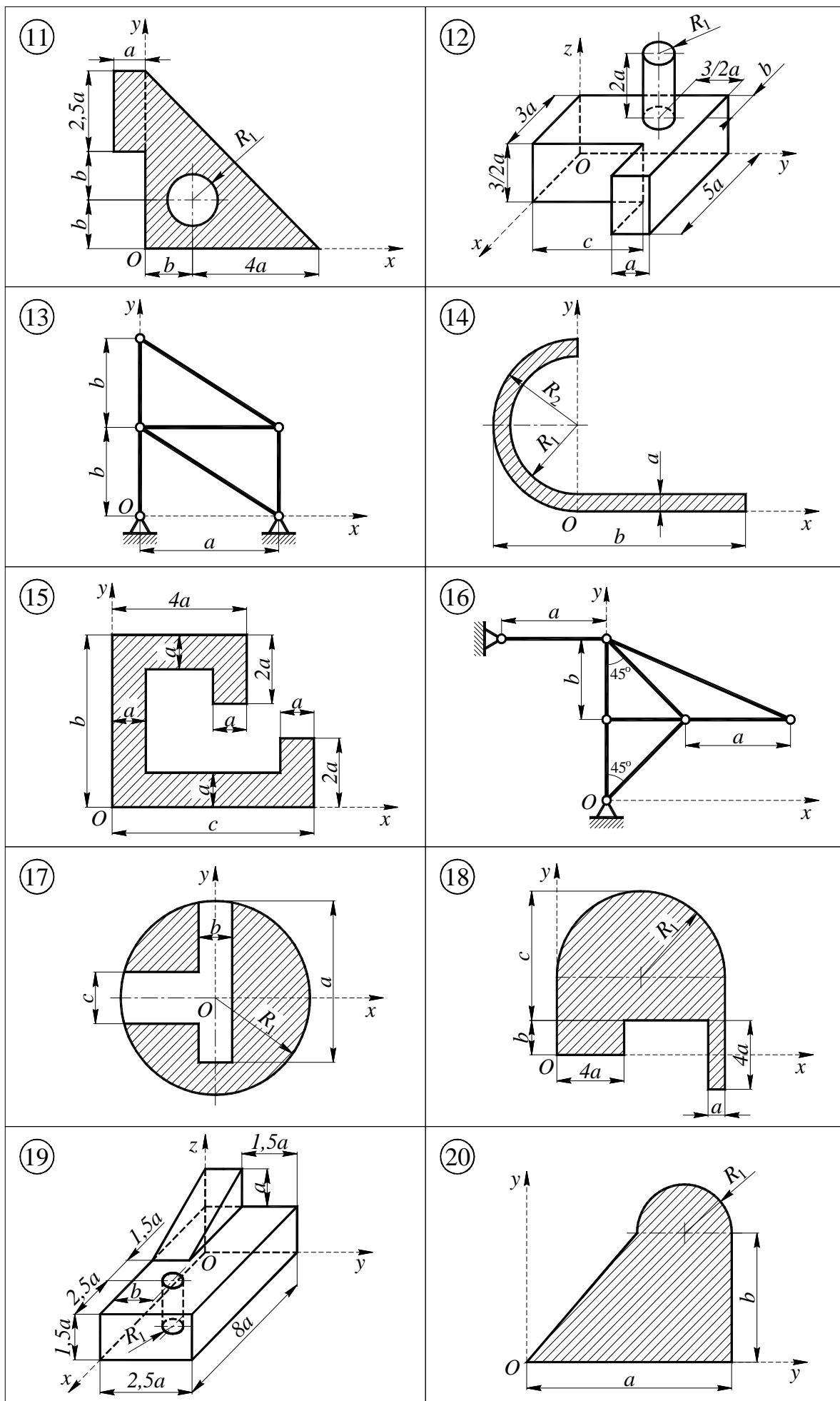


Рисунок 6.7 – Вихідні схеми до задачі С6 (11-20)

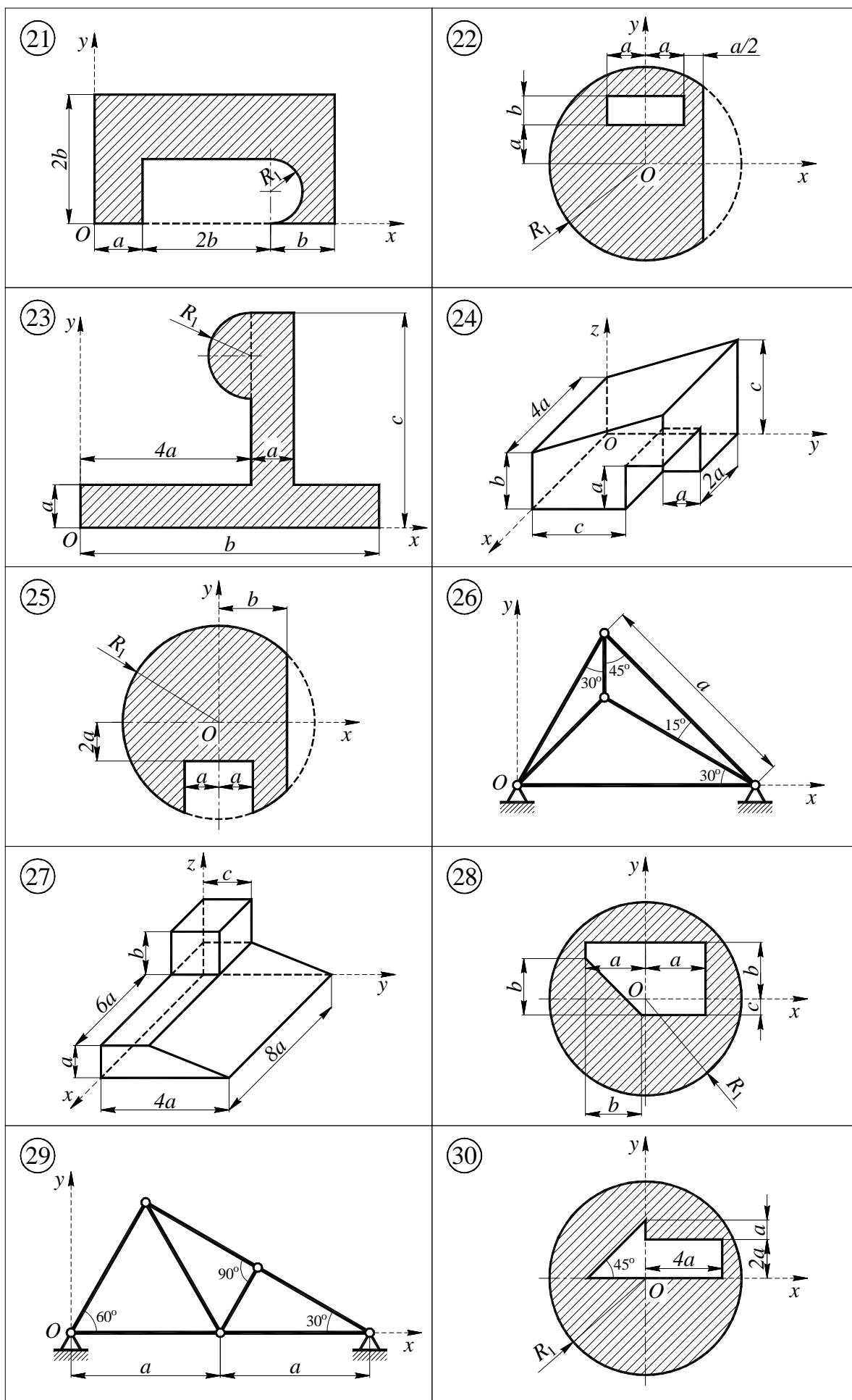


Рисунок 6.8 – Вихідні схеми до задачі С6 (21-30)

6.3. Алгоритм розв'язання задачі Сб

В задачі Сб необхідно визначити координати центру тяжіння твердого тіла, яке може бути представлено в трьох варіантах, це плоска фігура, плоска ферма та об'ємне тіло.

Задачі знаходження положення центру тяжіння твердого тіла рекомендується виконувати в наступній послідовності:

1) виконати аналіз заданого твердого тіла:

1.1) зі схеми з'ясувати тип твердого тіла: плоска фігура, плоска ферма або ж об'ємне тіло;

1.2) якщо тверде тіло представлено у вигляді плоскої фігури, то необхідно умовно розбити його на прості складові (прямокутник, трикутник, коло, круговий сектор, круговий сегмент);

1.3) якщо тверде тіло представлено у вигляді об'ємного тіла, то необхідно умовно розбити його на прості складові (паралелепіпед, призма, циліндр тощо);

2) обчислити, необхідні для подальших розрахунків, характеристики твердих тіл:

2.1) для плоскої фігури – обчислити площі кожного простого елемента фігури;

2.2) для плоскої ферми – обчислити довжини всіх стержнів;

2.3) для об'ємного тіла – обчислити об'єми складових тіл;

3) визначити координати центрів тяжіння окремих складових твердого тіла:

3.1) для плоскої фігури та ферми – x_i, y_i ;

3.2) для об'ємного тіла – x_i, y_i, z_i ;

4) визначити координати центру тяжіння твердого тіла:

4.1) для зручності, результати обчислень площ, довжин стержнів, об'ємів та координат центрів тяжіння окремих складових твердого тіла звести в таблицю;

4.2) обчислити загальну площу $\sum S_i$ у випадку плоскої фігури, суму довжин стержнів $\sum l_i$ для ферми та загальний об'єм $\sum V_i$ для об'ємного тіла;

4.2) обчислити добутки $S_i \cdot x_i, S_i \cdot y_i$ (статичні моменти площ) для плоских фігур, добутки $l_i \cdot x_i, l_i \cdot y_i$ для плоских ферм, добутки $V_i \cdot x_i, V_i \cdot y_i, V_i \cdot z_i$ для об'ємних тіл;

4.3) обчислити $\sum S_i \cdot x_i, \sum S_i \cdot y_i$ для плоских фігур, $\sum l_i \cdot x_i, \sum l_i \cdot y_i$ для плоских ферм, $\sum V_i \cdot x_i, \sum V_i \cdot y_i, \sum V_i \cdot z_i$ для об'ємних тіл;

4.4) обчислити координати центру тяжіння за формулами:

$$x_C = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{\sum S_i}; \quad y_C = \frac{\sum S_i \cdot y_i}{\sum S_i} \quad \text{– для плоских фігур;}$$

$$x_C = \frac{\sum l_i \cdot x_i}{\sum l_i}; y_C = \frac{\sum l_i \cdot y_i}{\sum l_i} \text{ – для плоских ферм;}$$

$$x_C = \frac{\sum V_i \cdot x_i}{\sum V_i}; y_C = \frac{\sum V_i \cdot y_i}{\sum V_i}, z_C = \frac{\sum V_i \cdot z_i}{\sum V_i} \text{ – для об'ємних тіл;}$$

5) записати відповідь.

Площі та координати центрів тяжіння деяких основних плоских фігур представлені в додатку.

6.4. Приклади розв'язання задачі С6

В завданнях типу С6 необхідно визначити положення центру тяжіння твердого тіла. Серед варіантів є три типи твердих тіл: плоскі фігури, плоскі ферми та об'ємні тіла. Спочатку розглянемо приклад розв'язання задачі на знаходження координат центру тяжіння плоскої фігури (рис. 6.9).

Приклад розв'язання задачі №1

Дано: плоска фігура (рис. 6.9); $a = 0,06$ м; $R_1 = 0,1$ м.

Знайти: координати положення центру тяжіння $C(x_C, y_C)$.

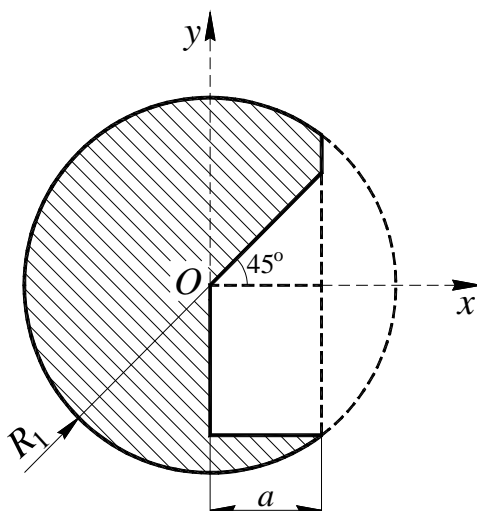


Рисунок 6.9 – Вихідна схема до завдання
Розв'язання

1. Виконуємо аналіз заданого твердого тіла (рис. 6.9).

Тверде тіло представлено у вигляді плоскої фігури, яку можна представити у вигляді чотирьох частин (рис. 6.10,а): коло – 1, круговий сегмент – 2, трикутник – 3, прямокутник – 4. Причому з кола всі інші три складові – вирізані.

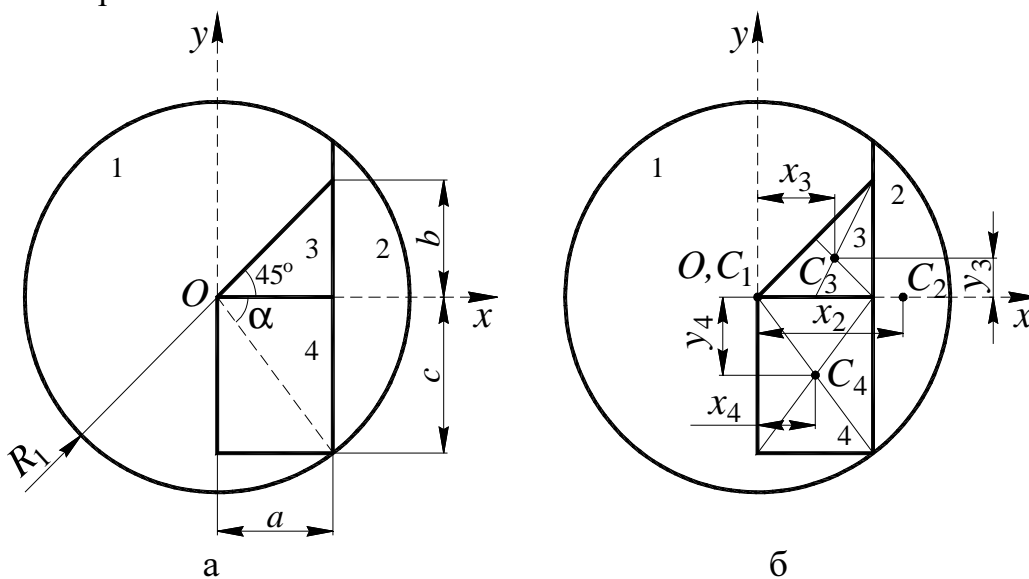


Рисунок 6.10

2. Обчислення площ складових частин плоскої фігури (рис. 6.10,а).
Знайдемо площі всіх складових частин плоскої фігури.

Примітка. Для зручності, геометричні параметри плоскої фігури будемо розраховувати в сантиметрах (см).

Площа кола обчислюється за формулою:

$$S_1 = \pi R_1^2 = 3,142 \cdot 10^2 = 314,2 \text{ см}^2,$$

де R_1 – радіус кола, см.

Далі необхідно обчислити площу кругового сегменту 2 за формулою:

$$S_2 = \frac{1}{2} R_1^2 (2\alpha - \sin 2\alpha),$$

де α – половина центрального кута (рис. 6.10,а).

Половину центрального кута можемо обчислити наступним чином:

$$\cos \alpha = \frac{a}{R_1} = \frac{6}{10} = 0,6 \Rightarrow \alpha = \arccos(\cos \alpha) = \arccos(0,6) = 53,13^\circ.$$

Кут α також можемо обчислити в радіанах:

$$\alpha = 53,13^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = 0,927 \text{ рад.}$$

Відповідно, площа кругового сегменту 2 буде дорівнювати:

$$S_2 = \frac{1}{2} R_1^2 (2\alpha - \sin 2\alpha) = \frac{1}{2} 10^2 (1,854 - 0,96) = 44,7 \text{ см}^2.$$

Далі, потрібно обчислити площу трикутника 3. Зі схеми фігури (рис. 6.10,а) можна побачити, що трикутник 3 є прямокутним та рівнобедреним, відповідно катети є рівними, $a = b = 6$ см.

Тож площа трикутника дорівнює:

$$S_3 = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} 6 \cdot 6 = 18 \text{ см}^2.$$

Переходимо до визначення площі прямокутника 4. Для цього спочатку обчислимо довжину сторони c (рис. 6.10,а).

$$c = \sqrt{R_1^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ см.}$$

Відповідно, можемо обчислити площу прямокутника:

$$S_4 = a \cdot c = 6 \cdot 8 = 48 \text{ см}^2.$$

Далі переходимо до визначення координат центрів тяжіння складових частин плоскої фігури (рис. 6.10,б)

3. Знаходження координат центрів тяжіння окремих складових плоскої фігури (рис. 6.10,б).

Очевидно, що положення центру тяжіння кола 1 співпадає з початком координат O , та відповідно має координати $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ (рис. 6.10,б).

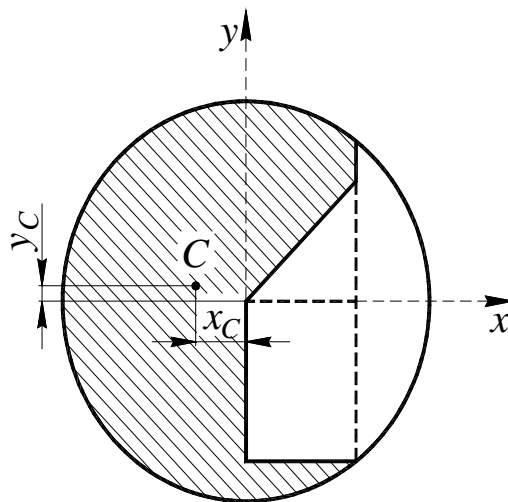


Рисунок 6.11

Визначаємо координату центру тяжіння кругового сегменту 2 – x_2 :

$$x_2 = \frac{(2 \cdot c)^3}{12 \cdot S_2} = \frac{(2 \cdot 8)^3}{12 \cdot 44,7} = 7,636 \text{ см.}$$

Координата по осі y – $y_2 = 0$.

Далі, визначаємо координати центру тяжіння трикутника 3:

$$x_3 = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 \text{ см;}$$

$$y_3 = \frac{1}{3}b = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \text{ см.}$$

Переходимо до визначення координат центру тяжіння прямокутника 4:

$$x_4 = \frac{a}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ см;}$$

$$y_4 = -\frac{c}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \text{ см.}$$

4. Обчислення координат центру тяжіння плоскої фігури (рис. 6.11).

Результати обчислення площ та координат центрів тяжіння окремих складових плоскої фігури зводимо в таблицю, а також обчислюємо додаткові необхідні параметри:

– загальну площу плоскої фігури – $\sum S_i$;

– статичні моменти площ відносно осей – $\sum S_i \cdot x_i$, $\sum S_i \cdot y_i$.

Результати обчислення площ та координат центрів тяжіння

№ Елементу	$S_i, \text{см}^2$	$x_i, \text{см}$	$y_i, \text{см}$	$S_i \cdot x_i, \text{см}^3$	$S_i \cdot y_i, \text{см}^3$
1	314,2	0	0	0	0
2	-44,7	7,636	0	-341,329	0
3	-18	4	2	-72	-36
4	-48	3	-4	-144	192
Σ	203,5	—	—	-557,329	156

Обчислюємо координати центру тяжіння плоскої фігури (рис. 6.11):

$$x_C = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{\sum S_i} = \frac{-557,329}{203,5} = -2,739 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{\sum S_i \cdot y_i}{\sum S_i} = \frac{156}{203,5} = 0,767 \text{ см}.$$

Відповідь: $x_C = -2,739 \text{ см}; y_C = 0,767 \text{ см}.$

Приклад розв'язання задачі №2

Дано: плоска ферма (рис. 6.12); $a = 2 \text{ м}.$

Знайти: координати положення центру тяжіння $C(x_C, y_C).$

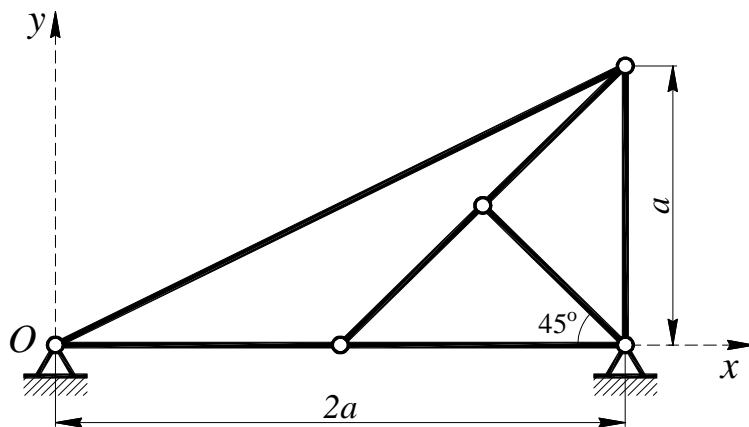


Рисунок 6.12 – Вихідна схема до завдання

Розв'язання

1. Виконуємо аналіз заданого твердого тіла (рис. 6.12).

Тверде тіло представлено у вигляді плоскої ферми, яка складається з 7 стержнів (рис. 6.13).

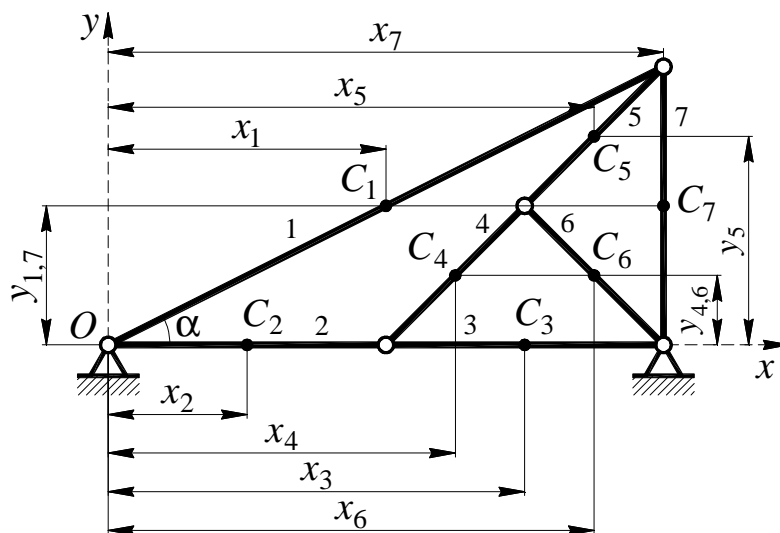


Рисунок 6.13

Для зручності подальших розрахунків, обчислимо величину кута α :

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{2a} = 0,5 \Rightarrow \alpha = \text{arctg}(\text{tg } \alpha) = \text{arctg}(0,5) = 26,565^\circ.$$

2. Обчислення довжин стержнів плоскої ферми (рис. 6.13).

Обчислюємо довжину стержня 1:

$$l_1 = \frac{2a}{\cos \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{\cos(26,565^\circ)} = \frac{4}{0,894} = 4,474 \text{ м.}$$

Далі знаходимо довжини стержнів 2 і 3, зі схеми очевидно, що ці стержні будуть однакові за довжиною:

$$l_2 = l_3 = a = 2 \text{ м.}$$

Знаходимо довжину стержня 6:

$$l_1 = \frac{0,5a}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{0,707} = 1,414 \text{ м.}$$

Зі схеми очевидно що стержні 3, 4, 6 та 5, 6, 7 утворюють два однакових трикутника, відповідно довжини стержнів 4, 5 та 6 будуть рівними

$$l_4 = l_5 = l_6 = 1,414 \text{ м.}$$

Довжина стержня 7 задана на вихідній схемі:

$$l_7 = a = 2 \text{ м.}$$

3. Знаходження координат центрів тяжіння стержнів (рис. 6.13).

Центри тяжіння стержнів знаходяться посередині їх довжини (рис. 6.13).

Визначаємо координату x_1 центру тяжіння 1-го стержня:

$$x_1 = \frac{1}{2} l_1 \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} 4,474 \cdot \cos(26,565^\circ) = 2,237 \cdot 0,894 = 2 \text{ м,}$$

що очевидно також зі схеми, втім розрахунок дав такий же результат.

Координата центру тяжіння стержня 2 – x_2 , дорівнює:

$$x_2 = \frac{1}{2} l_2 = 1 \text{ м.}$$

Знаходимо координату центру тяжіння стержня 3 – x_3 :

$$x_3 = a + \frac{1}{2} l_3 = 2 + 1 = 3 \text{ м.}$$

Зі схеми також без розрахунків можна визначити координати центрів тяжіння стержнів x_4 , x_5 та x_6 , але також можемо в якості перевірки розрахувати їх за формулами:

$$x_4 = a + \frac{1}{2} l_4 \cdot \cos 45^\circ = 2 + \frac{1,414}{2} \cdot 0,707 = 2,5 \text{ м;}$$

$$x_5 = 1,5a + \frac{1}{2} l_5 \cdot \cos 45^\circ = 3 + \frac{1,414}{2} \cdot 0,707 = 3,5 \text{ м;}$$

$$x_6 = 2a - \frac{1}{2} l_6 \cdot \cos 45^\circ = 4 - \frac{1,414}{2} \cdot 0,707 = 3,5 \text{ м.}$$

Координата центру тяжіння стержня 7 – x_7 дорівнює:

$$x_7 = 2a = 4 \text{ м.}$$

Переходимо до визначення координат центрів тяжіння стержнів по осі у.

Визначаємо координату x_1 центру тяжіння 1-го стержня:

$$y_1 = \frac{1}{2} l_1 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} 4,474 \cdot \sin(26,565^\circ) = 2,237 \cdot 0,447 = 1 \text{ м},$$

що очевидно також зі схеми, втім розрахунок дав такий же результат.

Координати центрів тяжіння будуть y_2 та y_3 однакові – $y_2 = y_3 = 0$.

Зі схеми, знаходимо координати центрів тяжіння y_4, y_5, y_6 та y_7 :

$$y_4 = y_6 = \frac{a}{4} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ м}; y_5 = \frac{3}{4} l_7 = \frac{3 \cdot 2}{4} = 1,5 \text{ м};$$

$$y_7 = \frac{1}{2} a = \frac{2}{2} = 1 \text{ м}.$$

4. Обчислення координат центру тяжіння плоскої ферми (рис. 6.14).

Результати обчислення довжин та координат центрів тяжіння окремих стержнів плоскої ферми зводимо в таблицю, також обчислюємо додаткові необхідні параметри.

Результати обчислення довжин та координат центрів тяжіння стержнів ферми

№ Елементу	$l_i, \text{ м}$	$x_i, \text{ м}$	$y_i, \text{ м}$	$l_i \cdot x_i, \text{ м}^2$	$l_i \cdot y_i, \text{ м}^2$
1	4,474	2	1	8,948	4,474
2	2	1	0	2	0
3	2	3	0	6	0
4	1,414	2,5	0,5	3,535	0,707
5	1,414	3,5	1,5	4,949	2,121
6	1,414	3,5	0,5	4,949	0,707
7	2	4	1	8	2
Σ	14,716	—	—	38,381	10

Обчислюємо координати центру тяжіння плоскої ферми (рис. 6.14):

$$x_C = \frac{\sum l_i \cdot x_i}{\sum l_i} = \frac{38,381}{14,716} = 2,608 \text{ м};$$

$$y_C = \frac{\sum l_i \cdot y_i}{\sum l_i} = \frac{10}{14,716} = 0,68 \text{ м}.$$

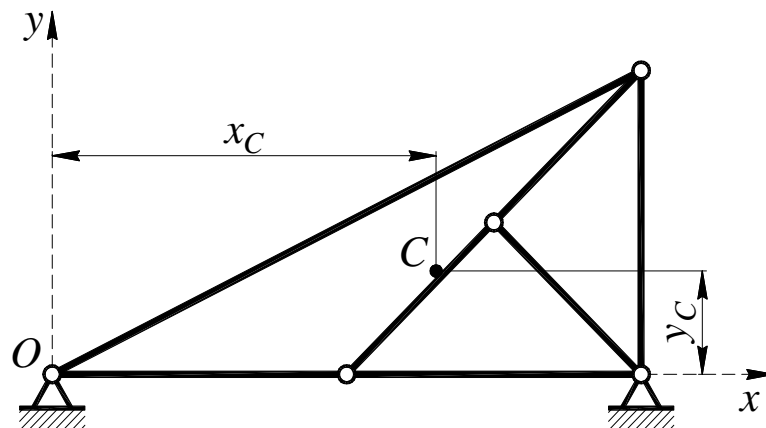


Рисунок 6.14

Відповідь: $x_C = 2,608 \text{ м}; y_C = 0,68 \text{ м}.$

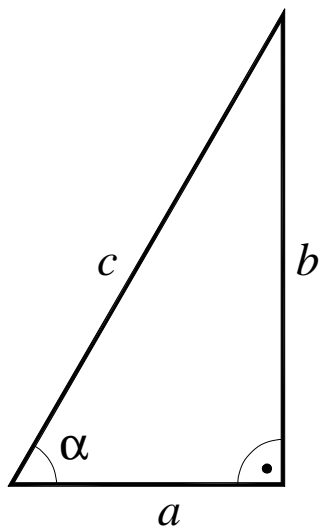
Література

1. Романенко, Л.Г. Теоретична механіка: Навч. посіб. для студ. ВУЗів / Л. Г. Романенко, В. Г. Солодов. 2-е вид. Х.: ХДАДТУ, 2002. 270 с.
2. Булгаков, В.А. Теоретична механіка. Підручник / В. А. Булгаков, В. В. Яременко, О. М. Черниш, М. Г. Березовський. К.: Центр навчальної літератури, 2017. 640 с.
3. Солодов В. Г., Авершин А.Г., Стародубцев Ю.В., Хандримайлов А.А., Шипенко О.Н. Теоретична механіка: Теория и задачи. Навч. посіб. для студ. вузів. Х.: ХНАДУ, 2010. 214 с.
4. Міщенко І.В., Воропай О.В., Красніков С.В. Теоретична механіка. Частина І. Статика. Кінематика: навчальний посібник. Х.: ФОП Бровін О.В. 2025. 158 с. ISBN 978-617-8238-95-7
5. Міщенко І.В., Воропай О.В., Красніков С.В. Теоретична механіка. Частина ІІ. Динаміка: навчальний посібник. Х.: ФОП Бровін О.В. 2025. 154 с. ISBN 978-617-8238-94-0
6. Павловський, М.А. Теоретична механіка. Підручник. К.: Техніка, 2002. 511 с.
7. Воропай О. В., Шарапата А. С. Технічна механіка: Конспект лекцій. Харків : ХНАДУ, 2022. 124 с.
8. Воропай О. В., Шарапата А. С., Єгоров П. А. Методичні вказівки до РГР, СРС і практичних занять для студентів денної та заочної форм навчання з дисципліни «Технічна механіка» з спеціальності 275.03 Транспортні технології (на автомобільному транспорті). Харьков : ХНАДУ, 2022. 64 с.
9. Міщенко І.В. Теоретична механіка: конспект лекцій. Х.: ХНАДУ, 2023. 207 с.
10. Міщенко І.В. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика». Х.: ХНАДУ, 2024. 82 с.
11. Перегон В. А., Воропай О. В., Коряк О. О., Поваляев С. І. Синтез механізмів і динаміка машин: навчальний посібник. Х. : ФОП Бровін О.В., 2023. 164 с. ISBN 978-617-8238-36-0
12. Перегон В. А., Воропай О. В., Коряк О.О., Єгоров П. А. Важільні механізми, передачі та зачеплення: навчальний посібник. Х. : ФОП Бровін О.В., 2025. 188 с. ISBN 978-617-8238-90-2
13. Авершин А. Г., Красніков С. В. Методичні вказівки з розрахунково-графічної роботи дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика» для студентів всіх спеціальностей. Харків: ХНАДУ, 2020. 86 с.
14. Voropaу A. V., Karpenko V. A., Koriak O. O., Povaliaiev S. I., Sharapata A. S. Theory of mechanisms and machines: Lecture notes Kharkiv National Automobile and Highway University. Kharkiv : KhNAHU, 2023. 95 p.
15. Красніков С.В. Theoretical mechanics: навчальний посібник. Kharkiv: ХНАДУ, 2024. 104 p.

ДОДАТОК

Основні тригонометричні залежності.

В геометрії тригонометричні функції гострого кута визначаються відношеннями сторін прямокутного трикутника. Розглянемо деякий прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c .



$$\cos \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{прилеглий катет}}{\text{гіпотенуза}};$$

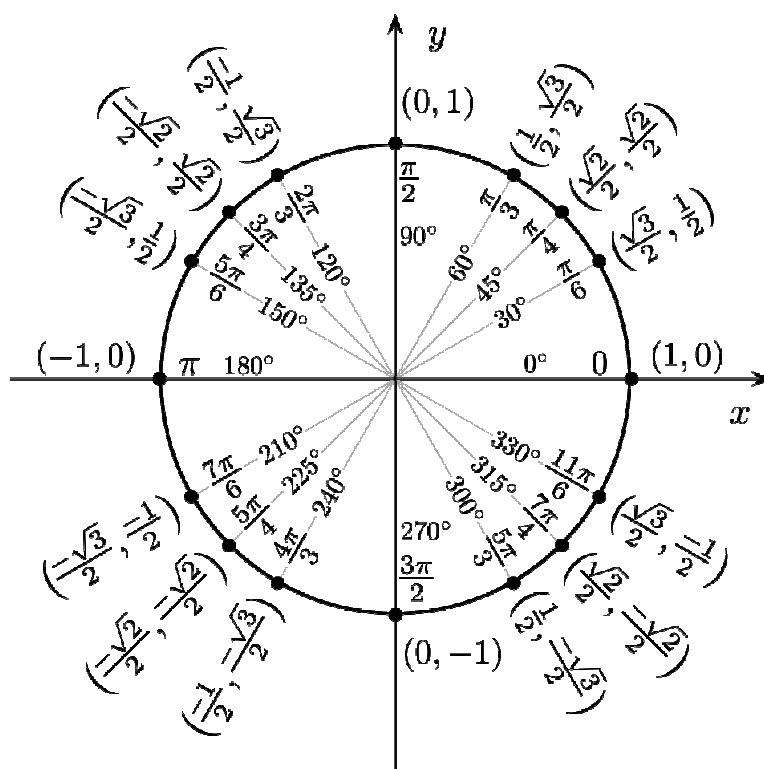
$$\sin \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{протилежащий катет}}{\text{гіпотенуза}};$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{протилежащий катет}}{\text{прилеглий катет}};$$

$$\text{ctg } \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{прилеглий катет}}{\text{протилежащий катет}}.$$

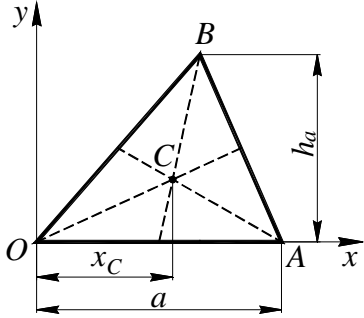
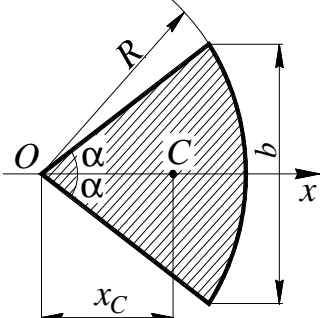
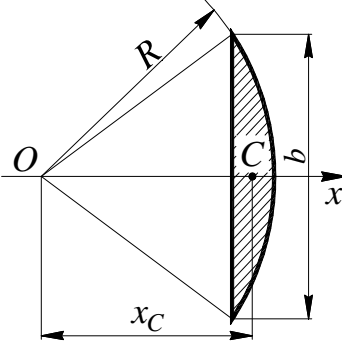
Значення косинусів, синусів та тангенсів для деяких кутів наведені в табл:

Градуси	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
cos α	1	0,966	0,866	0,707	0,5	0,259	0
sin α	0	0,259	0,5	0,707	0,866	0,966	1
tg α	0	0,268	0,577	1	1,732	3,732	∞



Значення косинуса та синуса на одиничній окружності

Площі та координати центрів тяжіння деяких основних плоских фігур

Плоска фігура	Площа	Площа	Координати центру тяжіння
<p>Трикутник</p> 	$S = \frac{1}{2}ah_a$	$y_C = \frac{1}{3}h_a$ $x_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),$ <p>де x_1, x_2, x_3 – координати вершин O, A, B</p>	
<p>Круговий сектор</p>		$S = \alpha R^2$	$x_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{R^2 b}{3S}$
	<p>$\alpha = \pi/2$ (ПІВКОЛО)</p>	$S = \frac{\pi R^2}{2}$	$x_C = \frac{4R}{3\pi}$
	<p>$\alpha = \pi/6$</p>	$S = \frac{\pi R^2}{6}$	$x_C = \frac{2R}{\pi}$
<p>Круговий сегмент</p> 	$S = \frac{1}{2}R^2(2\alpha - \sin 2\alpha)$	$x_C = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)} = \frac{b^3}{12S}$	

ДЛЯ ПОДАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять, РГР та СРС
з дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика»
для студентів денної та заочної форм навчання
напряму підготовки 192 – «Будівництво та цивільна інженерія»
(українською мовою)

Укладачі: **НЕСКРЕБА Едуард Євгенійович,**
ВОРОПАЙ Олексій Валерійович

Відповідальний за випуск О. В. Воропай

Авторська редакція

Комп'ютерна верстка *Е.С. Нескреба*

План 20__, поз. ____.

Підписано до друку ____р. Формат 60(84 1/16. Папір газетний.

Гарнітура Times New Roman Суг. Віддруковано на ризографі

Розум. друк. арк. _____. Обл.-вид. арк. _____.

Зам. № _____. Тираж 100 прим. Ціна договірна

ВИДАВНИЦТВО

Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61002, Харків-мсп, вул. Ярослава Мудрого, 25.

Тел. /факс: (057)700-38-72; 707-37-03, e-mail: tio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції, серія ДК №897 від 17.04 2002 р.