УДК 510.161

КЛАСС ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦИИ, СВОДИМЫХ К ЗАДАЧЕ КОММИВОЯЖЕРА

О.Б. Маций, асистент, ХНАДУ

Аннотация. *Рассмотрены задачи маршрутизации, сводимые к задаче коммивояжера, которые являются важной частью транспортной логистики и занимают, при поддержке современными информационными технологиями, ключевые позиции в управлении процессами перемещения грузов и пассажиров.*

Ключевые слова*: транспортная логистика, задача маршрутизации, задача коммивояжера, алгоритм, стоимость маршрута.*

КЛАС ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦІЇ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА

О.Б. Маций, асистент, ХНАДУ

Анотація*. Розглянуто завдання маршрутизації, зводяться до задачі комівояжера, які є важливою частиною транспортної логістики і займають, за підтримки сучасними інформаційними технологіями, ключові позиції в управлінні процесами переміщення вантажів і пасажирів.*

Ключові слова*: транспортна логістика, задача маршрутизації, задача комівояжера, алгоритм, вартість маршруту.*

CLASS OF ROUTING PROBLEMS CONCERNED TO THE PROBLEM OF A COMMANDERWAGER

O. Matsiy, assistant lecturer, KhNAHU

Abstract. *The routing tasks that are reducible to the traveling salesman problem are considered, which are an important part of transport logistics and occupy, with the support of modern information technologies, key positions in the management of the movement of goods and passengers.*

Key words: *transport logistics, routing task, traveling salesman problem, algorithm, route cost.*

Введение

К широкому спектру моделей транспортной логистики относятся модели оптимизации замкнутых маршрутов (модели маршрутизации), которые содержат ряд условий и ограничений, присущих реальному процессу перемещения объектов на плоскости или в пространстве. Поэтому задачи маршрутизации занимают ключевое место в экономически обоснованном принятии решений, ускоряющих выполнение транспортных работ. Условия этих задач пересекаются с классической задачей маршрутизации (VRP – Vehicle Routing Problem), сформулированной Данцигом и Рамсером [1].

Класс задач маршрутизации, сводимых к задаче коммивояжера

В VRP рассматривается n потребителей i, каждому из которых нужно доставить однородный груз в заданном количестве d_i с единственной базы 0, используя K транспортных средств (ТС) одинаковой вместимости S. Каждый потребитель обслуживается только одним ТС, выполняющим замкнутый маршрут с началом в базе. Задана стоимость

d_{ij} перевозки из пункта i в пункт j, $i \in N \cup \{n+1\}$, $|N| = n$, не зависящая от объема (веса) груза, причем $d_{ij} = d_{ji}$. Допустимое решение VRP состоит в разбиении множества N на K подмножеств, представленных перестановками σ_k. Перестановка σ_k определяет последовательность доставки грузов каждому потребителю и удовлетворяет условию $\sum_{i \in \sigma_k} d_i \leq S$. Оптимальное решение VRP минимизирует $\sum_{k=1}^{K} \sum_{i,j \in \sigma_k} d_{ij}$. Оно находится в полном графе с $n + 1$ вершинами, соответствующими n пунктам потребления и базе, и ребрами с весами, равными d_{ij} [2, 3].

Если в VRP все потребители обслуживаются одним ТС, то $K = 1$ и $\sum_{i=1}^{n} d_i \leq S$. В этом случае VRP формулируется как задача коммивояжера (ЗК): требуется найти простой цикл, включающий все $n + 1$ вершин полного графа и доставляющий минимум транспортных затрат.

Одна из распространенных постановок ЗК состоит в том, что известны расстояния $\mathrm{d_{ij}}$ между каждой парой городов i и j, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, и требуется найти такую последовательность городов $(\pi[1], \pi[2], \ldots, \pi[i], \ldots, \pi[n])$, для которой минимальна величина

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_{\pi[i]\pi[i+1]} + d_{\pi[n][\pi_1]} \qquad (1)$$

Эта величина равна длине кратчайшего маршрута (обхода), начинающегося в городе $\pi[1]$, поочередно проходящего по всем городам и заканчивающегося в $\pi[1]$ после посещения $\pi[n]$. ЗК, в которой $d_{ij} = d_{ji}$ для каждой пары городов $\{i, j\}$, называется симметричной ЗК (СЗК) [3, 4, 5].

ЗК и СЗК являются NP-полными в сильном смысле проблемами. Они относятся к основным задачам комбинаторной оптимизации и, образуя непрерывно пополняемое множество приложений и обобщений, остаются актуальной темой исследований [4, 5, 6].

Пусть в полном графе с $n+1$ вершинами каждому ребру приписан нулевой вес (все маршруты доставки в VRP имеют одинаковую стоимость), но определена плата за использование каждой единицы ТС. Эта плата фиксирована для всех ТС одинаковой вместимости. Здесь требуется найти минимальное число ТС, обеспечивающее перевозку n грузов d_i.

Поставленная задача, известная как задача об упаковке в контейнеры, NP-полна в сильном смысле. Так как VRP включает условия СЗК и задачи об упаковке, то мало надежды на построение точного решения VRP эффективными алгоритмами [3]. Кроме того, ограничение $\sum_{i=1}^{n} d_i \leq KS$ при заданном $K > 2$ не является достаточным условием существования допустимого решения VRP.

К ЗК с ограничениями сводится задача маршрутизации, в условиях которой имеется одно ТС, первоначально расположенное в базе. ТС должно перевезти однородный груз из пунктов производства в пункты потребления и вернуться на базу. Заданы общее число пунктов производства и потребления, равное n, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ (базе присвоен номер 0), стоимости d_{ij} транспортировки груза из пункта i в пункт j, $i, j \in \{0\} \cup N$, вместимость ТС, равная S, вес q_i груза, который надо вывезти из пункта производства (при этом $q_i < 0$), или доставить в пункт потребления (при этом $q_i > 0$). Естественно, что выполняется условие баланса $\sum_{i=1}^{n} q_i = 0$. Требуется найти перестановку $(\pi[1], \pi[2], \ldots, \pi[i], \ldots, \pi[n])$ множества N, такую, что

$$0 \leq \sum_{i=1}^{u} q_{\pi[i]} \leq S, \; u \in N, \qquad (2)$$

$$d_{0,\pi[1]} + \sum_{i=1}^{n-1} d_{\pi[i]\pi[i+1]} + d_{\pi[n],0} \to \min \qquad (3)$$

Из выражений (2) и (3) следует, что сформулированная задача является ЗК, в которой множество допустимых решений при условии (2) может оказаться пустым. Например, она не имеет решения $(0, \pi[1], \pi[2], \ldots, \pi[i], \ldots, \pi[n], 0)$ при S=1,

$n = 5$, $q_i = 2/3$ для поставщиков $i = 1, 2, 3$ и $q_i = -1$ для потребителей $i = 4, 5$ [12].

Класс задач маршрутизации, сводимых к ЗК, включает задачу о кране [8, 9]. В ней задан смешанный граф (V, U, A), в котором множество вершин V, множество дуг A и множество ребер U образуют модель транспортной сети. Известна матрица расстояний d_{ij}, определенная на ее ребрах и дугах. Дуга сети соответствует переносу груза с одного места на другое, а ребро – перемещению крана без груза. Требуется найти такой маршрут крана, который бы проходил по всем дугам сети и имел минимальную длину. Задача о кране сводится к ЗК, если положить длины всех дуг, равными 0, а каждую пару вершин, связанных дугой, объединить в одну вершину. Пусть i^1 является объединением вершин i_1 и i_2, а вершина j^1 – объединением вершин j_1 и j_2. Расстояние между вершинами i^1 и j^1 определяется следующим образом:

$$d_{i^1 j^1} = \min\left\{d_{i_1 j_1},\ d_{i_1 j_2},\ d_{i_2 j_1},\ d_{i_2 j_2}\right\}.$$

После решения ЗК с матрицей $\left\|d_{ij}\right\|$ нужно вернуться к исходной транспортной сети и добавить все дуги в полученный обход.

На сегодняшний день известно несколько прикладных версий VRP. К ним относится, например, задача о школьном автобусе (SBRP – School Bus Routing Problem), которая имеет следующую формулировку. Школа располагает парком одинаковых ТС вместимости S, предназначенных для доставки каждого ученика i к месту его проживания по окончанию занятий, $i = \overline{1,n}$, $n = |N|$. Школе присвоен номер 0. Известны время проезда t_{ij} от пункта i в пункт j, $i, j \in \{0\} \cup N$ и стоимость проезда d_{ij}. Каждое ТС должно вернуться в пункт 0 за время, не превосходящее T [1].

В SBRP требуется найти булевы переменные x_{ij}, $i, j \in \{0\} \cup N$, и такое количество K ТС, что пункт 0 является началом (концом) маршрута каждого ТС:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0} = \sum_{i=1}^{n} x_{0i} = k; \tag{4}$$

любой пункт доставки i входит в единственный маршрут $i \in N$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_{ji} = 1; \ \ j \in N; \tag{5}$$

не существует маршрутов, включающих только пункты доставки:

$$\sum_{\substack{i, j \in U \\ U \subset N}} x_{ij} < |U|; \tag{6}$$

маршрут ТС

$\left(0,\ i[1],\ i[2],\ \ldots,\ i[j],\ \ldots,\ i[r],\ 0\right)$, $i[j] \in N$

удовлетворяет условию вместимости:

$$\sum_{j=1}^{\tau-1} x_{i[j], i[j+1]} = \tau - 1 \le S - 1 \tag{7}$$

и ограничению по времени его выполнения:

$$t_{0i[1]} + \sum_{j=1}^{r-1} t_{i[j], i[j+1]} + t_{i[\tau]0} \le T. \tag{8}$$

Целевая функция SBRP имеет вид:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} d_{ij} x_{ij} \to \min. \tag{9}$$

Очевидно, в SBRP $d_i = 1$, $i = \overline{1,n}$, вместо $d_i \in Z^+$ в VRP, а количество ТС = $K = \lceil n / S \rceil$, Z^+ – множество целых положительных чисел. Если в SBRP стоимость d_{ij} и время t_{ij} перемещения ТС из i-го пункта в j-й линейно зависимы и $d_{ij} = 0$, когда $t_{ij} = 0$, то (9) можно заменить на целевую функцію

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} t_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{10}$$

используя исходные данные d_{ij}, $i, j \in \{0\} \cup N$ как вспомогательные, для экономической оценки построенного решения.

Требование $d_i = 1$, $i = \overline{1,n}$, в значительной степени упрощает поиск (9). Ограничение по загрузке ТС приобретает вид неравенства $k \le \lceil n / S \rceil$, которое является как необходимым так и достаточным условием существования допустимого решения задачи.

Если положить в (7) и (8) $r = n$, то SBRP оказывается ЗК на множестве вершин $\{0\} \cup N$, $|N| = n$, транспортной сети, задаваемой полным графом.

Близкой по содержанию к VRP является задача k-VRP. В отличие от VRP в k-VRP не заданы количество груза d_i, доставляемое i-му потребителю, $i = \overline{1,n}$, и вместимость S каждого ТС, но требуется, чтобы оно обслуживало не более k клиентов. Необходима минимизировать суммарную стоимость маршрутов всех ТС, количество которых равно $m \le \lceil n / k \rceil$. Поэтому k-VRP разрешима для n, $k \in Z^+$ и $n \ge k$. При $n = k$ она является ЗК, определенной на множестве обходов $\left(0,\ i[1],\ i[2],\ \ldots,\ i[j],\ \ldots,\ i[n],\ 0\right)$, при $k = 2$ полиномиально разрешима, но уже при $k \ge 3$ относится к классу NP-полных проблем [16].

Выводы

Очевидная особенность, объединяющая рассмотренный список задач маршрутизации, заключается в том, что они формулируются как обобщения или варианты NP-полной ЗК с ограничениями, которые сужают область допустимых решений. Самые сильные из ограничений становятся недостаточными условиями разрешимости, стимулируя интерес к исследованию задач комбинаторной оптимизации, связанных с ЗК.

Литература

1. Бронштейн Е.М. Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики / Е. М. Бронштейн, Т. А. Зайко // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №10. – С. 133–147.
2. Емец О. А. Транспортные задачи на перестановках: свойства оценок в методе ветвей и границ / О. А. Емец, Т. А. Парфенова // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 6. – С. 106–112.
3. Алгоритм для решения задачи коммивояжера / Д. Ж. Литтл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрел // Экономика и математические методы. – 1965. – Т. 1, вып. 1. – С. 90–107.
4. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
5. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Э. Майника – М.: Мир, 1981. – 323 с.
6. Панишев А. В. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера / А. В. Панишев, Д. Д. Плечистый. – Житомир: ЖГТУ, 2006. – 300 с.
7. Панішев А. В. Вступ до теорії складності дискретних задач / А. В. Панішев, О. М. Данильченко, В. О. Скачков. – Житомир: ЖДТУ, 2004. – 326 с.
8. Бронштейн Е.М. Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики / Е. М. Бронштейн, Т. А. Зайко // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №10. – С. 133–147.
9. Резер С. М. Математические методы оптимального планирования в транспортных системах / С. М. Резер, С. Е. Ловецкий, И. И. Меламед. – М.: Итоги науки и техники, серия «Организация управления транспортом», 1990. – 171 с.

Рецензент: П.Ф. Горбачев, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 14 ноября 2017 г.