

УДК 515.2

ГРАФІЧНИЙ КОМП'ЮТЕРНИЙ СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ НЕХАОТИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ КОЛИВАНЬ МАЯТНИКОВИХ СИСТЕМ

О.М. Семків, к.т.н.,

Національний університет цивільного захисту України, м. Харків

Анотація. Розроблено графічний комп'ютерний спосіб моделювання коливань маятникових механічних систем з метою вибору параметрів, що забезпечують нехаотичний технологічний характер траєкторії коливань їх вантажів. Спосіб базується на наближеному розв'язанні диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду, визначенні проєкції одержаної інтегральної кривої на фазову площину та обчисленні запропонованим методом проєкційного фокусування критичного значення одного з параметрів.

Ключові слова: інтегральна крива, фазова траєкторія, маятникові коливання, пружинний маятник під візком, коефіцієнт жорсткості пружини.

ГРАФИЧЕСКИЙ КОМПЬЮТЕРНЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕХАОТИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКОВЫХ СИСТЕМ

О.М. Семкив, к.т.н.,

Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков

Аннотация. Разработан графический компьютерный способ моделирования колебаний маятниковых механических систем с целью выбора параметров, обеспечивающих нехаотический характер траектории колебаний их грузов. Способ базируется на приближенном решении дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода, определении проекции полученной интегральной кривой на фазовую плоскость, а также вычислении предложенным методом проекционного фокусирования критического значения одного из параметров.

Ключевые слова: интегральная кривая, фазовая траектория, маятниковые колебания, пружинный маятник под тележкой, коэффициент жесткости пружины.

GRAPHICAL COMPUTER METHOD OF DETERMINATION NON-CHAOTIC TRAJECTORY FLUCTUATIONS OF PENDULAR SYSTEMS

O. Semkiv, Ph. D. (Eng.), National University of Civil Protection of Ukraine

Abstract. The graphical computer method of modeling fluctuations of pendular mechanical systems for the purpose of choosing the parameters providing non-chaotic nature of the trajectory of fluctuations of their freights is offered. The method is based on the approximate solution of differential equations of Lagrange of the second grade, determination of a projection of the received integrated curve to the phase plane, as well as the calculation by the offered method of projective focusing of critical value of one of parameters.

Key words: integrated curve, phase trajectory, pendular fluctuations, spring pendulum under the cart, coefficient of spring rigidity.

Вступ

У традиційних розділах геометрії (нарисної, проєктивної, диференціальної, інтегральної)

постійно звертаються до розгляду відображень на площину просторових (у тому числі й уявних) об'єктів. Геометричний апарат відображення можна застосувати й у процесі

дослідження маятникових механічних коливань, оскільки у просторі параметрів існує проєкційний зв'язок між інтегральними кривими розв'язків диференціальних рівнянь цих коливань та фазовими траєкторіями відповідних функцій (узагальнених координат). Маятникові механічні коливання за випадкових значень параметрів і початкових умов ініціювання руху виявлятимуться у хаотичних (тобто не технологічних) траєкторіях руху своїх елементів. Для інженерної практики є потреба у винайденні способу вибору такої комбінації параметрів коливальної системи і початкових умов, які б забезпечили технологічні траєкторії для реалізацій у конкретних конструкціях. Такі дослідження пов'язані з необхідністю враховувати якісно різні параметри – метричні, кутові, вагові, а також і коефіцієнти жорсткості пружинних елементів. Тому виникла задача – розробити та формалізувати спосіб вибору комбінації параметрів і початкових умовах ініціювання коливань маятникових механічних систем, які б забезпечили технологічні траєкторії для конструктивних реалізацій. Для вирішення цієї проблеми пропонується застосувати геометричний апарат відображення на фазову площину інтегральних кривих диференціальних рівнянь, що описують маятникові механічні коливання.

Аналіз публікацій

Традиційний аналіз коливань на якісному рівні полягає у визначенні особливих точок, що відповідають положенням рівноваги коливальної системи, побудові фазових портретів системи зі значеннями керуючого параметра у межах особливих точок, а також визначенні сепаратрис, які проходять через особливі точки за допомогою рівняння інтеграла енергії системи, коли кінетична енергія дорівнює нулю. Серед відомих підходів найближчим до «геометричного» є метод якісної теорії й теорії біфуркацій динамічних систем, який передбачає побудову якісно-кількісними засобами у кінцевій області простору параметрів біфуркаційних діаграм режимів коливань, а також визначає біфуркації, що призводять до зміни характеру періодичних режимів [1, 2]. За цією не достатньо формалізованою для складання алгоритмів інформацією й визначаються параметри і початкові умови, які мають забезпечити технологічні траєкторії маятникових коливань. Створення теоретичних основ універсально-

го (інженерного) способу вибору параметрів і початкових умов ініціювання коливань для забезпечення технологічних траєкторій руху їх елементів має велике значення для реалізацій в конструкціях. Універсальність такого підходу базується на тому, що достатньо широкий клас маятникових механічних коливальних систем можна описати за допомогою диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду. І саме для такого різновиду рівнянь існує необхідне для геометричної реалізації проєкційне співвідношення між інтегральними кривими розв'язку рівняння і фазовою траєкторією для функцій – узагальнених координат системи. Моделювання відображення інтегральних кривих на фазову площину (як цілісного напрямку у прикладній геометрії) та аналіз проєкцій визначає подальший розвиток як у теоретичних дослідженнях графічних комп'ютерних технологій, так і у вирішенні багатьох практичних завдань.

Мета і постановка завдання

Метою роботи є розробка графічної комп'ютерної технології моделювання коливань маятникових механічних систем з метою вибору параметрів, що забезпечать нехаотичний технологічний характер траєкторії коливань їх вантажів. Визначення параметрів має включати розв'язання диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду, де наближений розв'язок має вигляд елемента сім'ї інтегральних кривих у фазовому просторі функції, що визначає одну з узагальнених змінних задачі. Конкретний елемент сім'ї одержується залежно від вибору початкових умов інтегрування диференціального рівняння. Наступним етапом буде побудова проєкції інтегральної кривої на фазову площину, в результаті чого отримаємо фазову траєкторію, залежну від значення одного з параметрів коливальної системи. Запропонованим способом проєкційного фокусування визначається критичне значення керуючого параметра, в результаті чого одержується набір параметрів, що забезпечують нехаотичний характер траєкторії коливань вантажу.

Визначення нехаотичних траєкторій коливань

Наведені дослідження проведені з урахуванням ідеалізованих умов процесу маятникових коливань: здійснюються у вертикальній площині у полі земного тяжіння; тертя у вуз-

лах і опір повітря під час коливань відсутні; конструкція пружин перешкоджає їх згинанню у поперечному напрямку, параметри коливальної системи і початкові умови задаються в умовних одиницях. І, найголовніше, – у процесі коливань відсутні втрати енергії (коливальні системи мають бути консервативними). Остання умова є прийнятною тоді, коли процес розсіювання енергії відбувається повільно в порівнянні з характерними масштабами часу в системі, тому слабо впливає на характер руху. У багатьох випадках можна з достатньою точністю вважати систему консервативною, враховуючи те, що сума кінетичної й потенціальної енергій у системі залишається постійною.

Головні кроки до вирішення поставленої задачі вбачаються такими.

Крок 1. Із використанням положень теоретичної механіки проаналізувати коливальну систему, визначити кількість узагальнених координат та розподіл сил впливу на систему.

Крок 2. На базі законів фізики скласти вирази для кінетичної й потенціальної енергії коливальної системи.

Крок 3. За допомогою виразу лагранжіана визначити диференціальні рівняння Лагранжа другого роду.

Крок 4. Задати початкові умови інтегрування рівнянь Лагранжа другого роду.

Крок 5. Знайти наближений розв'язок рівнянь Лагранжа другого роду.

Крок 6. Обрати параметри коливальної системи та початкові умови, за яких розв'язок задовольняє би вимоги до технологічності коливань.

Крок 7. Переконайтесь у достовірності розв'язку за допомогою унаочнення коливань елементів маятникового механізму засобами комп'ютерної анімації.

Досвід інженерної практики показує, що в цьому переліку є два кроки – шостий і сьомий, які можна удосконалити для практичних впроваджень.

Головна ідея запропонованого способу полягає у наступному [3]. Нехай маємо консервативну коливальну систему, до опису якої серед інших входить і узагальнена координата – позначимо її як функцію $u(t)$. Чисельно розв'яжемо диференціальні рівняння Лагранжа другого роду та побудуємо наближене зображення інтегральної кривої у фазовому просторі $\{u, Du, t\}$ узагальненої змінної $u(t)$. Зображення складатиметься із множини відрізків, що з'єднують послідовні точки, одержані в результаті наближеного розв'язання рівняння. Це унаочнення залежатиме від певного значення «керуючого» параметра задачі або значення початкової умови (позначимо його як p). За випадкових значень p у фазовому просторі $\{u, Du, t\}$ утвориться «плутана» інтегральна крива, проекція якої на фазову площину $\{u, Du\}$ також буде «плуваною» фазовою траєкторією (рис. 1). Вибір випадкового значення p при розрахунках призведе до хаотичних коливань вантажу маятника.

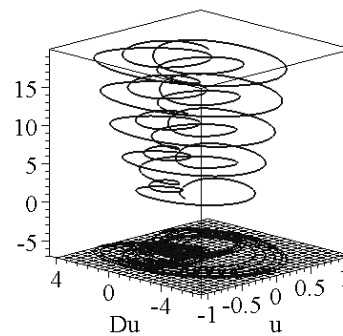


Рис. 1. Інтегральні криві й фазові траєкторії для випадкового значення p

У разі зміни значень «керуючого» параметра p має змінюватися і характер фазової траєкторії. За критичного значення $p=p_0$ характер фазової траєкторії зміниться на якісному рівні – вона перетвориться у «сфокусовану» криву (рис. 2). На фазовій площині $\{u, Du\}$ ніби відбудеться оптичний ефект «наведення на різкість» плутанини фазових траєкторій (далі цей феномен названо проекційним фокусуванням).

Урахування значення параметра $p=p_0$ у процесі розв'язання рівняння Лагранжа другого роду дозволяє обчислити координати точок, які мають розташуватися на нехаотичній траєкторії сліду маятника. Отже, нехаотичні технологічні траєкторії коливання елемента маятникової механічної системи проявляються на зображеннях фазових траєкторій у

вигляді «сфокусованих» кривих. Інакше це можна сформулювати так: критичне значення параметра p одержимо в момент, коли зображення проєкції інтегральної кривої на фазову площину (тобто фазової траєкторії) набуде мінімальної площі (у піксельному вимірі).

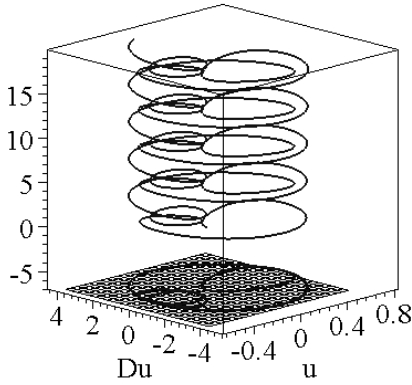


Рис. 2. Інтегральні криві й фазові траєкторії для обчисленого значення $p=p_0$

Для автоматизації пошуку критичного значення «керуючого» параметра C розглянемо поняття фокусування сім'ї кривих, описаної рівнянням $f(x,y,C)=0$. Нехай зображення кривої на координатній площині Oxy побудовано за допомогою послідовності пікселів.

Визначення 1. Фокусуванням параметричної сім'ї кривих, описаної рівнянням $f(x,y,C) = 0$, називається процес визначення значення параметра C сім'ї, за якого зображення її елементів на координатній площині Oxy складатиметься з мінімальної кількості пікселів.

Приклад 1. Розглянемо сім'ю ліній, описану рівняннями:

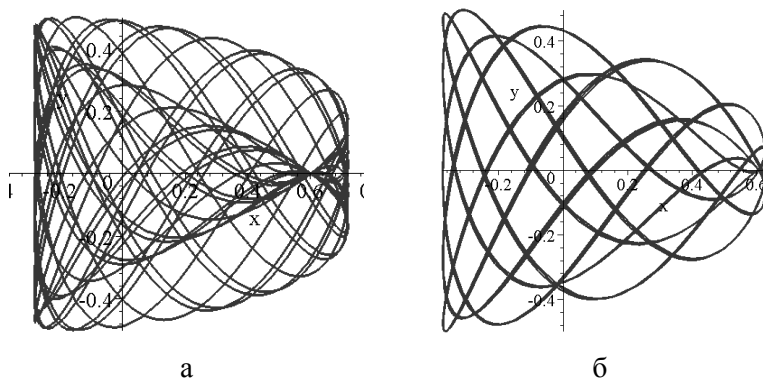


Рис. 3. Елементи сім'ї (1) для випадкового значення C (а); для критичного значення $C = 3,3986$ (б); графік залежності кількості пікселів від C (в)

$$\begin{aligned} x &= \cos(2C+t) \sin(t+C); \\ y &= 0,5 \sin(3+tC) \cos(t-C), \end{aligned} \quad (1)$$

де параметр C змінюється у межах $3,1 < C < 3,9$.

Складено програму визначення кількості пікселів, які утворюють зображення сім'ї ліній залежно від значення C . На рис. 3 наведено елементи сім'ї кривих для деяких C та графік залежності кількості пікселів від C .

Визначення 2. Проекційним фокусуванням параметричної сім'ї кривих, описаної рівнянням $f(x,y,C) = 0$, називається процес визначення значення параметра C сім'ї, за якого зображення елементів її проєкції на координатній площині Oxy матиме мінімальну площу (у піксельному вимірі).

Приклад 2. Розглянемо сім'ю ліній, описану рівняннями:

$$\begin{aligned} x &= \exp(\cos(Ct)) + 5 \sin^2(t+C); \\ y &= \exp(\sin(Ct)) + 2,5 \cos(t-C), \end{aligned} \quad (2)$$

де параметр C змінюється у межах $2,2 < C < 4,5$.

За допомогою складеної програми можна визначити кількість пікселів, які входять до зображення сім'ї проєкцій на площині Oxy залежно від значення параметра C .

На рис. 4, а, б наведено елементи проєкцій сім'ї кривих для випадкових значень C . На рис. 4, в зображено випадок для критичного значення $C = 3$.

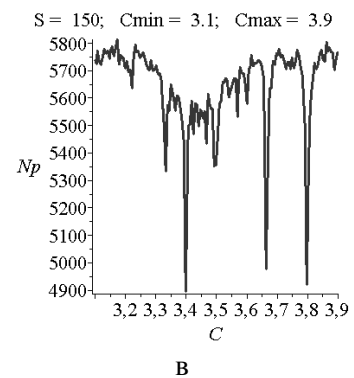


Рис. 4. Елементи проєкцій сім'ї кривих для випадкових значень C (а, б); графік залежності кількості пікселів від C (в)

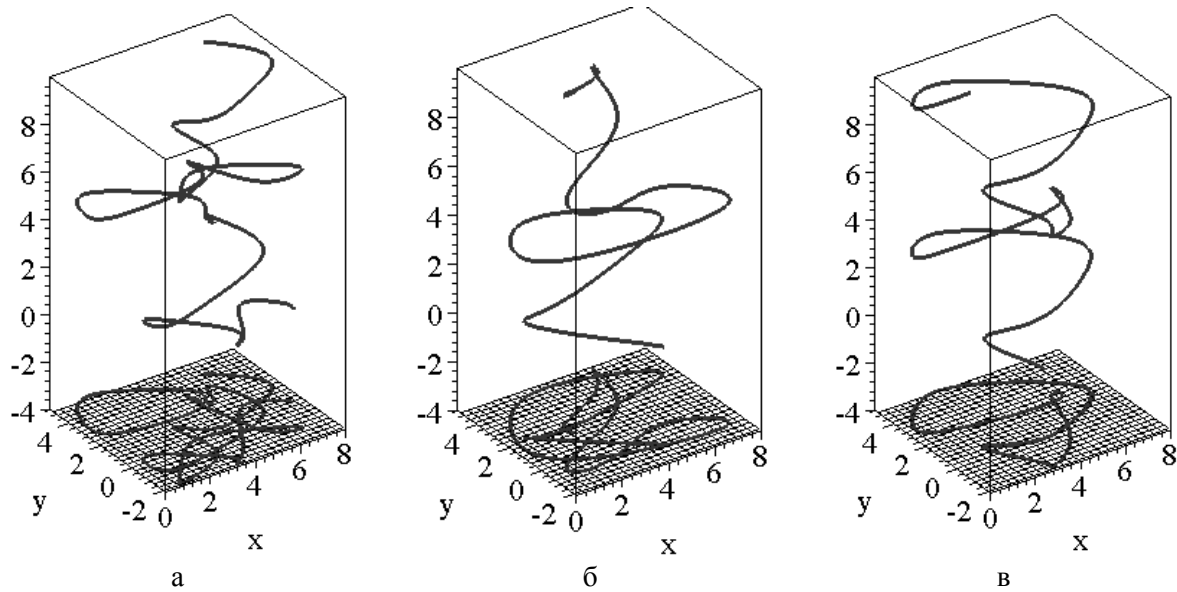


Рис. 4. Елементи проєкцій сім'ї кривих для випадкових значень C (а, б) та для критичного значення $C = 3$ (в)

Приклад 3. Як тривіальний приклад дослідимо коливання подвійного маятника.

З урахуванням ідеалізованих умов необхідно визначити довжину першої ланки L_1 , яка б забезпечила нехаотичну траєкторію коливаний вантажу другої ланки.

Рівняння Лагранжа другого роду подвійного маятника має вигляд [1] (тут і далі збережено синтаксис мови Maple)

$$\begin{aligned}
 & L1 \left(m1 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) - m2 \cos(u(t)) L2 \sin(v(t)) \right) \times \\
 & \times \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + m2 \cos(u(t)) \\
 & L2 \cos(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + m2 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \\
 & + m2 \sin(u(t)) L2 \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \\
 & + m2 \sin(u(t)) L2 \sin(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \\
 & + g \sin(u(t)) m1 + 2m2 g \sin(u(t)) = 0 \\
 & m2 L2 \left(-\cos(v(t)) L1 \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \cos(v(t)) L1 \cos(u(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + \right. \\
 & \left. + \sin(u(t)) L1 \cos(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin(v(t)) L1 \sin(u(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + \\
 & + L2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + g \sin(v(t)) = 0. \quad (3)
 \end{aligned}$$

У формулах (1) через $u(t)$ і $v(t)$ позначено кути, які перша та друга ланки подвійного маятника утворюють з вертикаллю, L_1 і L_2 – довжина першої та другої ланок, m_1 і m_2 – маса першої та другої ланок. Систему диференціальних рівнянь (1) розв'язано чисельно методом Рунке-Кутти з початковими умовами $u_0 = 2\pi/3$; $\dot{u}_0 = 0$; $v_0 = \pi/3$; $\dot{v}_0 = 0$ та зі значенням параметрів $L_2 = 1$; $m_1 = 2$; $m_2 = 1$.

У фазовому просторі $\{v, \dot{v}, t\}$ побудовано інтегральну криву та її проєкцію на фазову площину, в результаті чого одержано фазову траєкторію. Проєкційним фокусуванням обчислюємо критичне значення $L_1 = 0,5375$.

На рис. 5, а зображено інтегральні криві й фазові траєкторії для обчисленого критичного значення $L_1 = 0,5375$, а також вигляд початкового положення маятника (рис. 5, б) і траєкторії коливаний вантажу другої ланки маятника (рис. 5, в).

Отже, для ідеалізованих умов знайдено параметри подвійного маятника, які забезпечують його нехаотичні (періодичні) коливання.

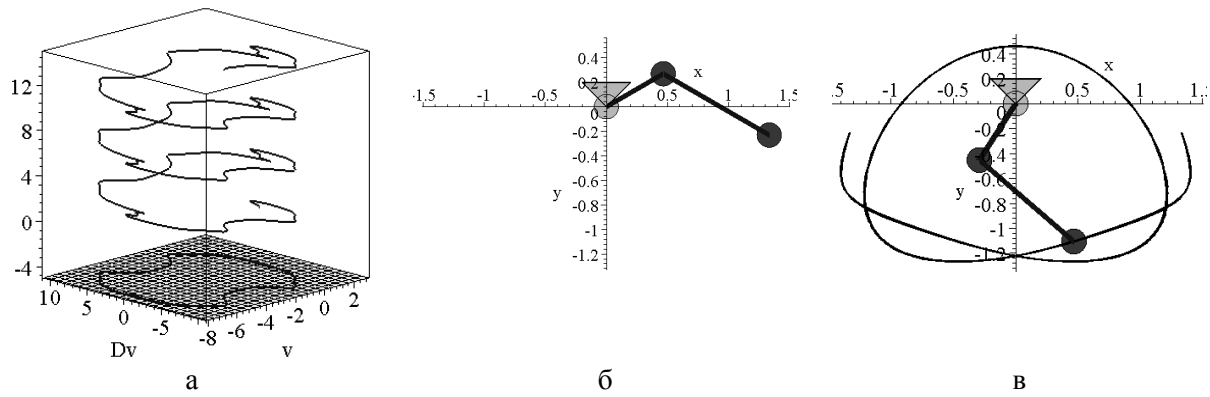


Рис. 5. Фазові траєкторії для критичного значення $L_1 = 0,5375$ (а), початкове положення маятника (б) та траєкторії коливань вантажу другої ланки маятника (в)

Приклад 4. Виконати аналіз коливань пружинного маятника під візком (рис. 6). Показати, що завдяки коливанням вантажу по нехаотичних траєкторіях можна ініціювати горизонтальне переміщення візка.

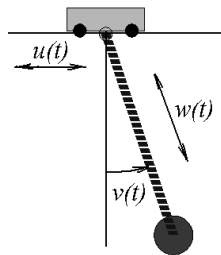


Рис. 6. Схема пружинного маятника під візком

Як узагальнені координати оберемо такі параметри: $u(t)$ – горизонтальне зміщення візка; $v(t)$ – кут відхилення пружини від вертикалі; $w(t)$ – пружне подовження пружини.

Система рівнянь Лагранжа другого роду має вигляд [4, 5]

$$\begin{aligned}
 & (m_1 + m_2) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + \\
 & + \frac{1}{2} m_2 \left(2 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) \right) \sin(v(t)) + \\
 & + 4 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) + \quad (4) \\
 & + 2w(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \cos(v(t)) - \\
 & - 2w(t) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \sin(v(t)) = 0.
 \end{aligned}$$

У формулах (2) взяті позначення: m_1 – маса візка; m_2 – маса вантажу; d – довжина пружини маятника у ненавантаженому стані; k – коефіцієнт жорсткості пружини.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} m_2 \left(4w(t) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) + 2w(t)^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) w(t) \cos(v(t)) \right) + \\
 & + 2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \cos(v(t)) - 2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) w(t) \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) - \\
 & - m_2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \left(\left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \cos(v(t)) - w(t) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \sin(v(t)) \right) + m_2 g w(t) \sin(v(t)) = 0 \\
 & \frac{1}{2} m_2 \left(2 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \sin(v(t)) + 2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \right) - \\
 & - \frac{1}{2} m_2 \left(2w(t) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + 2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \right) - m_2 g \cos(v(t)) + k(w(t) - d) = 0
 \end{aligned}$$

Розв'язувати систему рівнянь (2) будемо чисельно за допомогою методу Рунге-Кутти з початковими умовами $u_0 = 0$; $u'_0 = 1$; $v_0 = \pi/2$; $v'_0 = 0$; $w_0 = 1$ і $w'_0 = 0$ (де $g = 9,81$). Розрахунок коливань пружинного маятника під візком виконаємо за умови визначення невідомих значень маси m_2 залежно від інших відомих параметрів схеми: m_1 ; k і d . Будемо наближене зображення інтегральної кривої у фазових просторах функцій узагальнених координат, що залежатиме від певного значення параметра m_2 . Для обчислення критичного значення $m_2 = 40$ було використано спосіб проєкційного фокусування.

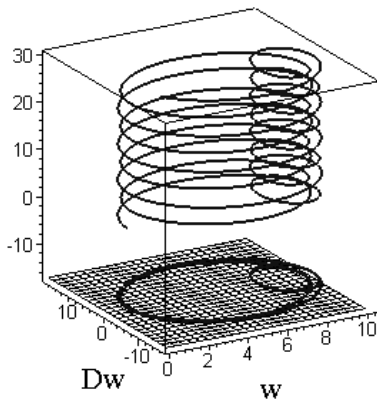


Рис. 7. Інтегральні лінії та фазові траєкторії у фазовому просторі $\{w, Dw, t\}$ для $m_2 = 40$

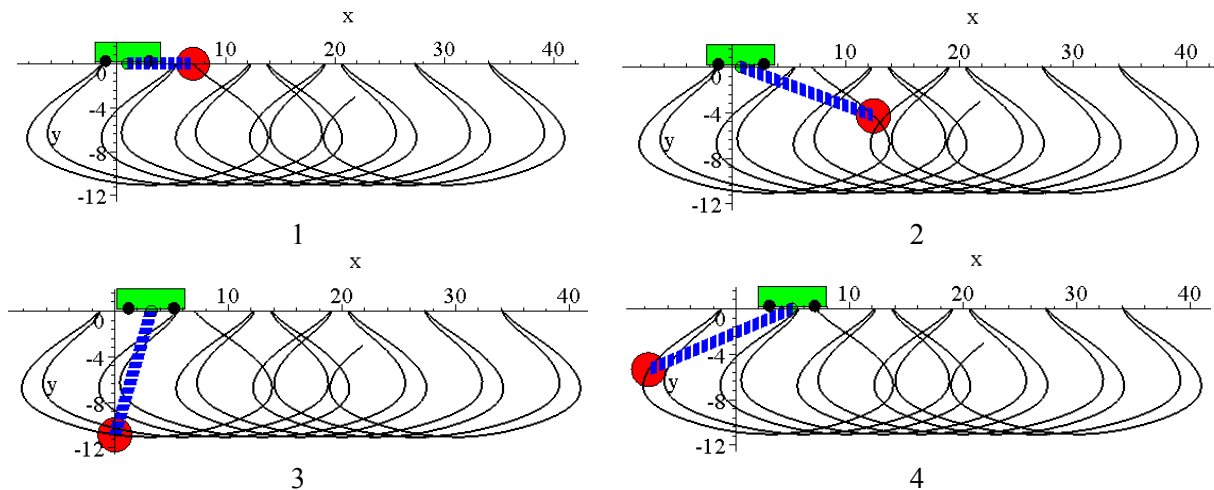


Рис. 8. Коливання пружинного маятника під візком за значень $m_1 = 150$; $m_2 = 40$; $k = 250$ і $d = 5$

Висновки

Запропоновано нове поняття фокус-лінії параметричної сім'ї кривих і спосіб проєкційного фокусування, який базується на ньому, що дозволяє визначати критичне значення

Використовуючи одержані наближені розв'язки $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$ системи рівнянь Лагранжа другого роду, можна побудувати траєкторію переміщення вантажу пружинного маятника в декартовій системі координат xOy за формулами

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + (d + w(t))\sin(v(t)); \\ y(t) &= -(d + w(t))\cos(v(t)). \end{aligned} \quad (5)$$

На рис. 8 зображено кадри створеного анімаційного фільму коливання пружинного маятника під візком по розрахованій нехаотичній траєкторії. З анімаційного фільму можна наочно переконаватися у тому, що візок буде переміщатися праворуч завдяки організованим рухам вантажу по обчисленій траєкторії.

Переміщення візка пояснюється узгодженими з напрямком його руху процесами розпрямлення (коли пружина під візком ліворуч) і стиснення пружини (коли пружина під візком праворуч). Тобто у першому випадку відстань між масами завдяки пружині штучно збільшується, а у другому – зменшується, що впливає на положення візка. Проведені дослідження будуть корисними для аналізу причин руху різновидів інерціоїдів [6].

керуючого параметра сім'ї кривих, за якого зображення її елементів займе мінімальну площу (у піксельному вимірі).

Розроблений спосіб визначення критичних значень параметрів маятникових коливань

шляхом проекційного фокусування фазових траєкторій їх диференціальних рівнянь дозволяє визначати критичні значення керуючого параметра за допомогою графічного поняття фокусування зображень фазових траєкторій.

Розроблений спосіб дозволяє визначати параметри нехаотичних коливань у вертикальній площині вантажу пружинного маятника під рухомим візком. Показано, що ці коливання здатні ініціювати рух візка у горизонтальному напрямку. Переміщення візка можна пояснити процесами стиснення чи розтягнення пружини в певні виявлені моменти положення вантажу на траєкторії його переміщення. Завдяки пружині відстань між масами періодично збільшується або зменшується, що впливає на положення візка.

Література

1. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
2. Анищенко В.С. Знакомство с нелинейной динамикой / В.С.Анищенко. – Москва-Ижевск: ИКИ, 2002. – 145 с.
3. Семків О.М. Метод визначання особливих траєкторій коливань вантажу 2d-пружинного маятника / О.М. Семків // Вестник ХНАДУ: сб. науч. тр. – 2015. – Вып. 71. – С. 36–44.
4. Chen Y.F. Scientific computing and visualization. Spring pendulum system, top. 4 / Y.F. Chen. Електронний ресурс. Режим доступу <http://ocw.nctu.edu.tw/upload/classbfs1209054703145981.pdf>.
5. Електронний ресурс. Режим доступу: <http://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-003j-dynamics-and-control-i-spring-2007/lecture-notes/lec17.pdf>.
6. Толчин В.Н. Инерциод. Силы инерции как источник поступательного движения / В.Н. Толчин. – Пермь: Пермское книжное издательство, 1977 г. – 103 с. Електронний ресурс. Режим доступу: http://second-physics.ru/lib/books/tolchin_inertiod.djvu.

Рецензент: О.В. Бажинов, професор, д.т.н., ХНАДУ.

Стаття надійшла до редакції 28 січня 2016 р.