

УДК 624.21

ГИБКИЕ ПЛАСТИНЫ, ТРИ СТОРОНЫ КОТОРЫХ ЗАЩЕМЛЕНЫ, А ЧЕТВЕРТАЯ – ШАРНИРНО ОПЕРТА

**В.П. Кожушко, проф., д.т.н.,
 Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет**

***Аннотация.** Рассмотрена работа гибких пластин с тремя защемленными, а четвертой – свободно опертой сторонами под воздействием любых поперечных нагрузок. Для анализа работы пластин использован разработанный автором метод расчета, который был применен при исследовании напряженно-деформированного состояния гибких пластин при иных условиях опирания их сторон.*

***Ключевые слова:** поперечная полоса, продольная полоса, система уравнений, смешанный метод строительной механики, фиксированное защемление.*

ГНУЧКІ ПЛАСТИНИ, ТРИ СТОРОНИ ЯКИХ ЗАТИСНЕНІ, А ЧЕТВЕРТА – ШАРНІРНО ОПЕРТА

**В.П. Кожушко, проф., д.т.н.,
 Харківський національний автомобільно-дорожній університет**

***Анотація.** Розглянуто роботу гнучких пластин із трьома затисненими, а четвертою – вільно опертою сторонами під дією будь-яких поперечних навантажень. Для аналізу роботи пластин використано розроблений автором метод розрахунку, який був застосований ним під час дослідження напружено-деформованого стану гнучких пластин за інших умов опирання їх сторін.*

***Ключові слова:** поперечна смуга, поздовжня смуга, система рівнянь, змішаний метод будівельної механіки, фіктивне затиснення.*

FLEXIBLE PLATES THREE SIDES OF WHICH ARE RESTRAINED AND THE FOURTH ONE IS HINGE-SUPPORTTED

**V. Kozhushko, Prof., D. Sc. (Eng.),
 Kharkiv National Automobile and Highway University**

***Abstract.** The work of flexible plates with three restrained sides and the fourth freely-supported side under the impact of any transverse loads is considered. For analysis of plates there was used the developed by the author design method, which was applied by him in the study of the stress-strain state of flexible plates under different bearing conditions of their sides.*

***Key words:** horizontal line, longitudinal strip, system of equations, mixed method of structural mechanics, fictitious restraint.*

Введение

Расчет гибких пластин с различными условиями опирания их сторон на опоры является сложной в математическом отношении задачей. Для пластин с некоторыми условиями опирания кромок получены замкнутые решения, и то при воздействии на них только от-

дельных простейших видов поперечной нагрузки (скажем, равномерно распределенной или гидростатической нагрузок, приложенных по всей площади пластины, сосредоточенной силы, приложенной в центре пластины, линейно-распределенной по какой-либо свободной стороне пластины нагрузки и др.).

Решения для пластин с рассматриваемыми в данной статье условиями опирания их сторон на опоры практически отсутствуют.

Анализ публикаций

В работах [1–3] рассмотрены вопросы расчета пластин с данными условиями опирания кромок, но только при воздействии на них поперечной равномерно распределенной или гидростатической нагрузок, приложенных по всей площади пластины.

Для облегчения расчета пластин при воздействии на них упомянутых внешних нагрузок составлены таблицы [4, 5].

Анализируя эти работы, можно сделать следующие выводы:

- задача по определению внутренних усилий в рассматриваемых пластинах решена при воздействии на них только некоторых поперечных нагрузок;
- при решении задачи от воздействия на пластину этих нагрузок используется разный математический аппарат;
- при приложении к пластинам иных нагрузок (кроме упомянутых выше) решений вообще нет.

Цель и постановка задачи

Целью работы является определение напряженно-деформированного состояния (НДС) пластин, нагруженных любыми поперечными нагрузками, применение единого метода расчета.

Определение ординат линий влияния усилий

Предлагается пластину разрезать на ряд продольных и поперечных полос (рис. 1). Количество продольных полос n (полос, расположенных вдоль продольной стороны l) должно быть не менее 10. Поперечные полосы шириной 1 м (полосы, расположенные вдоль стороны b) следует вырезать последовательно в разных по длине l сечениях (на рис. 1 поперечная полоса вырезана в середине пролета l , т.е. при $x = 0,5l$). При определении усилий, которые передает поперечная полоса на продольные элементы, она рассматривается как неразрезная полоса, опирающаяся на упругие опоры, роль которых играют продольные полосы (рис. 1). Упругие

опоры следует ставить в точках, расположенных по середине ширины продольных полос d , где $d = b/n$.

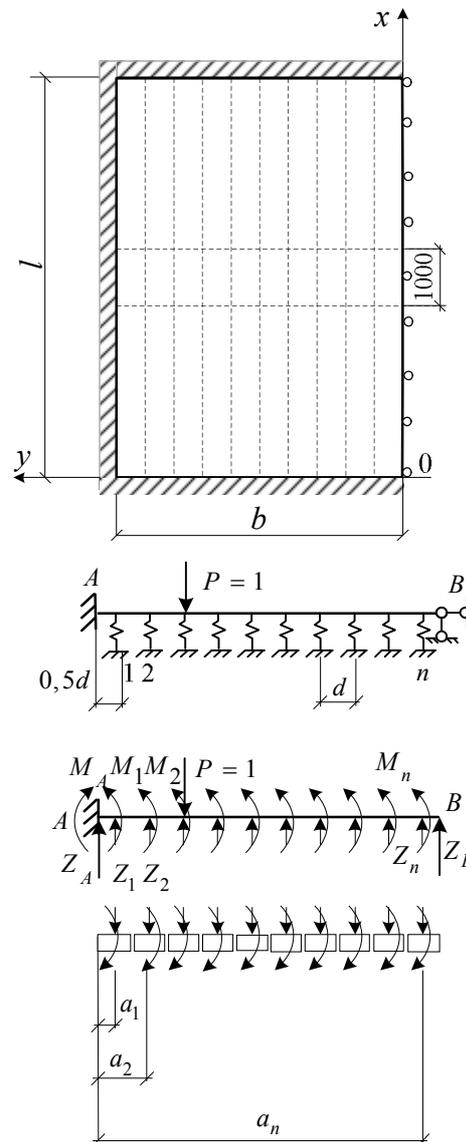


Рис. 1. Расчетная и основная схемы поперечной полосы

Для решения задачи используется смешанный метод строительной механики, для чего на левом конце поперечной полосы (в точке A) ставится фиктивное защемление (при указанных условиях опирания кромок пластины в этой точке уже имеется истинное защемление), а собственно короткая полоса рассматривается как консольный элемент, защемленный в точке A .

Количество неизвестных, если учитываются только вертикальные усилия Z_i , равняется $(n+3)$: n неизвестных вертикальных усилий Z_i , реакции Z_A и Z_B в точках опирания

концов поперечной полосы и изгибающий момент M_A в точке заземления. Для определения неизвестных следует решить систему уравнений

$$\begin{cases} \delta_{11}^{(z)} Z_1 + \dots + \delta_{1n}^{(z)} Z_n + \delta_{1B}^{(z)} Z_B + \Delta_{1P} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1}^{(z)} Z_1 + \dots + \delta_{nn}^{(z)} Z_n + \delta_{nB}^{(z)} Z_B + \Delta_{nP} = 0; \\ Z_1 + \dots + Z_n + Z_A + Z_B = 1; \\ a_1 Z_1 + \dots + a_n Z_n + b Z_B - M_A - a_i = 0; \\ \delta_{B1}^{(z)} Z_1 + \dots + \delta_{nB}^{(z)} Z_n + \delta_{BB}^{(z)} Z_B + \Delta_{BP} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Система уравнений (1) составлена при условии, что к поперечной полосе приложена единичная сила ($P=1$). Если эту силу последовательно прикладывать в точках $1 \dots n$, а систему уравнений (1) решать n раз, то будут получены ординаты линий влияния усилий Z_i .

Методика определения единичных перемещений $\delta_{ik}^{(z)}$ изложена в работах автора [6, 7]. Следует обратить внимание на специфику определения главных единичных перемещений $\delta_{ii}^{(z)}$. Эти перемещения включают изгиб поперечной полосы w_{ii} в точке i от единичного усилия $Z_i = 1$, которое определяется по общим принципам строительной техники как для консольного элемента пролетом b [6, 7] и прогиба продольной полосы y_{ii} от единичной распределенной по всей её длине нагрузки ($q=1$), который в данном случае определяется для полосы с заземленными концами пролетом l (рис. 2). Прогиб продольной полосы y_{ii} следует определять в том сечении x по её длине, в котором вырезается поперечная полоса. Для упрощения расчетов по определению единичных перемещений $\delta_{ik}^{(z)}$ и свободных членов Δ_{ip} (от единичной силы P) предлагается увеличить их в $1/y_{ii}$ раз, где y_{ii} – прогиб какой-то произвольно выбранной продольной полосы от нагрузки $q=1$. Тогда увеличенные в $1/y_{ii}$ раз единичные перемещения $\delta_{ik}^{(z)}$ и увеличенные в $1/y_{ii}$ раз свободные члены будут определены по таким формулам:

$$\delta_{ik}^{(z)} = \alpha w_{ik}; \quad (2)$$

$$\delta_{ii}^{(z)} = \beta + \alpha w_{ck}; \quad (3)$$

$$\Delta_{ip} = \alpha w_{ip}, \quad (4)$$

где w_{ik} – перемещение поперечной полосы в точке i от единичной силы $P=1$, приложенной в точке k ; α – показатель, зависящий от соотношения пролетов поперечной и продольной полос, а также от соотношений изгибных жесткостей продольной и поперечной полос. Методика определения показателя α изложена в работах [6, 7]; β – увеличенный в $1/y_{ii}$ раз прогиб i -й продольной полосы от единичной распределенной нагрузки $q=1$, как уже было сказано, в том же сечении по её длине, в котором вырезана поперечная полоса. Если бы продольные кромки пластины (кромки вдоль l) были свободны (как это мы имеем в пролетных строениях или в пластинах, в которых закреплены только короткие стороны), прогибы y_{ii} всех продольных полос были одинаковы и тогда $\beta=1$. На прогибы y_{ii} продольных полос при заземлении продольных кромок пластины не будут одинаковыми, т.к. на их величину будут оказывать влияние условия закрепления продольных сторон. Тогда прогиб y_{ii} какой-то произвольно выбранной продольной полосы (скажем, для полосы, расположенной по середине короткой стороны, т.е. на расстоянии $y=0,5b$) примем за основную. Величина β для этой продольной полосы будет равна единице, а для остальных продольных полос $\beta \neq 1$.

Приведем методику определения прогибов продольных полос y_{ii} . Рассмотрим продольную полосу как элемент, заземленный по концам и нагруженный распределительной нагрузкой $q=1$ (рис. 2).

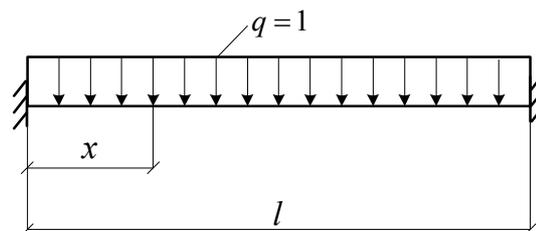


Рис. 2. Расчетная схема продольной полосы при определении прогибов y_{ii} от распределенной нагрузки

Прогиб в сечении x продольной балки будет равен

$$y_{ii} = \frac{l^4 (1 - \nu_{i,пр}^2)}{24 E_{i,пр} J_{i,пр}} \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) - \frac{l^3 (1 - \nu_{пр}^2)}{24 E_{i,пр} J_{i,пр}} x \left(1 - \frac{x}{l} \right), \quad (5)$$

где $E_{i,пр} J_{i,пр}$ – изгибная жесткость i -й продольной полосы; $\nu_{i,пр}$ – коэффициент Пуассона материала продольной полосы.

При $x = 0,5b$ (т.е. когда поперечная полоса вырезана по середине пролета l) прогиб продольной полосы

$$y_{ii} = \frac{l^4 (1 - \nu_{i,пр}^2)}{192 E_{i,пр} J_{i,пр}}. \quad (6)$$

Величину β предлагается определять по формуле

$$\beta = \frac{K_i}{K_1}, \quad (7)$$

где K_i – выражение, которым обозначена часть формулы по определению прогибов поперечной полосы в i -й точке от сосредоточенной силы $P = 1$, приложенной в этой же точке (рис. 3).

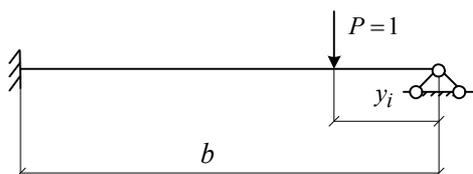


Рис. 3. Расчетная схема поперечной полосы при определении ее прогибов от силы $P = 1$

Прогиб поперечной полосы под точкой приложения силы $P = 1$ (т.е. в сечении y_i) равен

$$\frac{E_{попер} J_{попер}}{1 - \nu_{попер}^2} \delta = \frac{1}{12} b^3 (3\xi^2 - 8\xi^3 + 6\xi^4 - \xi^6), \quad (8)$$

где $\xi = y/b$ – относительное расстояние от правой опоры до точки приложения силы $P = 1$.

Обозначим

$$K_i = 3\xi^2 - 8\xi^3 + 6\xi^4 - \xi^6. \quad (9)$$

Обозначим через K_1 выражение (9) при $\xi = 0,5$.

Тогда для продольной полосы, расположенной на расстоянии $\xi = 0,5$, величина $\beta = 1$, а для всех остальных продольных полос $\beta \neq 1$.

При учете крутящих моментов M_i (рис. 1) добавятся еще n неизвестных, т.е. необходимо решение системы уравнений (10) с $(2n + 3)$ неизвестными.

$$\begin{cases} \delta_{11}^{(z)} Z_1 + \dots + \delta_{in}^{(z)} Z_n + \delta_{1B}^{(z)} Z_B + \delta_{11}^{(M)} M_1 + \dots + \delta_{1n}^{(M)} M_n + \Delta_{1P} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1}^{(z)} Z_1 + \dots + \delta_{nm}^{(z)} Z_n + \delta_{nB}^{(z)} Z_B + \delta_{n1}^{(M)} M_1 + \dots + \delta_{nm}^{(M)} M_n + \Delta_{nP} = 0; \\ \theta_{11}^{(z)} Z_1 + \dots + \theta_{in}^{(z)} Z_n + \theta_{1B}^{(z)} Z_B + \theta_{11}^{(M)} M_1 + \dots + \theta_{1n}^{(M)} M_n + \theta_{1P} = 0; \\ \dots \\ \theta_{n1}^{(z)} Z_1 + \dots + \theta_{nm}^{(z)} Z_n + \theta_{nB}^{(z)} Z_B + \theta_{n1}^{(M)} M_1 + \dots + \theta_{nm}^{(M)} M_n + \theta_{nP} = 0; \\ Z_1 + \dots + Z_n + Z_A + Z_B - 1 = 0; \\ a_1 Z_1 + \dots + a_n Z_n + b Z_B + M_1 + \dots + M_n - M_A - a_i = 0; \\ \delta_{B1}^{(z)} Z_1 + \dots + \delta_{Bn}^{(z)} Z_n + \delta_{BB}^{(z)} Z_B + \delta_{B1}^{(M)} M_1 + \dots + \delta_{Bn}^{(M)} M_n + \Delta_{BP} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

В системе (10): $\delta_{ik}^{(M)}$ – вертикальное перемещение поперечной полосы в точке i от единичного момента M_k , приложенного в точке k ; $\theta_{ik}^{(z)}$ – единичный угол поворота поперечной полосы в точке i от единичной силы $Z_k = 1$, приложенной в точке k ; $\theta_{ik}^{(M)}$ – единичный угол поворота i -й точки поперечной полосы от момента $M_k = 1$, приложенного в k -й точке; θ_{iP} – угол поворота в i -й точке поперечной полосы от силы $P = 1$.

Методика определения этих перемещений изложена в работе [8].

Поскольку каждое уравнение систем (1,10) учитывает работу одной продольной полосы, эти системы уравнений применимы и при решении пластины переменного сечения. В этом случае переменную жесткость поперечной полосы предлагается заменять ступенчато, т.е. поперечный элемент следует рассматривать как ступенчатую полосу. Методика определения единичных перемещений этих полос изложена в работах [9, 10].

При расчете пластин, подкрепленных снизу ребрами, продольные и поперечные полосы следует вырезать таким образом, чтобы ребро входило в состав полосы. Остальная процедура определения неизвестных в системах уравнений (1, 10) остается прежней.

Вывод

Предложенный метод расчета позволяет определять напряженно-деформированное состояние рассматриваемых пластинок при приложении к ним любых поперечных нагрузок.

Не вызывает затруднений расчет пластин переменной толщины или пластин, подкрепленных ребрами.

Литература

1. Калманюк А.С. Расчет пластинок / А.С. Калманюк. – М.: Госстройиздат, 1959. – 212 с.
2. Галеркин Б.Г. Собрание сочинений / Б.Г. Галеркин. – М.: Изд-во АН СССР, 1953, Т. 2. – 440 с.
3. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки: / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер; пер. с англ. – 2-е изд., стереотипное. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
4. Шадурский В.П. Таблицы для расчета упругих прямоугольных плит: справочное пособие / В.П. Шадурский. – М.: Стройиздат, 1976. – 152 с.
5. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений (расчетно-теоретический) / В.Л. Агамиров, В.Н. Архангельский, М.С. Бернштейн и др.; под ред. А.А. Уманского. – М.: Госстройиздат, 1960. – 1040 с.
6. Кожушко В.П. Расчет пролетных стропильных балочных мостов разрезной системы / В.П. Кожушко // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1980. – Вып. 36. – С. 118–122.
7. Кожушко В.П. Моделирование пролетных будов мостів: монографія / В.П. Кожушко. – Х.: ХНАДУ, 2010. – 196 с.
8. Кожушко В.П. До розрахунку балочно-консольних прогінних будов на тимчасове навантаження / В.П. Кожушко // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – 1985. – Вип. 37. – С. 56–60.
9. Кожушко В.П. Определение перемещений ступенчатых балок на упругооседающих опорах / В.П. Кожушко // Науковий вісник будівництва. – 2002. – Вип. 17. – С. 146–150.
10. Кожушко В.П. Определение перемещений ступенчатых балок от единичных изгибающих моментов / В.П. Кожушко // Науковий вісник будівництва. – 2002. – Вип. 18. – С. 73–76.

Рецензент: В.К. Жданюк, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 24 февраля 2016 г.