

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ПЛАСТИНУ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ВЯЗКО-УПРУГИХ ОПОР

Рассматривается прямоугольная упругая изотропная пластина средней толщины шарнирно-опертая по ее периметру. На пластину действует нестационарное нагружение, вызывающее колебания. В некоторой точке к пластине присоединена дополнительная сосредоточенная вязко-упругая опора (рис. 1 а), снижающая амплитуды колебаний, а также оказывающая демпфирующее действие. Считается, что дополнительная опора установлена ортогонально срединной плоскости пластины и шарнирно соединена с ее нижней лицевой поверхностью, коэффициенты жесткости и демпфирования опоры постоянны, а сила сопротивления изменяется по формуле:

$$R(t) = c \cdot w_C(x_C, y_C, t) + \kappa \cdot \frac{dw_C(x_C, y_C, t)}{dt},$$

где c – коэффициент жесткости, Н/м; κ – коэффициент демпфирования, Н·с/м.

Воздействие дополнительной опоры на пластину можно моделировать в виде неизвестной нестационарной силы $R(t)$, приложенной к пластине в месте установки опоры.

При решении задач идентификации параметров дополнительной вязкоупругой опоры или задач ее оптимального проектирования такую опору можно представить в виде двух независимых опор (рис. 1 б) – одной чисто вязкой (демпфирующей) $R_D(t) = \kappa \cdot \frac{dw(x_D, y_D, t)}{dt}$, приложенной в точке (x_D, y_D) и одной линейно упругой $R_C(t) = c \cdot w(x_C, y_C, t)$, приложенной в точке (x_C, y_C) . Далее можно предположить, что точки (x_D, y_D) и (x_C, y_C) находятся на близком расстоянии или совпадают и рассматривать частный случай, когда $R(t) = R_D(t) + R_C(t)$.

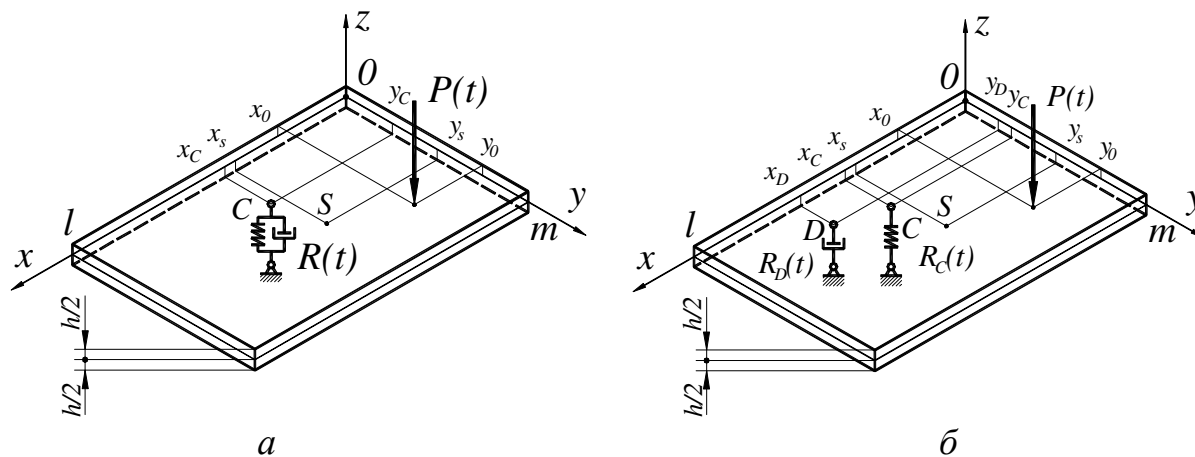


Рисунок 1 – Схема нагружения.

Предполагалось, что координаты точек приложения нагрузки и координаты установки дополнительной опоры произвольны (любые точки, принадлежащие пластине и не лежащие на ее границе).

В рамках теории пластин типа С. П. Тимошенко система трех дифференциальных уравнений деформирования пластины [1], дополняется соотношениями, учитывающими составляющие реакции, возникающие между пластиной и опорой $R_D(t)$ и $R_C(t)$. Задача при известной силе $P(t)$, коэффициентах жесткости c и демпфирования κ может быть сведена к системе двух интегральных уравнений Вольтерра, относительно неизвестных «вязкой» и «упругой» составляющих $R(t)$:

$$\begin{cases} \int_0^t K_{CC}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau + \frac{R_C(t)}{c} + \int_0^t K_{DC}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau = \int_0^t K_{PC}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau; \\ \int_0^t K_{CD}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau + \int_0^t K_{DD}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{R_D(\tau)}{\kappa} d\tau = \int_0^t K_{PD}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau, \end{cases}$$

где $K_{ij}(t)$ – соответствующие ядра свёрточных интегралов, записанные для конкретной i -той нагрузки в j -той точке. Приведенная система решается с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова [2]. В результате находятся две составляющие реакции между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой, что позволяет определять компоненты перемещения во времени во всех точках пластины (как при воздействии трёх независимых нагрузок $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_C(t)$ на пластину без дополнительных опор). Например, для прогиба пластины можно записать:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t K_i(x, y, t-\tau) \cdot P_i(\tau) d\tau,$$

где $w(x, y, t)$ – изменение прогиба пластины во времени, N – количество внешних возмущающих нагрузок, $P_i(t)$ – зависимость изменения во времени i -той возмущающей нагрузки, $K_i(x, y, t)$ – разностное ядро интегрального уравнения, типа свертки, для i -той нагрузки в точке пластины с координатами (x, y) . Получение ядер и их вид описаны, например, в [3].

Литература

1. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
2. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с.
3. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука. // Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.