Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО–ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять за темою
«Динаміка матеріальної точки»
з дисципліни «Теоретична механіка»
для студентів всіх спеціальностей

Затверджено методичною
радою університету,
протокол № 03 від 27.11.2024 р.

Харків
ХНАДУ
2025

Укладач Красніков С.В.

Кафедра деталей машин та теорії механізмів і машин

# ВСТУП

**Динаміка** – розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних об'єктів в залежності від сил, що діють на них.

Основні закони механіки (закони Галілея – Ньютона):

**1. Закон інерції.** Матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, поки дія інших тіл не змінить цей стан.

**2. Закон пропорційності сили та прискорення**. Прискорення матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і однаково з нею напрямлене: $m\vec{W}=\vec{F}$.

**3. Закон рівністі дії і протидії**. Сили взаємодії двох матеріальних точок однакові за величиною і протилежні за напрямом: $\vec{F}_1=-\vec{F}_2$.

**4. Закон незалежності дії сил (принцип суперпозиції)**. Декілька одночасно діючих на матеріальну точку сил надають точці таке ж прискорення, яке надала б їй одна сила, що дорівнює їх геометричній сумі.

Основне рівняння динаміки матеріальної точки:

$$m\vec{w}=\sum_{\kappa=1}^{n}\vec{F}_k . \tag{1}$$

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в проекціях на декартові осі:

$$m\ddot{x}=\sum F_{kx}; \qquad m\ddot{y}=\sum F_{ky}; \qquad m\ddot{z}=\sum F_{kz}, \tag{2}$$

де $m$ – маса точки; $\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$ – проекції прискорення на відповідні вісі декартової системи координат;
а в проекціях на натуральні осі:

$$m\frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}; \quad m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}; \quad 0 = \sum F_{kв} \tag{3}$$

де ρ – радіус кривини траєкторії; $\sum F_{k\tau}; \sum F_{kn}; \sum F_{kв}$ – суми проекцій всіх сил відповідно на дотичну, головну нормаль і бінормаль; $\frac{dV}{dt} = W^{\tau}$ – тангенціальне (дотичне) прискорення точки; $\frac{V^2}{\rho} = W^n$ – нормальне (доцентрове) прискорення точки.

**Дві основні задачі динаміки точки**:

I (пряма) – за заданими рухом точки та її масою визначити сили, що діють на точку. Ця задача розв'язується шляхом диференціювання заданих рівнянь руху і підстановкою результатів у рівняння (2).

II (обернена) – за заданими масою і силами, діючими на точку, визначити закон (рівняння) руху точки. Ця задача розв'язується шляхом інтегрування диференціальних рівнянь руху точки.

Якщо при розв’язуванні другої задачі динаміки використовують диференціальні рівняння руху точки в координатній формі, то необхідно проінтегрувати систему диференціальних рівнянь (2).

При інтегруванні кожного рівняння руху точки одержуємо дві сталі. У загальному випадку маємо три диференціальних рівняння другого порядку, тобто при подвійному інтегруванні одержуємо шість сталих інтегрування, що визначаються за початковими умовам.

Задати початкові умови руху матеріальної точки - означає вказати положення точки та її швидкість в початковий момент часу: $t = t_0$; початкове положення точки характеризується трьома координатами – $x_0$, $y_0$, $z_0$, початкова швидкість визначається трьома проекціями швидкості на координатні осі – $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$.

# 1 ПОРЯДОК РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ

1. Складаємо розрахункову схему:

а) зображуємо матеріальну точку в поточний момент часу на ділянці руху;

б) показуємо всі активні сили, які діють на точку, і реакції в'язей;

в) вибираємо систему координат. Найчастіше вибирають декартову систему координат; при цьому початок координат слід помістити в початковому положенні точки (на початку ділянки), а осі спрямувати в напрями її руху (вісь $X$ – вздовж ділянки, вісь $Y$ – перпендикулярно до неї). Якщо точка рухається по колу, то рекомендується вибирати натуральні осі, приєднавши їх до рухомої точки і спрямувавши дотичну до траєкторії за швидкістю точки, а головну нормаль – у бік ввігнутості траєкторії по радіусу кривини ділянки.

2. Складаємо основне рівняння динаміки і проектуємо його на вибрані осі. При цьому проекції всіх сил необхідно виразити через змінні, від яких ці сили залежать.

3. Зінтегруємо двічі здобуті диференціальні рівняння руху.

2. Довільні сталі інтегрування визначаємо за допомогою початкових умов руху точки на кожній з ділянок руху.

Початковою швидкістю на кожній наступній ділянці профілю є кінцева швидкість попередньої ділянки. Якщо під час переходу тіла на наступну ділянку спостерігається заломлення траєкторії, то за початкову швидкість беруть проекцію кінцевої швидкості попередньої ділянки на вісь даної ділянки (рис. 1): $\delta = \alpha - \beta$, $\upsilon_{20} = \upsilon_{1к} \cos \delta$.

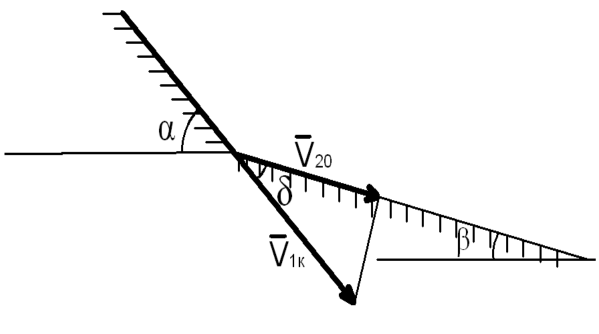



Рисунок – 1

Введенням початкової швидкості точки враховується вплив на її рух сил, які діють на матеріальну точку до моменту часу, взятого за початковий (тобто на попередній ділянці).

5. Знайдені довільні сталі підставляємо в результат інтегрування диференціальних рівнянь руху точки. Після першого інтегрування дістаємо швидкість точки як функцію часу, після другого – рівняння руху точки (закон руху).

# 2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

## 2.1 Загальні умови

Тіло вагою $\vec{P}$ рухається з точки $A_o$ з початковою швидкістю $\vec{V}_0$ по ділянках вказаного профілю. На криволінійній ділянці радіуса R і при вільному польоті тіло не зазнає опору. На ділянці $l_1$ діє сила тертя з коефіцієнтом $f$, на ділянці $l_2$ – сила опору $F_0 = kmV^2$, пропорційна квадрату швидкості. На кожній ділянці визначити:

1) швидкість руху залежно від часу і координат, а на криволінійній ділянці – залежно від кута;
2) кінематичне рівняння руху;
3) швидкість в кінці ділянки;
4) час руху (за винятком криволінійної ділянки);
5) нормальний тиск $N$ у точках ділянки.

При дослідженні вільного польоту додатково визначити:

1) горизонтальну дальність польоту;
2) найбільшу висоту підйому;
3) рівняння траєкторії;

Після розв’язку завдання побудувати траєкторію точки і графік зміни швидкості залежно від координати $X$ горизонтальної осі, проведеної з точки $A_0$ праворуч.

Схема 0, варіант 0

| $P$, Н | $V_0$, м/с | $f$ | $k$, 1/м | $l_1$, м | $l_2$, м | $R$, м | $H$, м | $\alpha$, град | $\beta$, град | $\theta$, град |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 7 | 0,1 | 0,05 | 11 | 20 | 12 | 10 | 55 | 45 | 60 |

Задана схема

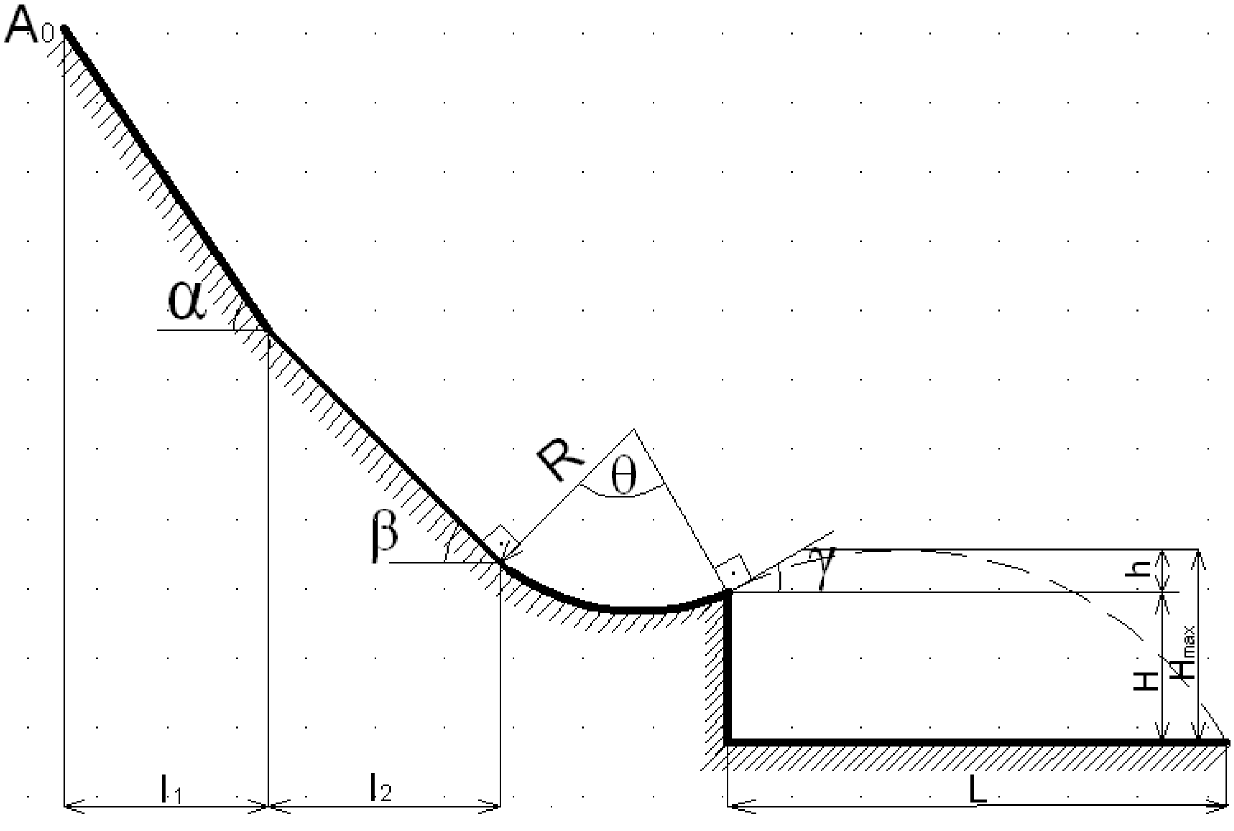



Рисунок 2

## 2.2 Ділянка 1
## (прямолінійний рух точки під дією сталих сил)

По шорсткій похилій поверхні, яка утворює кут $\alpha$ з горизонтом піднімається матеріальна точка $M$ вагою $P$ = 8 Н. У початковий момент часу її швидкість $V_0$ = 7 м/с. Коефіцієнт тертя $f$ = 0,1, кут $\alpha$ = 55°. Визначити закон руху точки, швидкість її в кінці ділянки довжиною $l$ = 11 м, час $t$ руху по діляці і нормальний тиск $N$ у кінці ділянки (рис. 3).

*Розв'язання* 1. Складаємо розрахункову схему (вісь $0x$ спрямовуємо вздовж похилої площини за рухом точки, вісь $Oy$ – терпендикулярно до неї, початок координат $0$ розмістимо на початку ділянки; $P$ – вага точки; $N$ - нормальна реакція площини, $F_{mp} = fN$ – сила тертя, напрямлена проти руху).

2. Складаємо основне рівняння динаміки (1)

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{mp}, \tag{4}$$

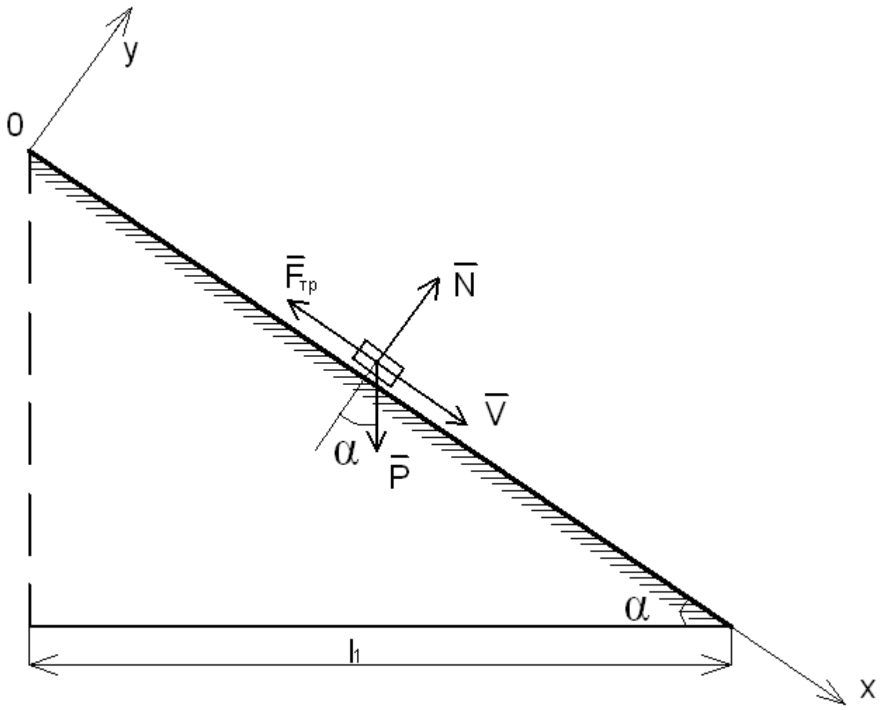



Рисунок 3

а потім проектуємо на вибрані осі координат:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = P\sin\alpha - F_{\text{тр}}; & (5) \\ m\ddot{y} = P\cos\alpha + N; & (6) \end{cases}$$

Оскільки точка рухається вздовж осі $Ox$, її прискорення напрямлене вздовж цієї осі і проекція його на вісь $0y$ дорівнює нулю (тобто $\ddot{y} = w_y = 0$). Тому з рівняння (6) дістаємо

$$N = P\cos\alpha = 8 \cdot \cos 55° = 4{,}42 \text{ Н}.$$

Тоді сила тертя $F_{тр} = fP\cos\alpha = fmg\cos\alpha$.

Після підстановки в рівняння (5) сили тертя і ділення на масу точки $m$ маємо $\left(\ddot{x} = W_X = \dfrac{dV}{dt}\right)$:

$$\frac{dV}{dt} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) =$$
$$= 9{,}81 \cdot (\sin 55° - 0{,}1 \cdot \cos 55°) = 7{,}49 = A. \qquad (7)$$

Для спрощення записів позначили праву частину рівняння (7), яка є сталою величиною, буквою А.

3. Інтегруємо диференціальне рівняння (7) поділивши змінні $V$ та $t$. Тоді

$$\int dV = \int g(\sin\alpha - f\cos\alpha)dt = \int Adt\,;$$
$$V = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1 = At + C_1. \tag{8}$$

Інтегруємо вдруге (маючи на увазі, що $V = V_x = \dfrac{dx}{dt}$):

$$\frac{dx}{dt} = At + C_1;$$
$$\int dx = \int At\mathrm{d}t + \int C_1 dt\,; \tag{9}$$
$$x = A\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2\,.$$

4. Сталі інтегрування $C_1$ і $C_2$ визначаємо за допомогою початкових умов руху точки: $t$=0, $x_0$=0, $\dot{x}_0 = V_0$.

Підставляючи значення початкових умов у (8) і (9), дістаємо

$$C_1 = V_0;\quad C_2 = 0.$$

5. Знайдені значення $C_1$ і $C_2$ підставляємо в результати інтегрування диференціальних рівнянь руху, тобто в рівняння (8) та (9).

Отже, рівняння руху точки $x = f_1(t)$ і рівняння її швидкості $V = f_2(t)$ остаточно мають вигляд:

$$x = A\frac{t^2}{2} + V_o t = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + V_o t\,; \tag{10}$$

$$V = At + V_o = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + V_o\,. \tag{11}$$

6. Час $t$ руху по ділянці визначаємо, підставляючи $x = \dfrac{\ell_1}{\cos\alpha}$ в рівняння (10). Дістаємо квадратне рівняння відносно $t$, розв'язуючи яке, знаходимо його корені $t_1$ і $t_2$:

$$\frac{\ell_1}{\cos\alpha} = A\frac{t^2}{2} + V_o t;$$

або

$$A\frac{t^2}{2} + V_0 t - \frac{\ell}{\cos\alpha} = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{-V_o \pm \sqrt{V_0^2 - 4\frac{A}{2}(-\frac{\ell_1}{\cos\alpha})}}{2\frac{A}{2}} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 + 2\cdot 7,49\frac{11}{\cos 55^0}}}{7,49} = \frac{-7 \pm 18,4}{7,49};$$

$t_1$ = 1,52 с. $t_2$ = - 3,39 с.

Як бачимо, $t_2$ від'ємне, тому суперечить фізичному змісту задачі.

Щоб визначити швидкість точки в кінці ділянки, підставляємо значення $t_1$ в рівняння (11):

$$V_1 = 7,49\cdot 1,52 + 7 = 18,4 \text{ м/с}.$$

*Примітка*. Оскільки рух точки є прямолінійним і рівноприскореним (що видно з рівняння (7)), то здобути такі самі результати можна простіше, використавши відомі з кінематики рівняння для визначення швидкості й переміщення при рівнозмінному прямолінійному русі точки.

## 2.3 Ділянка 2 (прямолінійний рух точки під дією сили, що залежить від швидкості)

По гладкій похилій площині, яка утворює кут β= 45° з горизонтом, спускається матеріальна точка А вагою $P$ = 8 Н, зазнаючи опір середовища, пропорційний квадрату швидкості тіла $F_c = kmV^2$ (де $m$ - маса тіла, $k$ = 0,05 – коефіцієнт пропорційності).

При переході точки з першої на другу ділянку спостерігається заломлення траєкторії, тому початкова швидкість точки на другій ділянці

$$V_{20} = V_{1k}\cos(\alpha - \beta) = 18,4\cos(55^o - 45^o) = 17,8 \text{ м/с}.$$

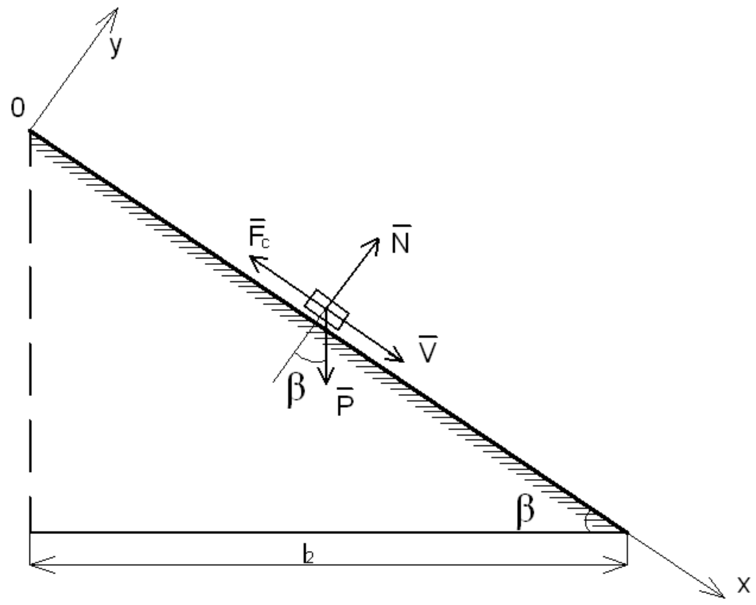



Рисунок 4

Визначити час руху і швидкість точки в кінці ділянки довжиною $l_2$=20 м.

*Розв'язання.* 1. Складаємо розрахункову схему (вісь *Ox* спрямуємо вздовж похилої поверхні за рухом точки; $\vec{N}$ – нормальна реакція; $\vec{F}_c$ – сила опору середовища, яка напрямлена проти руху) (рис. 3).

2. Складаємо диференціальне рівняння руху точки у векторній формі

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_c,$$

а потім проектуємо його на осі координат:

$$\begin{cases} m\dfrac{dV_x}{dt} = P\sin\beta - F_c; & (12) \\ m\dfrac{dV_y}{dt} = N - P\cos\beta. & (13) \end{cases}$$

Рівняння (13) можна використати для визначання *N* (оскільки $W_y = \dfrac{dV_y}{dt} = 0$):

$$N = \text{P} \cos \beta = 8 \cdot 0{,}707 = 5{,}65 \text{ Н}.$$

Підставивши в рівняння (12) $F_c = kmV^2$ і скоротивши його на масу $m$, знаходимо

$$\frac{dV_x}{dt} = g \sin\beta - kV_x^2 = -k(V_x^2 - \frac{g}{k}\sin\beta). \tag{14}$$

3. Поділивши змінні в рівнянні (14), попередньо позначивши для скорочення записів,

$$a^2 = \frac{g}{k}\sin\beta = \frac{9{,}81}{0{,}05}\sin 45^o = 138{,}7$$

і зінтегрувавши (маючи на увазі, що $V_x = V$)

$$\int \frac{dV}{V^2 - a^2} = -k\int dt,$$

дістанемо

$$\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{V-a}{V+a}\right| = -kt + C_1. \tag{15}$$

4. Визначаємо сталу інтегрування за допомогою підстановки в рівняння (15) початкових умов: при $t_0 = 0$, $V = V_o$

$$C_1 = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{V_0 - a}{V_o + a}\right|.$$

Підставимо знайдене значення $C_1$ в рівняння (15) і знаходимо:

$$\frac{1}{2a}\left(\ln\left|\frac{V-a}{V+a}\right| - \ln\left|\frac{V_0-a}{V_0+a}\right|\right) = -kt;$$

або

$$\ln\left|\frac{(V-a)(V_0+a)}{(V+a)(V_0-a)}\right| = -2akt. \tag{16}$$

Потенціюємо рівняння (16):

$$\frac{(V-a)(V_0+a)}{(V+a)(V_0-a)}=e^{-2akt}.$$

Звідси знаходимо швидкість точки залежно від часу:

$$V=a\frac{(V_0+a)+(V_0-a)e^{-2akt}}{(V_0+a)-(V_0-a)e^{-2akt}} \quad . \tag{17}$$

5. Оскільки визначити кінцеву швидкість із рівняння (17), не знаючи часу руху, неможливо, знайдемо рівняння для визначення швидкості точки залежно від пройденої нею відстані $V = f(x)$. Для цього помножимо дві частини рівняння (14) на $2dx$:

$$2dV_x\frac{dx}{dt}=-2k(V_x^2-a^2)dx.$$

Звідси, зважаючи на те, що $V_x = \frac{dx}{dt}$, дістаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\int\frac{2VdV}{V^2-a^2}=-2k\int dx$$

і після інтегрування

$$\ln(V^2-a^2)=-2kx+C_2. \tag{18}$$

Сталу інтегрування $C_2$ знаходимо з рівняння (18) за допомогою початкових умов (при $t_0 = 0$; $x_0 = 0$; $V=V_0$):

$$C_2=\ln(V_0^2-a^2).$$

Підставляємо знайдене значення $C_2$ в рівняння (18):

$$\ln(V^2-a^2)-\ln(V_0^2-a^2)=-2kx,$$

$$\ln\frac{V^2-a^2}{V_0^2-a^2}=-2kx.$$

Потенціюємо останнє рівняння і знаходимо швидкість як функцію переміщення

$$\frac{V^2-a^2}{V_0^2-a^2}=e^{-2kx};$$

$$V=\sqrt{a^2+(V_0^2-a^2)e^{-2kx}}. \qquad (19)$$

Швидкість на кінці ділянки визначаємо, підставивши

$$x=\frac{l}{\cos\beta}=\frac{20}{0,707}=28,2 \text{ м}$$

в рівняння (19)

$$V_{2k}=\sqrt{138,7+(17,8^2-138,7)e^{-2\cdot 0,05\cdot 28,2}}=12,2 \text{ м/с.}$$

6. Щоб визначити час руху тіла по ділянці, підставляємо в рівняння (16) знайдене значення кінцевої швидкості $V_{2k}$:

$$t_k=\frac{1}{2ak}\ln\frac{(V_0-a)(V_k+a)}{(V_0+a)(V_k-a)};a=\sqrt{138.7}=11,8 \text{ с;}$$

$$t_k=\frac{1}{2\cdot 11.8\cdot 0.05}\ln\frac{(17.8-11.8)(12.2+11.8)}{(17.8+11.8)(12.2-11.8)}=2,12\,\text{с.}$$

## 2.4 Ділянка 3 (криволінійний рух невільної точки)

Матеріальна точка М вагою $P$ = 8 Н рухається під дією сили ваги по внутрішній поверхні гладенького циліндра радіуса $R$ = 12 м. У початковий момент часу кут $\varphi_0$ = 45° і швидкість точки була $V_{30}$ = $V_{2k}$ = 12,2 м/с. Визначити швидкість точки і нормальний тиск на поверхню циліндра в кінці ділянки, якщо кут $\theta$ = 60°.

**Розв'язання**. 1. Складаємо розрахункову схему (вибираємо натуральні осі так, як рекомендовано в п. 1, розд. 2. Приєднуємо натуральні осі до точки М, яка знаходиться в поточному положенні. Дотичну $\tau$ проводимо за рухом точки, нормаль $n$ - по радіусу (рис. 5)).

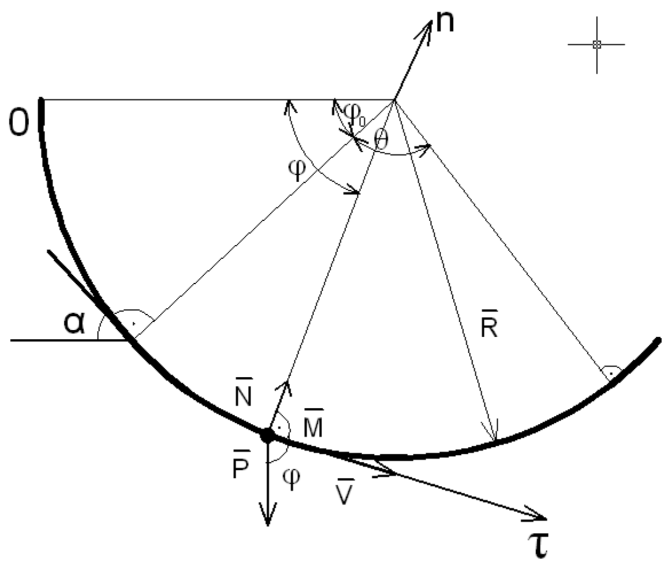



Рисунок 5

Якщо криволінійна ділянка є $i$-ю ділянкою профіля, то початковий кут визначається так: φ= 90° – α, де α – кут похилу попередньої ділянки. На точку діє сила $\vec{P}$ і нормальна реакція $\vec{N}$ гладенької поверхні.

2. Складаємо основне рівняння динаміки в векторній формі $m\vec{W} = \vec{P} + \vec{N}$
і проектуємо його на натуральні осі:

$$\begin{cases} m\dfrac{dV}{dt} = \sum F_k\tau = P\cos\phi; & (20) \\ m\dfrac{V^2}{R} = \sum F_{kn} = N - P\sin\phi. & (21) \end{cases}$$

Оскільки вихідне диференціальне рівняння (20) має три змінні ($V,\ \varphi,\ t$), перетворимо його. Для цього помножимо обидві його частини на $d\varphi$ і після ділення на $m$ здобудемо

$$dV\frac{d\phi}{dt} = g\cos\phi \cdot d\phi.$$

Ураховуючи, що $\frac{d\phi}{dt} = \omega = \frac{V}{R}$, дістаємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними.

3. Проінтегруємо здобуте рівняння:

$$\int V dV = Rg \int \cos\phi \cdot d\phi .$$

Після інтегрування маємо

$$\frac{V^2}{2} = Rg \sin\phi + C .$$

Сталу інтегрування $C$ знаходимо за допомогою початкових умов

$$t_0 = 0,\ \varphi = \varphi_0,\ V = V_0 :$$

$$\frac{V_0^2}{2} = Rg \sin\phi_0 + C ;\ C = \frac{V_0^2}{2} - Rg \sin\phi_0 .$$

4. Звідси

$$\frac{V^2}{2} = Rg \sin\phi + \frac{V_0^2}{2} - Rg \sin\phi_0 ,$$

а швидкість точки

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2Rg(\sin\phi - \sin\phi_0)} . \tag{22}$$

Швидкість її в кінці ділянки (при $\varphi_к = \varphi_0 + \theta = 45^0 + 60 = 105^0$)

$$V_k = \sqrt{V_0^2 + 2Rg[\sin(\phi_0 + \theta) - \sin\phi_0]} = $$
$$= \sqrt{12,2^2 + 2 \cdot 12 \cdot 9,81(0,966 - 0,707)} = 14,5 \text{ м/с.}$$

Нормальну реакцію $N$ визначимо з рівняння (21).

При $V = V_k$, $\varphi_к = \varphi_0 + \theta$ одержимо

$$N = \frac{mV_k^2}{gR} + P\sin(\phi_0 + \theta) = \frac{8 \cdot 14,5^2}{9,81 \cdot 12} + 8 \cdot 0,966 = 22\,H.$$

5. Щоб визначити закон руху точки по траєкторії, необхідно рівняння (22) зінтегрувати другий раз, враховуючи, що

$$V = \frac{ds}{dt}, \quad \phi = \frac{S}{R}.$$

Тоді після ділення змінних матимемо

$$\int \frac{ds}{\sqrt{V_0^2 + 2Rg(\sin\frac{S}{R} - \sin\phi_0)}} = \int dt$$

Інтеграл, який стоїть у лівій частині, в елементарних функціях не виражається і може бути приблизно знайдений одним із чисельних методів.

### 2.5 Ділянка 4 (криволінійний рух вільної точки)

Матеріальна точка вагою $P$ = 8 Н, кинуте з висоти $H$ = 10 м з початковою швидкістю $V_{40} = V_{3k}$ = 14,5 м/с під кутом $\gamma$ = 15° до горизонту, рухається під впливом сили тяжіння. Знайти рівняння траєкторії руху тіла, горизонтальну дальність польоту, час польоту і швидкість у кінці ділянки, а також максимальну висоту підйому точки.

Розв'язання. І. Складаємо розрахункову схему (вибираємо декартові осі тому що траєкторії в явному вигляді немає; початок координат вибираємо в початковій точці польоту; вектор початкової швидкості $\vec{V}_о$ напрямлений по дотичній до профіля попередньої ділянки (рис. 6)).

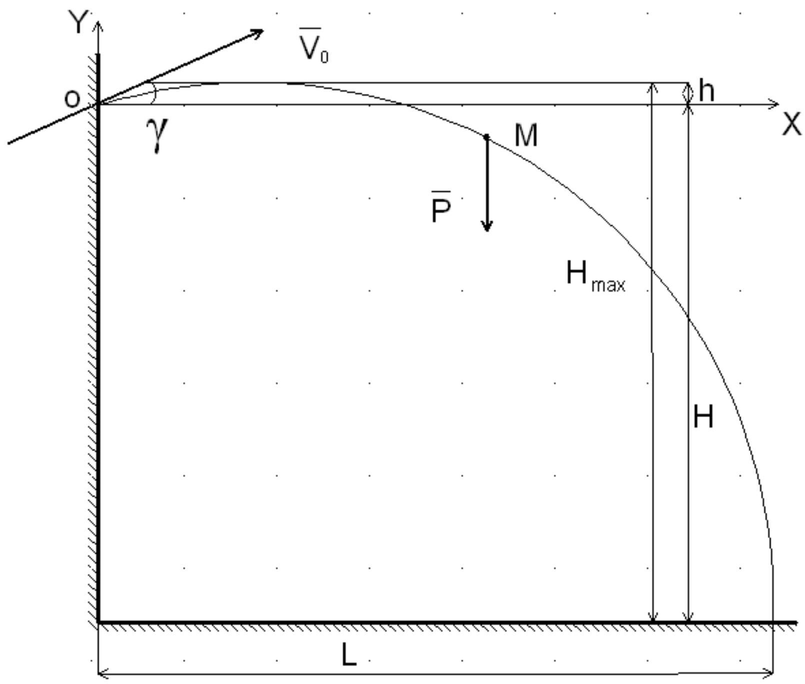



Рисунок 6

2. Складаємо диференціальне рівняння руху точки у векторній формі $m\vec{W} = \vec{P}$ і в проекціях на вибрані осі:

$$\begin{cases} m\dfrac{dV_x}{dt} = 0; \\ m\dfrac{dV_y}{dt} = -mg; \end{cases} \qquad \begin{cases} dV_x = 0; \\ dV_y = -gdt. \end{cases} \tag{23}$$

3. Інтегруючи систему рівнянь (23) двічі, дістаємо залежність швидкості точки від часу та параметричні рівняння руху:

$$\begin{cases} V_x = C_1; \\ V_y = gt + C_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \int dx = C_1 \int dt; \\ \int dy = -g\int tdt + C_2 \int dt; \end{cases} \qquad x = C_1 t + C_3;$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4. \tag{24}$$

4. Сталі інтегрування $C_1, C_2, C_3, C_4$ знаходимо, підставивши в систему рівнянь (24) початкові умови

$$\begin{cases} t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad V_{x0} = V_0 \cos\gamma; \\ y_0 = 0, \quad V_{y0} = V_0 \sin\gamma. \end{cases}$$

Здобудемо: $C_1 = V_0 \cos\gamma$; $C_2 = V_0 \sin\gamma$; $C_3 = C_4 = 0$.

5. Після підстановки $C_1$ і $C_2$ одержуємо формулу для визначення швидкості точки в проекціях на осі

$$\begin{cases} V_x = V_0 \cos\gamma; \\ V_y = V_0 \sin\gamma - g\,t\,. \end{cases} \tag{25}$$

Відповідно модуль швидкості

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}\,.$$

Параметричні рівняння руху:

$$x = V_0 \cos\gamma\, t; \tag{26}$$

$$y = V_o \sin\gamma\, t - \frac{gt^2}{2}. \tag{27}$$

6. Рівняння траєкторії дістанемо, виключивши час в рівнянь (26) і (27):

$$t = \frac{x}{V_o \cos\gamma};$$

$$y = V_o \sin\gamma \frac{x}{V_o \cos\gamma} - \frac{gx^2}{2V_o^2 \cos^2\gamma} = 0,268x - \frac{9,81 \cdot x^2}{2 \cdot 14,5^2 \cdot 0,965^2}; \tag{28}$$

$y = 0,268\,x – 0,025\,x^2$ – це рівняння параболи.

7. Час і дальність польоту знайдемо, підставивши в рівняння (26) і (27)

*x = L, y = - H, t = T:*

$$-H = V_0 \sin\gamma T - g\frac{T^2}{2}.$$

Звідси час руху

$$T_{1,2} = \frac{1}{g}[V_o \sin\gamma \pm \sqrt{V_0^2 \sin^2\gamma + 2gH}\,] =$$

$$= \frac{1}{9{,}81}[14.5 \cdot 0{,}259 \pm \sqrt{14{,}5^2 \cdot 0{,}259^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 10}]$$

$$T_1 = 1{,}86\ c;\ T_2 = -\ 1{,}1\ c.$$

Підставивши знайдене додатнє значення $T_1$ в рівняння (26), визначимо дальність польоту

$$x = L = V_0 \cos\gamma\ T_1 = 14{,}5 \cdot 0{,}966 \cdot 1{,}86 = 26{,}1 \text{ м.}$$

8. Швидкість точки в кінці польоту

$$V_{4k} = \sqrt{(14{,}5 \cdot 0{,}966)^2 + (14{,}5 \cdot 0{,}259 - 9{,}81 \cdot 1{,}86)^2} = 20{,}2 \text{ м/с.}$$

9. Визначаємо максимальну висоту *H* підйому точки .

В найвищому положенні точки $V_y = 0$. Підставляючи $V_y = 0$ в рівняння (25) визначаємо час найбільшого підйому точки

$$t_{екст} = \frac{V_0 \sin\gamma}{g} = \frac{14.5 \sin 150°}{9{,}81} = 0{,}382\ c,$$

а згідно з рівняння (27) висота її підйому дорівнює

$$h_{екст} = V_o \sin\gamma\ t_{ekct} - \frac{g t_{ekct}^2}{2} =$$

$$= 14{,}5 \sin 15° \cdot 0{,}382 - \frac{9{,}81 \cdot 0{,}382^2}{2} = 0{,}71\ м..$$

Тоді

$$H_{max} = H+h_{екст} = 10 +0,71 = 10,7 \text{ м}.$$

При цьому координата, яка відповідає найбільшому підйому точки згідно з рівнянням (26), буде:

$$X_{екстр} = V_o \cos \gamma t = 14,5\cos 15^{\circ} \cdot 0,382 = 5,35 \text{ м}.$$

Для перевірки скористаємось рівнянням траєкторії руху точки (28)

$$0 = 0,27 - 2 \cdot 0,025\, X_{екстр},$$

звідки

$$X_{екстр} = \frac{0,27}{0,05} = 5,4 \text{ м} \approx 5,35 \text{ м}.$$

## 2.6 Приклад побудови графіка швидкостей

Для побудови графіка швидкостей розглянемо залежності між координатами та швидкостями тіла на кожній ділянці.

Ділянка I

$$0 \le x \le l_1 ,\ (x_1 = \frac{x}{\cos\alpha}).$$

Для визначення швидкості в залежності від координати скористаємося виразом (7)

$$\frac{dV}{dt} = A .$$

Помножимо ліву і праву частини записаного рівняння на $dx_1$ і приймаючи до уваги, що $\frac{dx_1}{dt} = V$ , проінтегруємо $VdV = A\, dx_1$:

$$\frac{V^2}{2} = Ax_1 + C,$$

де $C$ стала інтегрування, яку визначаємо із початкових умов: $x_0 = 0;$ $V = V_0$.

Підставляючи початкові умови, одержимо $C = \frac{V_0^2}{2}$ і відповідно

$$V_1 = \sqrt{2Ax_1 + V_0^2}\ .$$

Визначаємо швидкість:

при $x = 3\,м;\ \ x_1 = \frac{x}{\cos\alpha}$:

$$V_1' = \sqrt{2 \cdot 7.49 \frac{3}{\cos 55^o} + 7^2} = 11{,}3 \text{ м/с};$$

при $x = 6\,м;\qquad x_1 = \frac{x}{\cos\alpha}$

$$V'' = \sqrt{2 \cdot 7.49 \frac{6}{\cos 55^o} + 7^2} = 14{,}3 \text{ м/с};$$

при $x = l_1 = 11\ м$ ; $x_2 = \frac{l_1}{\cos\alpha}$

$$V_{1k} = \sqrt{2 \cdot 7.49 \frac{11}{\cos 55^o} + 7^2} = 18{,}4 \text{ м/с}.$$

<u>Ділянка II</u> $l_1 \le x \le (l_1 + l_2)$, $(x_2 = \frac{x - l_1}{\cos\beta})$.

Для визначення швидкості в залежності від координати маємо рівняння (19):

$$V_2 = \sqrt{a^2 + (V_{20} - a^2)e^{-2kx_2}}$$

При $x = l_1 + \frac{l_2}{4} = 12 + \frac{20}{4} = 17\,м; x_2 = \frac{l_2}{4\cos\beta}$

$$V_2' = \sqrt{138{,}7 + (17{,}8^2 - 138{,}7)\cdot e^{-2\cdot 0{,}05\frac{20}{4\cdot 0{,}707}}} = 15{,}6\ м/с;$$

при $x = l_1 + \frac{l_2}{2} = 12 + \frac{20}{2} = 22\,м;\ \ x_2 = \frac{l_2}{\cos\beta}$

$$V_2'' = \sqrt{138{,}7 + (17{,}8^2 - 138{,}7)\cdot e^{-2\cdot 0{,}05\frac{20}{2\cdot 0{,}707}}} = 13{,}5\ м/с;$$

при $x = l_1 + l_2 = 12 + 20 = 32\ м;\ \ x_2 = \frac{l_2}{\cos\beta}$

$$V_{2k} = \sqrt{138{,}7 + (17{,}8^2 - 138{,}7)\cdot e^{-2\cdot 0{,}05\frac{20}{0{,}707}}} = 12{,}2\ м/с.$$

Ділянка III $\quad (90^o - \beta) \le \varphi \le (90^o - \beta + \theta)$

Швидкість визначаємо за формулою (22)

$$V_3 = \sqrt{V_{30}^2 + 2Rg(\sin\phi - \sin\varphi_0)}\,.$$

При $\phi = \phi_0 + \frac{\theta}{4} = 45° + \frac{60°}{4} = 60°$ одержимо

$$V_3' = \sqrt{12{,}2^2 + 2\cdot 12\cdot 9{,}81(\sin 60° - \sin 15°)} = 12{,}4\ м/с;$$

при $\phi = \phi_0 + \frac{\theta}{2} = 45° + \frac{60°}{4} = 75°$

$$V_3'' = \sqrt{12{,}2^2 + 2\cdot 12\cdot 9{,}81(\sin 75° - \sin 15°)} = 14{,}5\ м/с;$$

при $\phi = \phi_o + \theta$

$$V_{зк} = 14{,}5\ м/с;$$

при $\varphi = 90^o$

$$V_3^{'''} = \sqrt{12,2^2 + 2\cdot 12\cdot 9,81(\sin 90^o - \sin 15^o)} = 14,8\ м/с.$$

Ділянка IV $\quad [l_1 + l_2 + l_3(\varphi)] \le x \le [l_1 + l_2 + l_3(\varphi) + l_4]$

Швидкість в залежності від координат визначаємо за формулами (25) та (26)

$x_4 = V_o \cos \gamma t;$ $\qquad V_4 = \sqrt{V_{4x}^2 + V_{4y}^2};$

$V_{4x} = V_{40} \cos \gamma;$ $\qquad V_{4y} = V_{40} \sin \gamma - gt;$

$T = \dfrac{x}{V_o \cos\gamma}.$

При $x = l_1 + l_2 + l_3(\phi) + \dfrac{l_4}{4} = 12 + 20 + 12 + \dfrac{26,1}{4} = 50,5\ м$

$$t = \frac{26.1}{4\cdot 14,5\cos 15^o} = 0,466\,с,$$

$$V_4^{'} = \sqrt{(14,5\cos 15^o)^2 + (14,5\sin 15^0 - 9,81\cdot 0,466)^2} = 14\ м/с;$$

при $x = l_1 + l_2 + l_3(\phi) + \dfrac{l_4}{2} = 57,\ 05\ м$

$$t = \frac{26.1}{2\cdot 14,5\cos 15^o} = 0,932\,\text{с},$$

$$V^{''} = \sqrt{(14,5\cos 15^o)^2 + (14,5\sin 15^0 - 9,81\cdot 0,932)^2} = 15\ м/с;$$

при $x_k = l_1 + l_2 + l_3(\phi) + l_4 = 70,1\ м$

$$t = \frac{26.1}{14,5\cos 15^o} = 1,86\,\text{с},$$

$$V'' = \sqrt{(14,5\cos 15^o)^2 + (14,5\sin 15^0 - 9,81 \cdot 1,86 \cdot 6)^2} = 20,2\ м/с.$$

По отриманим значенням будуємо графік швидкості руху точки по ділянках профілю залежно від координат.

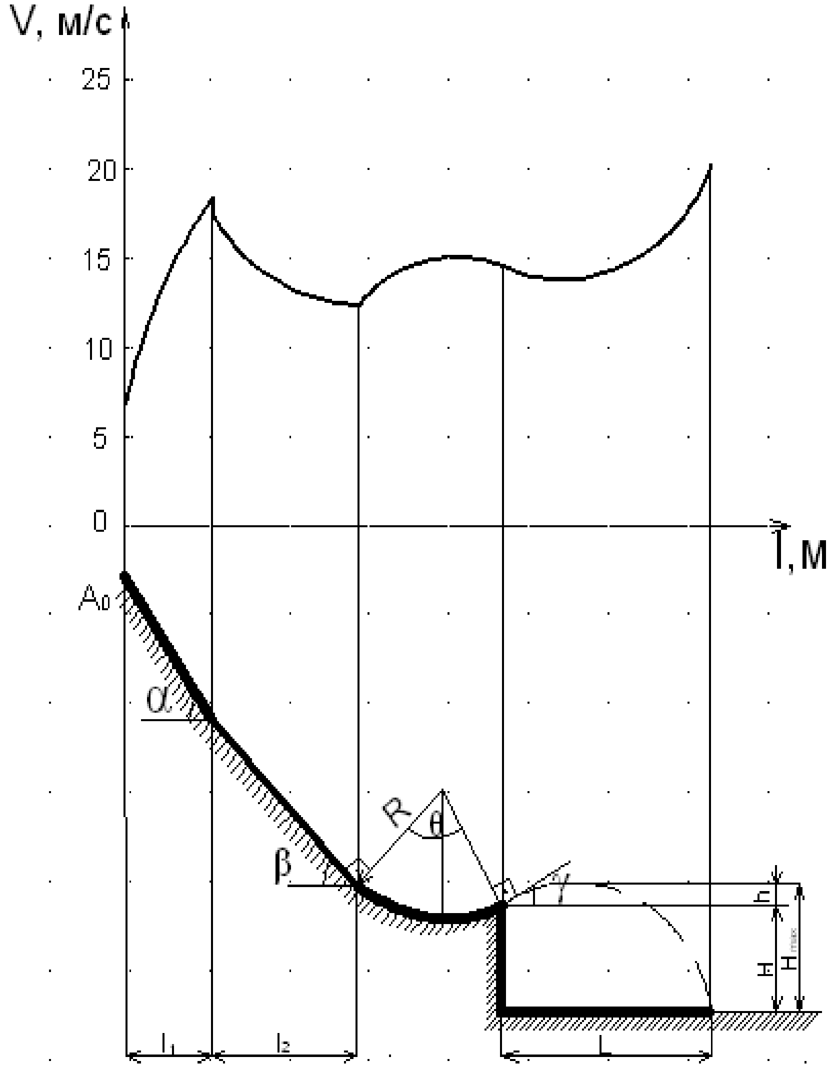



Рисунок 7

# 3 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Сформулювати основні закони механіки (закони Ньютона).
2. Яку систему відліку називають інерціальною ?
3. Дайте визначення маси, матеріальної точки, сили.
4. У чому відмінність натуральної системи осей від декартової?
5. Запишіть диференціальне рівняння руху матеріальної точки в декартових координатах; у натуральному вигляді.
6. Сформулюйте дві основні задачі динаміки матеріальної точки. З допомогою яких математичних операцій вони розв'язуються?
7. Скільки сталих інтегрування входить у загальний розв'язок диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, якщо вона рухається:

а) уздовж прямої;

б) на площині;

в) у просторі?

8. Як визначаються сталі інтегрування?
9. Що таке початкові умови руху матеріальної точки?
10. Які особливості руху матеріальної точки під дією:

а) сталих сил;

б) сил, які залежать від часу;

в) сил, які залежать від швидкості точки?

11. Вкажіть положення точки на кожній ділянці профіля, на якому вона має найбільшу швидкість руху.
12. Як визначається дальність польоту точки на ділянці вільного польоту?

# 4 ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Матеріальна точка вагою $P$ рухається з точки $A_о$ з початковою швидкістю $V_0$ по ділянках вказаного профілю. На криволінійній ділянці радіуса $R$ і при вільному польоті точка не зазнає опору. На ділянці $l_1$ діє сила тертя з коефіцієнтом $f$, на ділянці $l_2$ – сила опору $F_0 = kmV^2$, пропорційна квадрату швидкості. На кожній ділянці визначити:

1) швидкість руху залежно від часу і координат, а на криволінійній ділянці – залежно від кута;
2) кінематичні рівняння руху;
3) швидкість на кінці ділянки;
4) час руху (за винятком криволінійної ділянки);
5) нормальний тиск N у точках ділянки.

При дослідженні вільного прольоту додатково визначити:

1) горизонтальну дальність польоту;
2) найбільшу висоту підйому;
3) рівняння траєкторії;

Після розв'язку завдання побудувати траєкторію точки і графік зміни швидкості залежно від координати $X$ горизонтальної осі, проведеної з точки $A_0$ праворуч.

Схеми ділянок профілю взяти із рис. 8 - 10, а числові дані із таблиці

Таблиця

| Варіанти | $P$, Н | $Vo$, м/с | $f$ | $k$, 1/м | $l_1$, м | $R$, м | $l_2$, м | $H$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 3 | 0,1 | 0,05 | 20 | 8 | 14 | 20 |
| 2 | 7 | 4 | 0,25 | 0,12 | 15 | 8 | 5 | 18 |
| 3 | 3 | 2 | 0,20 | 0,10 | 20 | 12 | 10 | 16 |
| 4 | 5 | 5 | 0,15 | 0,08 | 15 | 14 | 10 | 20 |
| 5 | 2 | 0 | 0,35 | 0,10 | 10 | 10 | 4 | 14 |
| 6 | 4 | 10 | 0,3 | 0,16 | 20 | 10 | 8 | 20 |
| 7 | 6 | 2 | 0,2 | 0,14 | 30 | 10 | 15 | 15 |
| 8 | 8 | 5 | 0,25 | 0,06 | 2 | 15 | 12 | 10 |
| 9 | 10 | 4 | 0,1 | 0,02 | 20 | 8 | 12 | 15 |
| 10 | 12 | 5 | 0,15 | 0,08 | 18 | 15 | 10 | 18 |

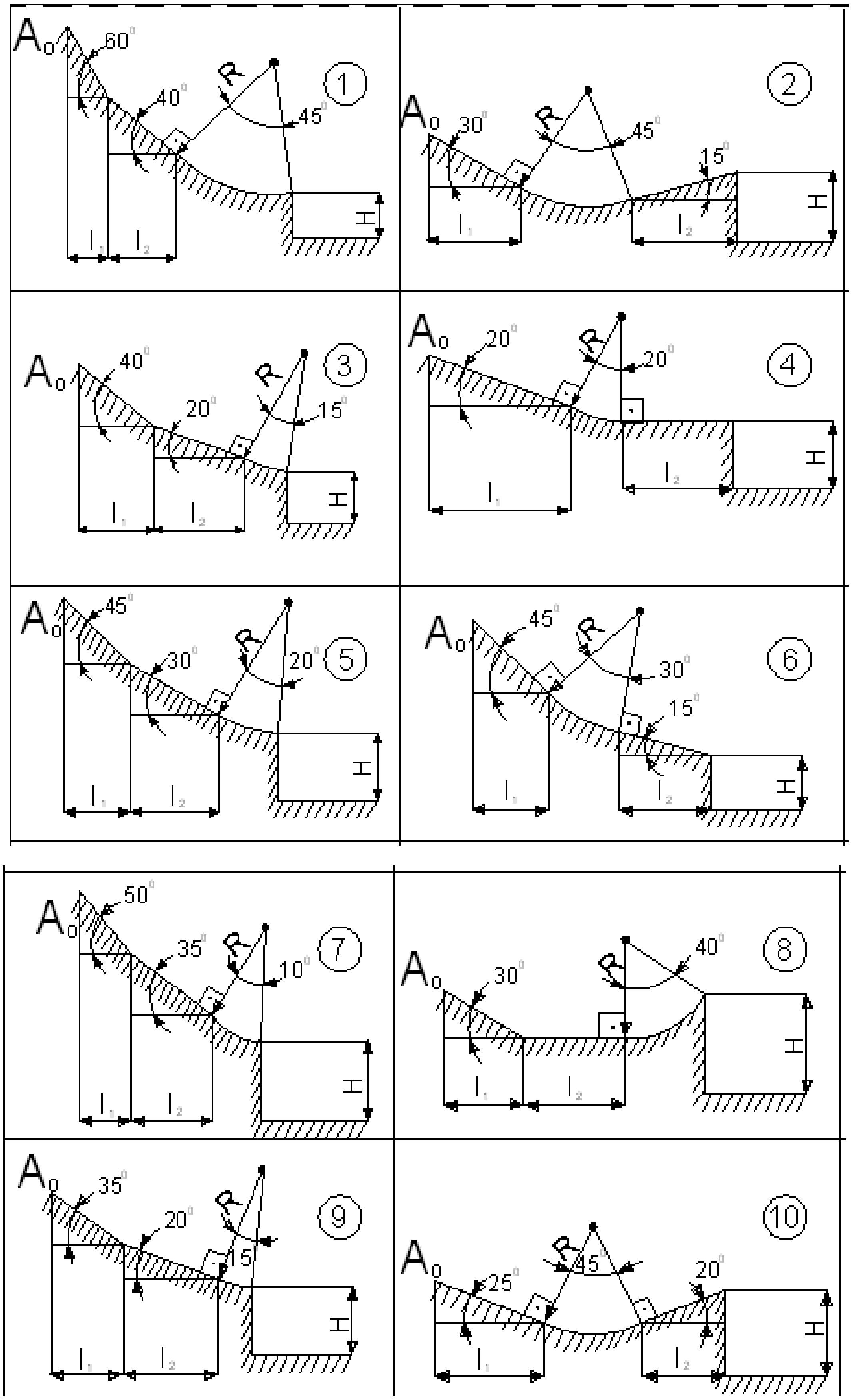
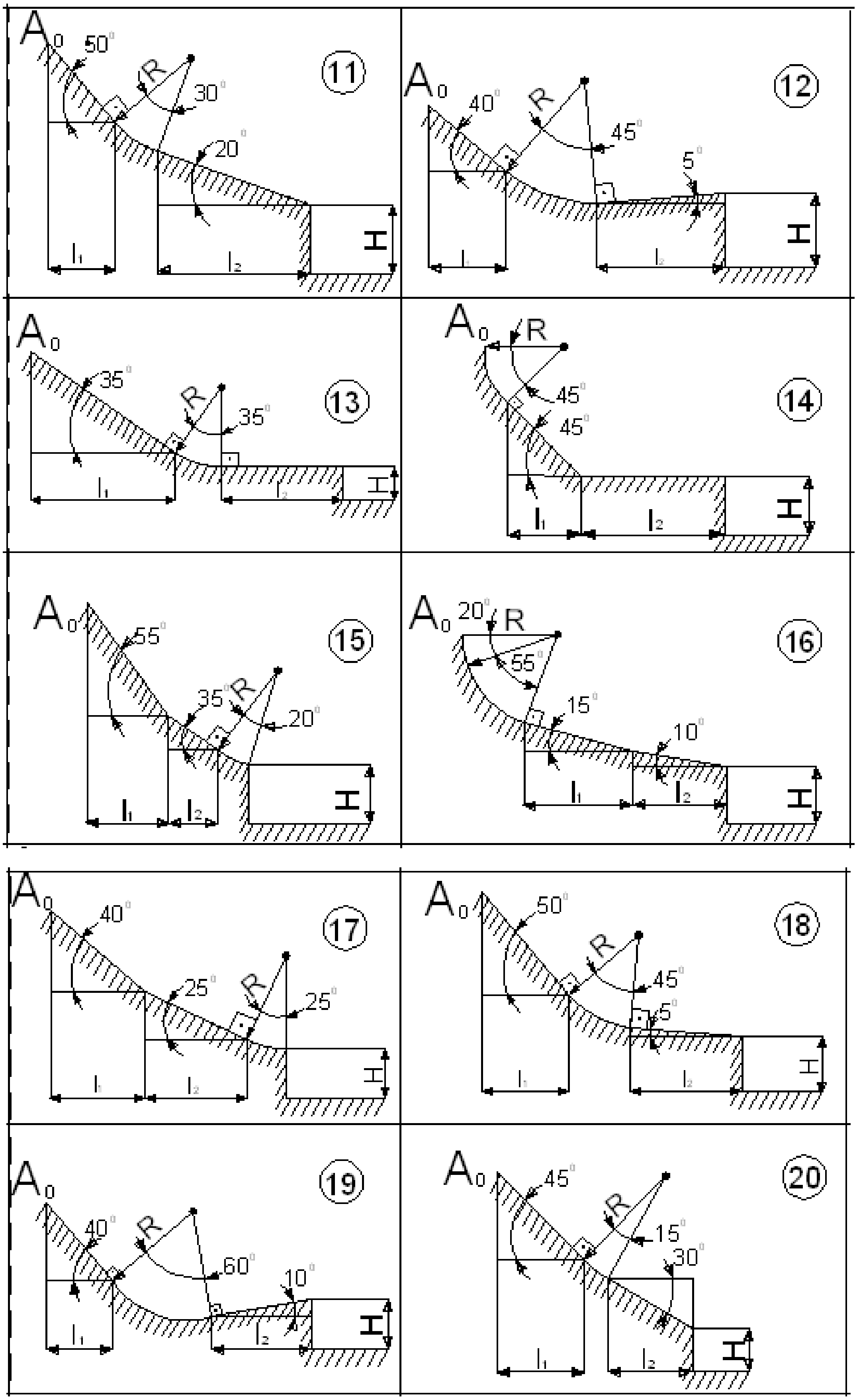

A0
60°
40°
R
45°
1
H
l1
l2
A0
30°
R
45°
15°
2
H
l1
l2
A0
40°
20°
R
15°
3
H
l1
l2
A0
20°
R
20°
4
H
l1
l2
A0
45°
30°
R
20°
5
H
l1
l2
A0
45°
R
30°
15°
6
H
l1
l2
A0
50°
35°
R
10°
7
H
l1
l2
A0
30°
R
40°
8
H
l1
l2
A0
35°
20°
R
15
9
H
l1
l2
A0
25°
R
45°
20°
10
H
l1
l2

Рисунок 8



11
A0
50°
R
30°
20°
l1
l2
H
12
A0
40°
R
45°
5°
l1
l2
H
13
A0
35°
R
35°
l1
l2
H
14
A0
R
45°
45°
l1
l2
H
15
A0
55°
35°
R
20°
l1
l2
H
16
A0
20°
R
55°
15°
10°
l1
l2
H
17
A0
40°
25°
R
25°
l1
l2
H
18
A0
50°
R
45°
5°
l1
l2
H
19
A0
40°
R
60°
10°
l1
l2
H
20
A0
45°
R
15°
30°
l1
l2
H


Рисунок 9

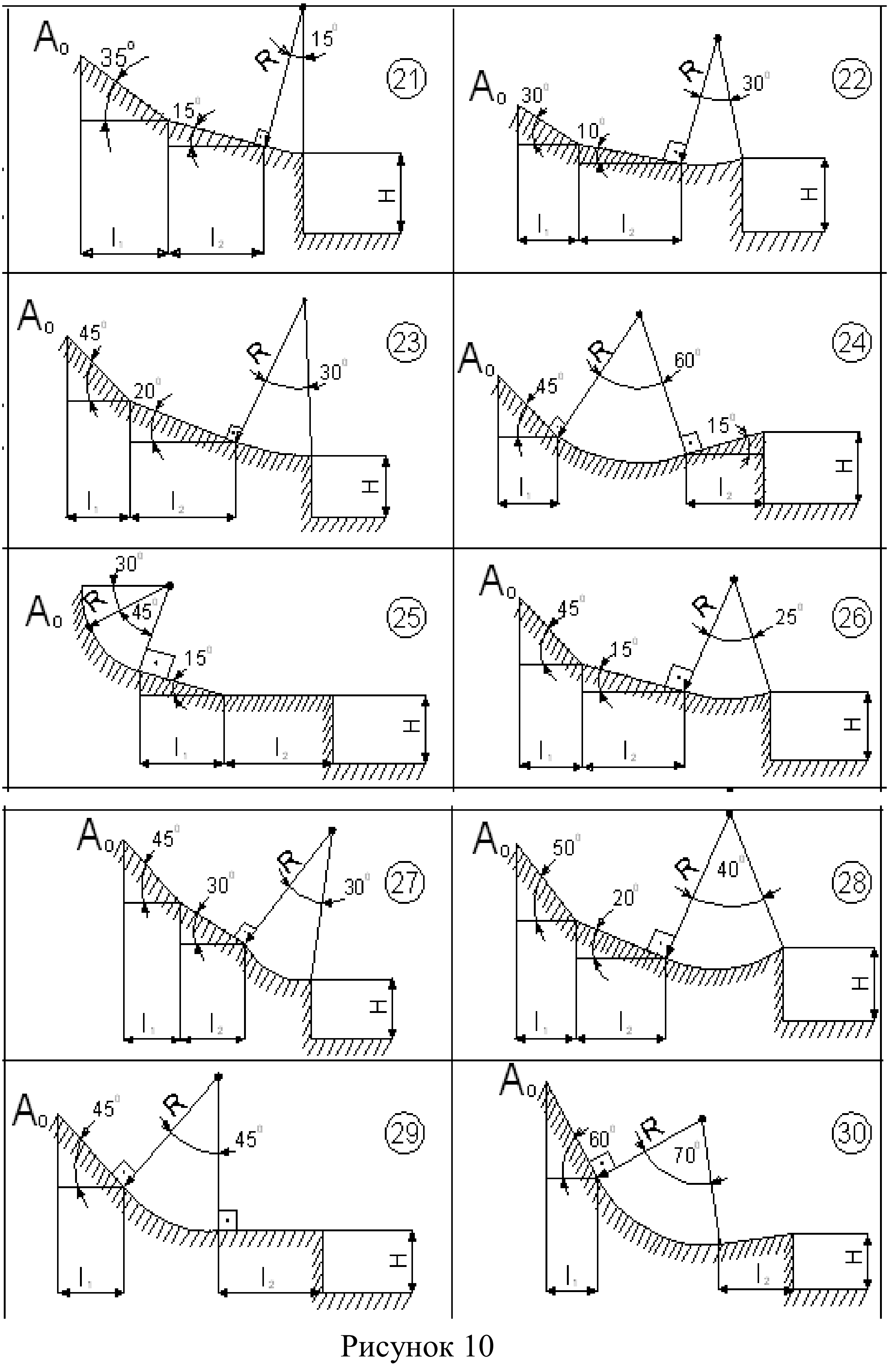

21
A0
35°
15°
15°
R
H
l1
l2
22
A0
30°
10°
30°
R
H
l1
l2
23
A0
45°
20°
30°
R
H
l1
l2
24
A0
45°
60°
15°
R
H
l1
l2
25
A0
30°
45°
15°
R
H
l1
l2
26
A0
45°
15°
25°
R
H
l1
l2
27
A0
45°
30°
30°
R
H
l1
l2
28
A0
50°
20°
40°
R
H
l1
l2
29
A0
45°
45°
R
H
l1
l2
30
A0
60°
70°
R
H
l1
l2

Рисунок 10

# 5 СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Романенко, Л.Г. Теоретична механіка: Навч. посіб. для студ. ВУЗів / Л. Г. Романенко, В. Г. Солодов. 2-е вид. Х.: ХДАДТУ, 2002. 270 с.

2. Солодов В. Г., Романенко Л.Г. Теоретична механіка : Навч. посіб. для студ. вузів, ; Харк. нац. автомоб.-дор. ун-т. Х., 2014. 270 с.

3. Солодов В. Г., Авершин А.Г., Стародубцев Ю.В., Хандримайлов А.А., Шипенко О.Н. Теоретична механіка: Теорія і задачі. Навч. посіб. для студ. вузів. Х.: ХНАДУ, 2010. 214 с.

4. Міщенко І.В., Воропай О.В., Красніков С.В. Теоретична механіка. Частина І. Статика. Кінематика: навчальний посібник. Х.: ФОП Бровін О.В. 2025. 158 с. ISBN 978-617-8238-95-7

5. Міщенко І.В., Воропай О.В., Красніков С.В. Теоретична механіка. Частина ІІ. Динаміка: навчальний посібник. Х.: ФОП Бровін О.В. 2025. 154 с. ISBN 978-617-8238-94-0

6. Розв'язання розрахунково-графічних завдань з теоретичної механіки : Навч. посіб. / О. М. Шипенко, А. Г. Авершин, І. П. Бойчук, Ю. В. Стародубцев, В. Г. Солодов; Харк. нац. автомоб.-дор. ун-т. Х., 2005. - 192 с.

7. Воропай О. В., Шарапата А. С. Технічна механіка: Конспект лекцій. Харків : ХНАДУ, 2022. 124 с.

8. Воропай О. В., Шарапата А. С., Єгоров П. А. Методичні вказівки до РГР, СРС і практичних занять для студентів денної та заочної форм навчання з дисципліни «Технічна механіка» з спеціальності 275.03 Транспортні технології (на автомобільному транспорті). Харьков : ХНАДУ, 2022. 64 с.

9. Міщенко І.В. Теоретична механіка: конспект лекцій. Х.: ХНАДУ, 2023. 207 с.

10. Міщенко І.В. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика». Х.: ХНАДУ, 2024. 82 с.

11. Перегон В. А., Воропай О. В., Коряк О. О., Поваляєв С. І. Синтез механізмів і динаміка машин: навчальний посібник. Х. : ФОП Бровін О.В., 2023. 164 с. ISBN 978-617-8238-36-0

12. Перегон В. А., Воропай О. В., Коряк О.О., Єгоров П. А. Важільні механізми, передачі та зачеплення: навчальний посібник. Х. : ФОП Бровін О.В., 2025. 188 с. ISBN 978-617-8238-90-2

13. Авершин А. Г., Красніков С. В. Методичні вказівки з розрахунково-графічної роботи дисципліни «Теоретична механіка», розділ «Статика» для студентів всіх спеціальностей. Харків: ХНАДУ, 2020. 86 с.

14. Voropay A. V., Karpenko V. A., Koriak O. O., Povaliaiev S. I., Sharapata A. S. Theory of mechanisms and machines: Lecture notes Kharkiv National Automobile and Highway University. Kharkiv : KhNAHU, 2023. 95 p.

15. Красніков С.В. Theoretical mechanics: навчальний посібник. Kharkiv: ХНАДУ, 2024. 104 p.

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять за темою
«Динаміка матеріальної точки»
з дисципліни «Теоретична механіка»
для студентів всіх спеціальностей

Укладач Красніков С.В.

Відповідальний за випуск *О.В. Воропай*

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка *Н.В. Ольховської*

**План 2025 р. Поз. 8**
Підписано до друку 25.09.2025 р. Формат 60×84 1/16.
Гарнітура Times New Roman Cyr.
Ум. друк. арк. 1,8. Обл.-вид. арк. 2,2.
Зам. № 58/25-В Наклад сайт.

ВИДАВНИЦТВО
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету
Видавництво ХНАДУ, 61002, Харків-МСП, вул. Ярослава Мудрого, 25.

Тел. /факс: (057)700-38-64; 707-37-03,
e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції,
серія № ДК №897 від 17.04 2002 р.