

УДК 519.754.530.1

МОДЕЛИРОВАНИЕ СКОРОСТНЫХ ТРАСС С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИОНАЛА КЛАССА КРИВЫХ SCK

А.А. Плехова, доцент, к.т.н., О.Г. Холева, ассистент, ХНАДУ

Аннотация. Представлены условия оптимальности и метод решения задачи о построении в неодносвязной многоугольной области кратчайшей гладкой трассы, составленной из дуг окружностей, отрезков и сопрягающих их клотоид, что может быть применено для скоростных трасс.

Ключевые слова: неодносвязная область, скоростные трассы, клотоида, кривые сложной конфигурации.

МОДЕЛЮВАННЯ ШВИДКІСНИХ ТРАС ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІОНАЛА КЛАСУ КРИВИХ SCK

Г.А. Плехова, доцент, к.т.н., О.Г. Холева, асистент, ХНАДУ

Анотація. Представлено умови оптимальності і метод розв'язку задачі про побудову в неоднорозв'язній багатокутній області найкоротшої рівної траси, складеної з дуг кіл, відрізків і клотоїд, що їх сполучають, що може бути застосовано для швидкісних трас.

Ключові слова: неоднорозв'язна область, швидкісні траси, клотоїда, криві складної конфігурації.

MODELLING OF HIGH-SPEED LINES WITH USE OF FUNCTIONAL OF SCK CURVES CLASS

A. Plehova, Associate Professor, Candidate of Technical Science,
O. Kholeva, assistant, KhNAHU

Abstract. The conditions of optimality and the method of problem solving concerning the construction in not-coherent polygonal area of the shortest smooth line made of arches of circles, pieces and interfacing them clothoids that can be applied at high-speed lines construction are presented.

Key words: multiconnected area, high-speed lines, clothoid, curves of complex configuration.

Введение

В настоящий момент Министерство транспорта Украины особое внимание уделяет созданию скоростных дорог первой категории, которые свяжут Европу и Азию. Кроме того, они помогут увеличить грузооборот внутри страны, что приведет к увеличению валового дохода Украины. Задача проектирования скоростных дорог минимальной длины с безопасностью движения по ним является актуальной задачей.

Анализ публикаций

Проектированию скоростных дорог посвящены многие научные работы отечественных и зарубежных ученых. Плехова А.А. и Смелякова С.В. одними из последних в своих работах [1, 2] рассматривали вопросы проектирования скоростных трасс минимальной длины с учетом комфорта и безопасности движения для водителей. В отличие от моделей трасс в перечисленных выше работах, где трассы состоят из прямолинейных участков и связывающих их кривых типа параболы и окружности больших радиусов, в дан-

ной работе в качестве связывающих кривых рассмотрены кривые типа клотоид.

Цель и постановка задачи

Моделирование трассы, состоящей из прямолинейных участков и участков клотоид.

Методика исследования

Постановка базовой задачи на классе SCK . Рассмотрим класс линий SCK , составленных из отрезков (S_i), фрагментов клотоид (K_i) и дуг окружностей (C_i), вида

$$P = S_1 K_1 C_1 K_1' S_2 K_2 C_2 R_2' S_3 K \\ K K_n C_n K_n' S_{n+1}, \quad n \geq 1 \quad (1)$$

которые в общих точках удовлетворяют условию трансверсальности. Радиусы этих окружностей r и параметры α считаем фиксированными, причем фрагменты клотоид K_i , K_i' , примыкающие к одной дуге C_i конгруэнтны и рассматриваются на интервале от точки с нулевой кривизной (в точке сопряжения с отрезком) до точки с требуемым радиусом кривизны. Угол поворота клотоиды на этом интервале не превышает $\pi/2$.

Пусть $P_{\tau, SCK}[A, B]$ – множество линий класса SCK , которые лежат в классе эквивалентности путей $[l]$, представленном ломаной минимальной длины l , а $L(p)$ – длина пути p .

Базовая задача SCK . Для данной ломаной $l=ABC$ найти

$$p = \arg \min_{p \in P_{\tau, SCK}[A, B]} L(p). \quad (2)$$

Поскольку ломаная l – кратчайшая в $[l]$, из [1] следует, что решение задачи (2), если существует, содержит минимум один ($n=1$) фрагмент вида (1). Обобщение этой задачи на случай многофрагментного ($n>1$) пути вида (1) назовем стандартной задачей на классе SCK_l .

Рассмотрим клотоиду, заданную натуральным уравнением

$$\rho = \frac{a}{s}, \quad (3)$$

где α – параметр (масштабный множитель); s – длина дуги; ρ – радиус кривизны.

Кривая расположена на плоскости Zxy традиционным образом, т.е. так, что клотоида касается оси абсцисс в начале координат Z , где ее радиус кривизны равен бесконечности. Пусть ее фрагмент – дуга ZM , расположена в I квадранте и касается в точке M окружности O радиуса r . В этом случае ее параметрическое уравнение имеет вид

$$x = \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2a}\right) ds, \quad y = \int_0^s \sin\left(\frac{s^2}{2a}\right) ds. \quad (4)$$

Найдем координаты центра окружности O и точки M . Поскольку угол поворота $\Delta\alpha$ кривой (3) на дуге ZM не превышает $\pi/2$, точка M лежит на дуге с угловой мерой $\pi/2$ относительно точки D' , где OD – перпендикуляр к оси абсцисс. По определению кривизны k дуги имеем

$$k = \frac{d\alpha}{ds}, \quad (5)$$

где α – угол касательной к оси абсцисс. Используя (3), получим $s/\alpha = d\alpha/ds$, а значит, угол поворота клотоиды на фрагменте дуги ZM длины $s = a/r$ составит

$$\Delta\alpha = \frac{a}{2r^2}. \quad (6)$$

С учетом (4) координаты точки M равны

$$x_M = \int_0^{s_r} \cos\left(\frac{s^2}{2a}\right) ds, \\ y_M = \int_0^{s_r} \sin\left(\frac{s^2}{2a}\right) ds, \quad s_r = \frac{a}{r}. \quad (7)$$

Тогда получаем координаты точки O

$$\begin{cases} x_o = x_M - r \sin(\Delta\alpha); \\ y_o = y_M + r \cos(\Delta\alpha). \end{cases} \quad (8)$$

Через точку O проведем окружность радиуса $R = y_o$.

$$R = \int_0^{a/r} \sin\left(\frac{s^2}{2a}\right) ds + r \cos\left(\frac{a}{2r^2}\right), \quad (9)$$

а точку ее касания с осью абсцисс обозначим D .

Пусть A – произвольная точка на оси абсцисс, лежащая левее точки Z , а C' – произвольная точка на окружности O радиуса R , полярный угол которой γ_A относительно луча OD удовлетворяет условию $\Delta\alpha \leq \gamma_A \leq \pi/2$. Тогда по построению линия $p = AD \cup \text{arc}DC' \in SC$ однозначно определяет линию $q = AZ \cup \text{arc}ZM \cup \text{arc}MC \in SCK$; операцию перехода от p к q назовем сглаживанием (линии класса SC) клотоидой.

Решение базовой задачи. Решение задачи (2) построим, опираясь на решение аналогичной задачи класса SC [1].

Лемма 1. Если в базовой задаче SC точка C расположена внутри круга радиуса R на расстоянии $r \leq R$ от центра, то условия связи и оптимальности примут вид

$$R - r \sin(x - \alpha) = a \sin \alpha, \quad (10)$$

$$a \sin \alpha = b \sin \beta, \quad (11)$$

$$2x = \alpha + \delta - \beta, \quad (12)$$

где стороны и углы определены относительно точек A , B и C . В этом случае базовую задачу SC обозначим через SC_{rR} , а ее решение – p_{*rR} .

Теорема 1. Если решение q_* базовой задачи (2) для радиуса r существует, оно задается (нормальным или сингулярным) решением p_{*rR} оптимизационной базовой задачи SC относительно параметров A , B , α , β , ξ для радиусов r и R вида (9), определяемым условиями связи и оптимальности (10)–(12), к которым применена процедура сглаживания клотоидой. При этом разность длин кривых p_{*rR} и q_* равна $\Delta L = 2\xi + (A + B + \alpha + \beta)(R - r)$, т.е. константе, а положение точек Z и M определяется относительно точки касания D и луча OD соответственно отрезком длины x_o из (8) и углом $\Delta\alpha$ – из (6).

Трудоемкость получения решения задачи на классе SCK по решению p_{*rR} задачи на классе SC требует порядка 30–40 операций. При этом существенно важно, что при решении

задачи (2) для общего случая (1) эти действия следует выполнять только раз.

Приближенный метод решения базовой задачи SCK в некоторых случаях требует строить или модифицировать решение, полученное на классе SC или SCK . С этой целью предлагается метод модификации пути $p \in SC$ клотоидой, допускающей естественную диалоговую реализацию, который позволяет сглаживать клотоидой любой требуемый фрагмент класса SC , где дуги окружностей имеют заданный радиус r .

Так, пусть D – точка касания прямой, проходящей через точку A , с окружностью O радиуса r , положение которой определяет оптимальное решение $p_* = AD \cup \text{arc}DCK$ базовой задачи SC для радиуса r . В этом случае линия минимальной длины в классе SCK , сопрягающая отрезок, идущий из точки A , и окружность O радиуса r имеет вид $q = AZ \cup \text{arc}ZM \cup \text{arc}MCK$, причем замена фрагмента p на q приводит к увеличению длины на величину

$$\begin{aligned} \Delta L_\phi = & \left(AZ + \frac{a}{r} \right) - \\ & - \left[\frac{AZ + x_o}{\cos \phi} + r \cdot \text{tg} \phi + r \left(\frac{a}{2r^2} - \phi \right) \right] = \\ & = \left[AZ \frac{\cos \phi - 1}{\cos \phi} + r(\phi - \text{tg} \phi) \right] + \\ & + \left(\frac{a}{2r} - \frac{x_o}{\cos \phi} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

При этом, если p – оптимальное решение в классе SC , то и его модификация клотоидой, путь q , с уменьшением угла ϕ стремится к оптимальному решению в классе SCK , то и его модификация клотоидой, путь q , с уменьшением угла ϕ стремится к оптимальному решению в классе SCK , причем отклонение ΔL_ϕ вида (13) можно оценить значением, не превосходящим 1 % при углах ϕ , не превышающих 5° .

Решение задачи SC . В этом случае оптимальная трасса имеет вид

$$p_* = S_1 C_1 S_2 C_2 K C_n S_{n+1}, \quad n \geq 1. \quad (14)$$

Не теряя общности, положим, что решение вида (14) существует и все фрагменты $\Phi_i = S_i C_i S_{i+1}$, $S_i = E_{i-1} D_i$, $C_i = \text{arc} D_i E_i$ трассы p_* определяют нормальные решения. Для каждого из этих фрагментов остаются в силе условия связи и оптимальности [1] для точек, лежащих на касательных.

Алгоритм 1.

1. Пусть α – некоторый угол, задающий граничное условие задачи SC_α для точек A и C_1 . Он определяет окружность O_1 , положение которой удовлетворяет условиям связи и оптимальности, а также прямую $E_1 E_1'$ (для любой точки E_1' фрагмент $AD_1 \cup \text{arc} D_1 E_1 \cup E_1 E_1'$ является оптимальным решением SC_α для A и E_1'), исходя из соотношений

$$x_1 = \alpha + \arcsin\left(1 - \frac{a}{R} \sin \alpha\right), \quad (15)$$

$$\text{arc} C_1 E_1 = \pi / 2 + \alpha - x. \quad (16)$$

2. Зная точку E_1 и ориентацию касательной $E_1 E_1'$, определенную вектором, ортогональным к $\overline{O_1 E_1}$, получаем окружность O_2 , проходящую через C_2 и касающуюся $E_1 E_1'$, а по ней – подробно (1) – точку E_2 и соответствующую касательную $E_2 E_2'$, и т.д. до $E_2 E_2'$.

3. Полученную трассу обозначим

$$p_\alpha = AD_1 \cup \text{arc} D_1 E_1 \cup E_1 D_2 \cup \text{arc} D_2 E_2 \cup K \cup \text{arc} D_n E_n \cup E_n B_\alpha,$$

где B_α – точка на $E_n E_n'$, такая, что $E_n B_\alpha = E_n B$.

По построению этого алгоритма получаем, что при $B_\alpha = B$ трасса p_α доставляет решение задаче SC . Однако поскольку угол α выбран произвольно, угол $\beta(\alpha) = \angle B E_n E_n'$, в общем, не равен нулю, но является непрерывной функцией малой вариации относительно угла α (и наоборот, так как точки A , B входят в постановку задачи симметрично). Поэтому в некоторой окрестности

$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ начального угла α содержится решение поставленной задачи, т.е. такой угол $\alpha_* \in \bar{\alpha}$, что $\beta(\alpha) = 0$. Для построения этой окрестности достаточно варьировать угол α с шагом $(\Delta_\alpha \quad \alpha_{-1} = \alpha - \Delta_\alpha, \alpha_1 = \alpha + 2\Delta_\alpha, K)$, пока не получим пару прямых вида $E_n E_n'$ и $E_n E_n''$, содержащих между собой точку B . Если шаг Δ_α достаточно мал, при некотором $k = k_*$ получим $|\beta(\alpha_{k*})| < \Delta$, где Δ – требуемая точность решения. Если шаг Δ_α достаточно велик, на полученном интервале $\bar{\alpha}$ с требуемой точностью Δ решение задачи минимизации $\beta(\alpha)$, $\alpha \in \bar{\alpha}$ можно эффективно получить методом хорд. При этом трудоемкость решения задачи SC в общем случае можно оценить величиной

$$k_{SC} \approx 10^2 n / \Delta \text{ (операций)}. \quad (17)$$

Решение задачи $SC K_1$. Предложенный метод решения базовой задачи (2) на классе $SC K$ позволяет естественным образом сводить общую задачу $SC K_1$ поиска кратчайшей трассы вида (1) к модифицированной задаче SC_{rR} и процедуре сглаживания клотоидой. При этом расчет производится только один раз, а значит, трудоемкость применения алгоритма 1 составляет $k \approx (30 + 2k_\phi)n = 70 \cdot n$ (операций), а уточнение решения за счет варьирования начального угла α требует порядка

$$k^* \approx 200 \cdot n / \Delta \text{ операций}. \quad (18)$$

Решение задачи SCP . Пусть SCP – класс линий, состоящий из отрезков S_i , фрагментов кубических парабол P_i и дуг окружностей C_i вида

$$P = S_1 P_1 C_1 P_1' S_2 P_2 C_2 P_2' S_3 K \\ K P_n C_n P_n' S_{n+1}, \quad n \geq 1, \quad (19)$$

которые в общих точках удовлетворяют условию трансверсальности. Используя те же обозначения, что и выше, рассмотрим задачу сопряжения отрезков и дуг окружностей фрагментом параболы ZM , уравнение которой в системе координат Zx_u имеет вид

$$y = \frac{x^3}{6q}, \quad x \leq x_{\max} = \sqrt[4]{4q^2 / 5}, \quad (20)$$

где q – заданный параметр, а $x_{\max}$ – предел монотонного убывания радиуса кривизны.

Базовая задача *SCP* (при $n = 1$) для заданной ломаной ставится как (2) и с той же трудоемкостью (по порядку величины) решается подобно процедуре сглаживания клотоидой, как и задача в общем случае ($n > 1$). При этом длина фрагмента параболы q_* определяется величиной

$$l_p = \int_0^{x_r} \sqrt{1 + \frac{x^4}{4q^2}} dx, \quad x_r = \sqrt{2qt};$$

при
$$t = \frac{q}{2r}(1+t^2)^3. \quad (21)$$

а длина модифицируемой трассы класса *SC* (с кривой R и параметром $\Delta\alpha = \arctgt$) уменьшается на величину

$$\Delta L = 2(x_r - 2\sin \Delta\alpha - l_p + r \cdot \Delta\alpha) + (R - r)(A + B + \alpha + \beta).$$

Выводы

Разработан метод решения задачи о построении в неодносвязной многоугольной области кратчайшей гладкой трассы, составленной из дуг окружностей, отрезков и сопрягающих их клотоид, что может быть применено для скоростных трасс.

Литература

1. Плехова А.А. Метод оптимального решения базовой задачи о кратчайшем скруглении / А.А. Плехова // Информатика: сб. науч. тр. – К.: Наукова думка. – 1998. – Вып. 5. – С. 124–126.
2. Смеляков С.В. Математична модель деяких завдань оптимізації на шляхах С.В. Смеляков, Ю.М. Стоян // Известия АН СРСР. Технічна кібернетика. – 1981. – С. 180–188.

Рецензент: В.В. Филиппов, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 1 сентября 2011 г.