Поваляев С. И., к.т.н., доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Povalyaevsi@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Решение обратных задач для различных механических систем является актуальным направлением исследований в различных областях науки и в механике деформируемого твердого тела, в частности.

Рассмотренная обратная задача заключается в идентификации нестационарной нагрузки, воздействующей на цилиндрическую оболочку. Решение задачи достигается с помощью МКР [1, 2] – одного из наиболее известных численных методов, который используются при расчете различных элементов конструкций.

Рассмотрено воздействие на круговую шарнирно опертую цилиндрическую оболочку толщиной h, длиной l и радиусом срединной поверхности a нестационарной осесимметричной поверхностной нагрузки.

Реакция оболочки средней толщины типа теории Тимошенко на осесимметричную поперечную нагрузку описывается конечно-разностной системой уравнений [1-3]:

$$\begin{aligned}
&u_p^{m+1}=\frac{\Delta t^2}{\Delta\xi^2}\left(u_{p+1}^m-2u_p^m+u_{p-1}^m\right)+\frac{\nu l}{a}\frac{\Delta t^2}{2\Delta\xi}\left(w_{p+1}^m-w_{p-1}^m\right)+2u_p^m-u_p^{m-1};\\
&w_p^{m+1}=\frac{\bar{k}^2\Delta t^2}{\Delta\xi^2}\left(w_{p+1}^m-2w_p^m+w_{p-1}^m\right)+\frac{\bar{k}^2 l\Delta t^2}{2\Delta\xi}\left(\psi_{p+1}^m-\psi_{p-1}^m\right)-\frac{l^2\Delta t^2}{a^2}w_p^m-\frac{\nu l}{a}\frac{\Delta t^2}{2\Delta\xi}\left(u_{p+1}^m-u_{p-1}^m\right)+\\
&+2w_p^m-w_p^{m-1}-\frac{\left(1-\nu^2\right)l^2\Delta t^2}{Eh}q_p^m;\\
&\psi_p^{m+1}=\frac{\Delta t^2}{\Delta\xi^2}\left(\psi_{p+1}^m-2\psi_p^m+\psi_{p-1}^m\right)-\frac{12\bar{k}^2 l\Delta t^2}{2\Delta\xi h^2}\left(w_{p+1}^m-w_{p-1}^m\right)-\frac{12\bar{k}^2 l^2\Delta t^2}{h^2}\psi_p^m+2\psi_p^m-\psi_p^{m-1}.
\end{aligned}\tag{1}$$

где $m=0,1,\ldots,M$ – количество шагов по времени с интервалом Δt; $p=0,1,\ldots,P$ – количество шагов по координате с интервалом $\Delta\xi$; $\xi=x/l$; $\bar{k}^2=(1-\nu)k^2/2$; k – коэффициент сдвига; t – безразмерное время; u, w, ψ – перемещения серединной поверхности оболочки и угол поворота нормали к срединной поверхности, соответственно; ν, E – упругие постоянные материала; q – заданная нестационарная нагрузка.

Идентификация производилась по значениям прогиба (как функции времени) оболочки в K ее точках. На основании этих значений была определена приближенная функция, описывающая пространственно-временное распределение прогиба оболочки, в виде разложения в K – частичную сумму ряда Фурье вида:

$$w(\xi,t)=\sum_{k=1}^{K}a_k(t)\sin(k\pi\xi),\tag{2}$$

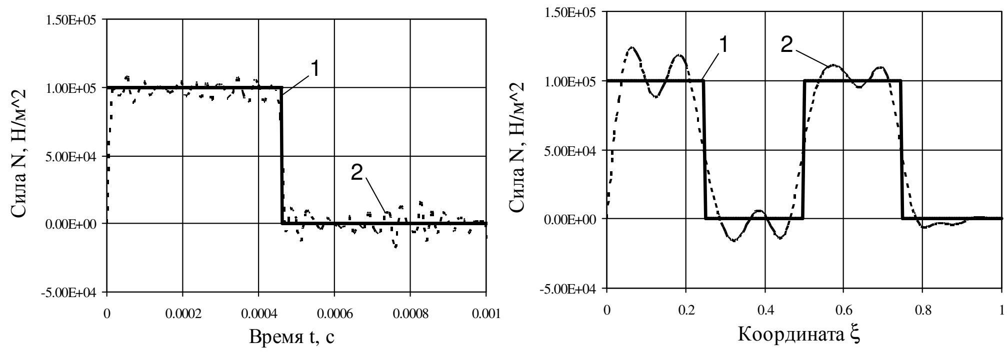
где $a_k(t)$ – неизвестные коэффициенты разложения.

Для получения решения задачи идентификации нестационарной равномерно распределенной нагрузки воспользуемся выражением:

$$q_p^{m+1} = \frac{Eh}{\left(1-\nu^2\right) l^2 \Delta t^2}\left[\frac{\bar{k}^2 l \Delta t^2}{2\Delta\xi}\left(\psi_{p1+1}^{m+1} - \psi_{p1-1}^{m+1}\right) + \frac{\bar{k}^2 \Delta t^2}{\Delta\xi^2}\left(w_{p1+1}^{m+1} - 2w_{p1}^{m+1} + w_{p1-1}^{m+1}\right) - \frac{l^2 \Delta t^2}{a^2} w_{p1}^{m+1} - \right.$$
$$\left. - \frac{\nu l}{a}\frac{\Delta t^2}{2\Delta\xi}\left(u_{p1+1}^{m+1} - u_{p1-1}^{m+1}\right) + 2w_{p1}^{m+1} - w_{p1}^{m} - w_{p1}^{m+2}\right]. \qquad (3)$$

При численных расчетах была рассмотрена стальная цилиндрическая оболочка, имеющая следующие параметры: длина l=1.5 м, радиус серединной поверхности a=0.3 м, толщина h=0.043 м, модуль Юнга E=2.1·10^{11} Па, коэффициент Пуассона ν=0.3, коэффициент сдвига k=0.833.

Идентификация нагрузки производилась по прогибу, полученному в результате решения прямой задачи. Точки регистрации прогиба ξ=0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95. Результаты идентификации пространственно-временного распределения искомой нагрузки представлены на рис. 1. На рисунке приведены: 1 – внешняя нагрузка, действующая на оболочку; 2 – идентифицированная нагрузка (рис. 1, а – как функции времени, рис. 1, б – как функции координаты).



а) б)

Рис. 1 – Результаты идентификации

Следует отметить, что приведенные результаты свидетельствует о том, что применение численных методов (МКР, в частности) при решении обратных задач механики деформируемого твердого тела позволяет строить эффективные алгоритмы решения определенного класса обратных задач.

Литература

1. Рихтмаер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. – М., изд.-во иностранной литературы, 1960. – 262 с.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. 3-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит., 1989. - 616 с.
3. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНИТИ, 1973. – 272 с.