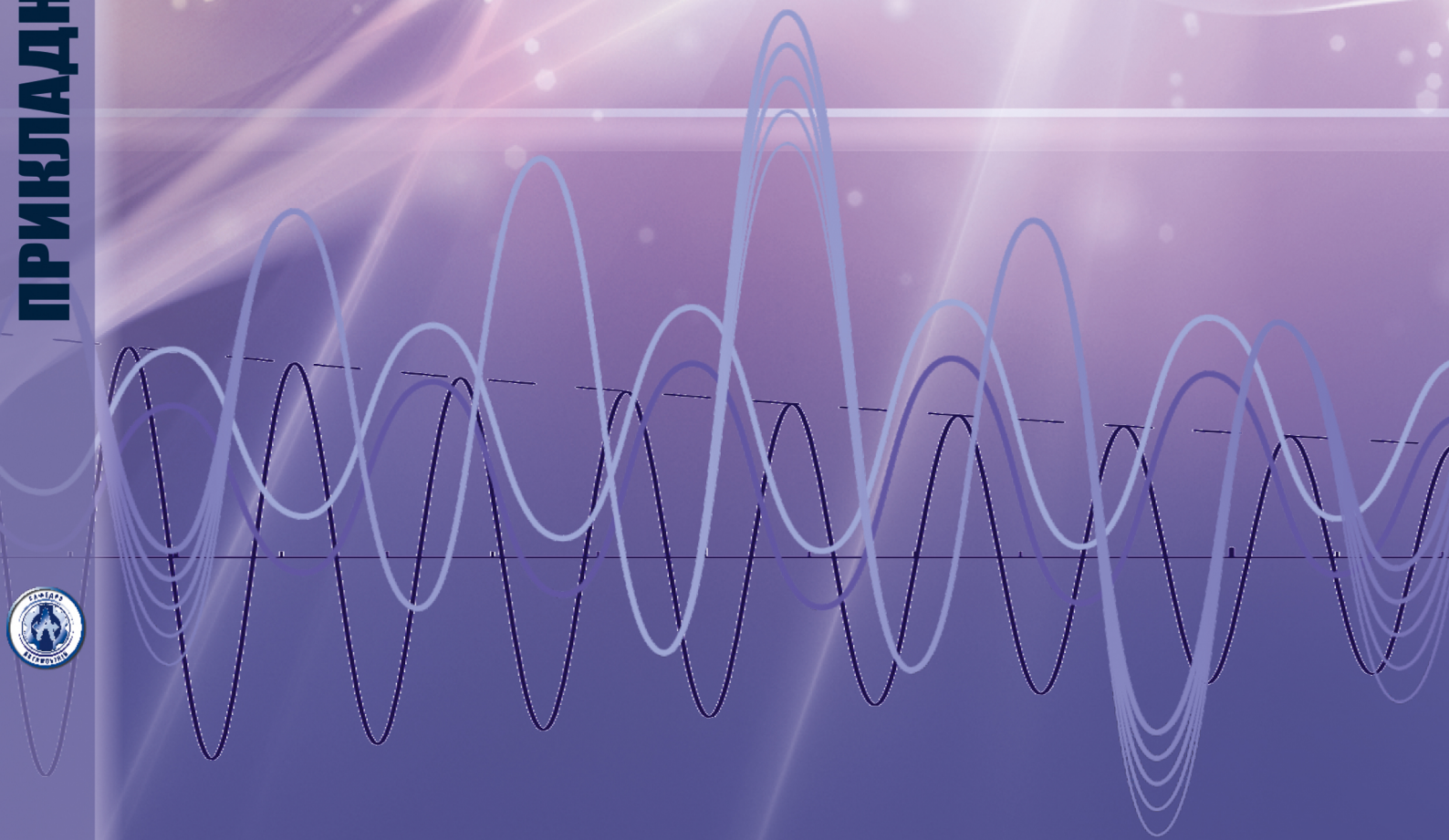
В. О. Богомолов, В. І. Клименко, Д. М. Леонтьєв, А.В. Ужва

ПРИКЛАДНА ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ

в галузі машинобудування

ПРИКЛАДНА ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ



Міністерство освіти і науки України
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

В. О. Богомолов, В. І. Клименко,
Д. М. Леонтьєв, А.В. Ужва

ПРИКЛАДНА ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ в галузі машинобудування

Навчальний посібник

Харків
ХНАДУ
2026

УДК 629.3
ББК 30
Б 74

Рекомендовано вченою радою (дозвіл №86/26/5.5 «24» квітня 2026 року)
як навчальний посібник для здобувачів закладів вищої освіти

Рецензенти:
О.Ю. Ребров – завідувач кафедри Автомобіле- і тракторобудування, д.т.н., професор, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут"
А.А. Кашканов – директор Інституту докторантури та аспірантури, д.т.н., професор, Вінницький національний технічний університет
Є.І. Калінін –завідувач кафедри тракторів і автомобілів, д.т.н., професор, Національний університет біоресурсів і природокористування України
Д.В. Абрамов – професор кафедри технології машинобудування та ремонту машин, д.т.н., професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Автори:
В.О. Богомолов, д.т.н., професор, В.І. Клименко, д.т.н., професор,
Д.М. Леонтьєв, д.т.н., професор, А.В. Ужва, к.т.н., доцент, ХНАДУ.

В.О. Богомолов
Б 74 Прикладна теорія коливань в галузі машинобудування / В. О. Богомолов, В.І. Клименко, Д. М. Леонтьєв, А.В. Ужва – Харків : ФОП Бровін О.В., 2026. – 166 с.

ISBN 978-617-8587-53-6

У навчальному посібнику викладено основи прикладної теорії механічних коливань, які є необхідними для підготовки фахівців в галузі машинобудування. Розглянуто класифікацію та методи дослідження вільних, вимушених, автоколивальних та нелінійних систем з одним і двома ступенями вільності, а також систем з розподіленими параметрами (струни, стрижні). Значну увагу приділено питанням віброізоляції та віброгашення, а також практичному застосуванню методу кінцевих елементів у сучасних програмних комплексах. Навчальний посібник призначений для здобувачів вищих навчальних закладів автомобільних та механічних спеціальностей, може бути корисним інженерам-практикам у галузі машинобудування, автомобілебудування та автомобільного транспорту.

Іл. 53. Ліст. 4 Бібліогр. 13 назви

УДК 629.3
ББК 30
© В.О. Богомолов, В.І. Клименко,
Д.М. Леонтьєв, 2026
© ХНАДУ, 2026
ISBN 978-617-8587-53-6

ЗМІСТ

Вступ 5

Розділ 1 Основні поняття та визначення 7
1.1 Предмет та задачі теорії коливань 7
1.2 Класифікація коливальних процесів 8
1.3 Класифікація коливальних рухів 10
1.4 Кінематика коливань 11
1.5 Динаміка коливань 24

Розділ 2 Вільні коливання системи з одним ступенем вільності 27
2.1 Другий закон Ньютона при складанні рівняння вільних коливань 27
2.2 Рівняння Лагранжа при складанні рівняння вільних коливань 31
2.3 Крутильні коливання 42
2.4 Метод Релея 45
2.5 Вільні коливання лінійних систем з урахуванням тертя 55

Розділ 3 Автоколивання 69
3.1 Класифікація автоколивальних систем та автоколивань 69
3.2 Визначення умов виникнення автоколивань 72
3.3 Визначення амплітуди та частоти автоколивань осциляторної системи методом гармонійного балансу 75

Розділ 4 Вимушені коливання системи з одним ступенем вільності 77
4.1 Гармонійне силове збудження без тертя 77
4.2 Резонанс в коливальній системі 81
4.3 Гармонійне кінематичне збудження 82
4.4 Періодичне збудження 83
4.5 Вимушені коливання з в’язким демпфіруванням 85
4.6 Еквівалентне в’язке демпфірування 88

Розділ 5 Нелінійні системи з одним ступенем вільності 91
5.1 Особливості та класифікація нелінійних систем з одним ступенем вільності 91
5.2 Методи дослідження автономних систем 93
5.3 Особливості вимушених коливань в нелінійних системах 96

Розділ 6 Вільні коливання системи з двома ступенями вільності 100
6.1 Диференційні рівняння вільних коливань без тертя 100
6.2 Загальне рішення диференційних рівнянь вільних коливань системи з двома ступенями вільності 101
6.3 Головні координати 106
6.4 Вільні коливання системи з двома ступенями вільності на прикладі плоскої моделі автомобіля 108

Розділ 7 Віброізоляція та гасіння вібрацій 114
7.1 Віброзахисні системи 114
7.2 Одноосьовий віброізолятор 115
7.3 Коливання одноосьового віброізолятора при силовому збудженні 116
7.4 Пружинний динамічний гаситель без тертя 120

Розділ 8 Вільні коливання систем з розподіленими параметрами 123
8.1 Рівняння коливання струни 123
8.2 Вільні коливання стрижнів 130

Розділ 9 Чисельний аналіз коливань механічних систем 144
9.1 Коливання систем з кінцевим числом ступенів вільностей 144
9.2 Континуальні (розподілені) системи 155

Перелік літератури 160
Поіменний покажчик 162
Предметний покажчик 163

ВСТУП

Теорія механічних коливань має фундаментальне значення для інженерів, зайнятих у машинобудуванні, автомобілебудуванні та інших технічних дисциплінах. Вона дозволяє вирішувати ключові практичні завдання, такі як динамічне балансування машин, контроль крутильних коливань у приводах, визначення оптимальних швидкостей обертання валів, а також мінімізація вібрацій у ходовій частині та інших системах транспортних засобів.

У технічних системах коливання можуть виконувати як корисну функцію (наприклад, у радіотехніці, вібраційних технологіях чи процесах вібраційного впливу), так і бути деструктивним чинником, що призводить до відмов обладнання, втомного руйнування матеріалів або шкідливого впливу на здоров'я людини. У зв'язку з цим, сучасний інженер-конструктор повинен володіти навичками або для ефективного застосування цього явища під час вирішення конкретних завдань, або для своєчасного усунення його негативного впливу на механізми та операторів.

Саме тому знання фундаментальних закономірностей механічних коливань є обов'язковим для фахівця в галузі інженерії. Реальні коливальні системи, як правило, є нелінійними і характеризуються присутністю нелінійних сил тертя, що значно ускладнює їх точний математичний опис. Однак для більшості інженерних розрахунків такі системи можна спростити, зберігаючи прийнятну точність. Це досягається шляхом зведення до моделі з одним ступенем свободи, заміни нелінійного тертя еквівалентним лінійно-в'язким, застосування принципу суперпозиції та інших методів.

Враховуючи це, у даному навчальному посібнику центральне місце відведено вивченню систем з одним ступенем свободи. Детально розглядаються характеристики вільних, вимушених, нелінійних коливань та автоколивань. Крім того, висвітлені питання аналізу систем із розподіленими параметрами та представлені методи чисельного дослідження систем із кінцевим числом ступенів вільності.

Для успішного засвоєння матеріалу курсу здобувачу освіти необхідна базова підготовка в обсязі програм вищих технічних навчальних закладів України, зокрема з таких дисциплін, як: вища математика (інтегральне числення та диференціальні рівняння), теоретична механіка (розділ «Динаміка») та опір матеріалів.

Метою цього навчального посібника є формування у здобувача знань з основ прикладної теорії коливань, а тому головний акцент зроблено на пошуку найбільш доступних методів складання рівнянь. На думку авторів, саме такий підхід забезпечить майбутньому інженеру-конструктору міцну основу для подальшого аналізу та вибору набагато складніших моделей технічних об'єктів. При підготовці видання автори орієнтувалися на лекційний курс для студентів інженерних спеціальностей Харківського національного автомобільно-дорожнього університету, а також на інші джерела, що довели свою ефективність у інженерній практиці.

Автори висловлюють щиру подяку викладачам кафедри автомобілів ім. А.Б. Гредескула Харківського національного автомобільно-дорожнього університету за цінні поради та зауваження, внесені під час роботи над рукописом, які були враховані в остаточній редакції цього навчального посібника.

Цей навчальний посібник, підготовлений до святкування 95-річного ювілею Харківського національного автомобільно-дорожнього університету, який був заснований у липні 1930 році. Навчальний посібник увічнює багаторічні наукові та педагогічні традиції вишу. Він є символом нескінченного розвитку знань та відданості якісній інженерній освіті, яка завжди була візитівкою університету. Ювілейне видання не лише надає студентам сучасні знання з теорії коливань, але й слугує знаком поваги до багатовікової історії та авторитету альма-матер. Він втілює в собі принцип безперервності знань, що передаються новим поколінням здобувачів, які стали випускниками університету.

Розділ 1
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

Прикладна теорія пружних коливань є ключовим інструментом для динамічного аналізу конструкцій машин, механізмів та систем. Головним завданням динамічного аналізу є визначення максимальних, по модулю, значень переміщень та деформацій коливальних елементів, швидкостей і прискорень, що виникають під час руху деталей в машинах, механізмах або системах, а також оцінка стабільності коливальних процесів.

Динамічні параметри можуть бути описані набором ключових характеристик: середнім часовим значенням стану елемента, граничним відхиленням від нього - амплітудою, та частотою, яка визначає кількість повних коливань за одиницю часу.

Залежно від природи величин, що змінюються, розрізняють коливання різної природи, зокрема механічні (пов'язані з механічними параметрами), електричні (пов'язані з електричними величинами), електромеханічні, теплові, тощо. У подальшому викладі цього навчального посібника основну увагу приділено основам прикладної теорії саме механічних коливальних систем.

1.1 Предмет та задачі теорії коливань

Галузь знань, що вивчає фундаментальні закони коливальних процесів, отримала назву теорії коливань. Під коливаннями механічних систем розуміють періодичне зростання та спадання значень певної величини в часі, що супроводжується виникненням сили, яка прагне повернути систему у вихідний стан. Ця величина, визначає положення координати коливальної системи (тіла).

Поширення збуджень у певному середовищі називається ***хвилею***. Принципова відмінність коливань та хвиль від звичайних видів руху полягає в тому, що їхні властивості можна описати узагальненими параметрами, такими як частота, амплітуда чи довжина хвилі, які є сталим характеристиками на тривалому проміжку часу. На противагу цьому, для опису звичайного руху необхідно знати точне положення системи в кожний момент часу.

Механічні коливання супроводжуються безперервним циклічним перетворенням потенційної енергії в кінетичну і навпаки. Однак

частина енергії втрачається, перетворюючись на тепло або випромінюючись назовні. Цей процес отримав назву ***дисипації*** **(*розсіювання*)**, енергії.

Коливальною системою називають будь-яку систему, здатну здійснювати вільні коливання.

Коливання та хвилі можуть мати як корисний, так і шкідливий вплив на життєдіяльність людини. Відповідно, прикладна теорія коливань ставить перед собою дві головні задачі:

1. Ефективно збуджувати корисні коливання та хвилі, використовуючи мінімальні зусилля;
2. Запобігати виникненню або значно послаблювати руйнівний вплив шкідливих коливань.

До числа корисних коливань належать ті, що застосовуються для виконання позитивної роботи: забивання паль, ущільнення ґрунтів, вібраційного транспортування, обробки металів, очищення сипучих матеріалів тощо.

Натомість, шкідливими є коливання, що виникають внаслідок нерівноваги обертових частин машин, що призводить до прискореного зношування та руйнування їхніх елементів. Прикладами можуть слугувати вібрація валів, коливання різця під час обробки металу (що погіршує якість поверхні), а також сейсмічні поштовхи під час землетрусів.

1.2 Класифікація коливальних процесів

В залежності від характеру збудження механічної системи, коливання можна розділити на наступні чотири типи: вимушені, вільні (власні), самозбудливі (автоколивання) та параметричні.

Вільними (власними) називаються коливання, що виникають і відбуваються у системі за відсутності змінного зовнішнього впливу та надходження енергії ззовні. Однак, через неминучий процес дисипації енергії та за відсутності джерела, що б компенсувало її втрати, такі коливання поступово згасають з часом, через що їх також називають ***затухаючими***.

Вимушеними називаються коливання, що викликаються та підтримуються в системі за рахунок зовнішнього силового або кінематичного збудження.

Силове збудження – це спосіб утворення вібрації системи шляхом прикладення до неї зовнішніх періодичних сил та/або моментів.

Кінематичне збудження – це спосіб утворення вібрації системи шляхом завдання певним її точкам заданих траєкторій руху, які не залежать від стану самої системи.

Автоколивання – це коливання, що виникають в системі в результаті процесу самозбудження. Це означає, що енергія надходить від джерела, що не є коливальним (наприклад, за рахунок сил сухого тертя), але сам процес її надходження регулюється рухом системи. Ключова відмінність від вимушених коливань полягає в тому, що при автоколиваннях збуджуюча сила безпосередньо залежить від параметрів самих коливань, тоді як у випадку вимушених коливань зовнішнє навантаження керує системою і не залежить від її стану.

Параметричні коливання – це коливання, спочатку утворені певним початковим збудженням, а згодом підтримувані за рахунок періодичної зміни в часі одного або декількох параметрів системи, що визначають величину запасеної коливальної енергії (наприклад, для математичного маятника такими параметрами є довжина нитки або маса вантажу).

Відповідно до *кінематичного принципу*, коливання також поділити на:

- Періодичні, неперіодичні та майже періодичні;
- Детерміновані (визначені) та недетерміновані (випадкові);
- Стаціонарні та нестаціонарні;
- Коливання в системах з голономними та неголономними зв'язками та інші.

Періодичними називаються коливання, за яких кожне значення величини, що коливається, $q(t)$, повторюється через однакові проміжки часу, відомі як період (T). Це виражається математичною рівністю $q(t) = q(t + T)$. Коливання, що не відповідають цій умові, класифікуються як ***неперіодичні***.

Детерміновані коливання описуються детермінованим процесом, тобто їхній майбутній стан можна точно передбачити. На противагу цьому, коливання, що є випадковим процесом, називаються випадковими або ***недетермінованими***.

Стаціонарними вважаються коливання, основні характеристики яких (амплітуда, частота, початкова фаза) залишаються незмінними в часі. Якщо ці характеристики змінюються, коливання є ***нестаціонарними***. Серед останніх виділяють *майже гармонійні*

коливання, у яких амплітуда, частота та фаза змінюються повільно порівняно з періодом коливань.

Голономні зв'язки – це зв'язки, що накладають обмеження виключно на положення або переміщення точок системи, але не на їхні швидкості. Зв'язок, що обмежує швидкості, називається ***кінематичним***. Однак, якщо кінематичний зв'язок може бути інтегрований і зведений до геометричного співвідношення, він також класифікується як голономний.

Кінематичні зв'язки, які не можна звести до чисто геометричних обмежень, називаються ***неголономними***. Механічні системи, що містять такі зв'язки, відповідно, називаються ***неголономними системами***. Наприклад, умова кочення колеса без ковзання встановлює саме неголономний зв'язок, оскільки вона обмежує швидкість, а не положення.

Залежно від типу деформації, що виникає в системі, розрізняють такі види коливань: *поздовжні* (стиск-розтяг), *поперечні* (згинальні), *крутильні* (закручування), а також *складні* (наприклад, згинально-крутильні) тощо.

1.3 Класифікація коливальних рухів

1.3.1 Системи з скінченним числом ступенів вільності та системи з розподіленими параметрами

Коливальні системи поділяють за кількістю ступенів вільності на системи з одним, двома, багатьма ступенями вільності, а також на системи з неперервним (розподіленим) спектром параметрів. Важливо зауважити, що кількість ступенів вільності, яка визначається числом незалежних параметрів, що повністю задають положення голономної системи, залежить від обраної розрахункової моделі або схеми.

1.3.2 Консервативні та неконсервативні системи

Система класифікується як **консервативна**, якщо під час вільних коливань її повна механічна енергія залишається незмінною, тобто не відбувається ні втрат, ні надходження енергії ззовні. У таких системах діють лише потенційні сили. Системи, що не відповідають

цій умові, називаються **неконсервативними**. Вони, у свою чергу, поділяються на:

- *Дисипативні (пасивні):* повна енергія системи зменшується під час вільних коливань.
- *Активні (автоколивальні):* енергія надходить у систему від джерела, що не є коливальним.

1.3.3 Лінійні та нелінійні системи

За типом диференціальних рівнянь, що описують їхній рух, системи поділяються на **лінійні** та **нелінійні**. Ключовою властивістю лінійних систем є справедливість **принципу суперпозиції**, згідно з яким сумарна реакція системи на суму кількох зовнішніх впливів дорівнює сумі реакцій на кожен з цих впливів окремо.

1.3.4 Автономні та неавтономні системи

Залежно від того, чи входить час явно в диференціальне рівняння коливань, розрізняють **автономні** та **неавтономні (гетерономні)** системи. Автономні системи здійснюють вільні або самозбудливі коливання, частота яких визначається виключно внутрішніми параметрами самої системи. Неавтономні системи здійснюють параметричні або вимушені коливання, частота яких залежить від частоти зовнішнього впливу.

1.3.5 Стаціонарні та нестаціонарні системи

Система вважається **стаціонарною**, якщо її параметри не змінюються з часом. Якщо параметри системи залежать від часу, вона класифікується як **нестаціонарна**. У диференціальних рівняннях таких систем коефіцієнти є функціями часу.

1.4 Кінематика коливань

Для опису зміни коливної величини в часі можна використовувати різні форми подання: графічну (осцилограму), аналітичну (закон коливань, тобто функцію) або табличну (набір значень "переміщення – час").

Розглянемо коливання, які описуються гармонічним законом, тобто мають синусоїдальний (косинусоїдальний) характер. Такі коливання є фундаментальною моделлю в теорії коливань через свою математичну простоту та широке поширення в техніці та природі.

Рівняння, що описує коливання за синусоїдальним законом має вигляд

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \qquad (1.1)$$

де y – переміщення тіла, яке коливається, м;

A – амплітуда коливань (найбільше відхилення величини y від положення 0), м;

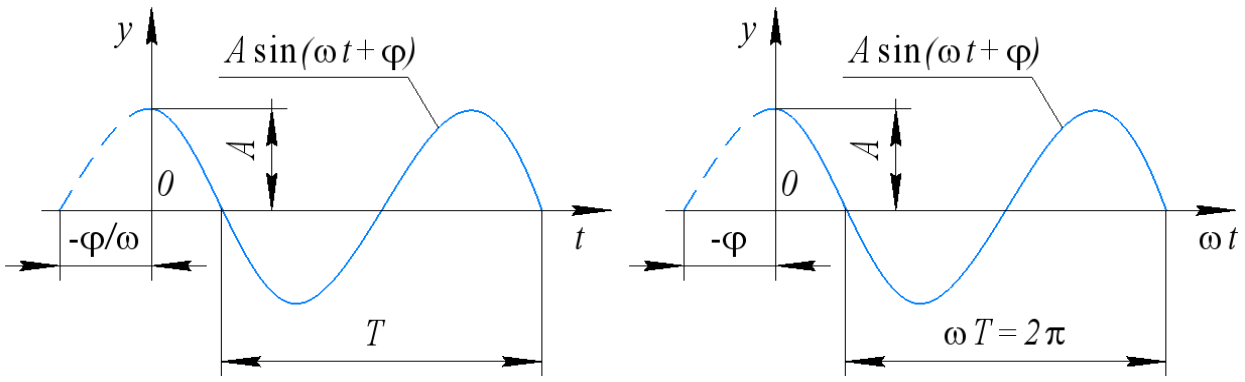
ω – кутова частота, рад/с;

φ – початкова фаза, рад;

$(\omega \cdot t + \varphi)$ – повна фаза, рад.

$\omega \cdot t$ – фаза, що накопичується за час t, рад.

Результат моделювання за рівнянням (1.1) можна представити в графічному вигляді в різних координатах, як це зображено на рисунку 1.1.



а) б)

Рис. 1.1 – **Гармонійні коливання відображені в залежності:** а) від часу t; б) від фази $\omega \cdot t$; T – період коливань (найменший інтервал часу, через який повторюється значення величини, що коливається)

Величина, що є зворотною до періоду коливань, має назву частота (вимірюється у Гц). Вона може бути визначена з рівняння

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Частота f це величина, яка показує, скільки разів повторюється явище за одиницю часу. Якщо казати простіше, то частота f це кількість коливань (подій або циклів) відбувається в секунду.

На відміну від частоти f кутова частота ω це величина, яка показує, з якою швидкістю змінюється фаза коливань або обертання у часі. Іншими словами, це темп зміни фази або на скільки радіанів змінюється фаза в одиницю часу.

Отже, як вже зазначалося раніше, гармонічні коливання скалярної величини повністю визначаються трьома незалежними сталими параметрами: амплітудою (A), частотою (f) та початковою фазою (φ). При цьому конкретне значення початкової фази залежить від вибору початку відліку часу. Якщо хоча б один із цих параметрів змінюється в часі, коливання втрачають властивість гармонійності та періодичності.

Більш складні види періодичних коливань, які не є гармонійними, можуть бути описані за допомогою таких узагальнених параметрів, як *період* (T) та *розмах* (R). Під розмахом розуміють різницю між максимальним y_{max} та мінімальним y_{min} значеннями величини y, що коливається на аналізованому проміжку часу, що графічно ілюструє рисунок 1.2.

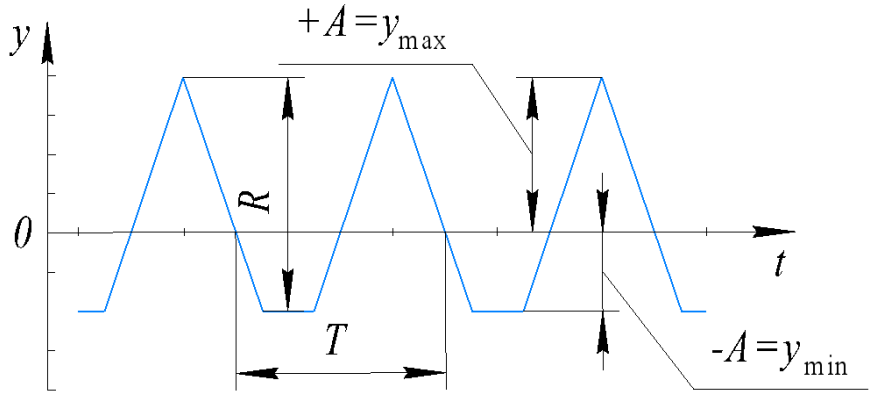


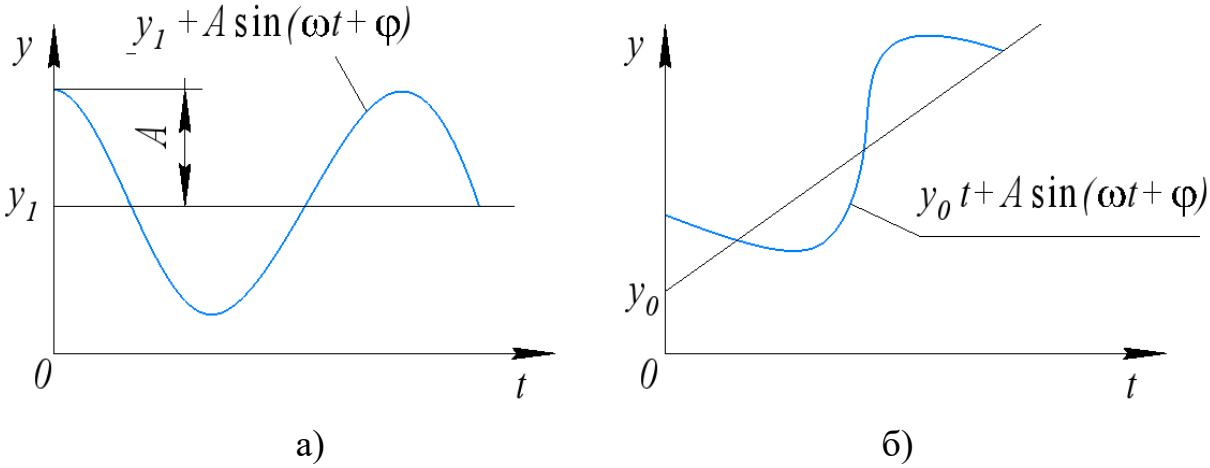
Рис. 1.2 – **Періодичне негармонійне коливання**

Величину R можна визначити з рівняння

$$R = y_{max} - y_{min} = +A - (-A).$$

У разі коли $y_{max} = - y_{min}$ (див. Рис. 1.2) величина R дорівнюватиме величенні $2 \cdot A$, оскільки в такому разі періодичні негармонійні коливання будуть симетричні відносно 0.

Крім того, слід пам’ятати, що коливальний рух не завжди відбувається відносно нерухомого нульового рівня. Існують складніші випадки, коли коливання відбуваються відносно зміщеного (Рис. 1.3 а) або навіть рухомого базового рівня (Рис. 1.3 б).



а) б)

Рис. 1.3 – **Коливання відносно рівнів:**
а – зміщений рівень; б – рухомий базовий рівень

У першому випадку (Рис. 1.3 а) ми спостерігаємо коливання навколо певного постійного зсуву, що означає, що середнє значення величини, що коливається, відмінне від нуля. Це типова ситуація для систем, де на постійну складову накладається змінна.

Ще складнішим є випадок (Рис. 1.3 б), коли базовий рівень сам є функцією часу. Як показано на рисунку 1.3 б, коливання можуть відбуватися відносно траєкторії рівномірного руху або іншого детермінованого процесу. У таких ситуаціях ми маємо справу з суперпозицією двох рухів: переносного (рух самого базового рівня) та відносного (власне коливального процесу). Це потребує спеціальних підходів до аналізу, оскільки характеристики коливань можуть істотно залежати від характеру руху базового рівня.

Такі моделі знаходять широке застосування в техніці, наприклад, при вивченні вібрації рухомих частин транспортних засобів, параметрів коливання у системах з програмним керуванням, або в задачах, де на корисний сигнал накладається низькочастотний дрейф. Розуміння цих особливостей дозволяє інженерам розробити ефективні методи фільтрації та виділення корисних коливальних компонентів із загального сигналу, який було отримано з різноманітних датчиків.

1.4.1 Графічне зображення коливань

Окрім розглянутих методів відображення коливальних процесів (див. Рис. 1.1), для аналізу та візуалізації коливань широко використовуються ще кілька фундаментальних графічних методів, до яких відносяться:

- Векторні діаграми;
- Фазові площини;
- Амплітудно-частотні спектри.

Векторна діаграма є інструментом для наочного представлення гармонійних коливань. Вона відображає криву, яку описує кінець вектору зміщення $\vec{A}$, що обертається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю, що відповідає кутовій частоті коливань. Початковий кут між горизонтальною віссю та вектором відповідає початковій фазі φ_0, а модуль вектору $\vec{A}$ дорівнює амплітуді коливань. Векторна діаграма гармонійних коливань точки за законом (1.1) представлена на рисунку 1.4 а. За умови, що $|A| = const$, ця діаграма має форму кола.

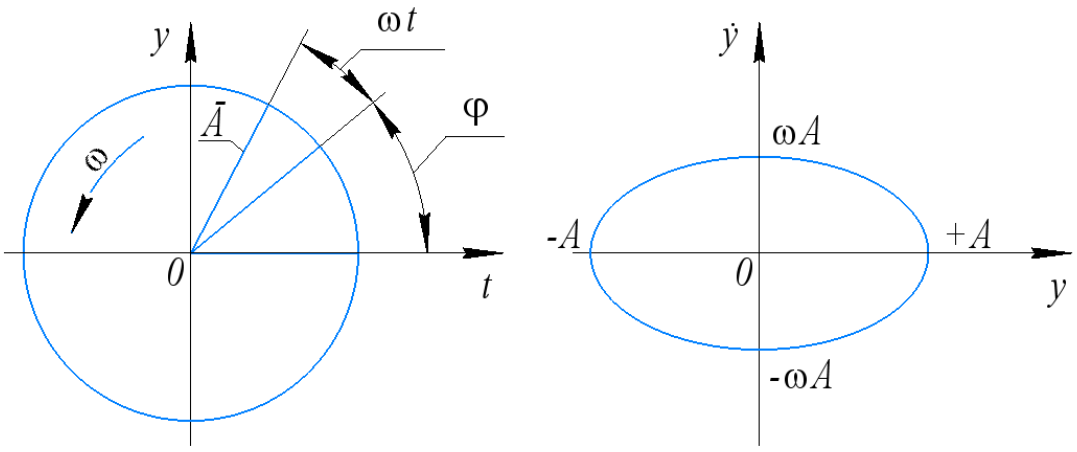


Рис. 1.4 – **Диаграмма гармонических колебаний:**
а – векторная; б – фазовая

Фазова площина є потужним графічним інструментом для аналізу динамічних систем, зокрема тих, що описуються диференціальними рівняннями другого порядку.

На відміну від векторної діаграми, яка зображує лише гармонійні коливання, фазова площина дозволяє відобразити повністю стан

системи в довільний момент часу. Цей стан визначається двома змінними:

1. **Переміщенням** (y) – узагальнена координата системи.
2. **Швидкістю** ($\dot{y}$) – перша похідна за часом від цієї координати.

Кожній парі значень (y, $\dot{y}$) відповідає одна точка на фазовій площині $y0\dot{y}$. З плином часу ця точка рухається, прокреслюючи траєкторію $\dot{y} = f(y)$, яка називається **фазовою траєкторією**.

Для гармонійних коливань, що описуються рівнянням (1.1), фазову траєкторію можна отримати аналітичним шляхом наступним чином:

Знайдемо першу похідну за часом від правої частини цього рівняння, щоб отримати вираз для швидкості

$$\dot{y} = A\cos(\omega t + \varphi)\cdot\omega. \qquad (1.2)$$

Для того, щоб виключити час із цих двох рівнянь, розділимо обидві частини рівняння (1.2) на кутову частоту ω

$$y^2 + \frac{\dot{y}^2}{\omega^2} = A^2. \qquad (1.3)$$

Отримане рівняння є рівнянням еліпса у координатах y (переміщення) та $\dot{y}$ (швидкість), яке представлене в графічному вигляді на рисунку 1.4 б.

Стан коливальної системи, який визначається її миттєвими значеннями швидкості та переміщення, на фазовій площині в будь-який момент часу зображується точкою, яка називається зображаючою або фазовою точкою.

Амплітудно-частотний спектр є графічним представленням, що розкладає складний коливальний сигнал на його гармонійні складові. Для його побудови по осі абсцис відкладають частоту (f або ω), а по осі ординат – амплітуду відповідної гармоніки або її енергію, яка пропорційна квадрату амплітуди. Амплітудно-частотний спектр вільних гармонійних коливань, який має вигляд єдиної вертикальної смуги на частоті ω_0, представлений на рисунку 1.5.

Оскільки гармонійне коливання є найпростішим періодичним процесом і містить лише одну частотну складову, його спектр має вигляд єдиного вертикального відрізка (спектральної лінії).

Ця лінія розташована на частоті ω_0, яка є власною частотою даних коливань. Висота лінії відповідає амплітуді A_0.

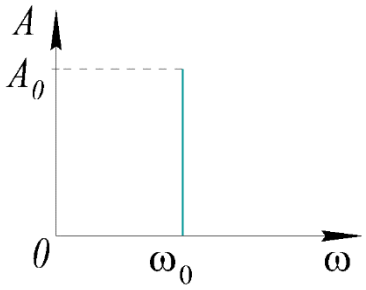


Рис. 1.5 – **Амплітудно-частотний спектр гармонійних коливань**

Такий спектр наочно демонструє, що вся енергія гармонійного коливання зосереджена в одній-єдиній частоті. Це є характерною ознакою та ідеальною моделлю, тоді як спектри реальних коливань часто мають складнішу структуру.

Синхронними називаються два або більше періодичних коливань, що відбуваються одночасно і мають однакові частоти. Якщо частоти коливань різні, вони називаються **асинхронними**.

Синхронні гармонійні коливання, у яких різниця фаз у будь-який момент часу дорівнює нулю, називаються **синфазними**. Якщо ж між коливаннями існує постійна різниця фаз, відмінна від нуля, такі коливання є **несинфазними**.

1.4.2 Складання гармонійних коливань

Розглянемо точку, яка одночасно здійснює два синхронних, але несинфазних гармонічних коливання. Це означає, що коливання мають однакову частоту ω, але різні амплітуди A_1 та A_2 і різні початкові фази φ_1 та φ_2.

$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1),$$
$$y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2).$$

Результуючий рух такої точки можна визначити за допомогою двох методів: графічного (метод векторних діаграм) та аналітичного.

Графічне додавання (метод векторних діаграм): Результуюче коливання представляється як **геометрична (векторна) сума** двох складових коливань (рис. 1.6).

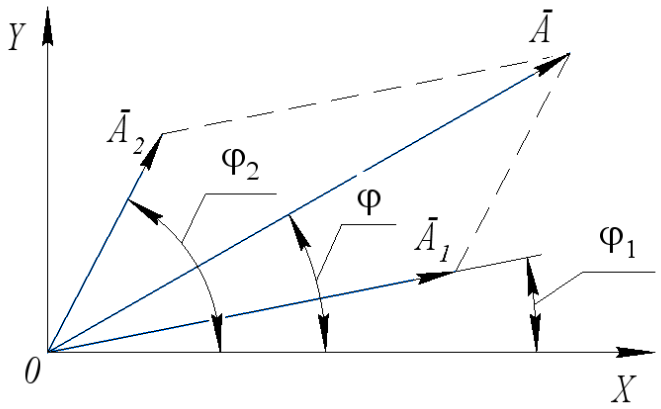


Рис. 1.6 – **Складання гармонійних коливань по правилу паралелограма**

На векторній діаграмі це відповідає побудові **векторного паралелограма**. Вектори $\bar{A}_1$ та $\bar{A}_2$, що представляють окремі коливання, обертаються проти годинникової стрілки з однаковою кутовою швидкістю ω. У початковий момент часу $t = 0$ ці вектори утворювали з віссю $0X$ кути φ_1 та φ_2 відповідно. Діагональ цього паралелограма буде зображувати результуючий вектор $\bar{A}$, який також обертається з тією ж частотою ω. Модуль цього вектору дорівнює амплітуді результуючого коливання, а кут нахилу до осі в початковий момент – його початковій фазі φ.

Аналітичне додавання: Аналітично результуюче коливання знаходиться шляхом алгебраїчного додавання рівнянь окремих коливань. Якщо перше коливання описується функцією y_1, а друге – y_2, то сумарне переміщення дорівнює

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2).$$

Математичні перетворення цього виразу доводять, що результатом також буде **гармонійне коливання** з тією самою частотою ω

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi).$$

Проекцією сторін векторного паралелограму на осі OY та OX відповідно дорівнюють

$$A \cdot \sin\varphi = A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2, \qquad (1.4)$$

$$A \cdot \cos\varphi = A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2. \qquad (1.5)$$

Якщо поділити рівняння (1.4) на рівняння (1.5) отримаємо наступне рівняння

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2}{A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2}. \qquad (1.6)$$

А якщо ліві та праві частини рівняння (1.4) та рівняння (1.5) возвести в квадрати та скласти, після відповідних перетворень отримаємо рівняння

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (1.7)$$

З отриманого аналітичного виразу для результуючої амплітуди можна виділити три характерні випадки, які визначаються різницею фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ між коливаннями:

1. **Коливання у фазі ($\Delta\varphi = 0$):** У цьому випадку амплітуди коливань складаються арифметично: $A = A_1 + A_2$. Це відповідає ситуації максимального посилення.
2. **Коливання у протифазі ($\Delta\varphi = \pi$):** При цьому амплітуди віднімаються: $A = |A_1 - A_2|$. Якщо амплітуди коливань рівні ($A_1 = A_2$), то результуюча амплітуда дорівнює нулю, тобто коливання повністю гасяться (інтерферують деструктивно).
3. **Квадратурні коливання ($\Delta\varphi = \pi/2$):** Різниця фаз становить 90°. У цьому випадку результуюча амплітуда обчислюється за теоремою Піфагора: $A^2 = A_1^2 + A_2^2$. Такі коливання називають *ортогональними*.

У випадку коли коливання синхронні для аналітичного додавання використовують тригонометричні формули синуса або косинуса суми (різниці), що дозволяє безпосередньо знайти амплітуду та фазу результуючого гармонійного коливання.

У разі ж коли коливання асинхронні, формули (1.6, 1.7) для таких коливань непридатні, оскільки частоти коливань різні. У цьому випадку застосовують чисельний (графічний) метод, що полягає в наступному: для послідовності однакових моментів часу t визначають миттєві значення кожного коливання, які потім алгебраїчно додають ($y = y_1 + y_2$). За отриманими значеннями сумарного переміщення будують осцилограму результуючих коливань, яка в загальному випадку вже не буде гармонійною.

1.4.3 Явище «Биття»

Явище биття виникає в результаті додавання двох **гармонійних коливань з близькими, але не рівними, частотами**. Це явище проявляється як періодичне зростання та спадання амплітуди результуючого коливання. Людина, яка відчуває таке коливання сприймає його як один тон, гучність якого періодично і плавно змінюється.

Фізично биття можна уявити як ситуацію, коли дві хвилі то посилюють одна одну (коли їхні фази збігаються), то послаблюють (коли фази протилежні).

Як наочний приклад розглянемо результат суперпозиції двох гармонійних коливань, частоти яких ω_1 та ω_2 є дуже близькими одна до одної, тобто коли виконується умова

$$|\omega_2 - \omega_1| \ll \frac{\omega_2 + \omega_1}{2},$$

в результаті такої взаємодії формується **биття** – результуючий сигнал, огинаюча якого (максимальна амплітуда) періодично зростає і спадає з характерною для биття частотою $|\omega_1 - \omega_2|$, що візуально представлено на рисунку 1.7.

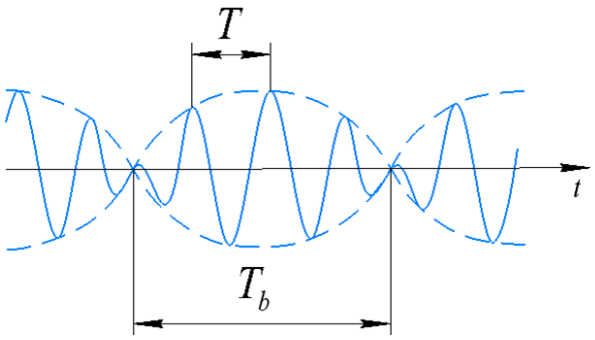


Рис. 1.7 – **Осцилограма биття за відсутності тертя**

Для спрощення аналітичних викладок приймаємо, що початкові фази обох коливань дорівнюють нулю: $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Таким чином, коливання, що додаються, мають такий вигляд

$$y_1 = A_1 \cos(\omega_1 t),$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega_2 t).$$

У початковий момент часу ($t = 0$) різниця фаз між коливаннями дорівнює нулю, тому вони відбуваються синфазно. Це призводить до того, що амплітуда результуючих коливань стає **максимальною** та дорівнює арифметичній сумі амплітуд: $A_{max} = A_1 + A_2$.

Однак через певний інтервал часу t_n через різницю у частотах між коливаннями виникає різниця фаз, що дорівнює π радіан (180°). У цей момент коливання стають протифазними, і, як наслідок, амплітуда результуючого сигналу стає **мінімальною**: $A_{min} = |A_2 – A_1|$.

Час t_n, через яке відбувається перше мінімальне значення амплітуди, можна визначити з умови, що різниця фаз має дорівнювати π: $\omega_2 t_n - \omega_1 t_n = \pi$. Розв'язуючи це рівняння, отримуємо

$$t_n = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1},$$

де t_n – проміжок часу, який визначає інтервал, протягом якого розмах (амплітуда) результуючих коливань змінюється від свого максимального значення A_{max} до мінімального A_{min}.

Цей час відповідає половині повного циклу биття.

$$T_b = 2\, t_n = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|},$$

а частота биття

$$f_b = \frac{1}{T_b} = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2\pi}.$$

Для аналітичного знаходження суми двох коливань з різними частотами необхідно формально привести їх до спільного математичного виразу

$$\cos(\omega_1 t) = \cos\left(\omega_1 t + \frac{\omega_2 t}{2} - \frac{\omega_2 t}{2}\right) = \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right),$$

$$\cos(\omega_2 t) = \cos\left(\omega_2 t + \frac{\omega_1 t}{2} - \frac{\omega_1 t}{2}\right) = \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right),$$

отримаємо

$$y = y_1 + y_2 = A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t =$$
$$= A_1\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) + A_2\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right).$$

Формально враховуючи, що частота коливань дорівнює $0{,}5(\omega_1+\omega_2)$, а фази коливань y_1 та y_2, як $0{,}5\,t\,(\omega_1-\omega_2)$ та $0{,}5\,t\,(\omega_2-\omega_1)$ відповідно, використовуючи рівняння (1.6) та (1.7), отримаємо

$$y = y_1 + y_2 = A(t)\cos\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \varphi(t)\right], \qquad (1.8)$$

де

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_1-\omega_2)t},$$

$$\tan(\varphi) = \frac{A_1\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) - A_2\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)}{A_1\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) + A_2\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)} = \frac{A_1-A_2}{A_1+A_2}\tan\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right).$$

Додавання невеликої кількості гармонійних складових можна виконати аналітично, використовуючи відповідні тригонометричні перетворення.

Гармонійні коливання, спрямовані вздовж взаємно перпендикулярних осей, зручно аналізувати, розглядаючи траєкторію руху точки, що їх здійснює, на координатній площині *XOY*.

Так, наприклад, траєкторія руху точки при її асинхронних коливаннях уздовж осей *X* та *Y* (тобто **векторному додаванні**) може мати вигляд складної замкнутої або незамкнутої кривої. Конкретна форма траєкторії, відома як **фігура Ліссажу**, визначається співвідношенням частот, різницею фаз та амплітудами цих перпендикулярних коливань.

1.4.4 Випадкові коливання

При випадкових коливаннях $y(t)$ окрема зафіксована осцилограма може мати конкретну, але заздалегідь невідому форму — таку запис називають **реалізацією** ($y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$). Оскільки кожна нова реалізація відрізняється від попередньої, для повного опису явища необхідно аналізувати всю сукупність можливих реалізацій, тобто **випадковий (стохастичний) процес**.

Для опису випадкових коливань у цілому застосовують **статистичні (ймовірнісні) характеристики**. Замість точного прогнозу ми вивчаємо середні тенденції та розкид значень. Основними з таких характеристик є:

- **Математичне сподівання** $m_y(t)$: Це середнє значення випадкового процесу в кожний момент часу t, яке визначає його основний тренд або постійну складову.
- **Дисперсія** $D_y(t)$: Характеризує розкид миттєвих значень реалізацій навколо математичного сподівання. Вона є мірою інтенсивності коливань.
- **Стандарт** $\sigma_y(t) = \sqrt{D_y(t)}$: Це середньоквадратичне відхилення, яке можна умовно назвати «амплітудою» коливань реалізацій відносно середнього значення $m_y(t)$.
- **Кореляційна функція** $K_y(t_1, t_2)$: Описує статистичний зв'язок між значеннями процесу в два різні моменти часу t_1 та $t_2 = t_1 + \tau$.

Кореляційна цункція показує, наскільки швидко процес «забуває» свої попередні значення, і є ключовою для аналізу його внутрішньої структури.

Для стаціонарних випадкових коливань (див. рис. 1.8) ключові статистичні характеристики спрощуються: $m_y=const$; $\sigma_y(t)=\sigma_y=const$; $K_y(t_1, t_2) = K_y(\tau)$, де $\tau = (t_2 - t_1)$.

Щоб отримати більш наочне уявлення про частотну структуру випадкового процесу, під час його дослідження виконують перехід від кореляційної функції до спектральної щільності за допомогою **перетворення Фур'є**

$$S_y(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_y(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau.$$

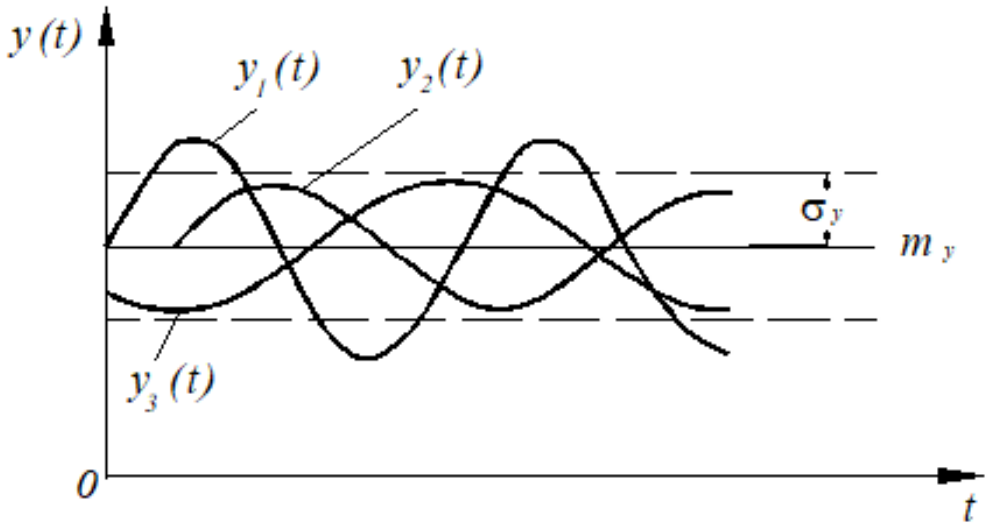


Рис. 1.8 – **Осцилограма стаціонарних випадкових коливань**

Перетворення Фур'є дозволяє перейти від часового опису процесу (як сильно корельовані його значення в різні моменти часу) до частотного (як розподілена енергія процесу за різними частотами)

1.5 Динаміка коливань

Сили (моменти), що впливають на коливальну систему, прийнято класифікувати на три основні категорії: **збуджуючі, відновлюючі та дисипативні**.

1.5.1 Збуджуюча сила

Збуджуюча сила – це зовнішня сила, яка змінюється в часі, не залежить від стану самої системи та підтримує її вібрацію. Вона може бути періодичною або неперіодичною, детермінованою (наприклад, змінний тиск від згоряння паливної суміші в циліндрах двигуна) або випадковою функцією часу (наприклад, вплив нерівностей дорожнього покриття на автомобіль).

1.5.2 Відновлююча сила

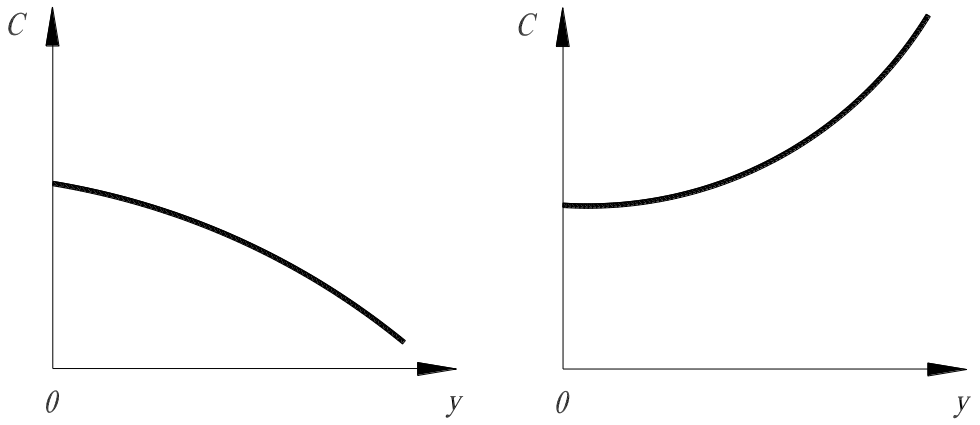
Відновлююча сила – це сила, яка виникає при відхиленні системи від положення рівноваги і завжди спрямована протилежно до цього відхилення, прагнучи повернути систему у вихідний стан.

Прикладами відновлюючої сили можуть бути: сила тяжіння маятника, виштовхувальна сила рідини (для корабля наприклад), пружна сила пружини.

Залежність відновлюючої сили від відповідної узагальненої координати (переміщення тощо), взята з протилежним знаком, називається **характеристикою відновлюючої сили** для системи з одним ступенем вільності.

Похідна від характеристики відновлюючої сили за узагальненою координатою називається **коефіцієнтом жорсткості** *c*. Якщо коефіцієнт жорсткості не залежить від узагальненої координати, характеристика відновлюючої сили є **лінійною**; в іншому випадку – **нелінійною**.

Нелінійна характеристика, в залежності від поведінки, може бути **м'якою** (рис. 1.9 а) або **жорсткою** (рис. 1.9 б).



а) б)

Рис. 1.9 – **Характеристика коефіцієнта жорсткості**:
а) м'яка характеристика; б) жорстка характеристика.

М'яка характеристика (рис. 1.9 а): Коефіцієнт жорсткості **зменшується** з ростом переміщення *y*. Це означає, що чим більше деформується система, тим легше її деформувати далі. Крива вигинається вбік осі переміщень.

Жорстка характеристика (рис. 1.9 б): Коефіцієнт жорсткості **збільшується** з ростом переміщення. Система стає "жорсткішою" при великих деформаціях. Крива вигинається вбік осі сили.

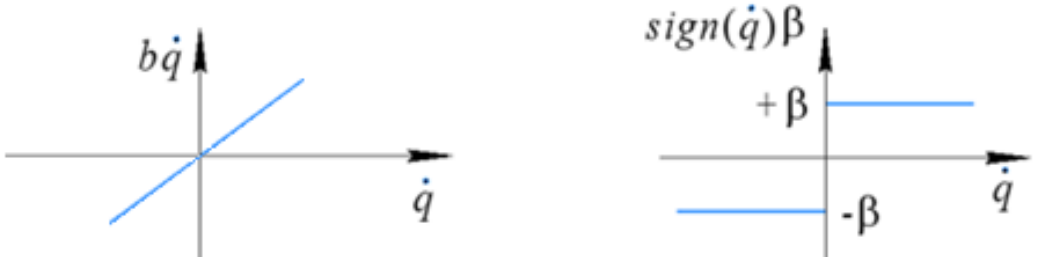
Величина обернена до коефіцієнта жорсткості, називається коефіцієнтом податливості.

1.5.3 Дисипативна сила (момент)

Дисипативна сила (момент) – це сила, яка виникає під час руху механічної системи та викликає розсіювання механічної енергії або її приріст від зовнішнього джерела. За своєю фазою вона зсунута на чверть циклу відносно переміщення і відповідно називається **додатним** (якщо викликає втрати енергії) або **від'ємним** (якщо забезпечує приріст енергії) **тертям**. Відновлююча сила відрізняється від дисипативної тим, що вона знаходиться у протифазі з переміщенням.

Тертя може залежати від: узагальненого переміщення (**частотно-незалежне)**; узагальненої швидкості (**частотно-залежне)**; знака швидкості (**сухе тертя)**; або бути постійним.

Залежність сили тертя від узагальненої швидкості (рис. 1.10 а) або знака швидкості (рис. 1.10 б) для системи з одним ступенем вільності, взята з протилежним знаком, називається **характеристикою сили тертя**.



а) б)

Рис. 1.10 – **Характеристики сили тертя:** а) частотно-залежне (в'язке) тертя; **б)** сухе тертя; b – коефіцієнт в'язкого тертя; β – коефіцієнт сухого тертя, або величина сили сухого тертя, взята з протилежним знаком; $\dot{q}$ – узагальнена швидкість системи.

ПИТАННЯ ДО САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке коливальна система?
2. У чому відмінність вільних і вимушених коливань?
3. Що таке автоколивання?
4. Що таке голономні зв'язки?
5. Що таке амплітудно-частотна характеристика коливань?
6. Що таке биття з точки зору додавання коливань?
7. Назвіть основні характеристики випадкових коливань.

Розділ 2
ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

Для складання рівнянь коливального руху можна застосовувати різні фундаментальні підходи: другий закон Ньютона, принцип Гамільтона-Остроградського, принцип Д'Аламбера, а також інші принципи аналітичної механіки. Використання цих методів дозволяє отримати рівняння як для лінійних, так і для нелінійних коливальних систем.

У випадку лінійно-пружних систем для виведення рівнянь коливань також можуть бути застосовані методи будівельної механіки – метод переміщень та метод сил. При цьому, згідно з принципом Д'Аламбера, до складу узагальнених сил необхідно включити сили інерції.

Якщо розрахункова модель є системою з голономними зв'язками, то рівняння її коливань найзручніше складати за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду в узагальнених координатах. Цей підхід є особливо ефективним і універсальним для складних механічних систем.

2.1 Другий закон Ньютона при складанні рівняння вільних коливань

Основним підходом до опису динаміки найпростіших механічних систем є прямий застосунок другого закону Ньютона. Його суть для коливальної системи з одним ступенем вільності полягає в тому, що прискорення тіла прямо пропорційне рівнодійній всіх прикладених до нього сил.

Для складання рівняння вільних коливань необхідно розглянути всі сили, що діють на масу системи в довільний момент часу при її відхиленні від положення рівноваги. До цих сил зазвичай належать:

1. **Відновлююча сила ($F_{\text{відн}}$):** Напрямлена до положення рівноваги. Для лінійної системи вона пропорційна зміщенню: $F_{\text{відн}} = -c \cdot x(t)$, де c – коефіцієнт жорсткості пружини.
2. **Демпфуюча сила ($F_{\text{д}}$):** Сила опору руху (наприклад, в'язкого тертя). Для лінійного демпфування вона пропорційна швидкості: $F_{\text{д}} = -b \cdot \dot{x}(t)$, де b – коефіцієнт демпфування.

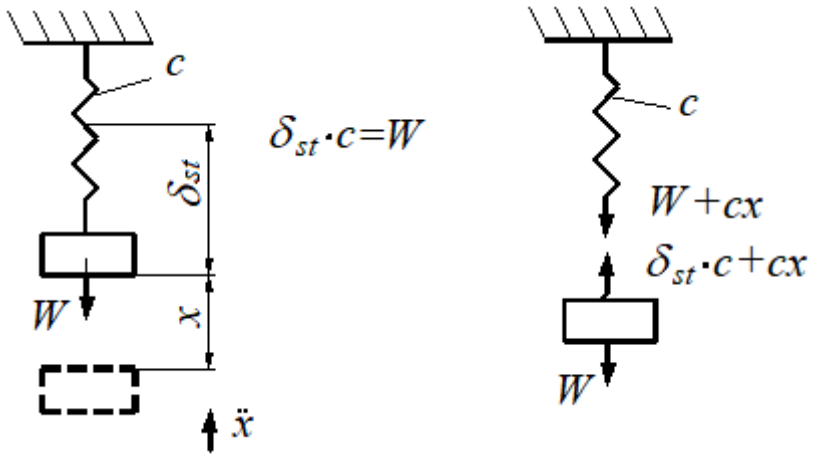
3. **Сила інерції ($F_{ін}$):** Відповідно до принципу Д'Аламбера, це сила, що дорівнює добутку маси на прискорення, взятому з протилежним знаком: $F_{ін} = – m \cdot \ddot{x}(t)$.

Рівняння руху, отримане з другого закону Ньютона ($\Sigma F = m \cdot \ddot{x}(t)$), для лінійної системи з одним ступенем вільності набуває класичного вигляду

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + c \cdot x(t) = 0$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, яке повністю описує вільні коливання (включаючи затухаючі) даної системи. Вирішення цього рівняння дозволяє визначити закон руху $x(t)$, власну частоту та характер затухання системи.

Розглянемо випадок (рис. 2.1), коли вантаж вагою W (масою $m = W/g$, де g = 9,81 м/с^2 – прискорення вільного падіння) з'єднаний з нерухомою опорою за допомогою лінійної пружної гвинтової пружини. Припускаємо, що вантаж W може переміщатися лише у вертикальному напрямку, а масою самої пружини можна знехтувати.



а) б)

Рис. 2.1 – **Розрахункова схема коливальної системи:**
а) у статичному положенні; б) у динамічному процесі (під час коливань).

В момент кріплення вантажу до пружини він здійснює статичне переміщення

$$\delta_{st} = W / c, \qquad (2.1)$$

Нехай тепер вантаж виведено з положення статичної рівноваги та відпущено, в результаті чого виникають вільні (власні) коливання.

Якщо за позитивний напрямок прийняти переміщення x, спрямоване вниз, то пружна сила, що виникає в пружині при довільному положенні вантажу, буде дорівнювати (рис. 2.1 б)

$$F_{\text{пр}} = c(x+\delta_{st})$$

Знаючи масу вантажу m і позначаючи прискорення d^2x/dt^2 як $\ddot{x}(t)$, відповідно до другого закону Ньютона отримаємо диференціальне рівняння руху

$$\frac{W}{g}\cdot\ddot{x} = W - F_{\text{пр}} = W - \left(c\cdot x + W\right). \tag{2.2}$$

Проводячи відповідні перетворення рівняння (2.2) та ввівши позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c\cdot g}{W} = \frac{c}{m} = \frac{g}{\delta_{st}}, \tag{2.3}$$

у такому разі рівняння (2.2) прийме вигляд

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{2.4}$$

Рівняння (2.4) має загальне рішення

$$x = C_1\cos\left(\omega_0 t\right) + C_2\sin\left(\omega_0 t\right), \tag{2.5}$$

де C_1 та C_2 – довільні сталі, що залежать від початкових умов.

З рівняння (2.5) видно, що переміщення вантажу має коливальний характер з певним періодом T. Тому

$$\omega_0\left(T+t\right) - \omega_0 t = 2\pi,$$

звідки

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{W}{c\cdot g}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}. \tag{2.6}$$

З рівняння (2.6) видно, що період коливань залежить лише від маси вантажу та жорсткості пружини і не залежить від величини початкового зміщення $x(t = 0) = x_0$.

Частоту коливань можна визначити з наступного рівняння

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c \cdot g}{W}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}. \qquad (2.7)$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 та C_2 припустимо, що при $t = 0$: $x(0) = x_0$ та $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, тоді

$$C_1 = x_0, \qquad (2.8)$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}. \qquad (2.9)$$

Після підстановки рівнянь (2.8) та (2.9) в рівняння (2.5) отримаємо

$$x = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t). \qquad (2.10)$$

Перетворимо вираз для простих гармонійних коливань (2.10), використовуючи вже відомий нам метод обертових векторів.

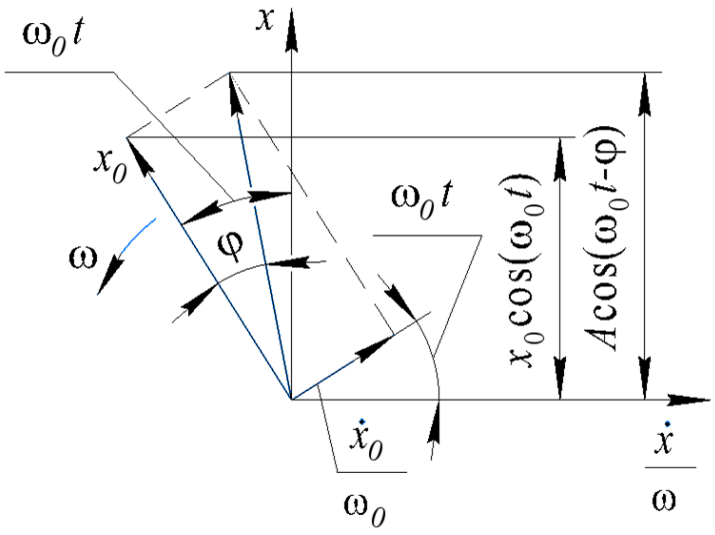


Рис. 2.2 – **Векторна діаграма простих гармонійних коливань**

Оскільки функції $\cos(\omega_0 \cdot t)$ та $\sin(\omega_0 \cdot t)$ є ортогональними (зсунутими одна відносно одної на $\pi/2$), то вектори, які їх представляють, будуть перпендикулярними.

З рисунка 2.2 видно, що переміщення, описані формулою (2.10), можуть бути представлені у вигляді гармонійної функції

$$x = A\cos\left(\omega_0 t - \varphi\right), \tag{2.11}$$

де A – амплітуда коливань;

φ – початкова фаза.

Використовуючи співвідношення (1.4), (1.5) та (1.6) для знаходження амплітуди та фази при додаванні двох гармонійних коливань, отримаємо вирази для цих величин

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}, \tag{2.12}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}\right). \tag{2.13}$$

Аналіз розв'язку лінійного рівняння (2.11):

1. Власні коливання системи є гармонійними та відбуваються навколо положення статичної рівноваги.
2. Параметр ω_0, що входить у рівняння (2.11), є кутовою частотою та називається власною частотою коливань системи.
3. Власна частота визначається співвідношенням жорсткості та інерції системи (ω_0^2 = c/m) і не залежить від початкових умов (відхилення або поштовху).
4. Амплітуда A та початкова фаза φ визначаються виключно початковими умовами (x_0 та $\dot{x}_0$).

2.2 Рівняння Лагранжа при складанні рівняння вільних коливань

Для консервативної механічної системи з одним ступенем вільності рівняння Лагранжа другого роду в узагальнених координатах має відомий з курсу теоретичної механіки вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}, \tag{2.14}$$

де t – час;

q – узагальнена координата;

$\dot{q}$ – узагальнена швидкість;

T – кінетична енергія;

П – потенційна енергія.

Кінетична енергія системи, що складається з i матеріальних точок, дорівнює сумі кінетичних енергій окремих її точок

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_iV_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{V}_i\vec{V}_i, \tag{2.15}$$

де m – маса i-ої матеріальної точки;

$\vec{V}_i$ – швидкість руху цієї точки.

Для тіла, що обертається, або системи з узагальненою швидкістю $\dot{q}$, кінетична енергія часто виражається через цю швидкість та параметри інерції (масу m або момент інерції J). Наприклад, для поступального руху тіла маси m зі швидкістю v: $T = (m\cdot v^2)/2$, а для обертального руху тіла з моментом інерції J та кутовою швидкістю ω: $T = (J\cdot\omega^2)/2$.

Якщо r_i – радіус-вектор матеріальної точки – не залежить явно від часу, а визначається лише узагальненою координатою q, то справедливе співвідношення для швидкості точки через узагальнену координату

$$\vec{V}_i=\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q}\dot{q}, \tag{2.16}$$

отже

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right)^2\dot{q}^2=\frac{1}{2}\dot{q}^2\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q}\right)^2. \tag{2.17}$$

Позначимо

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q}\right)^2=A(q). \tag{2.18}$$

Розкладемо рівняння (2.18) в ряд Маклорена

$$A(q) = A(0) + A'(0)q + \frac{A''(0)}{2}q^2 + \ldots \qquad (2.19)$$

У виразі (2.19) штрихи позначають похідні функції $A(q)$ за узагальненою координатою q.

Розглядаючи випадок малих коливань системи навколо положення її рівноваги, можна обмежитися лише першим (лінійним) членом у розкладі (2.19). Позначивши його через a, отримуємо вираз для кінетичної енергії системи, який є аналогічним до виразу для кінетичної енергії однієї матеріальної точки

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2, \qquad (2.20)$$

де a – коефіцієнт, який визначає параметри інерції тіла.

Це спрощення є основою для лінеаризації рівнянь руху та подальшого аналізу власних частот коливальних систем.

Для визначення коефіцієнта a достатньо будь-яким способом отримати вираз для кінетичної енергії системи через квадрат узагальненої швидкості. Таким чином, коефіцієнт a є мірою інерційних властивостей системи, зведених до обраної узагальненої координати.

Потенційна енергія П, рівняння (2.21), як функція узагальненої координати q, може бути представлена у вигляді ряду Маклорена (2.22) навколо положення статичної рівноваги (де $q = 0$ і $\partial П/\partial q = 0$), що є окремим випадком ряду Тейлора

$$П = П(q), \qquad (2.21)$$

$$П(q) = П(0) + П'(0)q + \frac{П''(0)}{2}q^2 + \ldots. \qquad (2.22)$$

де, як і вище, штрихи позначають диференціювання по узагальненій координаті q.

Оскільки потенційна енергія визначається з точністю до довільної сталої, першому постійному члену П(0) у розкладі (2.22) можна надати будь-яке значення.

Найзручніше прийняти П(0) = 0. Таким чином, ми вважаємо, що нульовому значенню узагальненої координати q (положення рівноваги) відповідає нульове значення потенційної енергії. Далі необхідно врахувати, що

$$\Pi' = -Q, \tag{2.23}$$

Співвідношення (2.23) визначає зв'язок потенційної енергії з узагальненою силою Q, що відновлюється.

В положенні стійкої рівноваги перша похідна потенційної енергії за координатою дорівнює нулю, тому з урахуванням (2.23) друга складова $\Pi'(0)q$ розкладу (2.22) також дорівнює нулю. Таким чином вважаючи переміщення q не значними в розкладі (2.22) зберігаємо тільки третій член та записуємо рівняння потенційної енергії

$$\Pi = \frac{1}{2}cq^2, \tag{2.24}$$

де c=П″(0) має назву *еквівалентний коефіцієнт жорсткості* системи для обраної узагальненої координати q або квазіупружним коефіцієнтом.

В рівнянні (2.1) жорсткість пружини є окремим випадком коефіцієнта жорсткості.

Підставляючи рівняння (2.24) та рівняння (2.20) в рівняння (2.14) отримаємо

$$a\ddot{q} + cq = 0. \tag{2.25}$$

Введемо позначення

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}, \tag{2.26}$$

де ω_0, як і в рівнянні (2.11) є власною частотою коливань системи.

Таким чином замість рівняння (2.25) отримаємо

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \cdot q = 0. \tag{2.27}$$

Рівняння (2.27) має вигляд, аналогічний рівнянню (2.4). Отже, розв'язок рівняння (2.4) є лише окремим випадком розв'язку рівняння (2.27), коли узагальнена координата є лінійним переміщенням: $q = x$.

Тому для системи з одним ступенем вільності період та частота коливань у загальному випадку матимуть вигляд

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}, \tag{2.28}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{a}}. \tag{2.29}$$

Загальне рішення рівняння (2.27) по аналогії з рівнянням (2.11) може бути представлене у вигляді

$$q = A\cos(\omega_0 t + \varphi). \tag{2.30}$$

Розглянемо декілька прикладів використання рівняння Лагранжа при складанні рівняння вільних коливань системи (Приклад 2.1 та Приклад 2.2).

Приклад 2.1:

Визначимо власну частоту коливань системи (ω_0), що зображена на рисунку 2.3 за умови, що: m_1 – маса рейки; m_2 та m_3 – маси циліндрів; c_1 – коефіцієнт жорсткості горизонтальної пружини; c_2 – коефіцієнт жорсткості вертикальної пружини. Масами пружин нехтуємо. Проковзування між циліндрами та рейкою відсутнє.

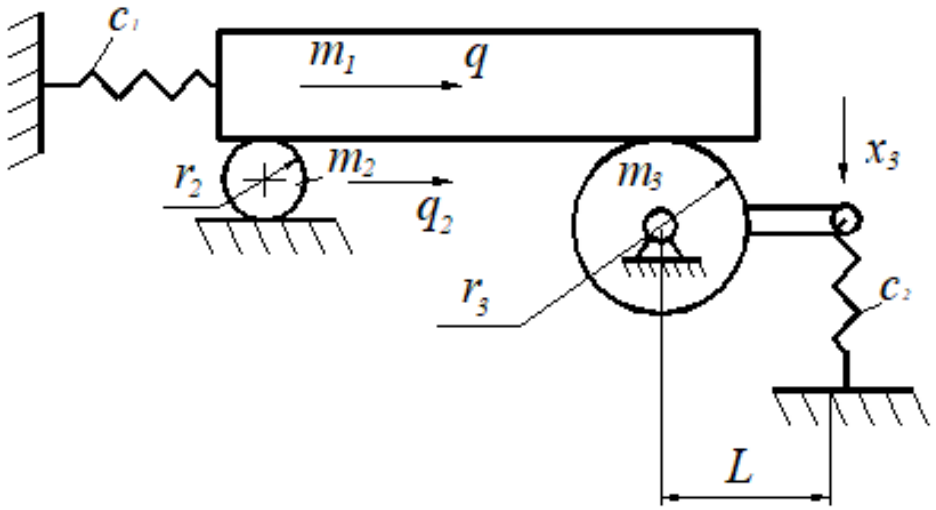


Рис. 2.3 – **Розрахункова схема Прикладу 2.1:** 1 – рейка; 2 – циліндр, який обертається навколо своєї осі та рухається паралельно рейці; 3 – цилиндр, який обертається тільки навколо своєї осі

Систему, що зображена на рисунку 2.3, опишемо за допомогою однієї узагальненої координати – горизонтального зміщення рейки q, прийнявши за початок відліку стан механічної рівноваги з недеформованими пружинами.

У такому разі кінетична енергія системи буде дорівнювати

$$T = T_{m1} + T_{m2} + T_{m3}, \qquad \text{(а.1)}$$

де T_{m1}, T_{m2} та T_{m3} – відповідно кінетична енергія рейки, циліндра масою m_2 та циліндра масою m_3.

При переміщенні рейки на деяку відстань q можна визначити кінетичну енергію T_{m1} поступального руху рейки та кінетичну енергію T_{m3} обертального руху циліндра масою m_3 за рівняннями

$$T_{m1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}^2, \qquad \text{(б.1)}$$

$$T_{m3} = \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2, \qquad \text{(в.1)}$$

де I_3 – момент інерції циліндра масою m_3

$$I_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2}. \qquad \text{(г.1)}$$

Оскільки при переміщені рейки масою m_1 циліндр масою m_3 повертається на кут $\varphi_3 = q / r_3$ (за умови відсутності між рейкою та циліндром проковзування) швидкість повороту циліндру масою m_3 дорівнюватиме

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{\dot{q}}{r_3}. \qquad \text{(д.1)}$$

Підставляючи рівняння (г.1) та рівняння (д.1) в рівняння (в.1), отримаємо

$$T_{m3} = \frac{1}{4} m_3 \dot{q}^2. \qquad \text{(є.1)}$$

Кінетична енергія циліндра масою m_2, що одночасно обертається та переміщується, можна визначити з рівняння

$$T_{m2} = T_{21} + T_{22}, \qquad \text{(ж.1)}$$

де T_{21}, T_{22} – відповідно, кінетична енергія поступального та обертального руху циліндра масою m_2.

$$T_{21} = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2,$$

де $\dot{q}_2 = r_2 \dot{\varphi}_2$ - швидкість переміщення центра циліндра масою m_2, який рухається між рейкою та опорою.

Оскільки при переміщені рейки масою m_1 циліндр масою m_2 повертається на кут $\varphi_2 = 0{,}5\, q / r_2$, а його цент рухається в напрямку переміщення рейки (за умови відсутності між рейкою та циліндром проковзування) швидкість повороту циліндру масою m_2 дорівнюватиме

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{q}}{2 \cdot r_2},$$

Отже в кінцевому вигляді кінетичну енергія поступального руху циліндра масою m_2 можна записати у вигляді

$$T_{21} = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{8} m_2 \dot{q}^2, \qquad \text{(з.1)}$$

Кінетичну енергію обертального руху циліндра масою m_2 визначимо з залежності

$$T_{22} = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2,$$

де I_2 - момент інерції циліндра масою m_2

$$I_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2},$$

В кінцевому вигляді кінетичну енергія обертального руху циліндра масою m_2 можна записати у вигляді

$$T_{22} = \frac{1}{16} m_2 \dot{q}^2. \qquad \text{(і.1)}$$

Підставимо рівняння (з.1) та рівняння (і.1) в рівняння (ж.1) і отримаємо рівняння кінетичної енергії циліндра масою m_2

$$T_{m2} = \frac{3}{16} m_2 \dot{q}^2. \qquad \text{(к.1)}$$

Отже повну кінетичну енергію системи визначимо з рівняння (а.1), якщо в нього підставити рівняння (б.1), (в.1) та (к.1)

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{3}{8}m_2 + \frac{1}{2}m_3 \right)\dot{q}^2. \qquad (л.1)$$

Якщо порівняти рівняння (л.1) з рівнянням (2.20) то можна побачити, що вираз у дужках в рівнянні (л.1) є коефіцієнтом інерції системи

$$a = m_1 + \frac{3}{8}m_2 + \frac{1}{2}m_3. \qquad (м.1)$$

Потенційна енергія системи визначається деформацією пружних елементів системи, тому її можна записати у вигляді

$$П = П_1 + П_2, \qquad (н.1)$$

де $П_1$ та $П_2$ – потенційні енергії відповідних деформованих пружин з коефіцієнтом жорсткості c_1 та коефіцієнтом жорсткості c_2.

$$П_1 = \frac{1}{2}c_1 q^2, \qquad (о.1)$$

$$П_2 = \frac{1}{2}c_2 x_3^2, \qquad (п.1)$$

де x_3 – деформація пружини з коефіцієнтом жорсткості c_2.

Відомо, що x_3 можна визначити з залежності

$$x_3 = L \cdot \sin(\varphi_3),$$

але при малих переміщеннях, можна прийняти припущення, що значення $\sin(\varphi_3) \cong \varphi_3$. У такому разі

$$x_3 \cong L \cdot \varphi_3,$$

а з урахуванням того, що кут $\varphi_3 = q / r_3$, перепишемо рівняння (п.1) у вигляді

$$П_2 = \frac{1}{2}c_2\left(\frac{L}{r_3}\right)^2 q^2. \qquad (р.1)$$

Підставивши рівняння (о.1) та рівняння (р.1) в рівняння (н.1) отримаємо в кінцевому вигляді рівняння для визначення повної потенційної енергії коливальної системи, що розглядається у вигляді

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(c_1 + c_2 \frac{L^2}{r_3^2} \right) q^2 . \qquad (т.1)$$

Порівнюючи рівняння (т.1) із рівнянням (2.24) можна побачити, що вираз в дужках є узагальненим коефіцієнтом жорсткості системи

$$c = c_1 + c_2 \frac{L^2}{r_3^2} . \qquad (у.1)$$

Отже підставляючи рівняння (м.1) та (у.1) в рівняння (2.26), нескладно отримати рівняння власну частоту коливань системи (ω_0), що зображена на рисунку 2.3.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 + \frac{L^2}{r_3^2} c_2}{m_1 + \frac{3}{8} m_2 + \frac{1}{2} m_3}} .$$

Приклад 2.2:

Припустимо, що необхідно отримати диференціальне рівняння, яке описує коливальний рух механічної системи, що зображена на рисунку 2.4. При отриманні рівняння прийняти, що масою пружин та масами котків нехтуємо, а сили тертя між деталями, що контактують між собою відсутні.

За узагальнену координату приймемо переміщення q (2.4). При цьому сумарна кінетична енергія системи, буде складатися з кінетичної енергії поступального руху рейки масою m_1 та кінетичної енергії обертання циліндра масою m_2

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{4} m_2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) \dot{q}^2 . \qquad (а.2)$$

Система, що розглядається знаходиться під дією сили тяжіння та сили пружності пружини в рівноважному стані. За нульове положення приймемо положення покою системи (положення статичної рівноваги системи).

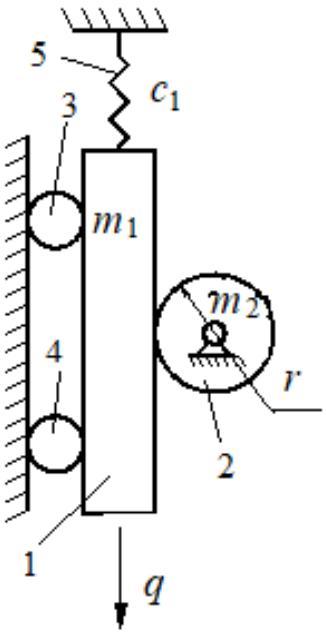


Рис. 2.4 – **Розрахункова схема Прикладу 2.2:**
1 – рейка масою m_1; 2 – циліндр масою m_2; 3, 4 – ролики,
масою яких нехтуємо; 5 – пружина жорсткістю c_1

Потенційну енергію системи, що зображена на рисунку 2.4 визначимо, як суму потенційної енергії П1, яка відповідає силам тяжіння рейки масою m_1 та циліндра масою m_2 (циліндр не рухається поступально, але сила тяжіння передається через контакт), та потенційної енергії Π_2, яка відповідає силі пружності пружини 5, що має коефіцієнт жорсткості c_1.

Отже потенційну енергію рейки масою m_1 та циліндра масою m_2 можна записати відповідно у вигляді рівнянь

$$\Pi_{11} = m_1 g q, \qquad (б.2)$$

$$\Pi_{12} = m_2 g q. \qquad (в.2)$$

а сумарну потенційну енергію Π_1 відповідно, як суму потенційних енергій отриманих за рівнянням (б.2) та рівнянням (в.2)

$$\Pi_1 = \Pi_{11} + \Pi_{12} = (m_1 + m_2) g q, \qquad (г.2)$$

Потенційну енергію Π_2 визначимо з рівняння

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} c_1 q^2, \qquad (д.2)$$

Складові рівняння Лагранжа (2.14) представимо у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)=\left(m_1+\frac{1}{2}m_2\right)\ddot{q},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q}=0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q}=\frac{\partial \Pi_1}{\partial q}+\frac{\partial \Pi_2}{\partial q}=\left(m_1+m_2\right)g+c_1q.$$

На основі складових рівняння Лагранжа отримаємо рівняння коливання в положенні статичної рівноваги

$$\left(m_1+\frac{1}{2}m_2\right)\ddot{q}+c_1q+\left(m_1+m_2\right)g=0. \qquad (є.2)$$

Рівняння (є.2) поки **не є рівнянням коливань**, бо містить постійну силу $(m_1+m_2)g$, яка дорівнює протилежному значенню c_1q при якому $\ddot{q}=0$, тому значення q представимо у вигляді

$$q=q(0)+q(t), \qquad (ж.2)$$

і перепишемо рівняння (є.2) у вигляді

$$\left(m_1+\frac{1}{2}m_2\right)\ddot{q}(t)+c_1q(0)+c_1q(t)+\left(m_1+m_2\right)g=0. \qquad (з.2)$$

Оскільки складова рівняння $c_1q(0)+(m_1+m_2)g = 0$, в положенні статичної рівноваги, то рівняння коливання системи (диференціальне рівняння, яке описує коливальний рух механічної системи), що зображена на рисунку 2.4 буде мати вигляд

$$\left(m_1+\frac{1}{2}m_2\right)\ddot{q}(t)+c_1q(t)=0, \qquad (і.2)$$

при відхиленні системи від положення статичної рівноваги (положення покою системи).

2.3 Крутильні коливання

На рисунку 2.5 зображено пружний вал, до нижнього кінця якого жорстко прикріплений диск, а верхній кінець валу нерухомо закріплено. Така конструкція отримала назву **крутильного маятника**.

Якщо диск відхилити на невеликий кут φ відносно осі вала, а потім відпустити, то пружний момент, що виникає в закрученому валу, надасть диску прискорення. В результаті виникнуть вільні крутильні коливання диска навколо осі вала.

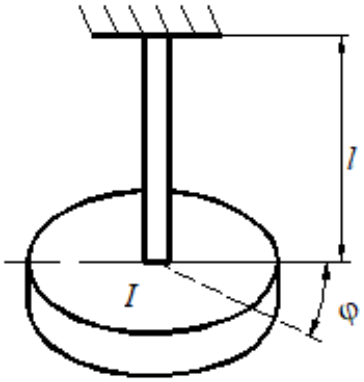


Рис. 2.5 – **Розрахункова схема крутильних коливань**

Диск, що зображено на рисунку 2.5, має момент інерції I відносно осі обертання. Згідно з другим законом динаміки для обертального руху

$$I\ddot{\varphi} = M = -c_k\varphi, \tag{2.31}$$

де c_k – крутильна жорсткість вала, яка чисельно дорівнює крутному моменту, що виникає в пружному елементі при його закручуванні на один радіан.

Якщо переписати рівняння (2.31) в іншому вигляді, як

$$I\ddot{\varphi} + c_k\varphi = 0, \tag{2.32}$$

то воно матиме назву **рівняння гармонійних крутильних коливань** в динамічній формі.

Якщо поділити всі складові рівняння (2.32) на момент інерції I то можна отримати рівняння гармонійного осцилятора в кінематичній формі

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_k}{I}\varphi = 0. \tag{2.33}$$

В рівнянні (2.33) відношення c_k/I є ніщо інше ніж особиста частота крутильних коливань ω_{0k}^2.

Рішення рівняння (2.33) за аналогією з рівнянням (2.10) можна записати в тригонометричній формі, як

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(\omega_{0k} t\right) + \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_{0k}}\right) \sin\left(\omega_{0k} t\right), \tag{2.34}$$

де $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ – відповідно кут повороту диску та швидкість зміни кута повороту диску при початкових умовах.

У разі ж представлення рішення рівняння (2.33) у амплітудно-фазовій формі рішення (2.34) матиме вигляд

$$\varphi = \varphi_m \cos\left(\omega_{0k} t + \delta_m\right), \tag{2.35}$$

де $\varphi_m = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_{0k}}\right)^2}$ – амплітуда коливань;

$\delta_m = \arctan\left(\frac{-\dot{\varphi}_0}{\omega_{0k}\varphi_0}\right)$ – початкова фаза;

Кутова швидкість обертання диска виходячи з рівняння (2.34) може бути визначена з рівняння (2.36) в тригонометричній формі

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \cos\left(\omega_{0k} t\right) - \varphi_0 \omega_{0k} \sin\left(\omega_{0k} t\right), \tag{2.36}$$

або з рівняння (2.35) в амплітудно-фазовій формі, як рівняння

$$\dot{\varphi} = -\omega_{0k} \varphi_m \sin\left(\omega_{0k} t + \delta_m\right). \tag{2.37}$$

Період крутильних коливань системи, що зображена на рисунку 2.5, може бути визначена з рівняння

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{0k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c_k}}, \tag{2.38}$$

а особиста частота коливань може бути визначена з рівняння

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c_k}{I}}. \tag{2.39}$$

Слід зазначити, що період коливань системи та особиста частота коливань системи, що зображена на рисунку 2.5, залежить від геометричних параметрів валу на якому закріплено диск, тому враховуючи те, що c_k дорівнює

$$c_k = \frac{GJ_k}{l}. \tag{2.40}$$

де G – модуль зсуву матеріалу вала;

J_k – крутильна (торсійна) константа перерізу;

l – довжина вала.

Якщо відомі модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) E і коефіцієнт Пуассона ν, то модуль зсуву G можна визначити з залежності

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Типові значення G для різних матеріалів:

- вуглецеві, конструкційні сталі – 78 … 82 ГПа;
- леговані сталі – 77 … 81 ГПа;
- алюмінієві сплави – 25 … 28 ГПа;
- мідь тай її сплави (латунь, бронза) – 35 … 45 ГПа;
- титан та його сплави – 40 ... 45 ГПа;
- нікелеві сплави – 75 … 80 ГПа;
- скло – 25 … 30 ГПа;
- гума в залежності від типу (мяка, жорстка) – 0.1 … 10 МПа

Крутильна (торсійна) константа перерізу залежить від типу перерізу, наприклад, для круглого перерізу з радіусом R

$$J_k = \frac{\pi R^4}{2} = 1.571 \cdot R^4.$$

Для квадратного перерізу зі сторонами a з теорії Сен-Венана

$$J_k = 0.1406 \cdot a^4,$$

або для загального випадку прямокутника зі сторонами $a \times b$ за умови, що $a \geq b$ крутильна (торсійна) константа перерізу визначимо з наближеного рівняння

$$J_k \cong ab^3 \left(\frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{a} \left[1 - \frac{b^4}{12a^4} \right] \right).$$

У разі використання пустотілих валів круглого (із зовнішнім радіусом $R_н$ та внутрішнім радіусом $R_в$) та прямокутного перетину величину крутильної (торсійної) константи можна визначити з відповідних рівнянь

$$J_k = \frac{\pi}{2}\left(R_н^4 - R_в^4\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\left(R_н + R_в\right)^3 \cdot t + \left(R_н + R_в\right)\cdot t^3\right),$$

$$J_k = \frac{2\cdot t\cdot\left(a-t\right)^2\left(b-t\right)^2}{a+b-2\cdot t},$$

де t – товщина стінки.

2.4 Метод Релея

Цей метод знаходить застосування для вирішення надзвичайно широкого спектру задач, зокрема для визначення найнижчої власної частоти будь-якої системи з розподіленими параметрами. Він є також особливо зручним інструментом при аналізі вигинних коливань балок.

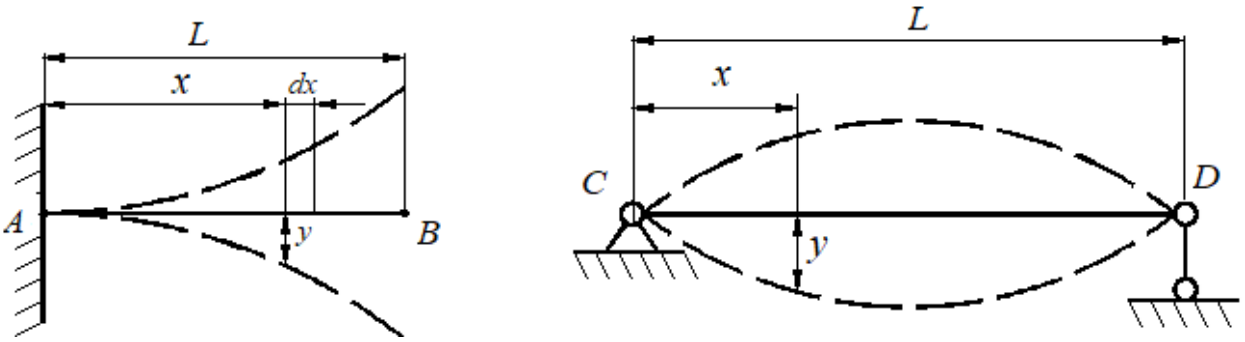
Метод Релея належить до наближених способів зведення системи до моделі з одним ступенем вільності. Його суть полягає у попередньому припущенні щодо форми (конфігурації), яку набуває система під час коливань. На основі цієї прийнятої форми складаються вирази для максимальної потенційної та кінетичної енергії системи, що дозволяє визначити еквівалентні параметри – коефіцієнт жорсткості c та коефіцієнт інерції a. Після цього власна частота системи обчислюється за класичним рівнянням (2.26).

Релей математично довів, що отриманий таким чином результат завжди є дещо завищеним щодо точного значення. Однак, за умови вибору форми коливань, досить близької до реальної, розв'язок цілком задовольняє вимоги інженерної точності та прикладних розрахунків.

Розглянемо випадок вільних вигинних коливань балок на двох наступних прикладах (див. рис. 2.6) попередньо розібрав метод Релея.

Величина статичного прогину балки змінюється вздовж її осі. Під час коливань цей прогин стає функцією не тільки положення точки x, але й моменту часу t. Таким чином, повний опис коливального стану балки задається функцією двох аргументів

$$y = f(x,t). \qquad (2.41)$$



а) б)

Рис. 2.6. – **Прогин балок при коливаннях:**
а – консольна балка; б – балка на двох опорах

Відповідно до основного припущення методу Релея, приймемо, що функція прогину може бути представлена у вигляді **добутку двох незалежних функцій**: функції часу $q(t)$ та функції форми $f(x)$, яка описує просторовий розподіл прогину вздовж балки.

$$y(x,t)=q(t)\cdot f(x), \qquad (2.42)$$

де $q(t)$ – узагальнена координата, що залежить лише від часу;

$f(x)$ – форма (апробуюча) функція, що залежить лише від координати x.

Припущення у вигліді рівняння (2.42) розділяє змінні (x і t) та є основою для зведення системи з нескінченним числом ступенів вільності до еквівалентної системи з одним ступенем вільності, описуваної координатою $q(t)$.

Узагальнена координата $q(t)$ визначає амплітуду коливань у даний момент часу, а форма (апробуюча) функція $f(x)$ задає відносний розподіл прогинів уздовж балки і повинна задовольняти геометричним граничним умовам задачі (наприклад, нульовому прогину та куту на опорах), що залежать від способу закріплення балки.

Розрізняють кінематичні та силові граничні умови.

Кінематичні граничні умови визначаються величиною прогину y та кута повороту перерізу θ осі балки в місцях її закріплення або на вільних кінцях. З курсу опору матеріалів відомо, що кут повороту перерізу зігнутої балки дорівнює першій похідній від рівняння прогину (2.41) за координатою x

$$\theta(x,t) = q(t) \cdot y'(x).$$

Силові граничні умови визначаються величиною згинального моменту M та поперечної сили Q у місцях кріплення балки або на її вільних кінцях. З курсу опору матеріалів відомі залежності

$$M(x,t) = EJ \cdot q(t) \cdot y''(x),$$

$$Q(x,t) = EJ \cdot q(t) \cdot y'''(x),$$

де EJ – жорсткість перерізу балки при згині (E – модуль пружності матеріалу балки; J – осьовий момент інерції поперечного перерізу балки відносно нейтральної осі при згині).

У диференціальному рівнянні згину балки

$$EJ \cdot q(t) \cdot y''''(x) = q(x,t) - m \cdot \ddot{q}(t)\, y''(x),$$

величина EJ є коефіцієнтом пропорційності між **кривизною балки** (похідними від прогину) та **зовнішнім навантаженням** $q(x,t)$ (це причина) з урахуванням напрямку її дії через $\ddot{q}(t)$. Чим більше EJ, тим менший прогин $y(x) \equiv f(x)$ отримає балка при тому ж навантаженні $q(x,t)$.

Розглядаючи схему балки, що зображена на рисунку 2.6 а при жорстко закріпленому (защемленому) кінці балки в точці A, можна стверджувати, що оскільки прогин та поворот розтину неможливий то повинні виконуватися умови

$$y(x_A, t) = q(t) \cdot f(x_A) = 0;$$

$$\theta(x_A,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x_A, t) = q(t) \cdot y'(x_A) = 0.$$

Ці рівності повинні виконуватися в будь-який момент часу, що буде справедливим, якщо форма (апробуюча) функція $f(x)$ у рівнянні (2.42) задовольняє відповідним граничним умовам у точці закріплення

$$f(x_A) = 0;$$

$$f'(x_A) = 0.$$

Саме тому вибір функції $f(x)$ у методі Релея є критично важливим, бо вона мусить точно відображати геометричні обмеження (кінематичні умови) системи, що коливається.

Оскільки $q(t)$ є довільною функцією часу, силові умови на вільному кінці консольної балки (див. рис. 2.6 а) будуть

виконуватися для будь-якого t тоді і тільки тоді, коли сама функція $f(x)$ буде задовольняти вимогам

$$f''(x_B) = 0;$$

$$f'''(x_B) = 0,$$

тобто, згинаючий момент $M(x,t)$ та поперечна сила $Q(x,t)$ повинні дорівнювати нулю

$$M(x_B,t) = EJ \cdot q(t) \cdot y''(x_B) = EJ \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(x_B,t\right) = 0,$$

$$Q(x_B,t) = EJ \cdot y'''(x_B) = EJ \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\left(x_B,t\right) = 0.$$

Розглядаючи рисунок 2.6 б можна також, базуючись на методі Релея, стверджувати, що прогини та згинаючі моменти в точках C та D для будь-якого часу t повинні дорівнювати нулю, тобто

$$y\left(x_C,t\right) = q(t)\cdot f\left(x_C\right) = 0;$$

$$y\left(x_D,t\right) = q(t)\cdot f\left(x_D\right) = 0;$$

$$M(x_C,t) = EJ \cdot q(t) \cdot y''(x_C) = EJ \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(x_C,t\right) = 0;$$

$$M(x_D,t) = EJ \cdot q(t) \cdot y''(x_D) = EJ \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(x_D,t\right) = 0,$$

отже

$$f(x_C) = 0;$$

$$f(x_D) = 0;$$

$$f''(x_C) = 0;$$

$$f''(x_D) = 0.$$

Після визначення граничних умов для відповідних балок, що зображені на рисунку 2.6 необхідно визначитися з кінетичною та потенційною енергіями цих балок.

Для однорідної балки з розподіленою масою m [кг/м] та приймаючи припущення методу Релея у вигляді рівняння (2.42) можна записати рівняння кінетичної енергії у вигляді рівняння (2.43).

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L m\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\int_0^L f^2(x)dx\cdot\dot{q}^2(t). \qquad (2.43)$$

Потенційна енергія обумовлена енергією пружного згину може бути представлена у вигляді рівняння

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EJ\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\cdot EJ\cdot\int_0^L\left[f''(x)\right]^2 dx\cdot q^2(t). \qquad (2.44)$$

В рівнянні (2.43) інтегральний вираз є ніщо інше, як інерційний коефіцієнт *a*, який визначає параметри інерції тіла

$$a = m\int_0^L f^2(x)dx. \qquad (2.45)$$

А в рівнянні (2.44) інтегральний вираз є ніщо інше, як еквівалентний коефіцієнт жорсткості *c*

$$c = EJ\int_0^L\left[f''(x)\right]^2 dx. \qquad (2.46)$$

Підставляючи рівняння (2.45) та рівняння (2.46) в рівняння (2.26) не складно отримати рівняння для визначення особистої частоти коливання системи

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{EJ\int_0^L\left[f''(x)\right]^2 dx}{m\int_0^L f^2(x)dx}}. \qquad (2.47)$$

Аналогічно до рівняння (2.47) можна отримати рівняння і для визначення власної частоти при поздовжніх та крутильних коливаннях стержня відповідно

$$\omega_{0\Pi} = \sqrt{\frac{EF\int_0^L\left(U'\right)^2 dx}{\rho F\int_0^L U^2 dx}}, \qquad (2.48)$$

де *U* – це форма функція для поздовжніх коливань стержня;

ρ – густина матеріалу;

F – площа поперечного перерізу;

$$\omega_{0k} = \sqrt{\frac{GJ_k \int_0^L (\psi')^2 dx}{\rho J_k \int_0^L \psi^2 dx}}, \qquad (2.49)$$

де ψ – безрозмірна функція, що задовольняє граничним умовам по крученню;

Приклад 2.3:

Необхідно визначити власну частоту коливань балки, яка має консольне закріплення (рис. 2.6а) використовуючи метод Релея при наступних умовах: EJ = const, m = const.

Для визначення власної частоти коливань такої балки використаємо функцію $f(x)$ у вигляді початкових членів розкладу ряду Тейлора точного розв'язку для форми першої моди коливань консольної балки навколо точки защемлення (x=0), обмежившись тільки першим її членом

$$f(x) = \frac{x^2}{L}.$$

Визначимо відповідні похідні використовуючи функцію $f(x)$

$$f'(x) = \frac{2x}{L};$$

$$f''(x) = \frac{2}{L};$$

$$f'''(x) = 0;$$

$$f''''(x) = 0.$$

Обрана функція $f(x)$ повинна задовольняти кінематичним умовам

$$f(x_A) = 0;$$

$$f'(x_A) = 0.$$

А також повинна задовольняти силовим умовам на кінці балки

$$f''(x_B) = 0;$$

$$f'''(x_B) = 0,$$

Порівнюючи отримані похідні від функції $f(x)$ при $x = 0$ із граничними умовами можна побачити, що кінематичні умови повністю виконуються, а силові при $f''(x_B) \neq 0$ оскільки $f''(x) = \text{const}$.

Це означає, що обрана функція **не точно відповідає силовим умовам** вільного кінця, але для методу Релея це допустиме наближення, якщо функція задовольняє хоча б кінематичним умовам.

Використовуючи рівняння (2.47) визначимо власну частоту коливань системи при використанні обраної функції $f(x)$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{EJ\int_0^L \left(\frac{2}{L}\right)^2 dx}{m\int_0^L \left(\frac{x^2}{L}\right)^2 dx}} = \sqrt{\frac{EJ\frac{4}{L^2}\int_0^L dx}{m\frac{1}{L^2}\int_0^L x^4 dx}} = \sqrt{\frac{EJ\frac{4}{L^2}L}{m\frac{1}{L^2}\frac{L^5}{5}}} = \frac{\sqrt{20}}{L^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (2.50)$$

Порівнюючи отримане рішення (2.50) із точним рішенням

$$\omega_0 = \frac{3.516}{L^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (2.51)$$

можна побачити, що отримане рішення має похибку 27.2 %, тому зробимо повторний розрахунок для більшої кількості початкових членів розкладу ряду Тейлора точного розв'язку для форми першої моди коливань консольної балки навколо точки защемлення ($x_A = 0$).

Отже приймемо

$$f(x) = \frac{x^2}{2L} - \frac{x^3}{3L^2} + \frac{x^4}{12L^3}.$$

Визначимо відповідні похідні використовуючи функцію $f(x)$ у новому вигляді

$$f'(x) = \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{3L^3}.$$

$$f''(x) = \frac{1}{L} - \frac{2x}{L^2} + \frac{x^2}{L^3}.$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{L^2} + \frac{2x}{L^3};$$

$$f''''(x)=\frac{2}{L^3};$$

При використанні нової функції $f(x)$ всі кінематичні та силові умови защемлення виконані повністю.

Використовуючи рівняння (2.47) визначимо власну частоту коливань системи

$$\omega_0=\sqrt{\frac{EJ\dfrac{1}{L^6}\displaystyle\int_0^L\left(L^2-2Lx+x^2\right)^2dx}{m\dfrac{1}{144L^6}\displaystyle\int_0^L\left(6L^2x^2-4Lx^3+x^4\right)^2dx}}= \tag{2.52}$$

$$=\sqrt{\frac{144EJ\dfrac{L^5}{5}}{m\dfrac{104}{45}L^9}}=\sqrt{\frac{162EJ}{13L^4m}}=\frac{\sqrt{12.462}}{L^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Порівнюючи отримане рішення (2.52) із точним рішенням (2.51) можна побачити, що отримане рішення має похибку 0.4 %, що є кращім рішенням аніж рішення (2.50).

Зробимо ще один розрахунок, приймемо для розрахунків функцію $f(x)$ у вигляді наближеної апроксимації першої моди коливань консольної балки у вигляді

$$f(x)=1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right).$$

Визначимо відповідні похідні використовуючи функцію $f(x)$ у новому вигляді

$$f'(x)=\frac{\pi}{2L}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right).$$

$$f''(x)=\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right).$$

$$f'''(x)=-\left(\frac{\pi}{2L}\right)^3\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right);$$

$$f''''(x) = -\left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right);$$

При використанні нової функції $f(x)$ всі кінематичні та силові умови защемлення, як і в попередньому випадку виконані повністю.

Використовуючи рівняння (2.47) визначимо власну частоту коливань системи

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{EJ\frac{\pi^4}{16L^4}\int_0^L\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2 dx}{m\int_0^L\left(1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2 dx}} = \sqrt{\frac{EJ\frac{\pi^4}{32L^3}}{m\left(\frac{3\pi-8}{2\pi}\right)L}} = \tag{2.53}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi^5}{16(3\pi-8)L^4}\frac{EJ}{m}} = \frac{\sqrt{13.435}}{L^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Порівнюючи отримане рішення (2.53) із точним рішенням (2.51) можна побачити, що отримане рішення має похибку усього 4.1 %, що є прийнятним рішенням для інженерних розрахунків, але воно є гіршим за рішення (2.52).

Приклад 2.4:

Необхідно побудувати функцію Релея для балки на двох опорах (рис. 2.6 б) та визначити власну частоту коливальної системи.

Для однорідної балки на двох опорах диференціальне рівняння власних коливань

$$EJ \cdot q(t) \cdot y''''(x) + m \cdot \ddot{q}(t)\, y''(x) = 0\ ,$$

має точний розв'язок у вигляді

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

для n = 1, 2, 3, … – номер моди.

Якщо обрати першу моду то функція $f(x)$ матиме простий синусоїдальний вигляд (2.54), а її похідні будуть задовольняти всім кінематичним та силовим граничним умовам методу Релея.

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \tag{2.54}$$

Визначимо похідні від функції $f(x)$

$$f'(x) = \frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{L^2}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

$$f'''(x) = -\frac{\pi^3}{L^3}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right);$$

$$f''''(x) = \frac{\pi^4}{L^4}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right);$$

При $x = 0$ та $x = L$ кінематичні та силові граничні умови повністю виконуються (для балки, що зображена на Рис. 2.6 б)

$$f(x_D) = 0;$$

$$f(x_E) = 0;$$

$$f''(x_D) = 0;$$

$$f''(x_E) = 0.$$

Використовуючи рівняння (2.47) визначимо власну частоту коливань системи, що зображена на рисунку 2.6 б

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{EJ\,\frac{\pi^4}{L^4}\int_0^L\left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)^2 dx}{m\int_0^L\left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)^2 dx}} = \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}\,. \tag{2.55}$$

З отриманого рівняння (2.55) можна побачити, що воно **повністю збігається** з точним аналітичним розв'язком для балок на двох опорах, тому похибка розрахунків в даному випадку складає **0%**.

2.5 Вільні коливання лінійних систем з урахуванням тертя

2.5.1 Лінійне в'язке тертя та рівняння Лагранжа

В якості прикладу системи з в'язким тертям може служити схема, що зображена на рисунка 2.7.

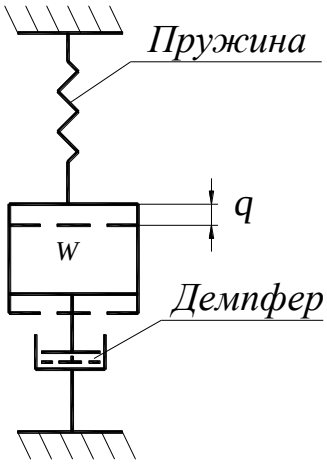


Рис. 2.7 – **Схема коливальної системи з лінійним в’язким тертям:** W – вага вантажу; q – переміщення вантажу

Рівняння Лагранжа для дослідження вільних коливань системи з одним ступенем вільності за наявності лінійного в'язкого тертя має вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}, \qquad (2.56)$$

де Ф – дисипативна функція Релея.

Для сил опору в системі, що діють на окремі точки і пропорційні швидкостям цих точок, дисипативна функція Релея дорівнює **половині суми добутків коефіцієнтів опору (в’язкого тертя) на квадрати швидкостей відповідних точок**.

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i V_i^2}{2}, \qquad (2.57)$$

де V_i – швидкість i-ої точки;

β_i – коефіцієнт в’язкого тертя.

Функція (2.57) за формою подібна до виразу кінетичної енергії. Тому метод, застосований раніше для визначення еквівалентної маси

(рівняння (2.15)–(2.20)), може бути аналогічно використаний для отримання компактного виразу еквівалентного демпфування

$$\Phi = \frac{1}{2} b\dot{q}^2, \tag{2.58}$$

де b – узагальнений **коефіцієнт в'язкого тертя** системи.

Підставляючи (2.58) у (2.56) та використовуючи вже відомі раніше вирази для кінетичної T та потенційної П енергій, отримаємо в загальному вигляді рівняння вільних затухаючих коливань системи з одним ступенем вільності з виразу

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0, \tag{2.59}$$

або у розгорнутому вигляді, для системи з розподіленими параметрами (наприклад, неоднорідна балка з розподіленими масою $m(x)$, жорсткістю $EJ(x)$ та демпфуванням $\beta(x)$), при використанні функції форми $f(x)$ (метод Релея, $y(x,t) = q(t)\cdot f(x)$), матиме вигляд

$$\int_0^L m(x) f^2(x) dx \cdot \ddot{q} + \int_0^L \beta(x) f^2(x) dx \cdot \dot{q} + \int_0^L E(x) J(x) \left[f''(x) \right]^2 dx \cdot q = 0. \tag{2.60}$$

Якщо поділити всі члени рівняння (2.59) на коефіцієнт, який визначає параметри інерції тіла a то це рівняння прийме вигляд

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0{}^2 q = 0, \tag{2.61}$$

де ω_0^2 – є власна частотою коливань системи

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a};$$

h – коефіцієнт в'язкого демпфування, який характеризує інтенсивність зменшення амплітуди коливань

$$h = \frac{b}{2a}.$$

Приватне рішення рівняння (2.61) знайдемо по методу Ейлера у вигляді

$$q = Be^{\lambda t}, \tag{2.62}$$

де t – час;

λ – стала, що визначається з умови, що (2.62) повинна задовольняти (2.61).

Підставимо рівняння (2.62) в рівняння (2.61) та отримаємо характеристичне рівняння у вигляді

$$\lambda^2+2h\lambda+\omega_0^2=0. \qquad (2.63)$$

Корені рівняння (2.63) не складно визначити у вигляді рішення

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}\,. \qquad (2.64)$$

З отриманого рівняння (2.64) можна побачити, що обидва отримані корені залежать від в'язкого тертя та власної частоти коливань системи. Його рішення може мати три випадки: $h^2<\omega_0^2$ (коливальний); $h^2>\omega_0^2$ (аперіодичний); $h^2=\omega_0^2$ (критичний).

Розглянемо випадок перший: $h^2 < \omega_0^2$.

У такому випадку можна спростити запис рівняння (2.64) і представити його у вигляді рівняння (2.65), якщо зробити заміну

$$\sqrt{h^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - h^2} = i\tilde{\omega},$$

$$\lambda_{1,2} = -h \pm i\tilde{\omega}, \qquad (2.65)$$

де $\tilde{\omega}$ – власна частота з урахуванням корегування на коефіцієнт в'язкості.

Приватне рішення рівняння (2.61) для випадку $h^2<\omega_0^2$ матиме вигляд у амплітудно-фазовій формі

$$q = Ae^{-ht}\cos\left(\tilde{\omega}t - \varphi\right), \qquad (2.66)$$

або в експоненціальній формі

$$q = e^{-h\cdot t}\left(C_1 \cdot \cos\left(\tilde{\omega}t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\tilde{\omega}t\right)\right). \qquad (2.67)$$

Для визначення сталих C_1 та C_2 в рівнянні (2.67) зробимо припущення, що при $t = 0$: $q = q_0$ та $\dot{q} = \dot{q}_0$. Якщо підставити ці значення в рівняння (2.67) то можна записати, що

$$C_1 = q_0,$$

$$C_2 = \frac{\dot{q}_0 + hq_0}{\tilde{\omega}}.$$

Отже, рівняння (2.67) можна переписати у вигляді

$$q = e^{-h\cdot t}\left(q_0\cos\left(\tilde{\omega}t\right) + \left(\frac{\dot{q}_0 + hq_0}{\tilde{\omega}}\right)\sin\left(\tilde{\omega}t\right)\right). \qquad (2.68)$$

Для рівняння (2.66) сталі константи можна визначити з рівнянь

$$A = \sqrt{C_1^{\,2} + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \frac{\left(\dot{q}_0 + hq_0\right)^2}{\tilde{\omega}^2}},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{C_1}{C_2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\tilde{\omega} q_0}{\dot{q}_0 + hq_0}\right).$$

Таким чином, отримані рівняння (2.66) та (2.67) дозволяють змоделювати затухаючий коливальний процес, подібний до того, що зображено на рисунку 2.8.

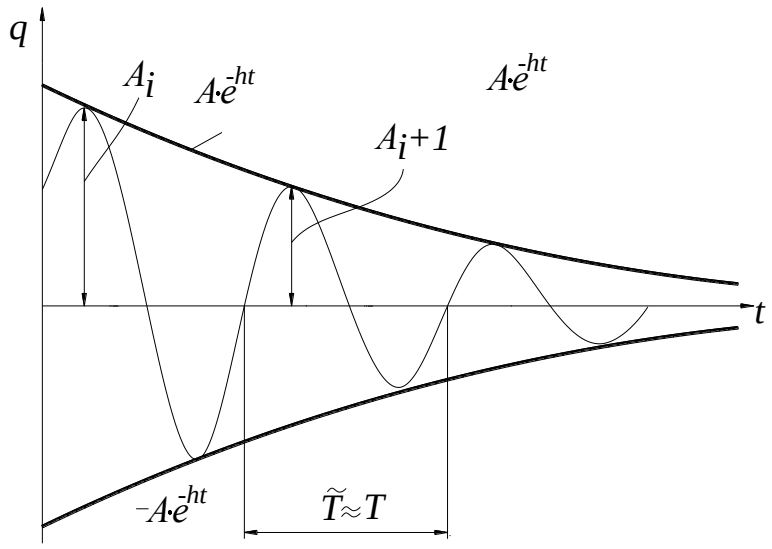


Рис. 2.8 – **Осцилограма вільних коливань, що загасають при $h^2 < \omega_0^2$**

Проміжок часу між двома проходами рівноваги в одному напрямку приймемо за умовний період

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{h^2}{\omega_0^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{\omega_0^2}}} \cong T,$$

де T – період вільних коливань системи при відсутності опору.

В моменти часу t_i (точки торкання кривих $\pm Ae^{-ht}$), коли відхилення від положення рівноваги майже максимальні, відношення двох послідовних максимальних відхилень залишається постійним

$$\frac{A_i}{A_{i+1}} = \frac{Ae^{-ht_i}}{Ae^{-h\left(t_i + \tilde{T}\right)}} = e^{h\tilde{T}} = \text{const}.$$

Логарифм відношень двох послідовних максимальних відхилень називається логарифмічним декрементом коливань і пов'язаний із в’язким тертям та власною частотою коливань системи залежністю

$$\Delta = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} \cong hT = h\frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Розглянемо випадок другий: $h^2 > \omega_0^2$.

Корені характеристичного рівняння (2.64) будуть дійсними, від’ємними та різними по величині, тому представимо їх у вигляді

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2} = -h \pm k, \qquad (2.69)$$

Приватне рішення рівняння (2.61) для випадку $h^2<\omega_0^2$ матиме вигляд у амплітудній (гіперболічній) формі

$$q = Ae^{-ht}\cosh(kt - \varphi), \qquad (2.70)$$

або в експоненціальній формі

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \qquad (2.71)$$

У цьому випадку розв'язок втрачає періодичний характер і вже не описує коливального руху. В'язкий опір є настільки великим, що при відхиленні тіла від положення рівноваги воно не здійснює коливань, а повільно повертається у вихідне положення. Таку систему називають **передемпфованою (надкритично демпфованою)**, а її рух – **аперіодичним**.

Сталі інтегрування у виразі (2.71) визначаються з початкових умов при $t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$. Вони можуть бути визначені з системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = q_0, \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = \dot{q}_0, \end{cases} \qquad (2.72)$$

звідки

$$C_1 = \frac{\dot{q}_0 - \lambda_2 q_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad (2.73)$$

$$C_2 = \frac{\lambda_1 q_0 - \dot{q}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}. \qquad (2.74)$$

Якщо підставити рівняння (2.73) та (2.74) в рівняння (2.71) то його можна переписати у вигляді

$$q = \frac{\dot{q}_0 - \lambda_2 q_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 q_0 - \dot{q}_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}. \qquad (2.75)$$

Залежно від початкових умов (початкового зміщення та початкової швидкості) затухаючі коливальні рухи можуть набувати різного характеру, графічні приклади яких наведено на рисунку 2.9.

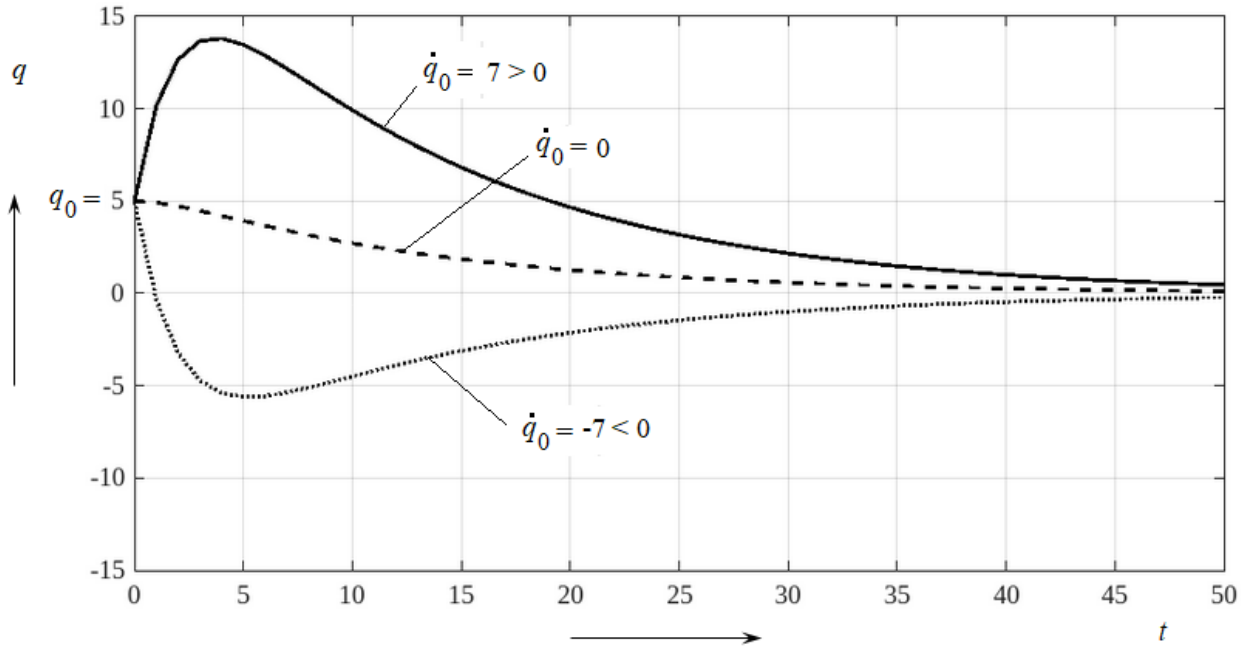


Рис. 2.9 – **Види затухаючого коливального руху залежно від початкових умов при $h^2 > \omega_0^2$**

Розглянемо випадок третій: $h^2 = \omega_0^2$.

У разі коли $h^2 = \omega^2_0$ коливальний рух має назву *критичним*, оскільки при такому русі частота коливань відсутня і втрачається коливальний характер руху.

З рівняння (2.64) отримаємо

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -h. \qquad (2.76)$$

Приватне рішення рівняння (2.61) для випадку $h^2 = \omega_0^2$ матиме вигляд у амплітудній формі

$$q = A(1 + ht)e^{-ht}, \qquad (2.77)$$

або в експоненціальній формі

$$q = C_1 e^{-ht} + C_2 t e^{-ht} = (C_1 + C_2 t)e^{-ht}. \qquad (2.78)$$

Підставляючи в рівняння (2.78) початкові умови $t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$ отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 = q_0, \\ C_2 - hq_0 = \dot{q}_0, \end{cases} \tag{2.79}$$

звідки

$$C_1 = q_0, \tag{2.80}$$

$$C_2 = \dot{q}_0 + hq_0. \tag{2.81}$$

Тоді загальне рішення в експоненціальній формі (2.78) можна переписати у вигляді

$$q = e^{-ht}\left[q_0 + \left(\dot{q}_0 + hq_0\right)t\right]. \tag{2.82}$$

Порівнюючи рішення (2.82) із рішенням (2.75) можна побачити, що вони по характеру коливання майже не відрізняються один від одного (рис. 2.10).

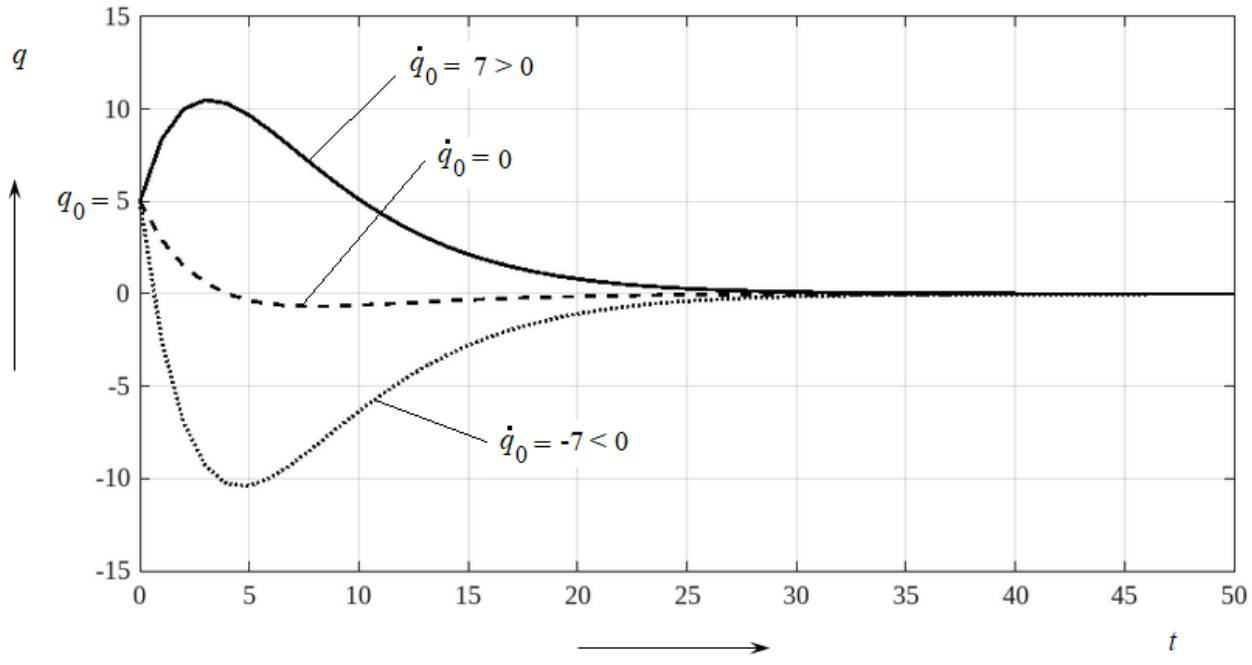


Рис. 2.10 – **Види затухаючого коливального руху залежно від початкових умов при $h^2 = \omega_0^2$**

Відмінність між функцією (2.75) та функцією (2.82) полягає в тому, що при $\dot{q}_0 = 0$ функція $q = f(t)$ за рівнянням (2.82) має від'ємні значення екстремуму, а за рівнянням (2.75) – позитивні.

Приклад 2.5:

Розглянемо механічну система (рис. 2.11), що складається з твердого тіла маси m_2, яке здійснює поступальний рух вздовж горизонтальної напрямної, та обертового диска, що має масу m_1 і радіус r_1. Поступальний рух тіла кінематичним шляхом пов'язаний з обертанням диска без проковзування. Диск змонтований на нерухомій осі та має момент інерції I. До диска через важіль довжиною L приєднано в'язкий демпфер з коефіцієнтом опору b_1. Поступальне тіло з'єднане з нерухомою опорою пружиною лінійної жорсткості c_2. Маси пружини, демпфера та допоміжних елементів механізму (ролики, шарніри тощо) вважаються незначними та в розрахунках не враховуються. Рух системи відбувається в межах малих переміщень, що дозволяє застосовувати лінійну модель коливань. Як узагальнену координату прийнято поступальне переміщення тіла m_2 вздовж напрямної q. Необхідно записати рівняння коливання системи на основі рівняння Лагранжа.

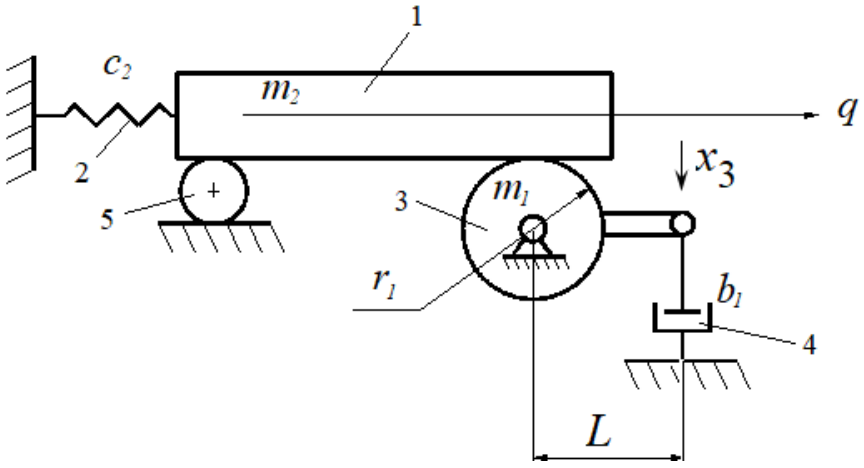


Рис. 2.11 – **Розрахункова схема до Прикладу 2.5:**
1 – рейка; 2 – пружина; 3 – демпфер; 4 – диск; 5 – опорний ролик;
m_1, m_2 – маси диска та рейки; c_2 – жорсткість пружини;
b_1 – коефіцієнт в'язкості демпфера

Кінетична енергія системи, що зображена на рисунку 2.11 буде дорівнювати

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2,$$

де

$$I = \frac{m_1 r_1^2}{2},$$

та з урахуванням швидкості повороту диску $\dot{\varphi} = \dfrac{\dot{q}}{r_1}$, отримаємо

$$T = \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{1}{2} m_1 \right)\dot{q}^2 . \qquad \text{(а.3)}$$

Потенційна енергія системи, що зображена на рисунку 2.11 буде дорівнювати

$$\Pi = \frac{1}{2} c_2 q^2 . \qquad \text{(б.3)}$$

Дисипативна функція Релея для системи, що зображена на рисунку 2.11 буде дорівнювати

$$\Phi = \frac{1}{2} b_1 \dot{x}_3^2, \qquad \text{(в.3)}$$

де x_3 – переміщення поршня демпфера.

Відомо, що x_3 можна визначити з залежності

$$x_3 = L \cdot \sin(\varphi_3), \qquad \text{(г.3)}$$

але при малих переміщеннях, можна прийняти припущення, що значення $\sin(\varphi_3) \cong \varphi_3$. У такому разі

$$x_3 \cong L \cdot \varphi_3, \qquad \text{(д.3)}$$

$$\dot{x}_3 \cong L \cdot \dot{\varphi}_3, \qquad \text{(е.3)}$$

а з урахуванням того, що кут $\varphi_3 = q / r_1$, отримаємо

$$x_3 \cong L \cdot \frac{q}{r_1}, \qquad \text{(є.3)}$$

$$\dot{x}_3 \cong L \cdot \frac{\dot{q}}{r_1}, \qquad \text{(ж.3)}$$

Підставляючи рівняння (ж.3) у рівняння (в.3) представимо функцію Релея в кінцевому вигляді

$$\Phi = \frac{1}{2} b_1 \frac{L^2}{r_1^2} \dot{q}^2 . \qquad \text{(і.3)}$$

Виконаємо підстановку рівнянь (а.3), (б.3) та (і.3) в рівняння Лагранжа (2.56).

У такому разі отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}}\right)=\left(m_2+\frac{1}{2}m_1\right)\ddot{q},$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}=c_2 q,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}=b_1\frac{L^2}{r_1^2}\dot{q}.$$

Таким чином рівняння коливання системи на основі рівняння Лагранжа матиме вигляд

$$\left(m_2+\frac{1}{2}m_1\right)\ddot{q}+b_1\frac{L^2}{r_1^2}\dot{q}+c_2 q=0,$$

в якому вирази

$$a=m_1+\frac{1}{2}m_1,$$

є ніщо інше ніж параметр інерції тіла *a*;

$$b=b_1\frac{L^2}{r_1^2},$$

є ніщо інше ніж узагальнений коефіцієнт в'язкого тертя системи;

$$c=c_2.$$

є ніщо інше ніж приведений коефіцієнт жорсткості системи;

2.5.2 Сухе тертя в рівнянні Лагранжа

За наявності нелінійного опору в системі, що коливається, рівняння Лагранжа записується у такій формі

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}+Q_*, \qquad (2.83)$$

де Q_* - узагальнена сила нелінійного опору.

Узагальнена сила нелінійного опору є функцією від швидкості переміщення $\dot{q}$, яку можна представити у вигляді

$$Q_* = Q_*(\dot{q}).$$

У такому разі рівняння Лагранжа (2.83) отримає вигляд (2.84) за аналогією з рівнянням (2.59).

$$a\ddot{q} + cq = Q_*(\dot{q}). \tag{2.84}$$

Якщо вважати, що

$$f(\dot{q}) = -\frac{Q_*(\dot{q})}{a}, \tag{2.85}$$

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}, \tag{2.86}$$

то можна записати рівняння (2.84) у вигляді

$$\ddot{q} + f(\dot{q}) + \omega_0^2 q = 0. \tag{2.87}$$

Для подальшого аналізу рівняння (2.87) застосуємо метод енергетичного балансу та приймемо такі припущення:

а) період коливань T^* вважатимемо рівним періоду власних (вільних) коливань системи;

б) на інтервалі $0 < t \le T$ розв'язок рівняння коливань має вигляд

$$q = q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Відомо, що робота $A_{\text{ТР}}$ сил нелінійного опору за період T дорівнює

$$A_{\text{ТР}} = \int_0^T Q_* dq.$$

Враховуючи рівняння (2.85) та рівняння (2.86), а також те, що

$$dq = \dot{q}dt,$$

отримаємо

$$A_{TP} = \int_0^T af(\dot{q})\dot{q}dt = aq_0 \int_0^{2\pi} f(\dot{q})\cos(\omega_0 t + \varphi)d(\omega_0 t + \varphi). \tag{2.88}$$

Ця робота дорівнює зміні кінетичної енергії системи за той же проміжок часу, тобто

$$\Delta W = a\omega_0^2\left(q_0\Delta q_0 - 0.5\left(\Delta q_0\right)^2\right) \approx a\omega_0^2 q_0\Delta q_0, \qquad (2.89)$$

де Δq_0 – абсолютне зменшення амплітуди за період T.

Прирівнюючи праві частини рівняння (2.88) та рівняння (2.89) отримаємо

$$\Delta q_0 = \frac{1}{\omega_0^2}\cdot\int_0^{2\pi} f(\dot{q})\cos\left(\omega_0 t+\varphi\right)d\left(\omega_0 t+\varphi\right). \qquad (2.90)$$

Для сухого тертя з урахуванням рівняння (2.85) та рівняння (2.86) має місце вираз

$$f(\dot{q}) = \frac{\pm Q_R}{a}, \qquad (2.91)$$

де Q_R – постійна за величиною узагальнена сила, що відповідає силам тертя Кулона, яка зі зміною напрямку руху змінює знак.

Підставляючи рівняння (2.91) у рівняння (2.90) отримаємо

$$\Delta q_0 = \frac{4Q_R}{a\omega_0^2}\int_0^{\pi/2}\cos\left(\omega_0 t+\varphi\right)d\left(\omega_0 t+\varphi\right) = \frac{4Q_R}{a\omega_0^2} = \frac{4Q_R}{c}. \qquad (2.92)$$

Величина $\frac{Q_R}{c}$ є не що інше аніж статичне відхилення системи від рівноважного положення під дією узагальненої сили тертя Кулона. Ця величина визначає межи нечутливої зони коливальної системи, що розглядається.

Таким чином, амплітуда коливань при наявності сухого тертя за час руху в циклі зменшується на одну й туж величину, що визначається за рівнянням (2.92), отже коливання зменшуються по закону арифметичної прогресії.

Сили тертя Кулона припиняють рух в той момент часу, коли швидкість коливання дорівнює нулю ($\dot{q} = 0$).

$$Q_p \le Q_R, \qquad (2.93)$$

де Q_p – узагальнена відновлююча сила в системі, що розглядається.

Загальний вигляд описаного процесу зменшення амплітуди коливання системи, що розглядається, представлено на рисунку 2.12.

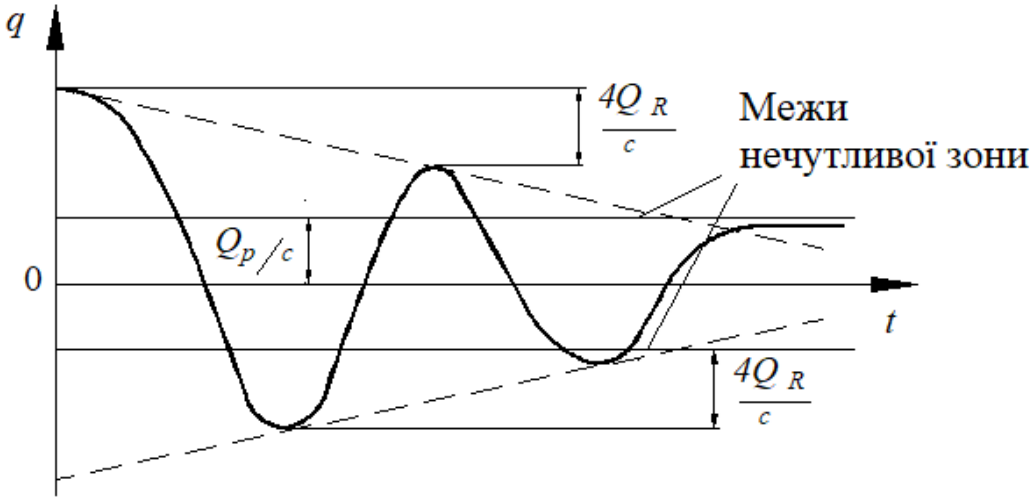


Рис. 2.12 – **Вільні коливання, що затухають при наявності сухого тертя**

Вільні коливання, що характеризують процес затухаючих нелінійних коливань механічної системи з нечутливою зоною вказують на енергетичні втратами за цикл руху. Амплітуда коливань зменшується з часом унаслідок дисипації енергії, причому характер затухання є нелінійним, що проявляється у лінійному спаданні огинаючих, а не експоненційному законі.

Наявність нечутливої зони означає існування інтервалу переміщень, у межах якого відновлювальна сила або сила опору практично відсутня. При великих амплітудах система більшу частину часу перебуває поза нечутливою зоною, тому втрати енергії за період є значними. Із зменшенням амплітуди рух усе частіше відбувається всередині нечутливої зони, внаслідок чого інтенсивність затухання зменшується.

Величина зменшення амплітуди за один період визначається втратами енергії Q_R і пропорційна відношенню $4Q_R/c$, що відображає прямий зв'язок між дисипацією енергії та жорсткістю системи. Кінцевим результатом процесу є припинення коливань і встановлення системи в положенні рівноваги в межах нечутливої зони. Отже, графік наочно демонструє вплив нелінійного демпфування та нечутливої зони на характер затухаючих коливань і підтверджує доцільність застосування енергетичного підходу для аналізу таких систем.

Слід заначити, що нелінійна функція (2.85) для опису залежності сил нелінійного тертя від швидкості може бути представлена у вигляді рівняння (2.94) за умови, що показник ступеня позитивне число, яке більше одиниці ($n > 1$) та не дорівнює одиниці ($n \neq 1$).

$$f\left(\dot{q}\right) = -\frac{b}{a}\left|\dot{q}\right|^{n-1}\dot{q} = -2h\dot{q}, \qquad (2.94)$$

Відзначимо, що показник ступеня n залежить від конкретних властивостей сили тертя. Рівняння (2.94) може бути також використане і для лінійної системи, у цьому разі показник ступеня n буде дорівнювати одиниці ($n = 1$).

Характер зміни функції $f\left(\dot{q}\right)$ в залежності від значення n та $\dot{q}$ можна побачити на рисунку 2.13 для типових значень в'язкості амортизатора мікроавтобуса (b =350 Нс/м) при дії на амортизатор ваги масою a = 2500 кг.

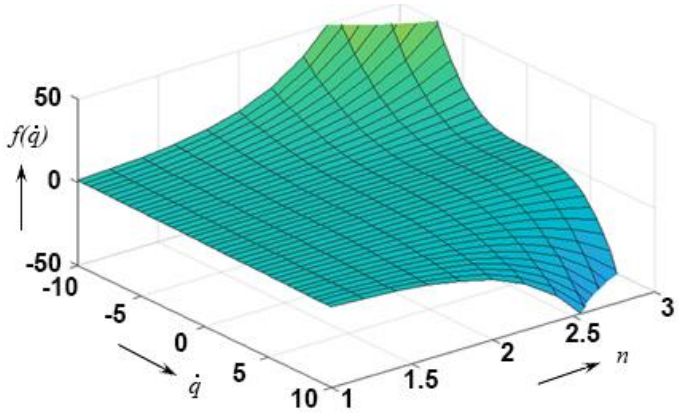


Рис. 2.13 – **Характер зміни $f\left(\dot{q}\right)$ від значення n та $\dot{q}$**

ПИТАННЯ ДО САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке власна частота коливань?
2. Запишіть рівняння Лагранжа 2-го роду для системи з одним ступенем вільності без тертя.
3. Який фізичний зміст узагальненого переміщення та узагальненої швидкості?
4. Що таке крутильні коливання?
5. Де застосовується метод Релея?
6. Запишіть рівняння Лагранжа 2-го роду для системи з одним ступенем вільності та з лінійним в'язкісним тертям.
7. Що таке метод енергетичного балансу?

Розділ 3
АВТОКОЛИВАННЯ

3.1 Класифікація автоколивальних систем та автоколивань

Неконсервативні автономні системи, що мають один ступінь вільності, поділяються на дві категорії: пасивні (дисипативні), тобто в яких енергія розсіюється, та активні, де енергія надходить ззовні. В останніх можуть виникати автоколивання – це стійкі незатухаючі коливання, які підтримуються за рахунок джерела енергії неколивальної природи, яке компенсує втрати на тертя. За своєю структурою та механізмом функціонування активні системи з одним ступенем вільності в яких виникають автоколивання класифікують на три групи: осциляторні, накопичувальні та комбіновані.

До осциляторної автоколивальної системи можна віднести маятник Фруда, який отримав назву від ім’я англійського вченого *William Froude*. Не дивлячись на те, що *W. Froude* вивчав вплив коливань хвиль на човни, Маятник Фруда в залежності від термінологічного його використання має декілька проявів:

1. **Маятник Фруда у пневматиці та гідравліці (***flutter* або аеропружна (гідропружна) нестійкість**)** – це умовний маятник, у якому енергія підводиться не зовнішньою періодичною силою, а через взаємодію з потоком (газу або рідини). Саме ця взаємодія створює нелінійний зворотний зв’язок між швидкістю руху хвилі в пружному тілі та силами з боку середовища (див. Рис. 3.1).

2. **Маятник Фруда в механічних системах** (фрикційний маятник) – механічна автоколивальна система, у якій незатухаючі коливання підтримуються силами сухого тертя, що мають від’ємний демпфувальний характер у певному діапазоні швидкостей та зі збільшенням швидкості зменшуються (див. Рис. 3.2).

В осциляторній автоколивальній системі генеруються неперервні автоколивання, які за своєю формою близькі до гармонійних. Математично такий рух описується рівнянням Лагранжа, що містить нелінійний доданок. На фазовій площині (див. Рис. 3.2 в) цей процес відображається у вигляді замкнутої неперервної траєкторії, яка називається **граничним циклом**. Важливою властивістю таких систем є їхня здатність до здійснення вільних коливань.

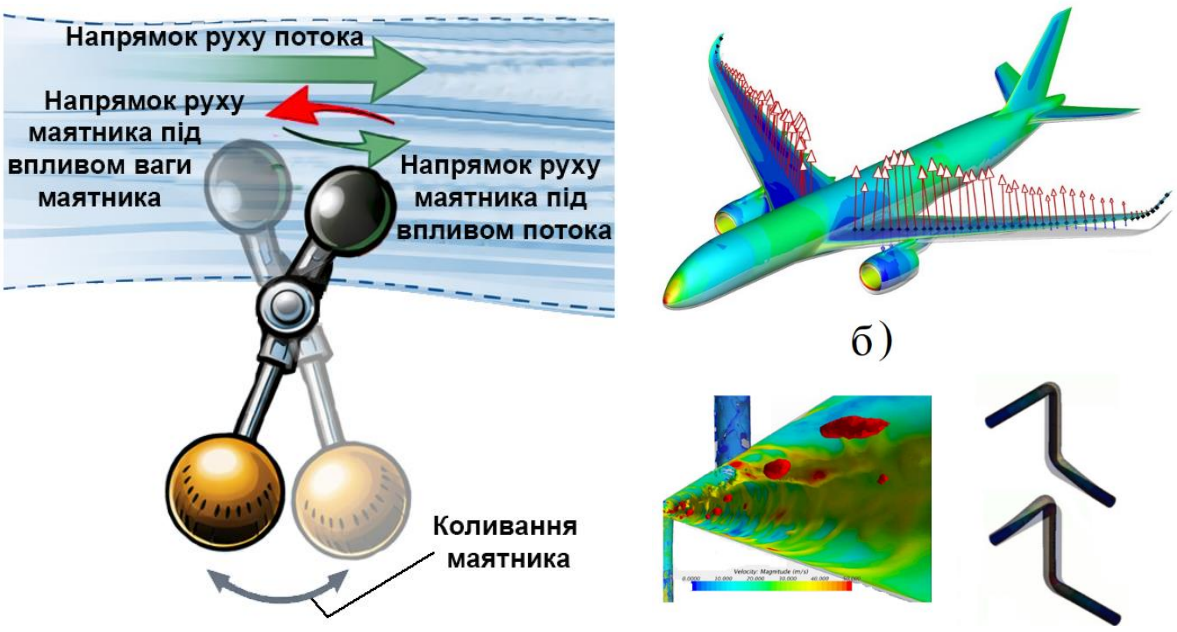


Рис. 3.1 – **Маятник Фруда у пневматиці та гідравліці:**
а – схема роботи маятника при взаємодії з потоком; б - вібрація крил літака під впливом потоку повітря; в – вібрація стінок труби під впливом потоку рідини в ній; г – вібрація труб в наслідок протікання рідини через них

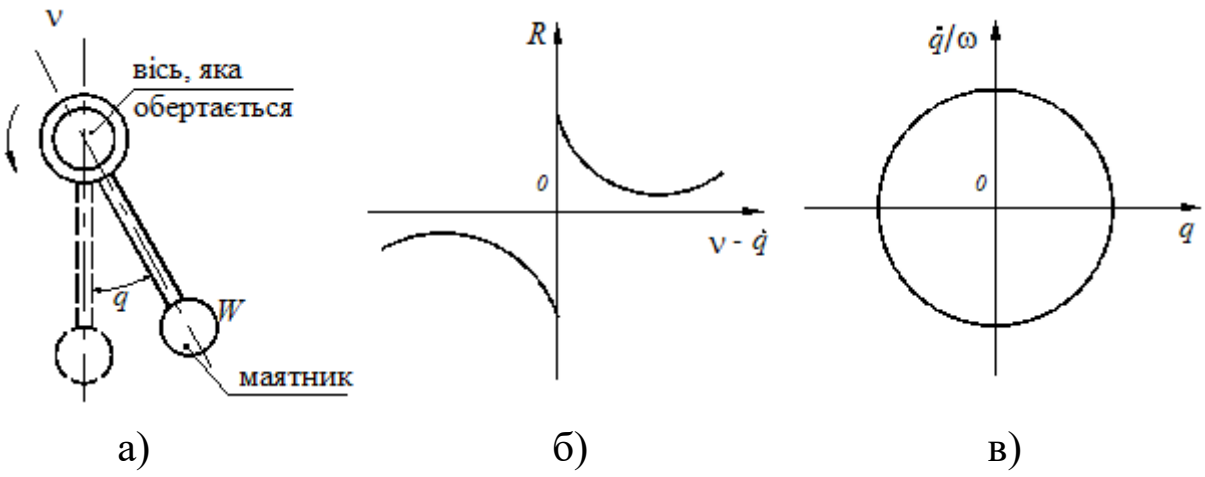
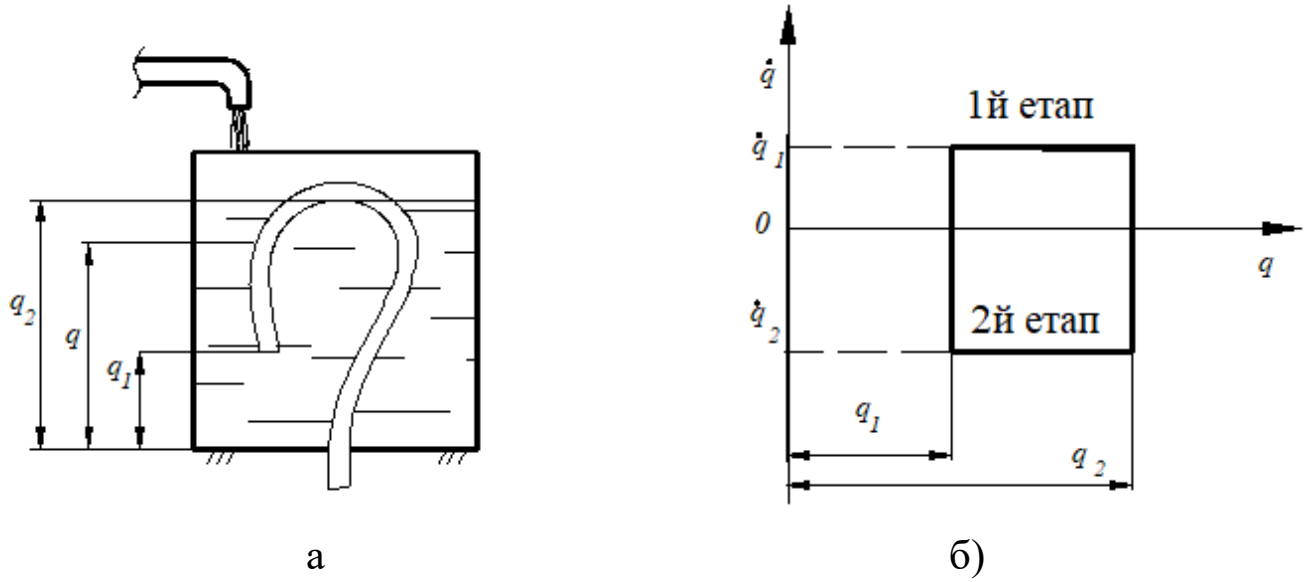


Рис. 3.2 – **Маятник Фруда (фрикційний маятник):**
ν - кутова частота обертання осі маятника; а – маятник; б – характеристика сили тертя між маятником та його віссю; в – фазова діаграма

У автоколивальних системах другого типу (накопичувальні) роль основного елемента виконує не коливальна ланка, а **накопичувач енергії**, робота якого регулюється спеціальним **перемикачем (комутатором)**. Цей перемикач керує циклами накопичення та скидання енергії (див. Рис. 3.3).



а б)

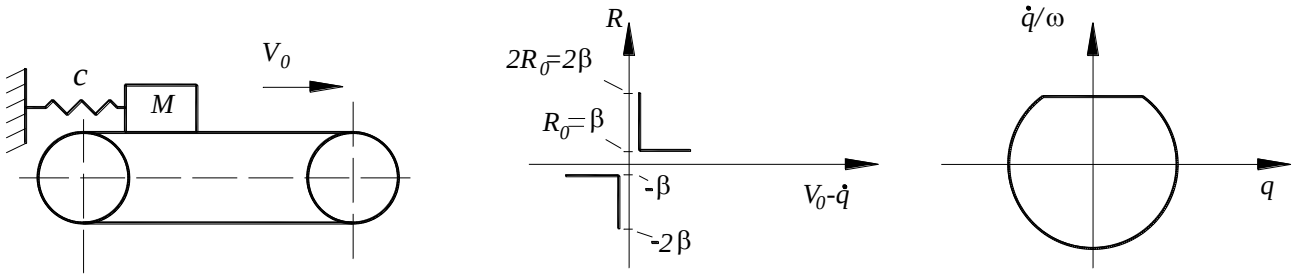
Рис. 3.3 – **Накопичувальна автоколивальна система:**
а – схема з водяним джерелом; б – граничний цикл

Принциповою відмінністю таких систем є те, що вони не здатні до вільних коливань – для їхньої роботи необхідне постійне втручання перемикача, який керує потоком енергії.

У автоколивальних системах накопичувального типу виникають **розривні періодичні автоколивання**, які характеризуються наявністю кількох часових етапів (ділянок циклу). Опис таких коливань здійснюється за допомогою різних диференціальних рівнянь для кожної ділянки, які інтегруються окремо. Після цього отримані розв'язки «зшиваються» (узгоджуються) на межах сусідніх ділянок. Фазовий портрет такої системи (Рис. 3.3 б) містить розриви швидкості, що відповідає миттєвим змінам параметрів руху при перемиканні етапів.

У автоколивальних системах змішаного типу також виникають **розривні коливання**, однак їхня природа є складнішою: окремі ділянки граничного циклу описуються рівняннями Лагранжа, тоді як інші – рівняннями, що не належать до лагранжевого формалізму (нелагранжевими). Розв'язки для кожної ділянки знаходять окремо, після чого їх «зшивають» на межах, як показано на рисунку 3.4 в.

За побудованим **граничним циклом** (див. Рис. 3.4 в) визначають розмах розривних автоколивань, а їхній період обчислюють як суму тривалостей окремих етапів руху. На фазовій траєкторії присутні кутові точки, які відповідають розривам швидкості та прискорення.



а) б) в)

Рис. 3.4 – **Автоколивальна система змішаного типу:**
а – осциллятор на транспортері, що рухається; б – характеристика сухого тертя; в – граничний цикл

Отже можна відзначити, що ключовими особливостями автоколивань є:

- здатність до самозбудження;
- незалежність амплітуди та частоти сталих коливань від початкових умов.

Під час аналізу автоколивальних систем необхідно вміти розв'язувати такі задачі:

- визначення умов виникнення автоколивань;
- знаходження їхньої амплітуди (розмаху) та частоти;
- дослідження швидкості перехідного процесу;
- аналіз стійкості встановлених автоколивань та ін.

3.2 Визначення умов виникнення автоколивань

В автоколивальній осциляторній системі, окрім сили тертя, спрямованої проти швидкості руху, виникає додаткова сила, що діє в напрямку руху системи. Цю силу прийнято називати від'ємним тертям або прискорювальною силою, оскільки вона сприяє зростанню енергії коливань.

До класу автоколивальних осциляторних систем належать системи, динаміка яких описується рівнянням Релея (3.1) або рівнянням Ван дер Поля (3.2). Ці рівняння є класичними моделями для вивчення автоколивальних процесів.

$$a\ddot{q} - b_1\dot{q} + b_3\dot{q}^3 + cq = 0, \tag{3.1}$$

$$\ddot{q} - \frac{b}{\sqrt{ac}}\left(1 - q^2\right)\dot{q} + q = 0. \tag{3.2}$$

Порівнюючи рішення рівняння графічно при рівних початкових умовах отримаємо наступні результати у вигляді, що зображено на рисунку 3.4.

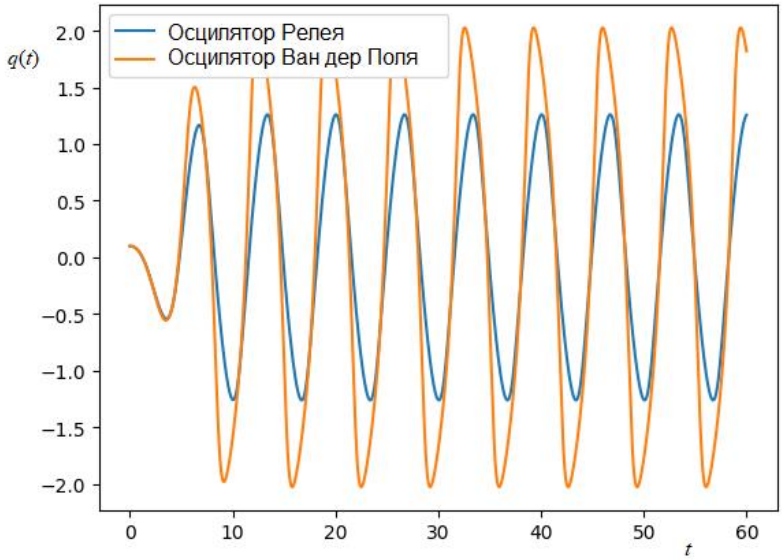


Рис. 3.4 – **Рішення рівняння (3.1) та рівняння (3.2)**

Якщо в рівнянні (3.1), відкинути нелінійний член, отримаємо рівняння (3.3) **лінеаризованої моделі** автоколивальної системи. Це рівняння описує поведінку системи в наближенні, коли нелінійними ефектами можна знехтувати, що дозволяє спростити аналіз її властивостей, зокрема визначити умови втрати стійкості положення рівноваги.

$$a\ddot{q} - b\dot{q} + cq = 0. \tag{3.3}$$

Аналіз рівняння (3.3) показує, що воно дозволяє визначити лише умови виникнення автоколивань. Що ж стосується амплітуди цих коливань, то її можна знайти тільки за умови врахування відкинутих нелінійних членів.

Розв'язок рівняння (3.3) шукатимемо за тією ж схемою, що й розв'язок рівняння (2.59). Для цього поділимо всі члени рівняння на коефіцієнт інерції a та отримаємо

$$\ddot{q} - 2h\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \tag{3.4}$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}, \tag{3.5}$$

$$h = \frac{b}{2a}. \tag{3.6}$$

Характеристичне рівняння та його корені у такому разі приймуть вигляд

$$\lambda^2 - 2h\lambda + \omega_0^2 = 0, \tag{3.7}$$

$$\lambda_{1,2} = h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}\,. \tag{3.8}$$

Залежно від величини в'язкого тертя можливі три випадки для коренів характеристичного рівняння, яким відповідають три різні типи розв'язки диференціального рівняння руху.

Розглянемо випадок перший: $h^2 < \omega_0^2$.

$$\lambda_{1,2} = h \pm i\sqrt{\omega_0^2 - h^2} = h \pm i\tilde{\omega}. \tag{3.9}$$

По аналогії з рівнянням (2.61) приватне рішення рівняння (3.4) для випадку $h^2<\omega_0^2$ матиме вигляд у амплітудно-фазовій формі

$$q = Ae^{ht}\left(\cos\tilde{\omega}t - \varphi\right), \tag{3.10}$$

або в експоненціальній формі

$$q = e^{h\cdot t}\left(C_1 \cdot \cos\left(\tilde{\omega}t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\tilde{\omega}t\right)\right). \tag{3.11}$$

Рішення рівняння (3.10) або рівняння (3.11) можна зобразити графічно у вигляді зростаючого коливального руху, як показано на рисунку 3.5.

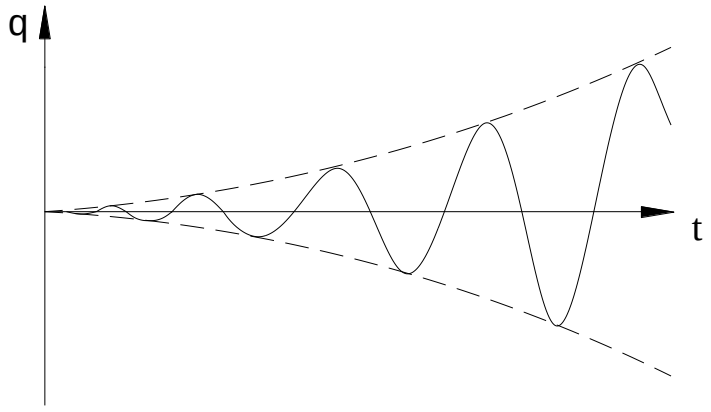


Рис. 3.4 – **Зростаюче коливання системи**

Розглянемо випадок другий: $h^2 > \omega_0^2$.

У такому випадку буде мати місце велике від'ємне тертя, а рішення рівняння (3.7) матиме вигляд

$$\lambda_{1,2} = h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2} = h \pm k\,. \tag{3.12}$$

По аналогії з рівнянням (2.61) приватне рішення рівняння (3.4) для випадку $h^2 > \omega_0^2$ матиме вигляд у амплітудній (гіперболічній) формі

$$q = Ae^{ht}\cosh(kt - \varphi), \tag{3.13}$$

або в експоненціальній формі

$$q = e^{ht}\left(C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}\right) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{3.14}$$

Рішення рівняння (3.14) описує зростаючий неколивальний рух точки (аперіодичний рух точки).

Розглянемо випадок другий: $h^2 = \omega_0^2$.

У такому випадку буде мати місце

$$\lambda_{1,2} = h. \tag{3.15}$$

Рішення рівняння (3.4) для випадку $h^2 = \omega_0^2$ матиме вигляд у амплітудній формі

$$q = A(1 + ht)e^{ht}, \tag{3.16}$$

або в експоненціальній формі

$$q = C_1 e^{ht} + C_2 te^{ht} = (C_1 + C_2 t)e^{ht}. \tag{3.17}$$

Як і в попередньому випадку, це зростаючий неколивальний рух. Таким чином, умовою виникнення автоколивань у досліджуваній системі є тільки перший випадок, коли $h^2 < \omega_0^2$.

3.3 Визначення амплітуди та частоти автоколивань осциляторної системи методом гармонійного балансу

Нелінійне рівняння автоколивальної системи можна розв'язати наближеними аналітичними методами або дослідити якісно, побудувавши фазову діаграму. До групи наближених аналітичних методів належить *метод гармонічного балансу*.

Застосуємо цей метод до рівняння Релея (3.1). Розв'язок шукатимемо у вигляді

$$q = A\cos(\omega t - \varphi) = A\cos\psi, \tag{3.18}$$

вважаючи, що в системі можливі автоколивання, що установилися.

Підставимо вираз (3.18) у вихідне диференціальне рівняння (3.1), а нелінійний член розкладемо в ряд Фур'є. У результаті отримаємо

$$A\left(-a\omega^2+c\right)\cos\left(\psi\right)+b_1A\omega\sin\left(\psi\right)-b_3\omega^3A^3\left(\frac{3}{4}\sin\left(\psi\right)-\frac{1}{4}\sin\left(3\psi\right)\right)=0.$$

Умова рівності нулю коефіцієнтів при sin(ψ) та cos(ψ) дає два рівняння, з яких визначаються амплітуда A та частота ω автоколивань

$$b_1A\omega-\frac{3}{4}b_3\omega^3A^3=0, \tag{3.19}$$

$$-a\omega^2A+cA=0, \tag{3.20}$$

при цьому слід зауважити, що нескомпенсованим залишився член 0.25sin(3ψ), яким у даному випадку ми нехтуємо. Це типова процедура методу гармонічного балансу, де вищі гармоніки відкидаються для отримання першого наближення.

З рівняння (3.19) нескладно отримати значення амплітуди:

$$A^2=\frac{4b_1}{3b_3\omega^2}, \tag{3.21}$$

а з рівняння (3.20) значення частоти

$$\omega^2=\frac{c}{a}. \tag{3.22}$$

Фаза коливань залишається невизначеною, однак у рамках даної задачі її можна прийняти рівною нулю: φ = 0. Це не впливає на амплітуду та частоту, оскільки система автономна.

ПИТАННЯ ДО САМОКОНТРОЛЮ

1. Класифікація автоколивальних систем.
2. Як можна визначити умови виникнення автоколивань в осциляторній системі?
3. Що таке метод гармонічного балансу?

Розділ 4
ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

Збудження вимушених коливань може бути **силовим** або **кінематичним**. Як перший, так і другий тип збудження може мати **детермінований** або **випадковий** характер.

Розглянемо ці види збудження детальніше, починаючи з найпростішого випадку – гармонійного силового збудження за відсутності тертя, це дозволить нам виявити основні закономірності вимушених коливань, зокрема явище резонансу. Далі ускладнимо задачу, перейшовши до кінематичного збудження, а потім – до аналізу реакції системи на періодичну силу. Наприкінці, врахуємо дисипацію енергії, розглянувши вимушені коливання з в'язким демпфуванням та метод зведення складних сил опору до еквівалентного в'язкого тертя.

4.1 Гармонійне силове збудження без тертя

Розглянемо випадок, коли на систему з одним ступенем вільності діє зовнішня сила, що змінюється за гармонійним законом. При цьому припускаємо, що в'язке тертя в системі відсутнє. Таке спрощення дозволяє виявити основні закономірності вимушених коливань, зокрема явище резонансу, без ускладнень, пов'язаних із дисипацією енергії.

Для системи з одним ступенем вільності рівняння Лагранжа при силовому збудженні має вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}+\frac{\partial \Pi}{\partial q}=Q(t), \qquad (4.1)$$

де $Q(t)$ – узагальнена сила, що відповідає зовнішньому силовому збудженню.

Підставляючи сюди відомі вирази для кінетичної енергії T та потенційної енергії П, отримаємо диференціальне рівняння вимушених коливань системи у вигляді

$$a\ddot{q}+cq=Q(t) \qquad (4.2)$$

Якщо зовнішня сила $Q(t)$ змінюється за гармонійним законом $P\cdot\sin(\omega_0\cdot t)$, то рівняння руху (4.2) перетворюється на рівняння виду

$$\ddot{q}+\omega_0^2 q = H\cdot\sin\left(\omega\cdot t\right), \tag{4.3}$$

де H та ω – відповідно амплітуда та частота коливання збуджуючої сили P.

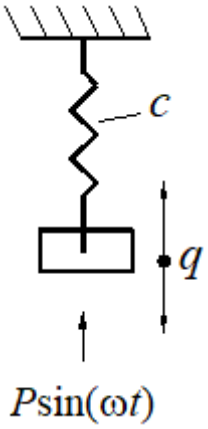


Рис. 4.1 – **Схема вимушених гармонічних коливань із силовим збудженням**

Розв'язок диференціального рівняння (4.3) складається з двох частин:

1. Розв'язок однорідного рівняння $\ddot{q}+\omega_0^2 q = 0$, а саме

$$q_1 = C_1\cdot\sin\left(\omega_0 t\right)+C_2\cdot\cos\left(\omega_0 t\right). \tag{4.4}$$

2. Приватний розв'язок рівняння (4.3), який при $\omega\neq\omega_0$ необхідно шукати у вигляді

$$q_2 = A\cdot\sin\left(\omega t\right). \tag{4.5}$$

Цей вигляд обирається тому, що права частина рівняння є гармонійною функцією з частотою ω, і в лінійній системі вимушені коливання відбуваються з тією ж частотою.

Підставляючи рівняння (4.5) в рівняння (4.3), отримаємо

$$A = \frac{H}{\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|}. \tag{4.6}$$

Отже, загальне рішення рівняння (4.3) при $\omega\neq\omega_0$ отримає вигляд

$$q = C_1\cdot\sin\left(\omega_0 t\right)+C_2\cdot\cos\left(\omega_0 t\right)+H\cdot\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|^{-1}\sin\left(\omega t\right). \tag{4.7}$$

Якщо початкові умови такі, що при $t = 0$: $q_0=0$ та $\dot{q}_0 = 0$, то враховуючи те, що коефіцієнти C_1 та C_2 дорівнюватимуть

$$C_1 = -\frac{\omega P}{a\omega_0\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|}, \tag{4.8}$$

$$C_2=0, \tag{4.9}$$

рішення у вигляді рівняння (4.7) прийме вигляд

$$q = \frac{P}{a\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|}\left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right). \tag{4.10}$$

Рівняння (4.10), яке описує поведінку системи під дією вимушеної сили ($H\cdot\sin(\omega\cdot t)$), складається з двох частин. Перша з них відповідає сталому (усталеному) руху, а друга характеризує вільні коливання. Їхня сума не є гармонічним рухом (див. криву 1 на рис. 4.2). У реальних умовах цей процес спостерігається лише на початковій стадії, оскільки в будь-якій реальній системі сили тертя спричиняють поступове згасання коливань із власною частотою ω_0.

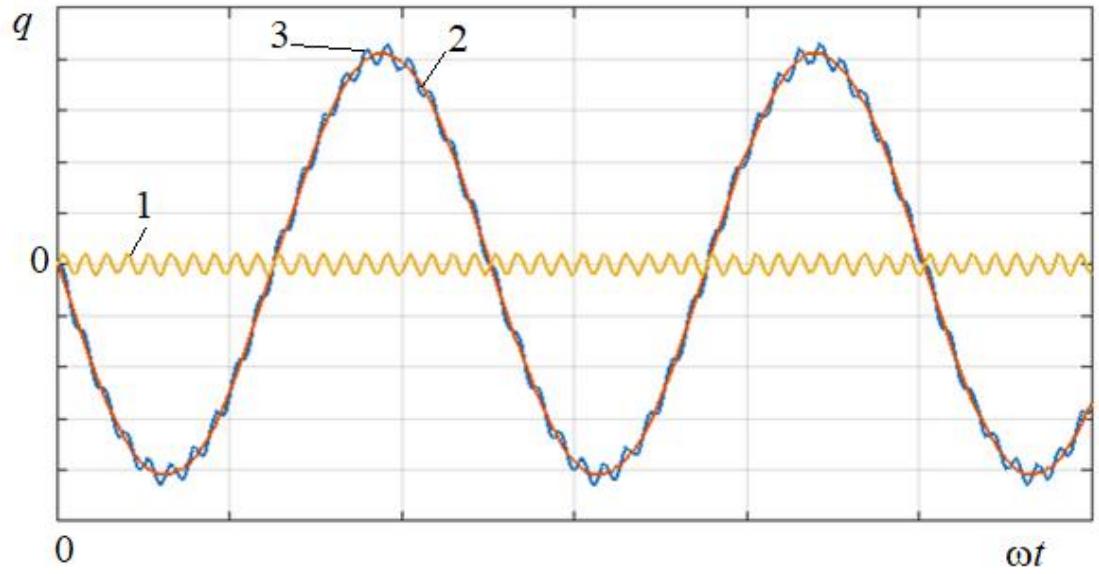


Рис. 4.2 – **Осцилограма вимушених коливань системи з одним ступенем вільності:** 1 – коливання за рівнянням (4.5); 2 – коливання за рівнянням (4.4); 3 – коливання за рівнянням (4.10)

Тобто при наявності сили тертя, яка спричиняє поступове згасання коливань крива 1 (рис. 4.2) з плином часу крива 3 буде все

ближче й ближче наближається до кривої 2, у границі зливаючись із нею. Тому після закінчення деякого часу коливання стають практично **моногармонічними** (Рис. 4.3) з частотою ω, тобто

$$q_1 = -\frac{\omega\, P}{a\omega_0\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|}\cdot\exp(-\beta t)\cdot\sin\left(\omega_0 t\right). \qquad (4.11)$$

$$q_2 = \frac{P}{a\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|}\cdot\sin\left(\omega t\right). \qquad (4.12)$$

$$q = \frac{P}{a\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|}\left(\sin\left(\omega t\right) - \frac{\omega}{\omega_0}\cdot\exp(-\beta t)\cdot\sin\left(\omega_0 t\right)\right). \qquad (4.13)$$

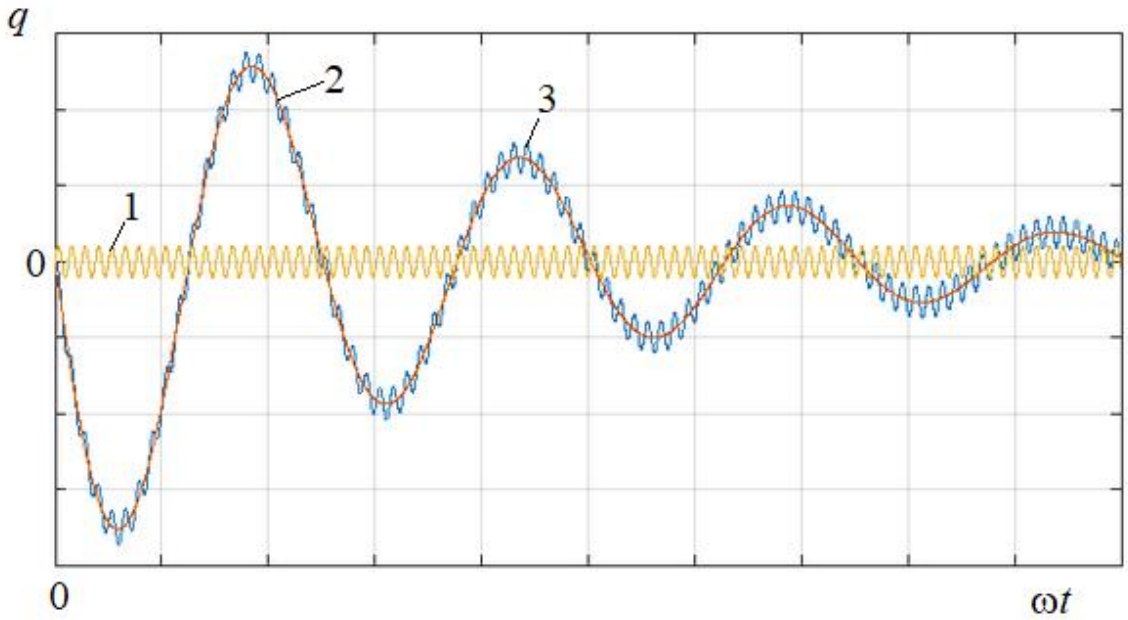


Рис. 4.3 – **Осцилограма вимушених коливань системи з одним ступенем вільності при наявності сил тертя:** 1 – коливання за рівнянням (4.12); 2 – коливання за рівнянням (4.11); 3 – коливання за рівнянням (4.13)

Рівняння (4.6), яке визначає амплітуду коливань системи A може бути представлена у вигляді рівняння (4.14), якщо в нього підставити рівняння (2.26), тобто

$$A = \frac{P}{a\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|} = \frac{P}{c\left|1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|} = \mu q_{\text{ст}}, \qquad (4.14)$$

де $q_{\text{ст}}$ – переміщення, яке виникає в наслідок дії статичної сили P;

μ – коефіцієнт динамічності.

Переміщення, яке виникає в наслідок дії статичної сили P визначається з рівняння

$$q_{\text{ст}} = \frac{P}{c},$$

а коефіцієнт динамічності (μ), який показує в скільки разів амплітуда вимушених коливань, встановилася більшою аніж статичні переміщення системи

$$\mu = \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}. \qquad (4.15)$$

За допомогою рівняння (4.15) можна побудувати амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) коливальної системи (див. Рис. 4.4).

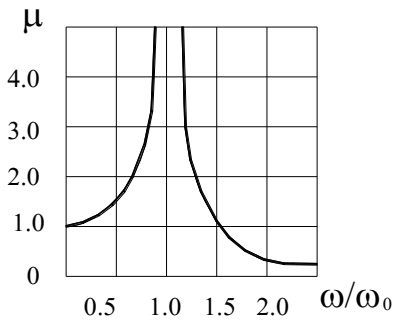


Рис. 4.4 – **Амплітудно-частотна характеристика**

4.2 Резонанс в коливальній системі

Особливий стан системи при $\omega = \omega_0$ називається **резонансом**. Для цього випадку не можна користуватися рішенням у вигляді рівняння (4.12), оскільки виникає невизначеність типу 0/0. Розкриваючи цю невизначеність за правилом Лопіталя, отримуємо вираз

$$q = \frac{P \cdot t}{2 \cdot a \cdot \omega} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{H \cdot t}{2 \cdot \omega_0} \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right). \qquad (4.16)$$

Цей розв'язок описує **чисто вимушені коливання** в системі без тертя, що виникають при $\omega = \omega_0$, які відстають за фазою від збуджувальної сили на $\varphi = \pi/2$ та зростають лінійно в часі згідно A

$$A = \frac{P \cdot t}{2 \cdot a \cdot \omega}.$$

Якщо розглядати вимушені коливання системи при наявності тертя, то рівняння (4.16) матиме вигляд

$$q = A \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{H}{2 \cdot b \cdot \omega_0} \cdot \sin(\omega \cdot t), \qquad (4.17)$$

оскільки для такого випадку максимальна амплітуда коливань може бути визначити з рівняння

$$A(\omega) = \frac{H}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2 \cdot b \cdot \omega^2\right)^2}},$$

за умови, що $\omega = \omega_0$.

4.3 Гармонійне кінематичне збудження

Розглянемо це питання на прикладі підресореної маси та жорсткого колеса, що котиться по нерівній дорозі (див. рис. 4.5).

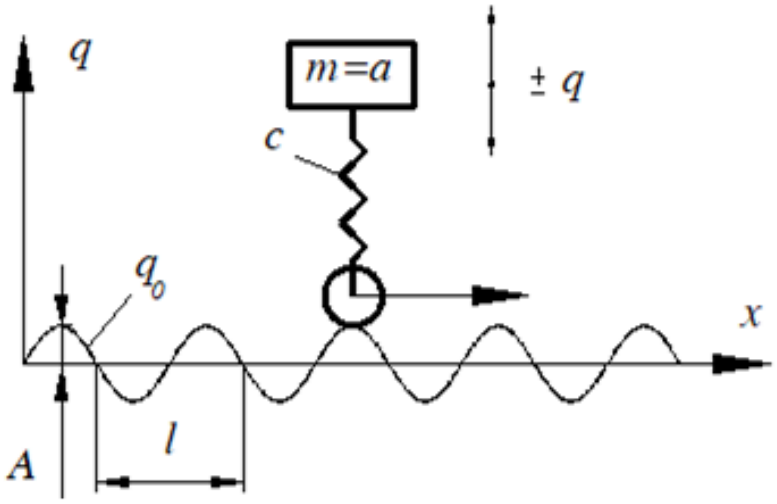


Рис. 4.5 – **Схема гармонійного кінематичного збудження:**
q_0 – характер зміни висоти нерівності профілю
поверхні дорожнього покриття

Позначимо через q абсолютне вертикальне переміщення вантажу масою m ($m = a$), яке відраховується від положення рівноваги. Використовуючи другий закон Ньютона, отримуємо диференціальне рівняння руху системи у вигляді

$$-c(q - q_0) = a\ddot{q}, \qquad (4.18)$$

де q_0 – позначено на рисунку 4.5;

або в іншому вигляді

$$a\ddot{q} + cq = cq_0. \tag{4.19}$$

Таким чином, кінематичне збудження звелося до силового (див. рівняння (4.2)), де $Q(t) = cq_0$. Якщо припустити, що величина q_0 матиме синусоїдальний характер, наприклад у такому вигляді

$$q_0 = A\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \tag{4.20}$$

то при V = const рівняння (4.19) матиме вигляд

$$a\ddot{q} + cq = cA\sin\left(\frac{\pi Vt}{l}\right), \tag{4.21}$$

і таким чином рішення рівняння (4.21) зводиться до рішення рівняння (4.3), де $cA/a = H$, а $\pi V/l = \omega$.

4.4 Періодичне збудження

У багатьох технічних задачах коливання викликаються дією не гармонійної, але періодичної сили (рис. 4.6). Це означає, що зовнішнє збудження $Q(t)$ задовольняє умову $Q(t+T) = Q(t)$, де T – період, але його форма може бути довільною (прямокутні імпульси, пилкоподібні сигнали тощо). Для аналізу таких коливань застосовують метод розкладання в ряд Фур'є, який дозволяє представити періодичну силу у вигляді суми гармонійних складових.

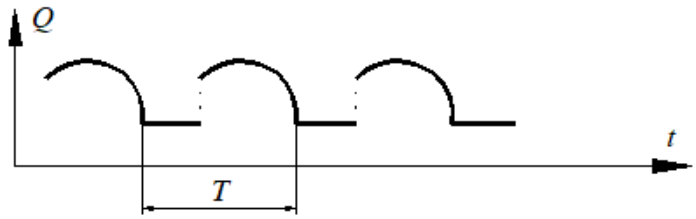


Рис. 4.6 – Периодическое негармоническое воздействие

Отже, будь-яку періодичну функцію $Q(t)$ з періодом T можна представити у вигляді суми гармонійних складових

$$Q(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right), \tag{4.22}$$

де n = 1, 2, 3… – це номер гармоніки (індекс суми) у ряді Фур'є;

$\omega = 2\pi T$ – частота коливань.

Коефіцієнти Фур'є, що входять в рівняння (4.22) обчислюються за наступними рівняннями

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T Q(t)\,dt;$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T Q(t)\cos(n\omega t)\,dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T Q(t)\sin(n\omega t)\,dt.$$

Рівняння (4.22) можна також представити і в інших формах, наприклад в амплітудно-фазовій формі

$$Q(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n), \qquad (4.23)$$

де $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ – амплітуда коливань;

$\varphi_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ – зсув фази.

За умови, що $n\omega < \omega_0$ значення $\varphi_n = 0$, за умови, що $n\omega > \omega_0$ значення $\varphi_n = \pi$, а за умови, що $n\omega = \omega_0$ значення $\varphi_n = \pi/2$ (резонанс)).

В комплексній формі рівняння (4.22) матиме вигляд

$$Q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t), \qquad (4.24)$$

де

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T Q(t)\exp(-in\omega t)\,dt.$$

Оскільки система є лінійною, то її реакцію можна вивчати для кожного доданка ряду Фур'є окремо, після чого підсумувати отримані частинні розв'язки, застосувавши принцип суперпозиції. Результат матимемо у вигляді суми гармонійних складових

$$q(t) = \frac{a_0}{2c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)}{a\left(\omega_0^2 - n^2\omega^2\right)}, \qquad (4.25)$$

або в амплітудно-фазовій формі

$$q(t) = \frac{Q_0}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{a\left(\omega_0^2 - n^2\omega^2\right)} \cos(n\omega t - \varphi_n). \qquad (4.26)$$

4.5 Вимушені коливання з в'язким демпфуванням

Запишемо рівняння Лагранжа для такого випадку вимушених коливань у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}+\frac{\partial \Pi}{\partial q}+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}=Q(t). \tag{4.27}$$

Відповідно, диференційне рівняння вимушених коливань при $Q(t) = P\cos(\omega t)$ буде мати вигляд

$$a\ddot{q}+b\dot{q}+cq=P\cos(\omega t), \tag{4.28}$$

або

$$\ddot{q}+2h\dot{q}+\omega_0^2 q=\frac{P}{a}\cos\omega t, \tag{4.29}$$

де h та ω_0^2 – визначено в рівнянні (2.61).

Приватне рішення для рівняння (4.29) може бути знайдено як

$$q=M\cos(\omega t)+N\sin(\omega t), \tag{4.30}$$

де M та N – довільні сталі.

Загальне рішення рівняння (4.29) визначається як сума приватного рішення рівняння (4.29), тобто рівняння (4.30) та загального рішення у вигляді рівняння (2.67)

$$q=e^{-ht}\left(C_1\cos(\tilde{\omega}t)+C_2\sin(\tilde{\omega}t)\right)+M\cos(\omega t)+N\sin(\omega t), \tag{4.31}$$

де $\tilde{\omega}$ – визначено для рівняння (2.65).

Перші дві складові описують демпфування вільних коливань, а два останніх – демпфування вимушених коливань. Як вже було відзначено вище, із-за присутності множника e^{-ht} вільні коливання поступово зменшуються та з часом залишаться тільки вимушені коливання, що встановилися.

Підставимо рівняння (4.30) в рівняння (4.29) та отримаємо рівняння

$$\begin{aligned}&\left(-\omega^2 M+2h\omega N+\omega_0^2 M-\frac{P}{a}\right)\cos(\omega t)+\\&+\left(-\omega^2 N-2h\omega M+\omega_0^2 N\right)\sin(\omega t)=0.\end{aligned} \tag{4.32}$$

Вирази в дужках, в рівнянні (4.32), прирівняємо до нуля, в наслідок чого отримаємо два рівняння

$$-\omega^2 M + 2h\omega N + \omega_0^2 M = \frac{P}{a},$$

$$-\omega^2 N - 2h\omega M + \omega_0^2 N = 0,$$

з яких нескладно отримати значення M та N у вигляді виразів

$$M = \frac{P\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{a\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4h^2\omega^2\right]}; \tag{4.33}$$

$$N = \frac{P\left(2h\omega\right)}{a\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4h^2\omega^2\right]}. \tag{4.34}$$

Вираз (4.30) для сталої поведінки коливальної системи можна також записати в наступній еквівалентній формі

$$q = A\cos\left(\omega t - \psi\right), \tag{4.35}$$

де

$$A = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{P}{a\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4h^2\omega^2}} = \mu q_{st}, \tag{4.36}$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{N}{M}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2h\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2h\dfrac{\omega}{\omega_0^2}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right), \tag{4.37}$$

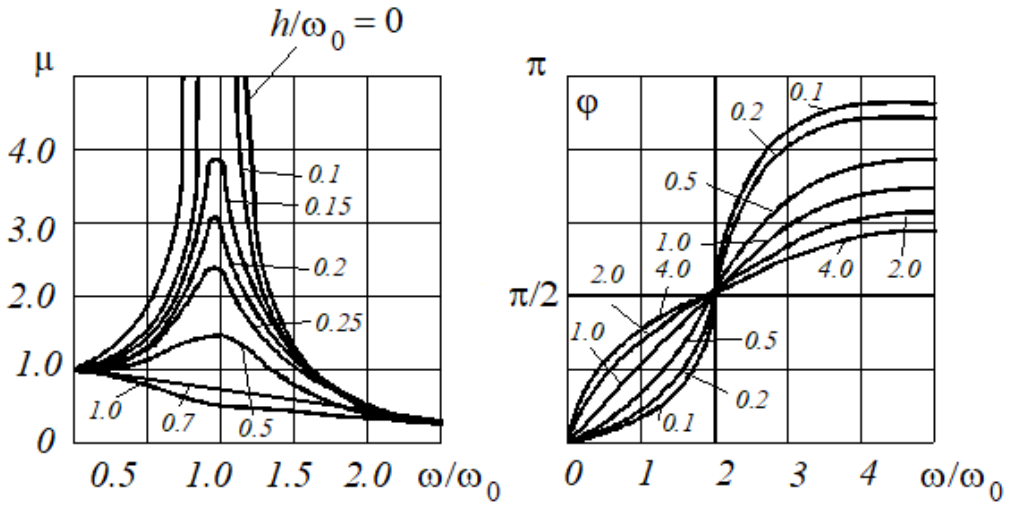
де q_{st} – величина переміщення при статичному навантаженні

$$q_{\text{СТ}} = \frac{P}{a\omega_0^2} = \frac{P}{c}, \tag{4.38}$$

μ – коефіцієнт динамічного підсилення по переміщенням

$$\mu = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4h^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{2h\omega}{\omega_0^2}\right)^2}}. \tag{4.39}$$

Графіки, що показують, як змінюються амплітуда (через μ) та фаза ψ вимушених коливань залежно від частоти збудження ω (нормованої до власної частоти ω_0) при фіксованому значенні коефіцієнта демпфування h (нормованої до власної частоти ω_0), називаються амплітудно-частотною (рис. 4.7 а) та фазо-частотною характеристиками (рис. 4.7 б). Вони є ключовим інструментом для аналізу динамічних навантажень. Приклад такого навантаження показано на рисунку 4.8: на пружний елемент одночасно діють постійна сила ваги Q і змінна в часі сила $P\cos(\omega t)$.



а) б)

Рис. 4.7 – **Амплітудно-частотна (а) та фазо-частотна (б) характеристики**

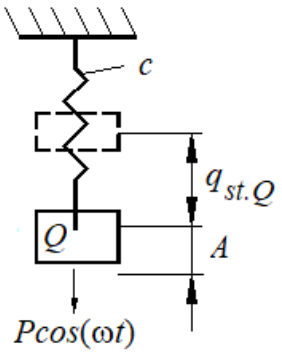


Рис. 4.8 – **Розрахункова схема пружного елемента:**
$q_{st.Q}$ – статичне переміщення вантажу; A – амплітуда коливань

Сумарне переміщення вантажу Q дорівнюватиме

$$q_d = q_{st.Q} + A = q_{st.Q}\left(1 + \frac{q_{st.P}}{q_{st.Q}}\mu\right) = q_{st.Q}\left(1 + \frac{P}{Q}\mu\right), \qquad (4.40)$$

при цьому можна прийняти

$$k_d = 1 + \frac{P}{Q}\mu. \tag{4.41}$$

де k_d – динамічний коефіцієнт.

В свою чергу, цей коефіцієнт широко використовується в розрахунках на міцність. Так для пружного елемента (рис. 4.8) умовою міцності буде: $\sigma_d = k_d \cdot \sigma_{st.Q} \le [\sigma]$.

4.6 Еквівалентне в'язке демпфування

За наявності нелінійного в'язкого або інших видів тертя, їхні різновиди можуть бути замінені деяким **еквівалентним в'язким демпфуванням**. Це дозволяє звести задачу до лінійного диференціального рівняння, яке описує гармонійний рух і має розв'язок (4.42) у простій аналітичній формі.

$$q = A\cos(\omega t - \psi). \tag{4.42}$$

Така заміна може здійснюватися з використанням так званого **методу енергетичного балансу**. Тобто задана нелінійна сила $R(\dot{q})$ у рівнянні

$$a\ddot{q} + R(\dot{q}) + cq = P\cos(\omega t),$$

замінюється **еквівалентною в енергетичному відношенні лінійною силою** $b_0\dot{q}$. Коефіцієнт b_0, який називають **еквівалентним коефіцієнтом в'язкого демпфування**, визначається з умови **рівності енергії, що розсіюється за один період**

$$U_{tr} = U_{b_0}$$

тобто робота, яку виконує нелінійна сила за період, дорівнює роботі, що здійснюється за той самий час еквівалентною лінійною силою в'язкого тертя.

Енергія, що розсіюється за один період коливань, у загальному вигляді може бути представлена виразом

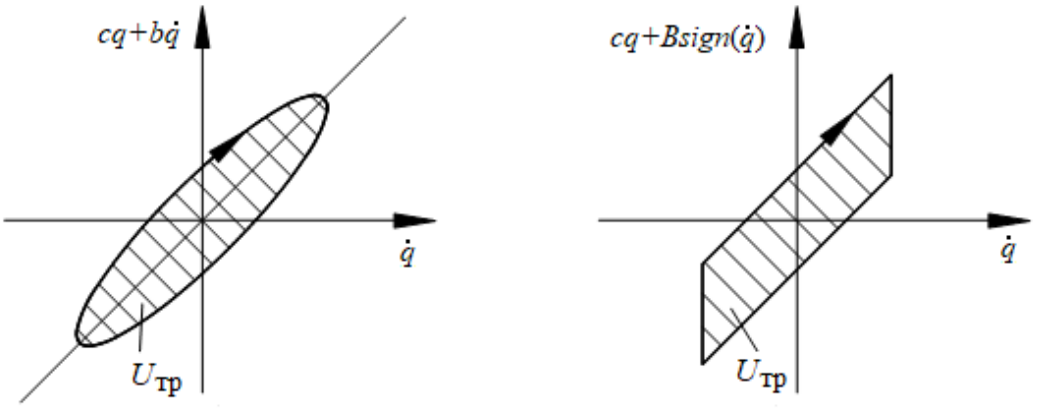
$$U_{tr} = \alpha A^{n_k+1}. \tag{4.43}$$

де A – амплітуда коливань;

α – коефіцієнт, що залежить від виду тертя та параметрів системи;

n_k = 0, 1, 2, … – показник ступеня, що характеризує залежність сили тертя від швидкості.

Графічно ця енергія виражається **площею петлі гістерезису** (рис. 4.9). Площа, обмежена петлею в координатах "сила – переміщення" (або "напруження – деформація"), чисельно вона дорівнює енергії, що розсіюється в матеріалі або елементі за один цикл коливань.



а) б)

Рис. 4.9 – **Петльові (гістерезисні) характеристики відновлювальної сили з тертям:** а) в'язке тертя; б) сухе тертя (тертя Кулона)

Робота, яка здійснюється за один період еквівалентною силою лінійного тертя при $q = x$, визначається інтегралом від цієї сили по переміщенню за цикл. Оскільки еквівалентна сила лінійного в'язкого тертя має вигляд $F_{тр} = b_0 \dot{q}$, то робота за період T обчислюється як

$$U_{b_0} = \int_0^T b_0 \dot{x}\dot{x}dt = b_0 A^2\omega^2 \int_0^T \sin^2\left(\omega t - \psi\right)dt = \pi b_0 A^2 \omega. \qquad (4.44)$$

З рівняння (4.43) та рівняння (4.44) отримаємо

$$b_0 = \frac{\alpha A^{n_k+1}}{\pi\omega A^2}. \qquad (4.45)$$

Як приклад використання рівняння (4.45) розглянемо вимушені гармонічні коливання з сухим тертям (рис. 4.10).

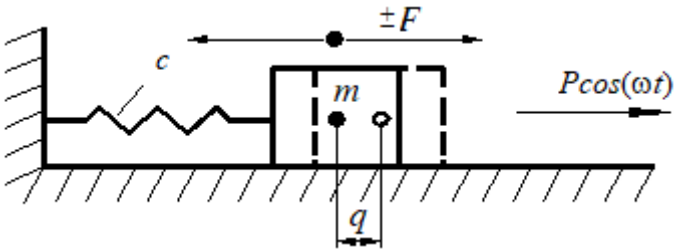


Рис. 4.10 – **Вимушені гармонічні коливання із сухим тертям**

Цей випадок демонструє застосування методу енергетичного балансу для визначення еквівалентного коефіцієнта демпфування та аналізу амплітудно-частотної характеристики системи.

Приклад 4.1:

Визначимо амплітуду вимушених коливань системи (рис. 4.10) із сухим тертям.

Нехай енергія сили тертя F, що розсіюється за один цикл дорівнює

$$U_{tr} = 4AF\,. \tag{4.46}$$

Якщо рівняння (4.46) прирівняти до рівняння (4.44), отримаємо

$$b_0 = \frac{4F}{\pi\omega A}. \tag{4.47}$$

Підставляючи рівняння (4.47) в рівняння (4.36), отримаємо

$$A = \frac{\dfrac{P}{c}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{4F}{\pi A c}\right)^2}}, \tag{4.48}$$

Вирішуючи рівняння (4.48) відносно A отримаємо

$$A = \pm\frac{P}{c}\frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{4F}{\pi P}\right)^2}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \tag{4.49}$$

ПИТАННЯ ДО САМОКОНТРОЛЮ

1. Запишіть рівняння Лагранжа 2-го роду для систем з одним ступенем вільності та силовим збудженням.
2. Що таке кінематичне збудження?
3. Що таке періодичне збудження?
4. Що таке еквівалентне в'язке демпфування?

Розділ 5
НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

На відміну від лінійних, нелінійні системи мають ряд унікальних властивостей: залежність частоти від амплітуди, поява вищих гармонік, можливість існування автоколивань тощо. У цьому розділі ми вивчимо основні типи нелінійностей (пружні, дисипативні) та методи їх аналізу.

5.1 Особливості та класифікація нелінійних систем з одним ступенем вільності

Умовно всі методи розв'язання нелінійних рівнянь можна поділити на 4 групи: аналітичні (точні та наближені), якісні, графічні та чисельні. Кількість нелінійних диференціальних рівнянь, що піддаються точному аналітичному розв'язанню, невелика. Якісні та графічні методи не дозволяють з необхідною точністю отримувати кількісні характеристики. Чисельні методи не мають достатньої наочності, характерної для аналітичних методів, і не дають змогу отримати одразу всі розв'язки. Тому найбільшого поширення набули наближені аналітичні розв'язки.

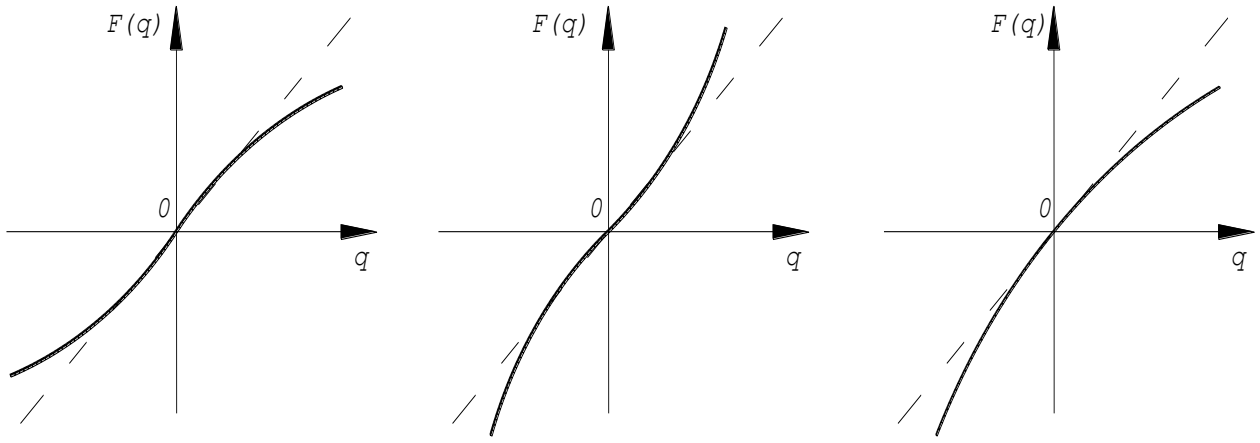
До загальних властивостей нелінійних коливальних систем належать такі:

- невиконання принципу суперпозиції розв'язків;
- наявність кількох положень рівноваги;
- можливість незатухаючих коливань за відсутності збуджувальної періодичної сили (автоколивань);
- залежність частоти від амплітуди (початкових умов);
- відсутність необмеженого наростання коливань при «резонансі» навіть за відсутності тертя;
- виникнення коливань з кратними та дробовими частотами тощо.

Залежно від причин походження, в коливальних системах та відповідних їм диференціальних рівняннях, нелінійності поділяються на: **геометричні, фізичні та конструктивна**.

Геометрична нелінійність є наслідком відхилень від положення рівноваги (наприклад, математичний та фізичний маятники). Такі системи можна піддати простій лінеаризації при малих коливаннях.

Фізична нелінійність виникає внаслідок нелінійно-гістерезисних властивостей матеріалу (наприклад, відхилення від закону Гука відновлювальної сили, див. рис. 5.1). При фізичній нелінійності також можлива проста лінеаризація.



а) б) в)

Рис. 5.1 – **Деякі види фізичної нелінійності відновлювальної сили:**
а) м'яка характеристика; б) жорстка характеристика; в) несиметрична характеристика; $F(q)$ – відновлювальна сила.

На відміну від геометричної та фізичної нелінійностей, **конструктивна нелінійність** пов'язана з особливостями з'єднань елементів механічної системи: наявністю *зазорів, люфтів, сухого тертя* (рис. 5.2). Через розривний характер сил у таких системах звичайна лінеаризація непридатна, і потрібні спеціальні методи аналізу.

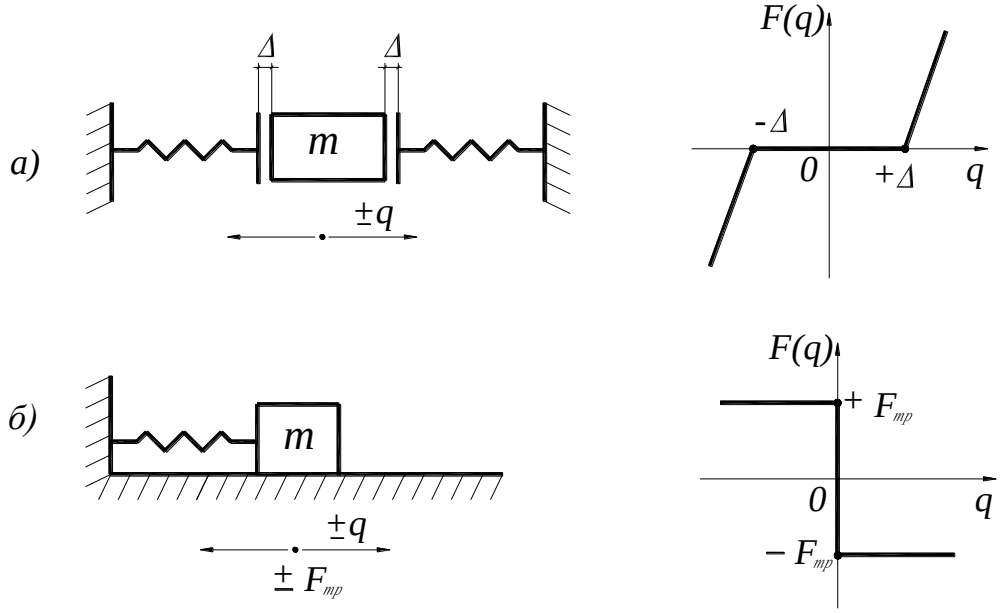


Рис. 5.2 – **Деякі види конструктивної нелінійності:**
а) «люфт» (мертвий хід, зазор); б) сухе тертя (тертя Кулона).

Рівняння руху для нелінійних систем складають, використовуючи фундаментальні принципи механіки, такі як принцип Д'Аламбера або рівняння Лагранжа другого роду.

Диференційне рівняння коливань нелінійної системи з одним ступенем вільності в загальному випадку має вигляд

$$a(q,\dot{q},t)\ddot{q} + f(q,\dot{q},t) = P(t). \qquad (5.1)$$

де $f(q,\dot{q},t)$ – нелінійна функція, що описує відновлювальну силу та сили опору (може включати нелінійну пружність, нелінійне тертя тощо);

$P(t)$ – узагальнена зовнішня сила.

5.2 Методи дослідження автономних систем

5.2.1 Визначення швидкості та періоду системи, що коливається, шляхом безпосереднього інтегрування

Розглянемо вільні коливання системи без демпфування з нелінійною пружною силою, характеристика якої має вигляд, зображений на рисунку 5.3. Для таких систем, на відміну від лінійних, частота коливань залежить від амплітуди. Визначити залежність періоду та швидкості від координати можна шляхом безпосереднього інтегрування рівняння руху, використовуючи закон збереження енергії.

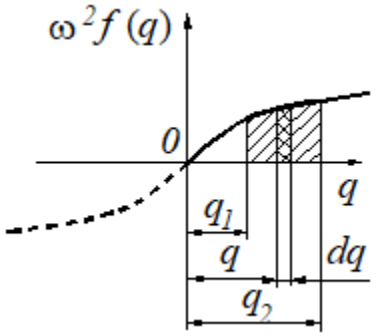


Рис. 5.3 – Зовнішній вигляд нелінійної відновлюючої сили

Для системи без тертя з нелінійною пружною силою рівняння руху записується як

$$m\ddot{q} + F(q) = 0, \qquad (5.3)$$

або

$$\ddot{q} + \omega_0^2 f(q) = 0, \tag{5.4}$$

де

$$\omega_0^2 f(q) = \frac{F(q)}{m}.$$

Представимо прискорення у вигляді

$$\ddot{q} = \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dq} \cdot \dot{q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(\dot{q})^2}{dq}. \tag{5.5}$$

Це перетворення дозволяє звести рівняння другого порядку до рівняння першого порядку відносно швидкості як функції координати.

Підставимо рівняння (5.5) у рівняння (5.4). У результаті отримаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно швидкості, як функції координати q

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d(\dot{q})^2}{dq} + \omega_0^2 f(q) = 0. \tag{5.6}$$

Припускаючи, що швидкість, яка відповідає координаті q_2 (див. рис. 5.3), дорівнює нулю, проінтегруємо рівняння (5.6).

$$\frac{1}{2}\dot{q}^2 = -\omega_0^2 \int_{q_2}^{q_1} f(q)dq = \omega_0^2 \int_{q_1}^{q_2} f(q)dq. \tag{5.7}$$

З рівняння (5.7), отриманого після інтегрування, знаходимо швидкість коливної маси в довільному положенні

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \pm\omega_0 \sqrt{2\int_{q_1}^{q_2} f(q)dq}. \tag{5.8}$$

З виразу (5.8) шляхом повторного інтегрування знайдемо тривалість циклу (повний період коливань) з рівняння.

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{2\int_0^{q_2} f(q)dq}}. \tag{5.9}$$

5.2.2 Метод гармонійного балансу

У загальному випадку періодичний розв'язок нелінійного рівняння містить нескінченну кількість гармонік і може бути записаний у вигляді ряду Фур'є за аналогією до рівняння (4.22) або (4.23) відповідно

$$q(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_n\left(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right), \qquad (5.10)$$

$$q(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_n A_n\cos\left(n\omega t-\varphi_n\right) \qquad (5.11)$$

де $\frac{a_0}{2}$ - зсув середнього положення центра коливань, у разі несиметричної характеристики пружності (див. рис. 5.1 в).

Невідомі коефіцієнти, що входять в рівняння (5.10) або (5.11) можна визначити за аналогією з рівняннями (4.22) або (4.23) відповідно.

Однак на практиці, враховуючи властивості нелінійних систем та вимоги точності, часто обмежуються скінченним числом гармонік, найчастіше першою гармонікою (метод гармонічного балансу в першому наближенні).

Метод гармонічного балансу полягає в тому, що ми підставляємо цей ряд (або його скінченне наближення) у вихідне рівняння і прирівнюємо коефіцієнти при однакових гармоніках. Це дає систему алгебраїчних рівнянь для визначення амплітуд a_k, b_k та частоти ω.

Після підстановки рівняння (5.10) у рівняння (5.3) та розкладання нелінійного члена в ряд Фур'є, коефіцієнти при однакових гармоніках прирівнюються до нуля (у випадку **усталених коливань**). У результаті отримуємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів a_n та b_n. Як правило, така система розв'язується наближено.

Якщо ж коливання **вільні та неусталені** (наприклад, із в'язкісним тертям), то в цьому випадку коефіцієнти при складових, що відповідають першій похідній переміщення, прирівнюються не до нуля, а до величини $2\omega dA/dt$, що призводить до складової $A(t)=A\cdot\exp(-ht)$ (де h визначено в (2.61)), яка враховує **затухання вільних коливань**.

5.3 Особливості вимушених коливань в нелінійних системах

Розглянемо це питання на прикладі рівняння Дюффінга – класичного нелінійного диференціального рівняння, яке описує вимушені коливання в системах із нелінійною пружною характеристикою. Особливість цього рівняння полягає в тому, що воно дозволяє оцінити залежність резонансної частоти коливань від амплітуди коливань та може моделювати стрибкоподібну зміну амплітуди при плавній зміні частоти.

Рівняння Дюффінга (без урахування в'язкого тертя) має вигляд

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \gamma q^3 = P_0 \cos(\omega t). \tag{5.12}$$

Скористаємося методом гармонічного балансу. У першому наближенні вважаємо, що розв'язок має вигляд

$$q = A\cos(\omega t - \varphi). \tag{5.13}$$

тобто нехтуємо вищими гармоніками та сталою складовою. Це припущення є основою методу гармонічного балансу в першому наближенні.

Підставимо (5.13) у рівняння (5.12), враховуючи, що

$$\cos^3(\omega t) = \frac{1}{4}\left(3\cos(\omega t) + \cos(3\omega t)\right),$$

отримаємо

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A\cos(\omega t - \varphi) + \frac{3}{4}\gamma A^3 \cos(\omega t - \varphi) = P_0 \cos(\omega t),$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos(\omega t)$ у лівій та правій частинах рівняння. Оскільки права частина містить лише $P_0 \cos(\omega t)$, а в лівій частині є відповідний доданок, отримуємо

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2\right)^2 A^2 = P_0^2, \tag{5.14}$$

звідки

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A + \frac{3}{4}\gamma A^3 = P_0\ , \tag{5.15}$$

Таким чином, отримано рівняння (5.15) для визначення амплітуди коливань A, для випадку коливання без в'язкого тертя.

Аналогічне рівняння можна отримати і для випадку, коли в рівнянні Дюффінга враховується в'язке тертя

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q + \gamma q^3 = P_0 \cos(\omega t), \tag{5.16}$$

для якого рівняння (5.14) прийме вигляд

$$\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2\right)^2 + (2\beta\omega)^2\right) A^2 = P_0^2, \tag{5.17}$$

Визначити амплітуду коливань з рівняння (5.15) або (5.17) можна використавши формулу Кардано

$$A = \sqrt{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{b}{3a}}, \tag{5.18}$$

де q, p – коефіцієнти рівняння, що визначаються з рівнянь

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}, \tag{5.19}$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}, \tag{5.20}$$

а коефіцієнти a, b, c, d можна розрахувати з рівняння

$$a = \frac{9}{16}\gamma^2, \tag{5.21}$$

$$b = \frac{3}{2}\gamma(\omega_0^2 - \omega^2), \tag{5.22}$$

$$c = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2, \tag{5.23}$$

$$d = -P_0^2, \tag{5.24}$$

Для більшої наочності розв'яжемо рівняння (5.15) геометрично, представивши його у вигляді

$$\frac{P_0}{\omega_0^2} - \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) A = \frac{3}{4}\gamma \frac{A^3}{\omega_0^2}. \tag{5.25}$$

У цьому випадку корені рівняння (5.25) визначаються як абсциси точок перетину кубічної параболи Y_2 (права частина рівняння (5.25)) та прямої Y_1 (ліва частина рівняння (5.25)), дивись рисунок 5.4. Таким чином, розв'язок рівняння зводиться до геометричної задачі знаходження точок перетину двох графіків, що дозволяє наочно проаналізувати залежність кількості та значень коренів від параметрів системи.

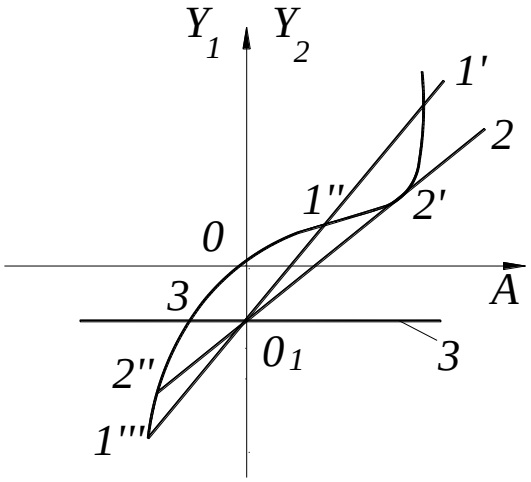
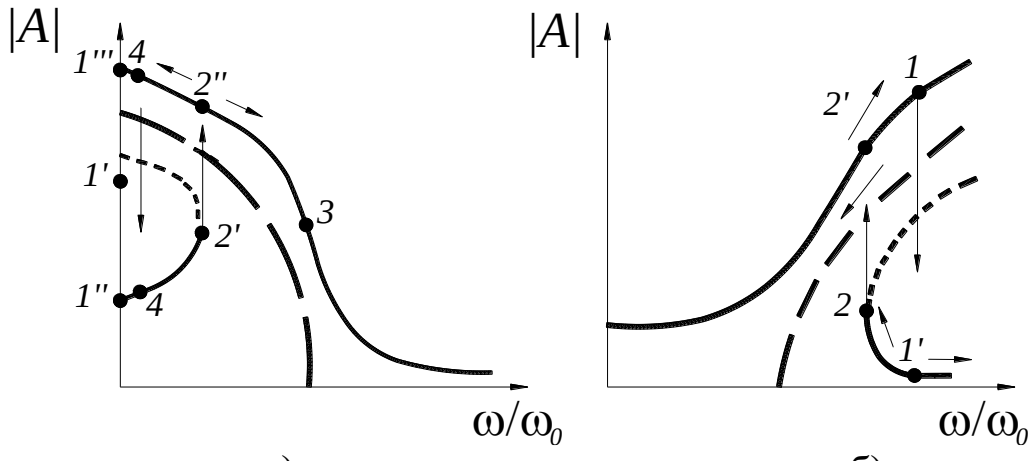


Рис. 5.4 – **Графічне визначення коренів амплітудно-частотного рівняння**

Пряма Y_1 проходить через точку O_1, а нахил прямої залежить від кутового коефіцієнта $\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$. При різних значеннях $\frac{\omega}{\omega_0}$ визначаємо різні значення A по яких будуємо АЧХ системи (рис. 5.5).



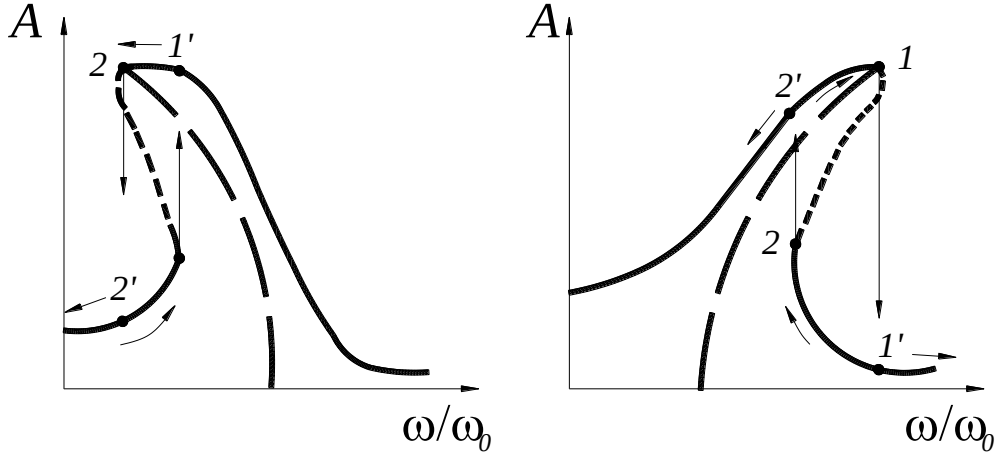
а) б)

Рис. 5.5 – **АЧХ нелінійної системи при гармонійному збудженні без тертя з характеристикою відновлюючої сили:** а – м’яка ($\gamma < 0$); б – жорстка ($\gamma > 0$)

Штриховою (центральною) лінією на рисунку 5.5 показана скелетна крива, яка виражає зв'язок між частотою та амплітудою вільних коливань тієї ж системи. Для отримання цієї лінії в рівнянні (5.25) необхідно прийняти P_0=0.

З рисунку 5.5 можна побачити, що при деяких значеннях відношення частот ω/ω_0 можливі три значення амплітуди A (область кривої 1"–2'–1" на рис. 5.5). Однак, як показують експериментальні дослідження таких систем, реально існують лише коливання, показані на рисунку 5.5 суцільною лінією. Наприклад, на рисунку 5.5 а стрілками показані стрибкоподібні зміни АЧХ в околі точок 2' та 4 в реальних системах.

У випадку наявності в'язкого тертя в нелінійній системі, розмірковуючи аналогічним чином, можна отримати АЧХ, яка матиме вигляд, подібний до того, що зображено на рисунку 5.6.



а) б)

Рис. 5.6 – **АЧХ нелінійної системи при гармонійному збудженні при наявності тертя з характеристикою відновлюючої сили:**
а – м’яка ($\gamma < 0$); б – жорстка ($\gamma > 0$)

ПИТАННЯ ДО САМОКОНТРОЛЮ

1. Класифікація нелінійних коливальних систем?
2. Що таке геометрична та фізична нелінійності?
3. Які існують методи дослідження автономних нелінійних систем?
4. Які особливості вимушених коливань у нелінійних системах Ви можете назвати?

Розділ 6
ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМИ З ДВОМА СТУПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ

Системи з двома ступенями вільності є найпростішими прикладами багатомасових коливальних систем. Їхній рух описується двома диференціальними рівняннями, а спектр власних частот містить дві частоти. На відміну від систем з одним ступенем вільності, в системах з двома ступенями вільності виникають нові явища, наприклад: наявність двох власних частот; можливість биття при певних початкових умовах; існування головних форм коливань та їхньої ортогональності; тощо.

6.1 Диференційне рівняння вільних коливань без тертя

Вільні коливання механічних систем, що мають два ступені вільності, визначаються двома узагальненими координатами q_1 та q_2, які відраховуються від положення стійкої рівноваги системи.

У випадку, коли система має стаціонарні та голономні зв'язки, з курсу теоретичної механіки відомо, що для систем з s ступенями вільності вирази для кінетичної та потенційної енергій наближено можуть бути записані у вигляді

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\,,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}q_i q_j\,,$$

де a_{ij} – коефіцієнти інерції;

c_{ij} – коефіцієнти жорсткості.

Для стаціонарних систем коефіцієнти a_{ij} та c_{ij} є сталими величинами.

В системах з двома ступенями вільності ($s = 2$) при малих коливаннях кінетична та потенційна енергії є квадратичними формами відносно узагальнених швидкостей і координат

$$T = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_2^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right), \qquad (6.1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2\right). \qquad (6.2)$$

Рівняння Лагранжа для розглядуваної системи мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1}; \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_2} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2}. \end{cases} \tag{6.3}$$

Підставляючи вирази для кінетичної T та потенційної П енергій (рівняння (6.1) та рівняння (6.2) в рівняння (6.3)), отримуємо систему двох лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0; \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0, \end{cases} \tag{6.4}$$

де $a_{12} = a_{21}$, $c_{12} = c_{21}$ (симетричні матриці інерції та жорсткості).

6.2 Загальний розв'язок диференціальних рівнянь вільних коливань системи з двома ступенями вільності без тертя

Система рівнянь (6.4) являє собою два однорідних диференціальних рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, тому приватні розв'язки цих рівнянь можна представити у вигляді

$$q_1(t) = A_1 \exp(ikt); \tag{6.5}$$

$$q_2(t) = A_2 \exp(ikt), \tag{6.6}$$

або в тригонометричній формі

$$q_1(t) = A_1 \sin(kt + \beta); \tag{6.7}$$

$$q_2(t) = A_2 \sin(kt + \beta), \tag{6.8}$$

де k – це кругова (циклічна) частота;

i – комплексне число;

β – це початкова фаза коливань.

Позначимо

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{A_2}{A_1} = \mu, \tag{6.9}$$

звідси

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \sin(kt + \beta), \\ q_2 = \mu q_1 = \mu A_1 \sin(kt + \beta). \end{cases} \tag{6.10}$$

Підставимо систему рівнянь (6.10) в систему рівнянь (6.4), та після ділення на $A_1 \sin(kt + \beta)$ отримаємо нову систему рівнянь (6.11).

$$\begin{cases} (c_{11} - a_{11}k^2) + \mu(c_{12} - a_{12}k^2) = 0; \\ (c_{21} - a_{21}k^2) + \mu(c_{22} - a_{22}k^2) = 0. \end{cases} \tag{6.11}$$

Якщо виключити μ з рівняння (6.11), отримаємо

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0. \tag{6.12}$$

Корені рівняння (6.12) k_1^2 та k_2^2 (причому $k_1 < k_2$) визначають частоти вільних коливань k_1 та k_2. Обидва ці корені обов'язково повинні бути додатними.

Величини k_1 та k_2 є частотами вільних коливань системи. Відповідні цим частотам коливання називають ***головними коливаннями*** системи. Меншу з частот k_1 називають ***основною частотою***, а перше головне коливання, що має цю частоту – ***основним коливанням***. Коливання з меншою частотою є основним у результуючому русі.

Визначивши k_1 та k_2 з рівняння (6.11), знаходимо два значення μ, що відповідають кожному з головних коливань.

$$\begin{cases} \mu_1 = -\dfrac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\dfrac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{c_{22} - a_{22}k_1^2}; \\ \mu_2 = -\dfrac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\dfrac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{c_{22} - a_{22}k_2^2}. \end{cases} \tag{6.13}$$

Величини μ_1 та μ_2 характеризують **форми головних коливань** і називаються **коефіцієнтами розподілу**. Вони показують співвідношення амплітуд узагальнених координат при кожному з головних коливань

$$\mu_1 = \frac{q_2^{(1)}}{q_1^{(1)}} = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}, \tag{6.14}$$

$$\mu_2 = \frac{q_2^{(2)}}{q_1^{(2)}} = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}, \tag{6.15}$$

де верхній індекс у дужках вказує на номер частоти.

Тоді, з урахуванням рівняння (6.14), рівняння (6.10), що визначають перше головне коливання, набудуть такого вигляду

$$\begin{cases} q_1^{(1)} = A_1^{(1)} \sin\left(k_1 t + \beta_1\right); \\ q_2^{(1)} = \mu_1 A_1^{(1)} \sin\left(k_1 t + \beta_1\right), \end{cases} \tag{6.16}$$

а з урахуванням рівняння (6.15), друге головне коливання матиме вигляд

$$\begin{cases} q_1^{(2)} = A_1^{(2)} \sin\left(k_2 t + \beta_2\right); \\ q_2^{(2)} = \mu_2 A_1^{(2)} \sin\left(k_2 t + \beta_2\right), \end{cases} \tag{6.17}$$

де β_1 та β_2 – початкові фази, що відповідають частотам k_1 та k_2.

Загальний розв'язок диференціальних рівнянь (6.4) отримується шляхом додавання частинних розв'язків, що відповідають двом головним коливанням

$$\begin{cases} q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \beta_1) + A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \beta_2); \\ q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)} = \mu_1 A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \beta_1) + \mu_2 A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \beta_2). \end{cases} \tag{6.18}$$

Рівняння (6.18) містять чотири довільні сталі $A_1{}^{(1)}$, $A_1{}^{(2)}$, β_1 та β_2, які визначаються з початкових умов, вважаючи, що при $t = 0$ задані початкові зміщення та початкові швидкості: $q_1 = q_{10}$, $q_2 = q_{20}$, $\dot{q}_1 = v_{10}$, $\dot{q}_2 = v_{20}$.

З аналізу рівняння (6.18) можна зробити висновок, що результуючий рух не є простим гармонічним коливанням. Він являє собою суперпозицію двох гармонічних коливань з різними частотами k_1 та k_2, що в загальному випадку призводить до складного неперіодичного (або періодичного лише при кратності частот) руху.

Приклад 6.1:

Для схеми, зображеної на рисунку 6.1, визначити частоти та коефіцієнти головних коливань якщо відомі: маса m_1 та маса m_2, а також жорсткості пружних елементів c_1 та c_2. Масою пружин знехтуємо.

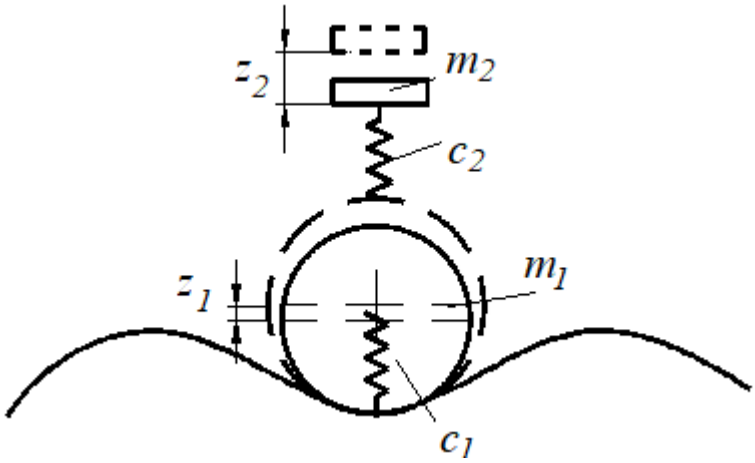


Рис. 6.1 – Схема руху пружного колеса масою m_1 з підресореною масою m_2

Система має два незалежних рухи: вертикальне переміщення пружного колеса (непідресореної маси) та кузова (підресореної маси). Оскільки зв'язок між ними здійснюється через пружний елемент (підвіску), а не через жорстку кінематику, то узагальнені швидкості $\dot{z}_1$ та $\dot{z}_2$ є незалежними. Тому кінетична енергія записується як сума кінетичних енергій окремих мас

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2 .$$

Потенційна енергія визначається як сума потенційних енергій деформованих пружин Π_1 та потенційної енергії вантажів у полі сил тяжіння Π_2

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 ,$$

якщо розкрити складові потенційних енергій Π_1 та Π_2 то отримаємо їх вирази у вигляді наступних рівнянь

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} c_1 \left(f_1 + z_1 \right)^2 - \frac{1}{2} c_1 f_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \left(f_2 + z_2 - z_1 \right)^2 - \frac{1}{2} c_2 f_2^2 ,$$

$$\Pi_2 = -P_1 z_1 - P_2 z_2 ,$$

де f_1 та f_2 – статичні прогини пружин;

P_1 та P_2 – вага тіла, яка відповідає масам m_1 та m_2 відповідно

$$P_1 = m_1 \cdot g,$$

$$P_2 = m_2 \cdot g.$$

Отже

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(c_1\left(f_1 + z_1\right)^2 - c_1 f_1^2 + c_2\left(f_2 + z_2 - z_1\right)^2 - c_2 f_2^2\right) - P_1 z_1 - P_2 z_2. \quad \text{(а.4)}$$

З курсу теоретичної механіки нам відомо, що для консервативної системи сил умовою рівноваги є рівність нулю першої варіації потенційної енергії, тобто

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial Z_1}\right)_0 = c_1 f_1 - c_2 f_2 - P_1 = 0, \quad \text{(б.4)}$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial Z_2}\right)_0 = c_2 f_2 - P_2 = 0. \quad \text{(в.4)}$$

Після підстановки рівняння (б.4) та рівняння (в.4) у рівняння (а.4) та зведення подібних членів, отримаємо в кінцевому вигляді рівняння потенційної енергії системи у вигляді

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[\left(c_1 + c_2\right) z_1^2 - 2c_2 z_1 z_2 + c_2 z_2^2\right].$$

З рівняння (6.1) та рівняння (6.2) маємо

$$a_{11} = m_1 = \frac{P_1}{g};\ a_{12} = a_{21} = 0;\ a_{22} = m_2 = \frac{P_2}{g}, \quad \text{(г.4)}$$

$$c_{11} = c_1 + c_2;\ c_{12} = c_{21} = -c_2;\ c_{22} = c_2. \quad \text{(д.4)}$$

Підставляючи рівняння (г.4) та рівняння (д.4) в рівняння (6.12) матимемо

$$\left(c_1 + c_2 - \frac{P_1}{g}k^2\right) \cdot \left(c_2 - \frac{P_2}{g}k^2\right) - c_2^2,$$

звідки

$$k^4 - \frac{c_2 P_1 + \left(c_1 + c_2\right) P_2}{P_1 P_2} g k^2 + \frac{c_1 c_2}{P_1 P_2} g^2 = 0. \quad \text{(е.4)}$$

Рішення рівняння (е.4) визначає частоти коливань та має вигляд

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{c_2 P_1 + \left(c_1 + c_2\right) P_2}{2P_1 P_2} g \mp \sqrt{\left[\frac{c_2 P_1 + \left(c_1 + c_2\right) P_2}{2P_1 P_2} g\right]^2 - \frac{c_1 c_2}{P_1 P_2} g^2}}.$$

Підставляючи рівняння (г.4) та рівняння (д.4) в рівняння (6.13) отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів головних коливань

$$\mu_1 = \frac{c_1 + c_2 - m_1 k_1^2}{c_2},$$

$$\mu_2 = \frac{c_1 + c_2 - m_1 k_2^2}{c_2}.$$

6.3 Головні координати

Головними координатами механічної системи називають узагальнені координати, вибрані таким чином, щоб вирази кінетичної та потенційної енергій містили лише квадрати узагальнених швидкостей і координат, тобто не мали перехресних членів.

Позначимо головні координати через η_1 та η_2, тоді маємо

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}\left(a_1\dot{\eta}_1^2 + a_2\dot{\eta}_2^2\right); \\ \Pi = \frac{1}{2}\left(c_1\eta_1^2 + c_2\eta_2^2\right). \end{cases} \tag{6.19}$$

де a_1, a_2 – коефіцієнти інерції, що відрізняються від a_{11}, a_{22};

c_1, c_2 – коефіцієнти жорсткості, що відрізняються від c_{11}, c_{22}.

Залежність між q_1 та q_2, які обрані довільно, та головними координатами η_1 та η_2 можна виразити як

$$\begin{cases} q_1 = \eta_1 + \eta_2, \\ q_2 = \mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2. \end{cases} \tag{6.20}$$

де μ_1 та μ_2 – коефіцієнти розподілення, рівняння (6.13).

Підставимо рівняння (6.20) в рівняння (6.1) та рівняння (6.2), після приведення подібних членів отримаємо

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(a_{11} + 2a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_1^2\right)\dot{\eta}_1^2 + \\ +2\left[a_{11} + a_{12}\left(\mu_1 + \mu_2\right) + a_{22}\mu_1\mu_2\right]\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 + \\ +\left(a_{11} + 2a_{12}\mu_2 + a_{22}\mu_2^2\right)\dot{\eta}_2^2 \end{pmatrix}, \tag{6.21}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(c_{11} + 2c_{12}\mu_1 + c_{22}\mu_1^2\right)\eta_1^2 + \\ +2\left[c_{11} + c_{12}\left(\mu_1 + \mu_2\right) + c_{22}\mu_1\mu_2\right]\eta_1\eta_2 \\ +\left(c_{11} + 2c_{12}\mu_2 + c_{22}\mu_2^2\right)\eta_2^2 \end{pmatrix}. \qquad (6.22)$$

За визначенням, коефіцієнти при добутках $\eta_1\eta_2$ та $\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2$ дорівнюють нулю. Тоді взаємозв'язок між коефіцієнтами у T та П згідно з рівняннями (6.1), (6.2) та рівняннями (6.21), (6.22) набуває вигляду

$$\begin{cases} a_1 = a_{11} + 2a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_1^2; \\ a_2 = a_{11} + 2a_{12}\mu_2 + a_{22}\mu_2^2; \\ c_1 = c_{11} + 2c_{12}\mu_1 + c_{22}\mu_1^2; \\ c_2 = c_{11} + 2c_{12}\mu_2 + c_{22}\mu_2^2. \end{cases} \qquad (6.23)$$

Рівняння Лагранжа в головних координатах має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\eta}_1} - \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \eta_1} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \eta_1} \quad \text{або} \quad a_1\ddot{\eta}_1 + c_1\eta_1 = 0; \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\eta}_2} - \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \eta_2} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \eta_2} \quad \text{або} \quad a_2\ddot{\eta}_2 + c_2\eta_2 = 0. \end{cases} \qquad (6.24)$$

Диференціальні рівняння (6.24) у головних координатах є двома незалежними лінійними диференціальними рівняннями другого порядку. Загальний розв'язок цих рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} \eta_1 = A_1\sin\left(k_1 t + a_1\right); \\ \eta_2 = A_2\sin\left(k_2 t + a_2\right). \end{cases} \qquad (6.25)$$

де A_1, A_2, a_1, a_2 – сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов при $t = 0$

$$\eta_1 = \eta_{10};\ \dot{\eta}_1 = \dot{\eta}_{10};\ \eta_2 = \eta_{20};\ \dot{\eta}_2 = \dot{\eta}_{20}.$$

Власні частоти k_1 та k_2 визначаються з рівняння

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{c_{1,2}}{a_{1,2}}}. \qquad (6.26)$$

Частоти, знайдені за формулою (6.26), фактично є тими самими частотами, що й визначені в (6.12).

Зазвичай, при розв'язуванні задач важко одразу визначити головні координати η_1 та η_2. Тому спочатку, вибравши узагальнені координати q_1 та q_2, знаходять власні частоти k_1 та k_2 з рівняння (6.12). Потім з рівняння (6.13) визначають коефіцієнти розподілу μ_1 та μ_2. Оскільки співвідношення (6.20) виконується (умова ортогональності), то перехід до головних координат здійснюється за допомогою лінійного перетворення, яке діагоналізує матриці інерції та жорсткості.

$$\eta_1 = \frac{q_2 - \mu_2 q_1}{\mu_1 - \mu_2}, \tag{6.27}$$

$$\eta_2 = \frac{\mu_1 q_1 - q_2}{\mu_1 - \mu_2}. \tag{6.28}$$

Довільно вибрані q_1 та q_2 виявляються головними координатами, якщо в виразах для кінетичної ТТ та потенційної ПП енергій (див. рівняння (6.1), (6.2)) коефіцієнти a_{12} та c_{12} дорівнюють нулю. У таких випадках дослідження вільних коливань системи значно спрощується.

Велике значення має застосування головних координат при вивченні вимушених коливань системи. Використання головних координат дозволяє:

- розв'язувати систему незалежних диференціальних рівнянь;
- визначати реакцію системи на зовнішнє збудження для кожної головної координати окремо;
- застосовувати принцип суперпозиції для знаходження загального руху.

6.4 Вільні коливання системи з двома ступенями вільності на прикладі плоскої моделі автомобіля

Розглянемо вільні коливання системи з двома ступенями вільності на прикладі плоскої моделі автомобіля. Така модель дозволяє дослідити одночасні вертикальні та кутові (поздовжньо-кутові) коливання кузова, що виникають внаслідок його пружного підвішування на передній та задній осях.

Вивчення цієї системи дає змогу визначити власні частоти та форми коливань автомобіля, які є важливими характеристиками для оцінки плавності ходу, комфорту та безпеки руху.

Приклад 6.2:

Виконаємо дослідження вільних коливань автомобіля у вертикальній площині. Вагу підресореної частини позначимо G, а масу автомобіля, як $m = G/g$, радіус інерції відносно центральної поперечної осі, що проходить через центр тяжіння позначимо як i_{Cy}. Жорсткості ресор c_1 (передня) та c_2 (задня) приймемо таким чином, щоб $c_1/c_2 = b/a$, де a та b – відстані від центра тяжіння автомобіля до передньої та задньої осей автомобіля відповідно. Це співвідношення забезпечує певні умови, які спрощують аналіз коливань (наприклад, відсутність зв'язку між вертикальними та кутовими коливаннями).

Розрахункова схема коливання підресореної маси автомобіля зображена на рисунку 6.2.

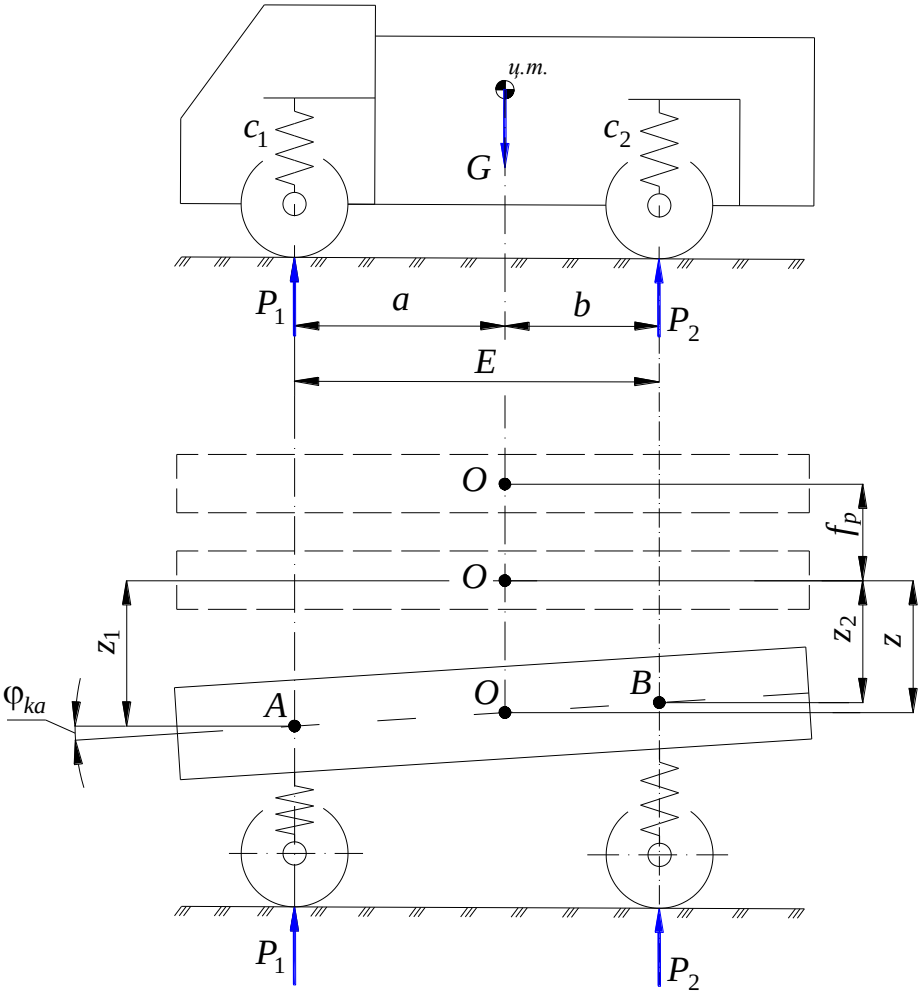


Рис. 6.2 – Розрахункова схема коливання підресореної маси автомобіля

За узагальнені координати системи приймемо z та φ.

Кінетичну енергію автомобіля можна визначити з рівняння

$$T = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g}i_{Cy}^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2 + i_{Cy}^2\dot{\varphi}^2\right). \qquad \text{(а.5)}$$

Потенційну енергію системи визначаємо як суму потенційної енергії автомобіля в полі сил тяжіння Π_1 та потенційної енергії деформованих ресор Π_2

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2. \qquad \text{(б.5)}$$

При малих відхиленнях від положення рівноваги гравітаційна складова враховується через зміну висоти центра тяжіння автомобіля, а пружна – через деформації ресор, що виникають при вертикальному переміщенні та кутовому нахилі кузова.

Величину Π_1 та Π_2 можна визначити з відповідних рівнянь

$$\Pi_1 = -\,G{\cdot}z,$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}c_1\left(f_p + z + a\varphi\right)^2 - c_1 f_p^2 + \frac{1}{2}c_2\left(z + f_p - b\varphi\right)^2 - c_2 f_p^2.$$

З урахуванням того, що $c_1/c_2 = b/a$ отримаємо

$$c_1 f_p a\varphi - c_2 f_p b\varphi = 0,$$

$$c_1 z a\varphi - c_2 z b\varphi = 0.$$

а також згрупував подібні члени отримаємо

$$\Pi = -Gz + 2f_p z\left(c_1 + c_2\right) + \frac{1}{2}z^2\left(c_1 + c_2\right) + \frac{1}{2}\varphi^2\left(c_1 a^2 + c_2 b^2\right).$$

Слід зазначити, що при

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial Z}\right)_{Z=0} = 0,$$

справедливий вираз

$$-G + 2f_p\left(c_1 + c_2\right) = 0,$$

тому в кінцевому вигляді отримаємо

$$\Pi = \frac{1}{2}z^2\left(c_1 + c_2\right) + \frac{1}{2}\varphi^2\left(c_1 a^2 + c_2 b^2\right). \qquad \text{(в.5)}$$

В отриманих виразах (а.5) та (в.5) містяться лише квадрати узагальнених швидкостей та координат. Це свідчить про те, що вибрані узагальнені координати z та φ є головними координатами механічної системи, що розглядається.

Отже, для рівнянь (6.19) маємо

$$a_1 = \frac{G}{g} = m;$$

$$a_2 = mi_{Cy}^2;$$

$$c_1' = c_1 + c_2;$$

$$c_2' = c_1 a^2 + c_2 b^2.$$

де c_1', c_2' – відповідні приведені жорсткості.

Диференціальні рівняння руху розглядуваної системи мають вигляд

$$\ddot{z} + \frac{c_1'}{m} z = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_2'}{mi_{Cy}^2} \varphi = 0.$$

Частоти головних коливань, згідно з (6.26), визначаються як

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}},$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{mi_{Cy}^2}}.$$

Розв'язок рівнянь руху в головних координатах має вигляд

$$z = A_1 \sin\left(k_1 t + \alpha_1\right),$$

$$\varphi = A_2 \sin\left(k_2 t + \alpha_2\right).$$

Запишемо тепер рівняння руху коливання кузова автомобіля, використовуючи другий закон Ньютона. З рисунка 6.2 маємо

$$P_1 = G_1 + c_1 z_1, \qquad \text{(г.5)}$$

$$P_2 = G_2 + c_2 z_2, \qquad \text{(д.5)}$$

$$G_1 + G_2 = G, \qquad \text{(е.5)}$$

$$G_1 a = G_2 b. \qquad \text{(ж.5)}$$

де G_1 та G_2 – реакція дороги на колеса автомобіля в статиці.

З другого закону Ньютона маємо

$$P_1 + P_2 - G = -m\ddot{z}, \qquad \text{(з.5)}$$

після підстановки рівнянь (г.5) – (ж.5) в рівняння (з.5) та після приведення подібних членів, отримаємо

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} + c_1 z_1 + c_2 z_2 = 0. \qquad \text{(і.5)}$$

Для обертального руху (навколо поперечної осі, що проходить через центр тяжіння автомобіля)

$$m i_{Cy}^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = P_2 b - P_1 a, \qquad \text{(к.5)}$$

Звідки після підстановки рівнянь (г.5) – (ж.5) отримаємо

$$m i_{Cy} \frac{d^2\varphi}{dt^2} - c_2 z_2 b + c_1 z_1 a = 0. \qquad \text{(л.5)}$$

З рисунка 6.2 можна побачити, що

$$z_1 = z + a\mathrm{tg}\varphi \approx z + a\varphi, \qquad \text{(м.5)}$$

$$z_2 = z - b\mathrm{tg}\varphi \approx z - b\varphi. \qquad \text{(н.5)}$$

Диференціюючи рівняння (м.5) та (н.5) двічі, отримаємо

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} + a\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$\frac{d^2 z_2}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} - b\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Якщо виразити $\ddot{z}$ з рівняння (і.5), а з рівняння (л.5) $\ddot{\varphi}$ та підставивши в них рівняння (м.5) та (н.5) після приведення подібних членів отримаємо

$$m\frac{d^2 z_1}{dt^2} + c_1 z_1\left(1 + \frac{a^2}{i_{Cy}^2}\right) + c_2 z_2\left(1 - \frac{ab}{i_{Cy}^2}\right) = 0, \qquad \text{(о.5)}$$

$$m\frac{d^2z_2}{dt^2}+c_2z_2\left(1+\frac{b^2}{i_{Cy}^2}\right)+c_1z_1\left(1-\frac{ab}{i_{Cy}^2}\right)=0. \qquad \text{(п.5)}$$

З отриманих рівнянь виходить, що вертикальні коливання точок *A* та *B* (див. рис. 6.2) автомобіля залежать одне від одного. При збудженні коливань однієї з точок одразу ж виникають коливання іншої точки (це трапляється тому що в кожне з рівнянь (о.5) та (п.5) входять як z_1, так і z_2). Очевидно, що якщо коливання однієї точки не впливатимуть на коливання іншої, то загальний рівень коливань буде меншим.

Аналіз рівнянь показує, що незалежність коливань можлива лише в тому випадку, коли в кожне рівняння входитиме лише одна змінна (z_1 або z_2), що можливо при

$$ab-i_{Cy}^2=0,$$

тобто

$$ab=i_{Cy}^2.$$

Виконання цієї умови, разом із умовою $c_1a = c_2b$ призводить до того, що система розпадається на незалежні коливання передньої та задньої частини автомобіля (тобто точка *A* коливається так само, як і точка *B*), при цьому власні частоти вертикальних та кутових коливань збігаються.

ПИТАННЯ ДО САМОКОНТРОЛЮ

1. Запишіть рівняння Лагранжа 2-го роду для вільних коливань системи з двома ступенями вільності без тертя.
2. Що таке головні координати?
3. Що таке коефіцієнт розподілу?
4. Що таке основна частота та основне коливання?

Розділ 7
ВІБРОІЗОЛЯЦІЯ ТА ГАСІННЯ ВІБРАЦІЙ

У сучасній техніці проблема захисту механізмів, приладів та людей від шкідливого впливу вібрацій є надзвичайно актуальною. Джерелами вібрацій можуть бути двигуни, обертові машини, нерівності дороги, технологічні процеси тощо. Для зменшення рівня вібрацій застосовують два основні підходи: **віброізоляцію** – зменшення передачі коливань від джерела до об'єкта захисту шляхом введення пружних елементів, та **гасіння вібрацій** (демпфування) – розсіювання енергії коливань за допомогою дисипативних елементів.

Розглянемо основні принципи розрахунку віброізоляції та гасіння вібрацій, методи вибору параметрів пружних елементів та демпферів, а також їхній вплив на динамічні характеристики системи.

7.1 Віброзахистні системи

Коливання в машинах можуть бути **корисними**, коли принцип дії машини ґрунтується на ефекті коливань, наприклад, у вібраційному транспортері, віброударній машині для забивання паль тощо. Проте все ж частіше вони є **небажаними**, оскільки знижують надійність машини, викликають шум і мають шкідливий вплив на організм людини.

Характеристики коливальних систем (амплітуди, частоти, сили) можуть бути зменшені або обмежені шляхом оптимального вибору параметрів відповідної динамічної моделі. Якщо цього зробити не вдається, то застосовують додаткові пристрої для захисту від шкідливої дії коливань – **віброзахистні системи**.

Розрізняють два основні способи захисту від вібрації: *гасіння вібрацій* та *віброізоляція*.

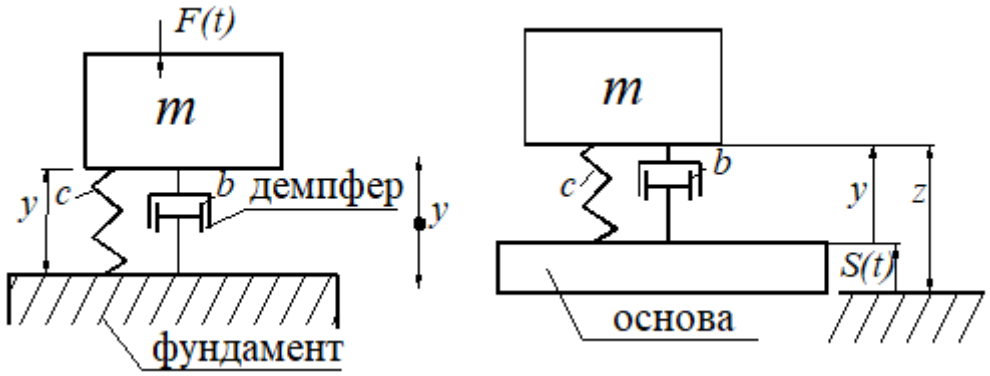
Гасіння вібрацій ґрунтується на приєднанні до машини додаткових коливальних систем, які називаються віброгасниками, що створюють динамічні впливи, які зменшують рівень коливань у машині.

Віброізоляція ґрунтується на розділенні вихідної системи на дві частини та з'єднанні цих частин за допомогою віброізоляторів. Одна з частин є об'єктом, що захищається, а інша – джерелом збудження. З них тіло більшої маси називають **основою**.

7.2 Одноосьовий віброізолятор

У найпростішому випадку джерело збудження та об'єкт, що захищається, вважаються твердими тілами, які рухаються вздовж однієї і тієї самої осі (див. рисунок 7.1).

На рисунку 7.1а показано динамічну модель машини масою *m*, встановленої на фундаменті. Віброізолятор, розміщений між машиною та фундаментом (основою), має приведений коефіцієнт жорсткості *c* та приведений коефіцієнт опору *b*.



а) б)

Рис. 7.1 – **Одноосьовий віброізолятор:**
а – силове збудження; б – кінематичне збудження.

Рівняння руху джерела збудження (рис. 7.1а), яке розглядається як тверде тіло, має вигляд

$$m\ddot{y} = F(t) + Q(y, \dot{y}), \tag{7.1}$$

де y – переміщення машини масою *m*;

$F(t)$ – зовнішня сила;

$Q(y, \dot{y})$ – динамічна складова, що передається на фундамент, яка в загальному випадку може бути нелінійною через нелінійність коефіцієнтів *c* та *b*.

Рівняння (7.1) зводиться до лінійного, якщо прийняти, що

$$Q(y, \dot{y}) = -(b\dot{y}(t) + cy(t)), \tag{7.2}$$

Призначення віброізолятора в цьому випадку полягає в зменшенні сили $Q(y, \dot{y})$, що передається на основу (фундамент) при заданій дії змінної сили $F(t)$. Таке збудження коливань називається **силовим**.

На рисунку 7.1б показано інший випадок, при якому об'єкт, що захищається, масою m представлений як тверде тіло, а джерелом збудження є **основа**, що здійснює коливання за законом $S(t)$.

Задача віброізоляції тут полягає в зменшенні динамічної складової $Q(y,\dot{y})$, що передається на об'єкт, який захищається.

Рівняння руху об'єкта, що захищається, має вигляд

$$m\left[\ddot{y}+\ddot{S}(t)\right]=Q\left(y,\dot{y}\right),$$

звідки

$$m\ddot{y}=-m\ddot{S}(t)+Q\left(y,\dot{y}\right). \qquad (7.3)$$

де $\ddot{S}(t)$ – прискорення основи.

Прискорення основи залежить від її маси M (якщо вона не є абсолютно жорсткою та нерухомою). Або від амплітуди та частоти коливання основи, якщо основа рухається за законом $S(t) = A\sin(\omega t)$.

$$\ddot{S}(t)=\frac{b\left(\dot{z}(t)-\dot{S}(t)\right)+c\left(z(t)-S(t)\right)}{M}=\frac{b\dot{y}(t)+cy(t)}{M}=-A\omega^2\sin\left(\omega t\right),$$

тобто з рівняння (7.3) з урахуванням рівняння (7.1) отримаємо

$$\ddot{y}=Q\left(y,\dot{y}\right)\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)=-\left(b\dot{y}(t)+cy(t)\right)\left(\frac{m+M}{Mm}\right).$$

Якщо основа буде масивною ($M \to \infty$), то $\ddot{y} \to 0$, задача вирішення проблеми коливання буде зводитися до підбору параметрів одноосьового віброізолятора з нерухомим фундаментом (див. рис. 7.1 а).

7.3 Коливання одноосьового віброізолятора при силовому збудженні

У загальному випадку рівняння коливання одноосьового віброізолятора при силовому збудженні може бути нелінійним через нелінійну залежність пружної сили c або сили опору b. Для спрощеного аналізу таких систем часто роблять припущення про лінійність цих характеристик, а також вважають зовнішню силу гармонійною. Тоді отримуємо лінійне рівняння, для якого можна застосувати стандартні методи теорії коливань, зокрема, знайти коефіцієнт динамічного підсилення, коефіцієнт передачі та дослідити явище резонансу.

Для дослідження коливань одноосьового віброізолятора при силовому збудженні введемо позначення $\lambda^2 = c/m$ та $2\gamma = b/m$, у такому разі початкове диференційне рівняння (7.1) прийме вигляд

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = \frac{F(t)}{m}. \tag{7.4}$$

Якщо прийняти, що $F(t) = H\sin(\omega t)$, то

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = \frac{H}{m}\sin(\omega t). \tag{7.5}$$

У такому разі рівняння (7.5) повністю співпадає з рівнянням (4.29), тому використовуючи розсуди розділу 4 можна записати

$$y = \frac{H}{m\sqrt{\left(\lambda^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\sin(\omega t - \theta), \tag{7.6}$$

де θ – зсув фази переміщення

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2}\right).$$

Виконаємо диференціювання рівняння (7.6)

$$\dot{y} = \frac{H\omega}{m\sqrt{\left(\lambda^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t - \theta), \tag{7.7}$$

та підставимо y та $\dot{y}$ в рівняння (7.2)

$$Q = -\frac{Hc}{m\sqrt{\left(\lambda^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\left[\sin(\omega t - \theta) + \frac{\omega b}{c}\cos(\omega t - \theta)\right]. \tag{7.8}$$

Згідно рівняння (4.39) рівняння (7.8) можна записати через коефіцієнт динамічності

$$Q = -\mu H\left[\sin(\omega t - \theta) + \frac{\omega b}{c}\cos(\omega t - \theta)\right], \tag{7.9}$$

де

$$\mu = \frac{\lambda^2}{\sqrt{\left(\lambda^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}. \tag{7.10}$$

Для визначення максимального значення сили Q використаємо відоме співвідношення

$$a\sin(\alpha)+d\cos(\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varepsilon), \tag{7.11}$$

де

$$\varepsilon=\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right).$$

При $a=1$ та $d=2\frac{\gamma\omega}{\lambda^2}$ будемо мати наступне рівняння

$$Q=-\mu H\sqrt{1+\frac{4\gamma^2\omega^2}{\lambda^4}}\sin(\omega t-\theta+\varepsilon), \tag{7.12}$$

де

$$\varepsilon=\operatorname{arctg}\left(\frac{2\gamma\omega}{\lambda^2}\right).$$

Відповідно

$$Q_{\max}=-\mu H\sqrt{1+\frac{4\gamma^2\omega^2}{\lambda^4}}, \tag{7.13}$$

або

$$Q_{\max}=K_c\cdot H, \tag{7.14}$$

де K_c – коефіцієнт передачі сили.

Коефіцієнт передачі сили можна визначити з рівняння

$$K_c=\mu\sqrt{1+\frac{4\gamma^2\omega^2}{\lambda^4}}=\sqrt{\frac{1+4\gamma^2\frac{\omega^2}{\lambda^4}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\lambda^4}\right)^2+4\gamma^2\frac{\omega^2}{\lambda^4}}},$$

При жорсткому з’єднанні джерела збудження (машини) та основи (фундаменту) значення K_c = 1. В іншому випадку, наприклад при K_c < 1 віброзахистна система буде працювати ефективно, оскільки амплітуда сили, що діє на основу, буде зменшуватися. У випадку коли K_c > 1 застосування віброізолятора недоцільне, оскільки він не буде виконувати своєї функції і може навіть погіршити ефекти вібрації, особливо при резонансі (ω/λ = 1, див. рис. 7.2).

Характер зміни K_c від відношення ω/λ представлено на рисунку 7.2.

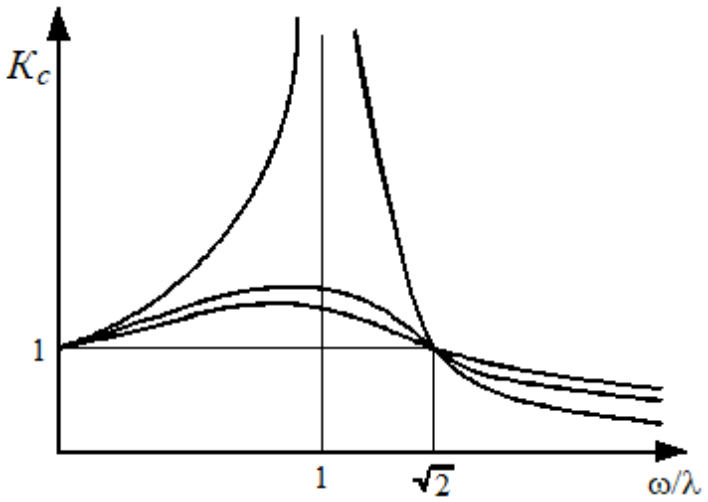


Рис. 7.2 – **Характер зміни коефіцієнта передачі сили від частотного відношення ω/λ**

Дивлячись на характер зміни коефіцієнта передачі сили від частотного відношення ω/λ можна побачити, що всі функції перетинаються в точці з координатами ($\sqrt{2}$; 1). Відповідно, для того, щоб максимальна величина сили *Q*, яка передається на основу, була меншою аніж амплітуди вимушеної сили, повинно виконуватися умова

$$\frac{\omega}{\lambda} > \sqrt{2}. \qquad (7.15)$$

Зазвичай приймають ω/λ ≥ 4.

Використовуючи співвідношення $\lambda^2 = c/m$, отримаємо умову для визначення коефіцієнта жорсткості

$$c \le \frac{\omega^2 m}{16}. \qquad (7.16)$$

Іноді для оцінки ефективності віброізоляції, окрім коефіцієнта передачі сили K_c використовують коефіцієнт вібраційного захисту K_e, який є величиною, яка обернено пропорційна до коефіцієнта передачі сили.

$$K_e = \frac{1}{K_c}.$$

Таким чином: коли величина $K_c > 1$ (передача сили підсилюється), то величина $K_e < 1$, що свідчить про відсутність захисної дії; коли величина $K_c < 1$ (віброізолятор ефективний), то величина $K_e > 1$, і чим більше K_e, тим кращий віброзахист.

Коефіцієнт K_e зручний для інженерної оцінки: він показує, у скільки разів зменшується вібраційне навантаження порівняно з жорстким з'єднанням.

7.4 Пружинний динамічний гасник без тертя

Пружинний динамічний гасник без тертя являє собою додаткову коливальну систему (додаткову масу m_2 та пружину жорсткістю c_2), яка приєднується до основної системи (маса m_1, жорсткість c_1) з метою зменшення амплітуди її коливань. Принцип дії ґрунтується на налаштуванні гасника таким чином, щоб його власна частота $\omega_2 = c_2/m_2$ дорівнювала частоті збудження ω. У цьому випадку маса гасника m_2 здійснює коливання, які створюють силу, що протидіє збудженню основної маси, зводячи її коливання до мінімуму (теоретично – до нуля). (Життєвий приклад: У хмарочосі Тайбей 101 (Тайвань) встановлено гігантський маятниковий гасник – сталеву кулю масою 660 тонн, підвішену на сталевих тросах між 87-м і 92-м поверхами. Її власна частота налаштована на частоту вібрацій будівлі, спричинених вітром або землетрусами).

Розглянемо найпростіший віброгасник, призначений для гасіння коливань маси m_1 (рис. 7.3), що викликаються гармонічною силою $F_0\sin(\omega t)$. Він складається з додаткової маси m_2, яка з'єднана з основною масою m_1 за допомогою пружного елемента з коефіцієнтом жорсткості c_2. Основна маса m_1 також з'єднана з нерухомою опорою через пружний елемент жорсткістю c_1 (або через віброізолятор). Таким чином, утворюється система з двома ступенями вільності, де гасник масою m_2 за допомогою пружини жорсткістю c_2 налаштовується на частоту збудження для зменшення коливань основної маси m_1.

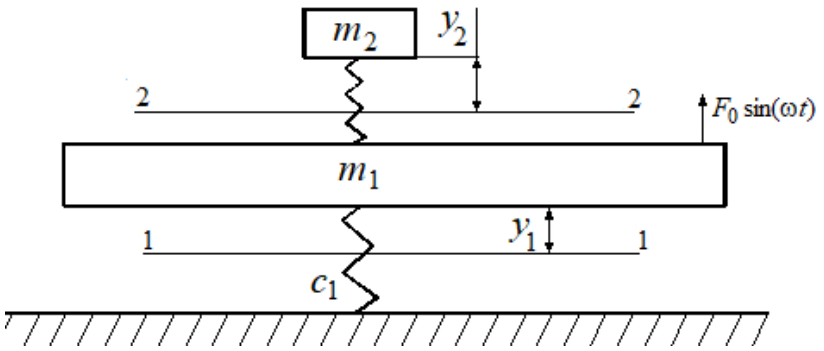


Рис. 7.3 – **Схема пружинного динамічного гасника:**
1-1, 2-2 – положення статичної рівноваги відповідно маси m_1 та m_2

Рівняння руху двохмасової системи, що зображена на рисунку 7.3 мають вигляд

$$\begin{cases} m_1\ddot{y} = F_0\sin(\omega t) - c_1 y_1 + c_2(y_2 - y_1), \\ m_2\ddot{y}_2 = -c_2(y_2 - y_1). \end{cases} \tag{7.17}$$

Усталені вимушені коливання з частотою збуджувальної сили ω описуються частинним розв'язком неоднорідного диференціального рівняння, який встановлюються після затухання вільних коливань. Цей розв'язок має вигляд

$$y_1 = A_1\sin(\omega t); \tag{7.18}$$

$$y_2 = A_2\sin(\omega t). \tag{7.19}$$

Підставляючи рівняння (7.18) та рівняння (7.19) в рівняння (7.17) отримаємо

$$(c_1 + c_2 - m_1\omega^2)A_1 - c_2 A_2 = F_0, \tag{7.20}$$

$$-c_2 A_1 + (c_2 - m_2\omega^2)A_2 = 0, \tag{7.21}$$

з яких по правилу Крамера визначимо

$$A_2 = \frac{F_0}{\Delta}c_2, \tag{7.22}$$

та

$$A_1 = \frac{F_0}{\Delta}(c_2 - m_2\omega^2), \tag{7.23}$$

де Δ – визначник, складений з коефіцієнтів при A_1 та A_2 в рівнянні (7.20) та рівнянні (7.21)

$$\Delta = (c + c_\Gamma - m_\Gamma\omega^2)(c_\Gamma - m_\Gamma\omega^2)c_\Gamma. \tag{7.24}$$

При $\Delta \neq 0$, для того щоб в рівнянні (7.23) амплітуда A_1 = 0, необхідно щоб

$$\omega_* = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}. \tag{7.25}$$

Такий стан має назву антирезонанс, а відповідна частота ω_* в рівнянні (7.25) антирезонансною.

Явище антирезонансу може бути використано для віброгашення, тобто необхідно в додатковому осциляторі підібрати масу m_2 та коефіцієнт жорсткості c_2 такими, щоб виконувалась умова $\omega = \omega_*$.

Віброгашення за вказаним принципом (динамічним гасником без тертя) є ефективним лише для однієї фіксованої частоти збудження. Навіть порівняно невелике відхилення від частоти, що визначається співвідношенням (7.25), може призвести до збільшення амплітуди коливань основної системи.

Це є суттєвим недоліком таких гасників, оскільки в реальних умовах частота збудження часто змінюється (наприклад, при різних режимах роботи двигуна, зміні швидкості руху, сили повітря, тощо). Для розширення робочого діапазону частот застосовують гасники з демпфуванням (тертям) або адаптивні гасники з можливістю зміни налаштування.

ПИТАННЯ ДО САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому відмінність віброгашення від віброізоляції?
2. Що таке одноосьовий віброізолятор?
3. Що таке коефіцієнт передачі сили?
4. У чому фізична сутність явища антирезонансу?

Розділ 8
ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

8.1 Рівняння коливання струни

У фізиці, з точки зору математики, під струною розуміють однорідну, гнучку, пружну нитку. У зв'язку з цим розглядувана задача має дуже важливе прикладне значення, оскільки за допомогою рівняння коливання струни можна описувати коливання натягнутого троса, ланцюга, ланцюгової передачі, дротів ліній електропередач, тощо.

8.1.1 Вивід рівняння коливання струни

Розглянемо коливання струни – найпростішу систему з розподіленими параметрами. Нехай струна довжиною L натягнута з силою T (постійною вздовж струни), має лінійну густину ρ (масу на одиницю довжини). Відхилення точок струни від положення рівноваги описується функцією $y(x,t)$, де x – координата вздовж струни, t – час.

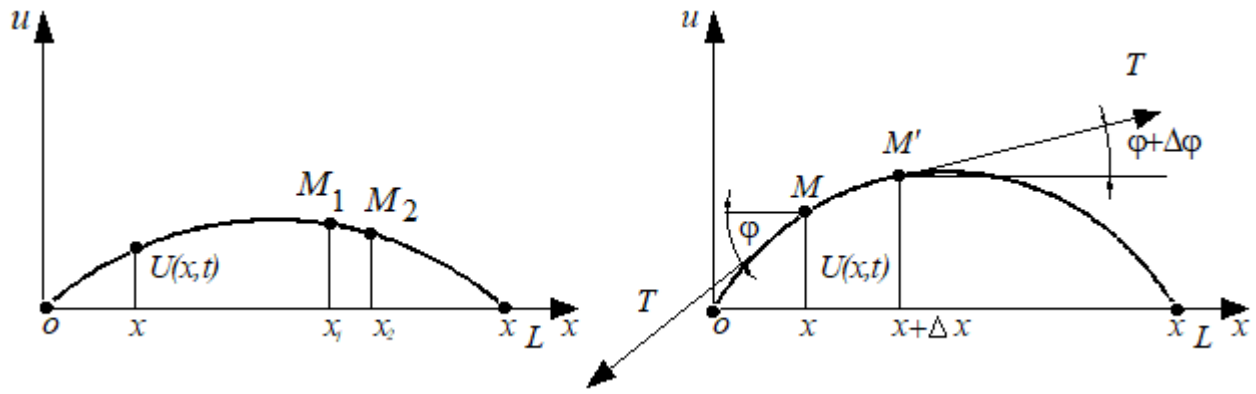
Припустимо, що струна довжиною L у початковий момент часу займає положення на осі Ox від 0 до L. Кінці струни закріплені в точках $x = 0$ та $x = L$. Якщо струну відхилити від початкового положення, а потім надати самій собі, то струна почне коливатися.

Будемо розглядати малі відхилення точок струни від початкового положення. Тому можна допустити, що рух кожної точки струни відбувається перпендикулярно до осі Ox і в одній площині. Тоді процес коливання струни можна описати функцією $U(x,t)$, яка дає величину переміщення будь-якої точки струни з абсцисою x у момент часу t (див. рис. 8.1 а).

Припустимо, що:

1. Довжина елемента струни $\cup M_1M_2$ (рис. 8.1 а) дорівнює його проекції на вісь Ox, тобто $\cup M_1M_2 = x_2 - x_1$.
2. Натяг у всіх точках струни однаковий і дорівнює T.

Розглянемо елемент струни MM' (рис. 8.1 б). На кінцях цього елемента по дотичній до струни діють так звані сили натягу струни T.



а) б)

Рис. 8.1 – **Схема струни, що коливається:**
а) струна; б) струна з елементом Δx

Нехай дотичні утворюють з віссю *Ox* кути φ та φ + Δφ. Тоді проекція на вісь *Ou* сил, що діють на елемент *MM′*, буде дорівнювати

$$T_u = T \cdot \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \cdot \sin(\varphi).$$

Струна, за визначенням, здійснює малі коливання, отже кут φ є малим, тому можна допустити, що

$$\sin(\varphi) \approx \operatorname{tg}(\varphi).$$

Оскільки sin(φ) = tg(φ) = ∂u/∂x (градієнт зміщення), то це співвідношення дозволяє лінеаризувати рівняння руху струни, зводячи його до класичного хвильового рівняння.

$$T_u \approx T \cdot \operatorname{tg}(\varphi+\Delta\varphi) - T \cdot \operatorname{tg}(\varphi) = T\left[\frac{\partial U(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right]. \quad (8.1)$$

З властивостей диференційованих функцій (теорема Лагранжа) відомо, що якщо деяка функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a; b]$ і диференційована в інтервалі $(a; b)$, то в цьому інтервалі знайдеться така точка c, що буде виконуватися в еквівалентній формі рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

що дозволяє переписати рівняння (8.1) у вигляді

$$T_u = T\frac{\partial^2 U(x+\theta\cdot\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x \approx T\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Delta x, \quad (8.2)$$

де $0 < \theta < 1$.

У відповідності до другого закону Ньютона запишемо

$$F_u^j = T_u, \tag{8.3}$$

де F_u^j – сила інерції елемента *MM'*, яка дорівнює

$$F_u^j = \rho \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{8.4}$$

де ρ – лінійна щільність (маса на одиницю довжини);

$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ – прискорення елементу *MM'*.

Підставляючи рівняння (8.2) та рівняння (8.4) в рівняння (8.3), після ділення на $\rho \Delta x$ остаточно отримуємо **рівняння вільних коливань струни** у вигляді **одновимірного хвильового рівняння**

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{8.5}$$

де $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ – швидкість поширення хвилі в струні.

Величина *a* має зміст швидкості поширення поперечних хвиль уздовж струни. Це рівняння є лінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних другого порядку гіперболічного типу. Його розв'язок описує хвильові процеси – біжучі та стоячі хвилі в струні.

8.1.2 Визначення крайових умов

Для повного опису коливань струни, окрім початкових умов (початкова форма та початкові швидкості), необхідно задати крайові (граничні) умови, які визначатимуть стан струни на її кінцях при $x = 0$ та $x = L$. Також необхідно знати початкові умови, що описують стан струни в початковий момент часу при $t = 0$. Сукупність граничних та початкових умов має назву ***крайових умов***.

У найпростішому випадку, коли кінці струни жорстко закріплені, зміщення на кінцях дорівнює нулю в будь-який момент часу, тобто

$$U(0, t) = 0, \tag{8.6}$$

$$U(L, t) = 0. \tag{8.7}$$

Це крайові умови першого роду, або як їх ще називають умови Діріхле.

У початковий момент часу $t = 0$ струна має надану їй певну форму. Нехай ця форма визначається заздалегідь заданою функцією $f(x)$. Таким чином, повинно бути

$$U(x,0) = U\big|_{t=0} = f(x). \tag{8.8}$$

Крім того, у початковий момент повинна бути задана швидкість у кожній точці струни, яку визначимо функцією $\varphi(x)$. А отже, повинно бути

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x). \tag{8.9}$$

Для виникнення коливань необхідно, щоб система була виведена зі стану рівноваги. Це може бути зроблено двома способами:

– наданням струні початкової форми, відмінної від положення рівноваги ($f(x) \neq 0$);

– наданням точкам струни початкових швидкостей ($\varphi(x) \neq 0$).

Якщо ж обидві умови одночасно дорівнюють нулю ($f(x) \equiv 0$ та $\varphi(x) \equiv 0$), то система перебуває в стані спокою, і жодних коливань не відбуватиметься. Таким чином, для нетривіального розв'язку задачі про вільні коливання необхідно, щоб хоча б одна з початкових умов була ненульовою. Це відповідає фізичному змісту: щоб струна почала коливатися, її потрібно відхилити або штовхнути.

8.1.3 Рішення рівняння коливань струни методом Фур'є

Для знаходження розв'язку рівняння вільних коливань струни застосовується метод Фур'є (метод відокремлення змінних). Розв'язок подається у вигляді добутку двох функцій: просторової $X(x)$, яка описує форму коливань для відповідної моди, та часової $T(t)$, яка визначає зміну амплітуди в часі

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t). \tag{8.10}$$

Коли форма коливань апроксимується однією функцією (тобто загальний розв'язок шукаємо у вигляді $U(x,t) = X(x)T(t)$ з однією просторовою функцією $X(x)$), то це є окремим випадком методу відокремлення змінних, який можна розв'язати методом Релея.

Підстановка рівняння (8.10) в хвильове рівняння (8.5) дає змогу розділити змінні та отримати два незалежних звичайних

диференціальних рівняння – одне для $X(x)$ з урахуванням крайових умов, інше для $T(t)$. Це дозволяє звести задачу про коливання струни до знаходження власних значень та власних функцій, а загальний розв'язок подається у вигляді ряду Фур'є за цими функціями.

$$X(x)\cdot\ddot{T}(t)=a^2X''(x)\cdot T(t).$$

Ділимо цю рівність на a^2XT

$$\frac{\ddot{T}}{a^2T}=\frac{X''}{X}. \tag{8.11}$$

Рівність (8.11) можлива тільки у випадку, коли його ліва та права частини дорівнюють постійному числу, тоді

$$\frac{\ddot{T}}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda, \tag{8.12}$$

де $\lambda>0$ – стала відокремлення.

З рівняння (8.12) отримаємо два звичайних диференційних рівняння

$$X''+\lambda X=0, \tag{8.13}$$

$$\ddot{T}+a^2\lambda T=0. \tag{8.14}$$

Загальний розв'язок рівняння (8.13) та рівняння (8.14) відповідно матиме вигляд рівняння (8.15) та рівняння (8.16).

$$X(x)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right), \tag{8.15}$$

$$T(t)=C\cos\left(a\sqrt{\lambda}t\right)+D\sin\left(a\sqrt{\lambda}t\right), \tag{8.16}$$

де *A, B, C, D* – довільні сталі коефіцієнти, які визначаються з крайових та початкових умов.

Підставимо рівняння (8.15) та рівняння (8.16) в рівняння (8.10) враховуючи тільки першу моду отримаємо загальне рішення у вигляді

$$U(x,t)=\left(A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right)\left(C\cos\left(a\sqrt{\lambda}t\right)+D\sin\left(a\sqrt{\lambda}t\right)\right). \tag{8.17}$$

Виконаємо крайові умови та підберемо *A* та *B* так, щоб задовольнялися умови рівняння (8.6) та рівняння (8.7).

Оскільки $T(t)$ не залежить від *x*, то цим умовам повинна задовольняти тільки функція $X(x)$, тобто

$$X(0)=0, \tag{8.18}$$

$$X(L)=0. \tag{8.19}$$

Підставимо рівняння (8.18) та рівняння (8.19) в рівняння (8.15) та отримаємо

$$0=A\cdot 1+B\cdot 0, \tag{8.20}$$

$$0=A\cos\left(\sqrt{\lambda}L\right)+B\sin\left(\sqrt{\lambda}L\right), \tag{8.21}$$

з рівняння (8.20) отримаємо

$$A=0,$$

а з рівняння (8.21) отримаємо вираз

$$B\sin\left(\sqrt{\lambda}L\right)=0. \tag{8.22}$$

В рівнянні (8.22) коефіцієнт $B\neq 0$, інакше задача втрачає фізичний сутність, оскільки система перебуває в стані спокою, і жодних коливань не відбуватиметься. Враховуючи це запишемо

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}L\right)=0,$$

звідки

$$\sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{L}, \tag{8.23}$$

де n = 1, 2, 3, … – номер моди.

Підставляючи рівняння (8.23) в рівняння (8.15) отримаємо

$$X(x)=B\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{8.24}$$

Коефіцієнт B зазвичай визначається з умови нормування

$$\int_0^L X_n^2(x)dx=\int_0^L B_n^2\sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=B_n^2\frac{L}{2}=1,$$

або приймається рівним 1, або залишається вільною величиною для подальшого визначення з початкових умов.

З умови нормування коефіцієнт B буде дорівнювати

$$B=\sqrt{\frac{2}{L}}.$$

Підставляючи рівняння (8.23) в рівняння (8.16) отримаємо

$$T(t) = C\cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) + D\sin\left(\frac{an\pi}{L}t\right), \qquad (8.25)$$

Для кожного значення *n* підставимо рівняння (8.24) та рівняння (8.25) в рівняння (8.10) та запишемо рішення у вигляді

$$U_n(x,t) = B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(C_n\cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) + D_n\sin\left(\frac{an\pi}{L}t\right)\right). \qquad (8.26)$$

Оскільки рівняння (8.5) лінійне та однорідне, то сума його рішень також є його рішенням, тобто

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) + D_n\sin\left(\frac{an\pi}{L}t\right)\right)B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \qquad (8.27)$$

Оскільки рівняння (8.27) є рішенням рівняння (8.5) в умовах коли сходяться ряди, які виходять після виконання двократного почленного диференціювання по *x* та по *t*.

З рівняння (8.27) при *t = 0* для умови рівняння (8.8) отримаємо

$$U(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \qquad (8.28)$$

У загальному випадку, коли B_n довільний, коефіцієнт C_n знаходяться з умови ортогональності

$$C_n = \frac{2}{B_n L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx. \qquad (8.29)$$

Виконаємо диференціювання членів рівняння (8.26) за часом та при значенні $t = 0$ отримаємо

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{L} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad (8.30)$$

Коефіцієнт D_n для цього розкладу можна визначити з рівняння

$$D_n = \frac{2}{an\pi B_n}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx, \qquad (8.31)$$

Таким чином, всі коефіцієнти рівняння (8.17) визначені і може бути розраховане зміщення струни в будь який момент часу *t*.

У навчальних задачах зазвичай задають конкретні початкові умови ($f(x)$ та $g(x)$), наприклад:

$f(x) = \sin(\pi x/L)$ (струна відтягнута за першою формою);

$f(x) = 4hx/L^2(L-x)$ (струна відтягнута посередині на висоту h);

$g(x) = 0$ (відтягнута струна відпущена зі стану спокою);

$g(x) = v_0$ (початковий поштовх струни відбувається зі сталою швидкістю).

8.2 Вільні коливання стрижнів

Розглянемо вільні коливання стержнів – систем з розподіленими параметрами, які, на відміну від струни, чинять опір як розтягу, так і згину. У техніці стержні є основними елементами багатьох конструкцій: балки, вали, колони, елементи рам, штовхачі, тощо. Їхні коливання поділяються на три основні типи:

1. **поздовжні** – деформації розтягу-стиску вздовж осі стержня;
2. **крутильні** – закручування навколо поздовжньої осі;
3. **поперечні (згинальні) –** викривлення осі стержня в поперечному напрямку.

Кожен тип коливань описується своїм диференціальним рівнянням у частинних похідних, а його розв'язання вимагає задання крайових умов (закріплення кінців) та початкових умов (початкова форма та швидкості).

8.2.1 Вільні поздовжні коливання призматичних стрижнів

Як приклад вільних поздовжніх коливань стержнів можна навести коливання штовхачів та штанг газорозподільного механізму, коливання стержня клапана тощо. На рисунку 8.2а показано вільний від навантажень призматичний стержень довжиною L. На відстані x від лівого кінця розташований нескінченно малий елемент довжиною dx. Через $u(x,t)$) позначимо поздовжнє переміщення точки поперечного перерізу з координатою x.

У процесі поздовжніх коливань сума поздовжніх сил, що діють на нескінченно малий елемент (рис. 8.2 б), відповідно до принципу Д'Аламбера, дорівнює

$$S(x,t) - \left(S(x,t) + \frac{\partial S}{\partial x} dx \right) - \rho_1 F dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \qquad (8.32)$$

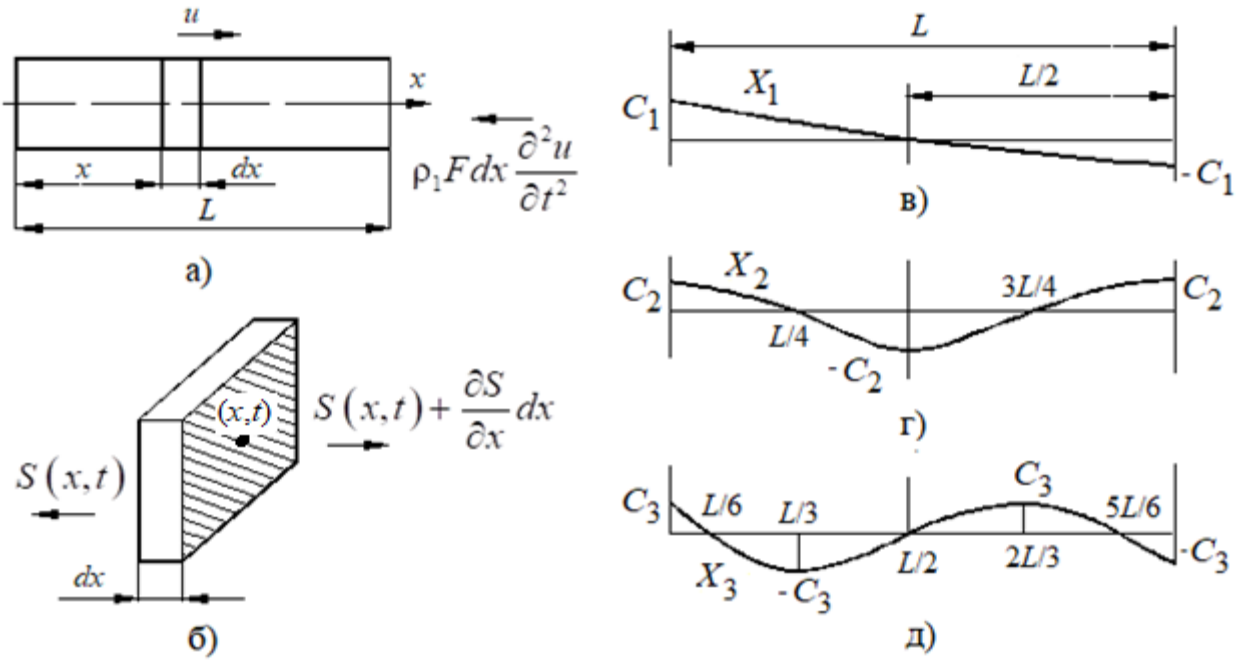


Рис. 8.2 – **Вільний призматичний стрижень:**
а – стрижень; б – поперечний переріз стрижня; в, г, д – форми коливань.

Після спрощення рівняння (8.32) отримаємо рівняння

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \rho_1 F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (8.33)$$

де $S(x,t)$ – це внутрішня поздовжня сила, яка виникає в перерізі стержня внаслідок його деформації;

ρ_1 – щільність матеріалу (маса на одиницю об'єму);

F – площа поперечного перерізу стержня (для призматичного стержня вона є постійною вздовж довжини, тому виноситься за знак похідної).

Внутрішня поздовжня сила, яка виникає в перерізі стержня внаслідок його деформації, пов'язана з відносним видовженням через закон Гука рівнянням

$$S = F\delta = FE\varepsilon = EF\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad (8.34)$$

де E – модуль Юнга;

$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x}$ – відносна поздовжня деформація (деформація розтягу-стиску) в точці з координатою x.

Після підстановки рівняння (8.34) в рівняння (8.33) та відповідних перетворень отримаємо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{8.35}$$

де $a^2 = E/\rho_1$ – квадрат швидкості поширення поздовжніх хвиль у стержні.

Рівняння поздовжніх коливань стержня (8.35) є хвильовим рівнянням того ж типу, що й для струни (див. рівняння (8.5)). Тому його розв'язок шукається методом Фур'є (відокремлення змінних). Для коливань, що відповідають одній із власних форм зображених на рисунку 8.2 в), г), д), просторова та часова частини розділяються та мають наступний вигляд

$$u(x,t) = X(x)(A\cos(pt) + B\sin(pt)), \tag{8.36}$$

де $X(x)$ – власна функція (головна або нормальна функція), що задовольняє крайові умови;

$p = a\sqrt{\lambda}$ – власна частота;

A та B – довільні сталі рівняння.

Конкретний вигляд $X(x)$ (синуси, косинуси, гіперболічні функції) залежить від способу закріплення кінців стержня. Для вільного стержня (обидва кінці вільні) власні функції мають вигляд $\cos(n\pi x/L)$, а для стержня із закріпленими кінцями – $\sin(n\pi x/L)$. Для консольного стержня (один кінець закріплений, інший вільний) форми описуються комбінаціями синусів та косинусів.

На рисунку 8.2 в, г, д конкретний вигляд $X(x)$ описано формами власних коливань які позначено через X_1, X_2, X_3.

Якщо підставити рівняння (8.36) в рівняння (8.35) отримаємо рівняння

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{p^2}{a^2} X = 0, \tag{8.37}$$

рішенням якого є рівняння

$$X(x) = C\cos\left(\frac{p}{a}x\right) + D\sin\left(\frac{p}{a}x\right), \tag{8.38}$$

де C та D – довільні сталі рівняння, що визначаються з умови задоволення кінцевим умовам на кінцях стрижня.

При жорсткому закріпленні стержня на його кінцях $u(x,t) = 0$, а отже, і $X(x) = 0$.

У стержня, що має незакріплені кінці (рис. 8.2 а), поздовжня сила, відповідно до рівняння (8.33) та (8.36), пропорційна $\partial X/\partial x$ і повинна дорівнювати нулю при $x = 0$ та $x = L$.

Для того щоб задовольнялася перша з цих умов, необхідно покласти $D = 0$. Друга умова буде задовольнятися (для нетривіального розв'язку, тобто $C \neq 0$), якщо допустити що

$$\sin\left(\frac{p}{a}L\right) = 0,$$

звідки

$$\frac{p_n}{a}L = n\pi, \tag{8.39}$$

де $n = 1, 2, 3, \ldots$ – номер моди.

Приймаючи $n = 1, 2, 3, \ldots$ можна отримати частоти рівзних форм поздовжніх коливань.

Частота основної форми коливань при $n = 1$ (див. рис. 8.2 в) має вигляд

$$p_1 = \frac{a\pi}{L} = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho_1}}, \tag{8.40}$$

а відповідний їй період коливань визначається як

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{p_1} = 2L\sqrt{\frac{\rho_1}{E}}. \tag{8.41}$$

Ця форма коливань зображена на рисунку 8.2 в) та може бути представлена у вигляді рівняння

$$X_1 = C_1\cos\left(\frac{p_1}{a}x\right) = C_1\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right), \tag{8.42}$$

де C_1 – величина, що позначена на рисунку 8.2 в.

Друга та третя форми коливань зображені на рисунку 8.2 г та д відповідно. Вони мають вигляд

$$\frac{p_2}{a}L = 2\pi,$$

$$\frac{p_3}{a} L = 3\pi$$

звідки відповідно отримаємо

$$X_2 = C_2 \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right), \tag{8.43}$$

$$X_3 = C_3 \cos\left(\frac{3\pi}{L} x\right). \tag{8.44}$$

Таким чином загальний вигляд приватних рішень рівняння (8.36) можна записати у вигляді

$$u_n(x,t) = \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\left(A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L} t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L} t\right)\right). \tag{8.45}$$

Якщо скласти ці рішення, рівняння для визначення переміщення при довільних повздовжніх коливаннях можна записати у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\left(A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L} t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L} t\right)\right). \tag{8.46}$$

Постійні сталі A_n та B_n можна завжди визначити за умови задоволення початкових умов. Припустимо, наприклад, що при $t = 0$

$$u(x,0) = f_1(x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

Тоді підставляючи $t = 0$ в рівняння (8.46) отримаємо

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \tag{8.47}$$

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \tag{8.48}$$

Таким чином коефіцієнти A_n та B_n можна визначити з рівнянь для визначення коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є. Тобто для відомих функцій $f_1(x)$ та $\varphi_1(x)$ рівняння (8.47) та рівняння (8.48) можна записати

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \tag{8.49}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L \varphi_1(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx. \qquad (8.50)$$

В якості прикладів наведемо деякі функції $f_1(x)$ та $\varphi_1(x)$ для поздовжніх коливань призматичних стрижнів:

а. Початкове зміщення $f_1(x) \neq 0$**, початкова швидкість** $\varphi_1(x) = 0$

– Рівномірне розтягнення $f_1(x) = C$;

– Параболічна форма $f_1(x) = C\cdot x\cdot(L-x)$;

– Локальне збурення $f_1(x) = C\cdot\exp(-\alpha\cdot(x - x_0)$.

б. Початковий імпульс (удар) $f_1(x) = 0$, **швидкість** $\varphi_1(x) \neq 0$

– Рівномірна швидкість $\varphi_1(x) = v_0$;

– Локальний удар $\varphi_1(x) = v_0\cdot\delta\cdot(x - x_0)$;

– Синусоїдальний розподіл $\varphi_1(x) = v_0\cdot\cos(\pi x/L)$.

в. Комбінований випадок, коли $f_1(x) \neq 0$, $\varphi_1(x) \neq 0$ **наприклад**

$$f_1(x) = C\cdot\cos(\pi x/L),$$

$$\varphi_1(x) = v_0\cdot\cos(2\pi x/L).$$

8.2.2 Поперечні коливання призматичних стрижнів

Як приклад поперечних коливань призматичних стрижнів можна навести: коливання балки моста, осі проміжних шестерень передачі заднього ходу, тощо.

На рисунку 8.3 показано призматичний стрижень, що здійснює поперечні коливання. У такого стрижня на нескінченно малому елементі стрижня dx діють поперечні сили $Q(x,t)$, $Q(x+dx,t)$ та згинальні моменти $M(x,t)$, $M(x+dx,t)$. За другим законом Ньютона для поступального руху в поперечному напрямку можна записати

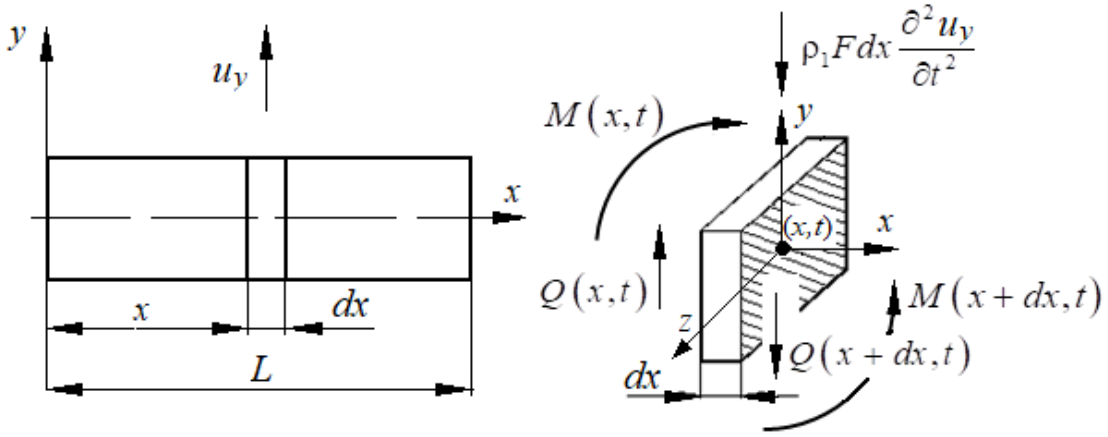
$$Q\left(x+dx,t\right) - Q\left(x,t\right) - \rho_1 F dx\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0, \qquad (8.51)$$

з якого після ділення на dx і переходу до границі маємо

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \rho_1 F\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0, \qquad (8.52)$$

де ρ_2 та F – позначено в підрозділі 8.2.1;

u_y – поперечні переміщення елементу стрижня dx.



а) б)

Рис. 8.3 – **Поперечні коливання призматичного стрижня:**
а – стрижень; б – переріз стрижня

Для обертального руху (нехтуючи моментом інерції елемента)

$$M(x+dx,t)-M(x,t)-Q(x,t)dx=0 \qquad (8.53)$$

Після ділення на *dx* та граничного переходу

$$\frac{\partial M}{\partial x}=Q(x,t)$$

Використовуючи співвідношення опору матеріалів (в якому *EI* – жорсткість на згин)

$$M(x,t)=EI\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}, \qquad (8.54)$$

з рівняння (8.52) та рівняння (8.53) отримуємо рівняння поперечних коливань стрижня у вигляді

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}\right)+\rho_1 F\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}=0. \qquad (8.55)$$

Оскільки для призматичного стрижня (*EI* = const) маємо

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}+\frac{EI}{\rho_1 F}\frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4}=0. \qquad (8.56)$$

Якщо вираз замінити на C^2 то можна записати рівняння (8.56) у вигляді

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}+C^2\frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4}=0. \qquad (8.57)$$

Параметр C, який характеризує жорсткість та інерцію стрижня при згинальних коливаннях, не є швидкістю в звичайному сенсі через дисперсію хвиль, він має назву **квадрат швидкості поширення хвиль** у стержні при поперечних (згинальних) коливаннях, але зі значним зауваженням.

$$C = \sqrt{\frac{EI}{\rho_1 F}}.$$

Найпростішим періодичним розв'язком рівняння поперечних коливань є так зване головне коливання (основна мода). Це коливання відбувається з найнижчою власною частотою ω_y і описується виразом

$$u_y(x,t) = \varphi(x)\sin(\omega_y t + \alpha), \tag{8.58}$$

або в загальному вигляді

$$u_y(x,t) = X(x)(A\cos(\omega_y t) + B\sin(\omega_y t)), \tag{8.59}$$

де $\varphi(x)$ – форма головного коливання або власна форма – функція, яка встановлює закон розподілу максимальних амплітудних відхилень точок осі стержня;

ω_y – власна частота, яка відповідає своїй власній формі коливань, яких, як відомо, існує нескінченна множина.

Власні форми та власні частоти визначаються за допомогою рівняння власних форм та крайових умов задачі.

Для отримання рівняння власних форм підставимо рівняння (8.58) в рівняння (8.57). Після відповідних перетворень отримаємо

$$\frac{d^4\varphi}{dx^4} - k^4\varphi(x) = 0, \tag{8.60}$$

де

$$k^4 = \frac{\rho_1 F \omega_y^2}{EI}. \tag{8.61}$$

Рівняння (8.60) це лінійне однорідне диференціальне рівняння четвертого порядку з постійними коефіцієнтами. Його загальний розв'язок має вигляд

$$\varphi(x) = C_1\cos(kx) + C_2\sin(kx) + C_3\cosh(kx) + C_4\sinh(kx). \tag{8.62}$$

В рівнянні (8.62) функції cosh(*kt*) та sinh(*kt*) дорівнюють

$$\cosh\left(kt\right)=\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2},$$

$$\sinh\left(kt\right)=\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}.$$

Крайові умови (закріплення кінців) дають систему лінійних алгебраїчних рівнянь для C_1, C_2, C_3, C_4. Умова існування нетривіального розв'язку (визначник = 0) призводить до частотного рівняння, корені якого k_n визначають власні частоти $\omega_{yn} = k_n^2 C$ та відповідні власні форми $\varphi_n(x)$. Для різних типів закріплення (шарнірне спирання, защемлення, вільний кінець) ці рівняння мають різний вигляд.

У звичайних випадках кількість крайових умов дорівнює кількості довільних сталих — по дві на кожному кінці, тобто при $x = 0$ та $x = L$. Це виражається рівністю нулю наступних функцій: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$. При цьому слід враховувати, що: $\varphi(x)$ пропорційне поперечному переміщенню u_y; $\varphi'(x)$ – куту повороту; $\varphi''(x)$ – згинальному моменту; $\varphi'''(x)$ – поперечній силі.

Так, наприклад, для балки, що зображена на рисунку 8.4, умови закріплення на її кінцях наступні:

– при $x = 0$

$$\varphi(x) = 0, \tag{8.63}$$

$$\varphi''(x) = 0; \tag{8.64}$$

– при $x = L$

$$\varphi(x) = 0, \tag{8.65}$$

$$\varphi''(x) = 0; \tag{8.66}$$

Двічі продиференціюємо рівняння (8.62) та з урахуванням умов (8.63) – (8.66) отримаємо систему

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0; \\ C_2 \sin\left(kL\right) + C_4 \sinh\left(kL\right) = 0; \\ -C_1 + C_3 = 0; \\ -C_2 \sin\left(kL\right) + C_4 \sinh\left(kL\right) = 0. \end{cases} \tag{8.67}$$

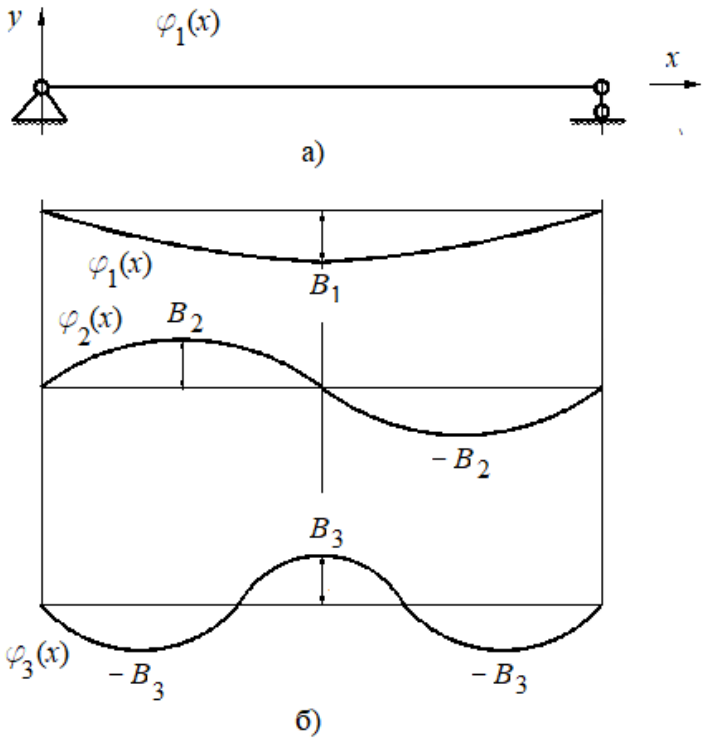


Рис. 8.4 – **Власні форми коливань для стрижня на двох опорах:**
а – балка, що вільно спирається; б – форми коливань

З системи рівнянь (8.67) отримаємо, що

$$A = D = C = 0,$$

та

$$\varphi_n(x) = C_2 \sin(k_n x),$$

для нетривіального розв'язку ($C_2 \neq 0$) маємо

$$\sin(k_n L) = 0 \qquad (8.68)$$

Для випадку що розглядається рівняння (8.68) є рівнянням частот, оскільки

$$k_n L = n\pi, \qquad (8.69)$$

або

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad (8.70)$$

де n = 1, 2, 3 … – номер моди.

Перепишемо рівняння (8.61) з урахування відповідної моди

$$k_n^4 = \frac{\rho_1 F \omega_{yn}^2}{EI}, \qquad (8.71)$$

З рівняння (8.71) визначимо власні кругові частоти розглядуваної балки у вигляді

$$\omega_{yn} = k_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_1 F}} = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho_1 F}}, \qquad (8.72)$$

або в герцах

$$f = \frac{\omega_{yn}}{2\pi} = \frac{n^2\pi^2}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho_1 F}}.$$

Перші три власні форми коливань, які відповідають формам коливань на рисунку 8.4 б, можна визначити з рівняння

$$\varphi_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Таким чином, загальний розв'язок диференціального рівняння (8.58) або рівняння (8.59) для випадку, що розглядається (див. рис. 8.4 а) має вигляд

$$u_y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\omega_{yn}t\right) + B_n \sin\left(\omega_{yn}t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \qquad (8.73)$$

Коефіцієнти A_n та B_n визначаються за аналогією з тим, як це було зроблено в підрозділі 8.2.1

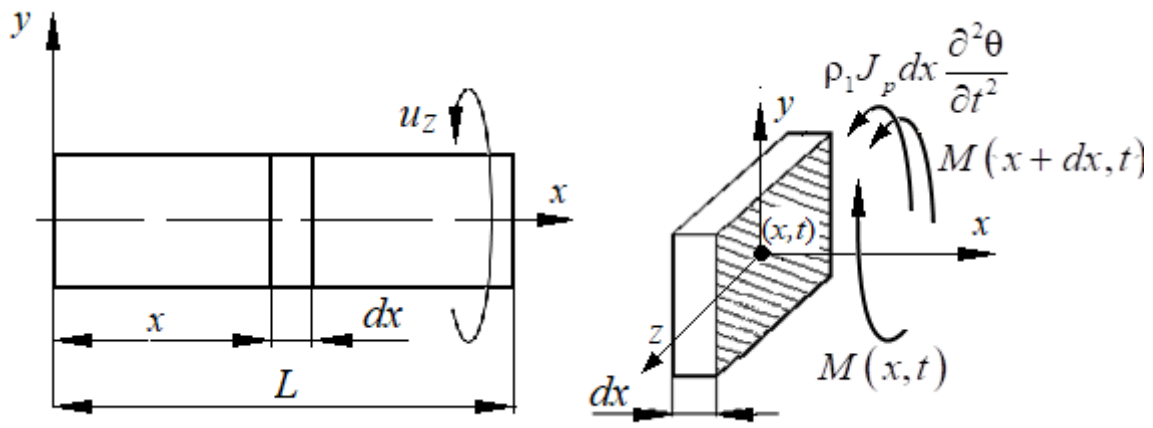
$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \qquad (8.74)$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi C}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx. \qquad (8.75)$$

де, як і в попередньому розділі, $f(x)$ та $\varphi(x)$ – деякі наперед задані функції, що визначають початковий розподіл уздовж осі стержня поперечних відхилень та швидкостей його окремих елементів.

8.2.3 Крутильні коливання призматичних стрижнів

Крутильні коливання призматичного стрижня представляють собою закручування стрижня довжиною L навколо поздовжньої осі x (див. рис. 8.5). Розглянемо елемент стрижня довжиною dx. На такий елемент діють крутні моменти $M(x,t)$ (зліва) та $M(x+dx,t)$ (справа).



а) б)

Рис. 8.5 – **Крутильні коливання призматичного стрижня:**
а – стрижень; б – переріз стрижня.

За другим законом Ньютона для обертального руху маємо

$$M(x+dx,t)-M(x,t)-\rho_1 J_p dx\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0, \tag{8.76}$$

з якого після ділення на dx і переходу до границі маємо

$$\frac{\partial M}{\partial x}-\rho_1 J_p\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0. \tag{8.77}$$

З опору матеріалів відомо, що момент кручення дорівнює

$$M(x,t)=GJ_k\frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{8.78}$$

том підставляючи рівняння (8.78) у рівняння (8.77) отримаємо

$$GJ_k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\rho_1 J_p\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0, \tag{8.79}$$

звідки

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-\frac{GJ_k}{\rho_1 J_p}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=0. \tag{8.80}$$

де J_k – крутильна (торсійна) константа перерізу (див. розділ 2.3);
J_p – полярний момент інерції перерізу;
θ – кут закручування стрижня.

Якщо стрижень короткий або один з його кінців жорстко защемлений, виникає **стеснене кручення (обмежене кручення)** або **ефект депланації (викривлення)**. У цьому випадку в перерізах стрижня з'являються додаткові нормальні напруження, і рівняння коливання (8.80) стає складнішим бо в неї додається складова четвертого порядку

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{GJ_k}{\rho_1 J_p}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{EI_\omega}{\rho_1 J_p}\frac{\partial^4\theta}{\partial x^4} = 0. \qquad (8.81)$$

де I_ω – секторальний момент інерції.

Для круглих та прямокутних перерізів стрижнів $I_\omega = 0$, тому в більшості випадків розв'язку рівняння (8.80) достатньо для оцінки крутильних коливань в стрижні. Значення $I_\omega \neq 0$ для складних перерізів, наприклад для: двотаврів, швелерів, тощо.

В загальному випадку секторальний момент інерції можна визначити з рівняння

$$I_\omega = \int_A \omega_0^2 dA. \qquad (8.82)$$

де ω_0 – головна секторальна координата;

A – площа епюри секторальної координати.

Для двотавра I_ω можна визначити за залежністю

$$I_\omega = \frac{I_y h^2}{4}.$$

де I_y – момент інерції однієї полки;

h – відстань між центрами полок.

Розв'язок рівняння (8.80) крутильних коливань, для випадку коли один кінець стрижня защемлений а інший вільний, будемо шукати у вигляді

$$u_z(x,t) = X(x)\left(A\cos(k_z t) + B\sin(k_z t)\right), \qquad (8.83)$$

де k_z – частота коливань.

$$k_z = \omega\sqrt{\frac{\rho_1 J_p}{GJ_k}}$$

Власна частота при граничних умовах $X(0) = 0$, $X'(L) = 0$

$$\omega_{zn} = \frac{(2n-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{GJ_k}{\rho_1 J_p}},$$

а форма коливань при одному вільному кінці, а одному защемленому

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right).$$

У випадку коли обидва кінця стрижня защемлені при граничних умовах $X(0) = 0$, $X'(L) = 0$

$$\omega_{zn} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{GJ_k}{\rho_1 J_p}},$$

а форма коливань при обох защемлених кінцях стрижня

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Загальний розв'язок рівняння (8.81) має вигляд суми тригонометричних та гіперболічних функцій

$$\begin{aligned} u_z(x,t) = C_1\cos(k_{z1}x) + C_2\sin(k_{z1}x) + \\ + C_3\cosh(k_{z2}x) + C_4\sinh(k_{z2}x). \end{aligned} \tag{8.84}$$

де k_{z1} та k_{z2} – частоти коливань.

$$k_{z1} = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{GJ_k}{2EI_\omega}\right)^2 + \frac{\rho_1 J_p \omega_z^2}{EI_\omega}} + \frac{GJ_k}{2EI_\omega}}$$

$$k_{z2} = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{GJ_k}{2EI_\omega}\right)^2 + \frac{\rho_1 J_p \omega_z^2}{EI_\omega}} - \frac{GJ_k}{2EI_\omega}}$$

а коефіцієнти $C_1 - C_4$ визначаються за аналогією підрозділу 8.2.2.

ПИТАННЯ ДО САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке системи з розподіленими параметрами?
2. Що таке граничні та початкові умови?
3. В чому сутність метода розділення параметрів?
4. Що таке форма коливань стрижня?

Розділ 9
ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

У практиці інженерних розрахунків досить часто виникають ситуації, коли початкові диференціальні рівняння неможливо розв'язати аналітично в загальному вигляді. У таких випадках застосовують один із трьох підходів:

1. Спрощення (лініаризацію) вихідних диференціальних рівнянь.
2. Отримання наближених розв'язків для нелінійних рівнянь.
3. Використання чисельних методів для розв'язання рівнянь або їх систем.

Водночас доцільно поділяти розглянуті задачі на дві основні категорії:

1. Системи з обмеженою кількістю ступенів вільності, які описуються звичайними диференціальними рівняннями;
2. Системи з розподіленими параметрами, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних.

Розглянемо на деяких прикладах використання основних категорій вирішення задач моделювання коливальних систем.

9.1 Коливання систем з кінцевим числом ступенів вільності

Практика дослідження подібних систем свідчить, що для їх аналізу доцільно використовувати комп'ютерні засоби математичного моделювання, зокрема систему *MatLAB*. Особливе місце в системі комп'ютерного моделювання *MatLAB* займає пакет *Simulink*, який дає змогу виконувати дослідження та моделювання поведінки динамічних нелінійних систем.

Побудова моделей у середовищі *Simulink* (далі – *S*-моделі) базується на застосуванні технології *Drag and Drop* («перетягни і розмісти»). Основними елементами таких моделей є стандартні блоки, що зберігаються у бібліотеці *Simulink* і використовуються як будівельні компоненти.

Блоки, які входять до складу моделі, можуть взаємодіяти між собою як через передачу даних, так і через керуючі сигнали. Характер зв'язків визначається типами блоків і логікою

функціонування всієї системи. Інформація, що передається між блоками, може бути представлена у вигляді скалярів, векторів або матриць довільної розмірності.

Будь-яка *S*-модель може мати ієрархічну структуру, тобто складатися з підмоделей нижчого рівня, причому глибина такої ієрархії практично не обмежена.

Користувач має можливість задавати параметри моделювання, зокрема спосіб зміни модельного часу (з фіксованим або змінним кроком), а також умови завершення процесу моделювання.

Під час моделювання можна спостерігати за перебігом процесів у системі. Для цього використовуються спеціальні засоби візуалізації («оглядові вікна»), що входять до бібліотеки *Simulink*. Результати можуть відображатися як у числовій, так і в графічній формі. Крім того, передбачена можливість додавання елементів анімації до моделі.

Однією з важливих переваг *Simulink* є його відкритість: користувач може розширювати бібліотеку, створюючи власні функціональні блоки.

Введення параметрів досліджуваних систем здійснюється в інтерактивному режимі шляхом графічного формування схеми з’єднань стандартних елементів.

Як приклади розглянемо блок-схеми деяких коливальних систем.

9.1.1 Коливальна система з одним ступенем вільності та нелінійною жорсткістю пружного елемента

Розглянемо механічну система з одним ступенем вільності, що складається з тіла масою m, яке може здійснювати поступальний рух уздовж горизонтальної осі x. Тіло з’єднане з нерухомою опорою через пружний елемент із нелінійною характеристикою жорсткості, що описується залежністю $c = f(x)$, а також демпфуючий елемент із коефіцієнтом в’язкого опору b.

На систему діє зовнішня гармонічна сила $P \cdot \sin(\omega t)$, прикладена до маси m. Враховуючи наявність нелінійної пружної сили та демпфування, необхідно: скласти диференціальне рівняння руху системи; дослідити вплив нелінійної жорсткості на характер коливань; визначити особливості динамічної поведінки системи при різних параметрах збурення (P, ω).

Схему системи, яка досліджується наведена на рисунку 9.1.

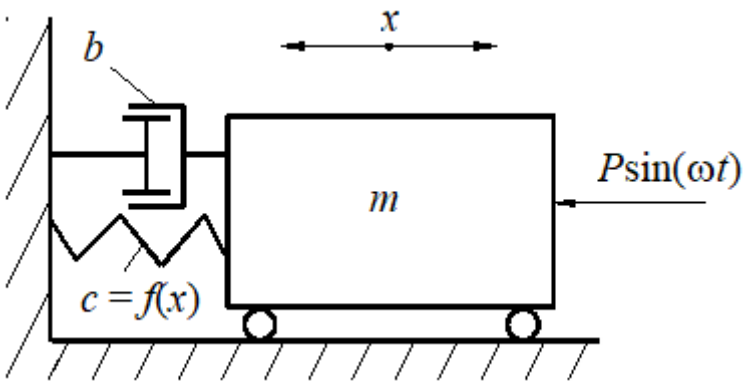


Рис. 9.1 – **Схема коливальної системи з одним ступенем вільності**

Припустимо, що відновлювальна сила пружного елемента підпорядковується закону кубічної параболи. Тоді вихідне диференціальне рівняння руху системи, що розглядається, матиме вигляд

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + nx^3 = P\sin(\omega t). \qquad (9.1)$$

Перепишемо рівняння (9.1) дещо в іншій формі

$$m\ddot{x} = P\sin(\omega t) - b\dot{x} - cx - nx^3,$$

звідки

$$\ddot{x} = \frac{P\sin(\omega t) - b\dot{x} - cx - nx^3}{m}. \qquad (9.2)$$

Ідея, покладена в основу побудови блок-схеми, полягає в наступному. Приймається, що всі складові правої частини рівняння є відомими, що дозволяє безпосередньо обчислити прискорення $\ddot{x}$. Далі запускається ітераційний процес: прискорення інтегрується для отримання швидкості $\dot{x}$, а швидкість, в свою чергу, інтегрується для отримання поточного переміщення $x(t)$. Ці нові значення швидкості та переміщення стають вихідними даними для наступного кроку, на якому права частина рівняння (9.2) обчислюється заново. Такий підхід забезпечує покрокове моделювання динаміки системи. Відповідну блок-схему наведено на рисунку 9.2.

В рівнянні (9.2) позначено наступні константи: m=10 кг; P=300 Н; ω = 10 с$^{-1}$; n = 8 Н/м^3; c = 15 Н/м; b = 4 (Н·с)/м, які в системі *MatLAB* реалізовано у вигляді лістингу 9.1 для *m*-файлу.

Лістинг 9.1 – **Програма формування вихідних даних для моделювання характеру коливання маси *m* в пакеті *Simulink***

```
1. clear; clc;
2. m=10; % маса візка, кг;
3. P=300; % збурююча сила, що діє на візок, Н;
4. w=10; % частота, з якою збурюча сила діє на візок, 1/с;
5. n=8; % коефіцієнт нелінійності пружної системи, Н/м^3;
6. c=15; % коефіцієнт пружності системи, Н/м;
7. b=4; % коефіцієнт в'язкості системи, Н*с/м.
```

Реалізація моделі, в пакеті *Simulink,* представлено у вигляді блок-схеми, що зображена на рисунку 9.2, а результати моделювання характеру коливання маси *m* зображено на рисунку 9.3.

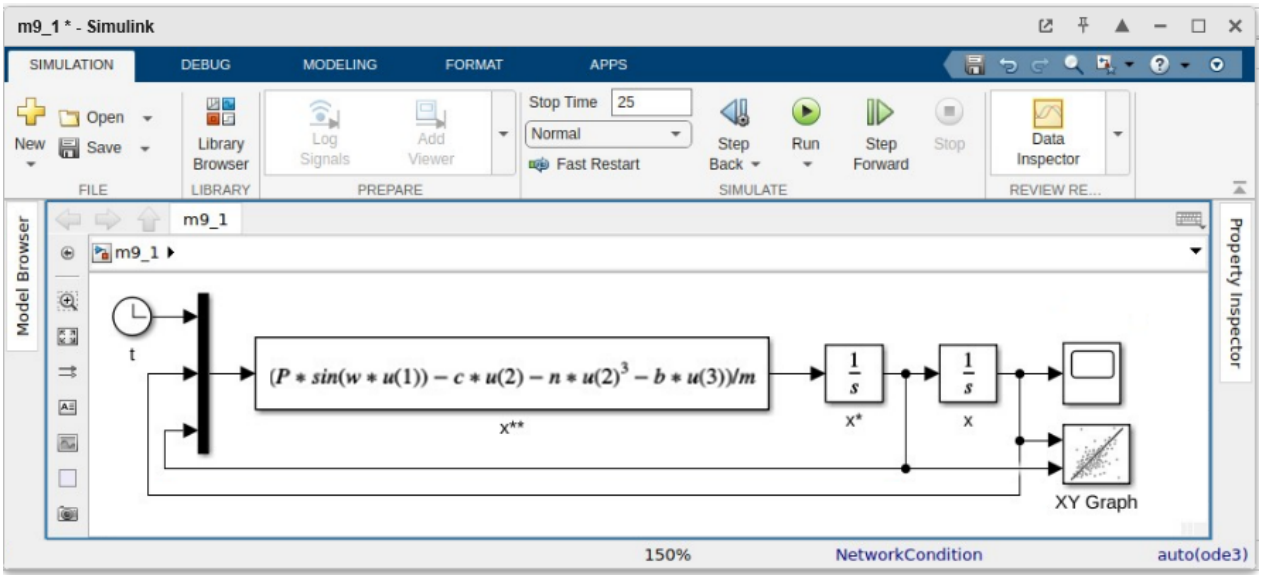


Рис. 9.2 – **Блок - схема одномасової коливальної системи**

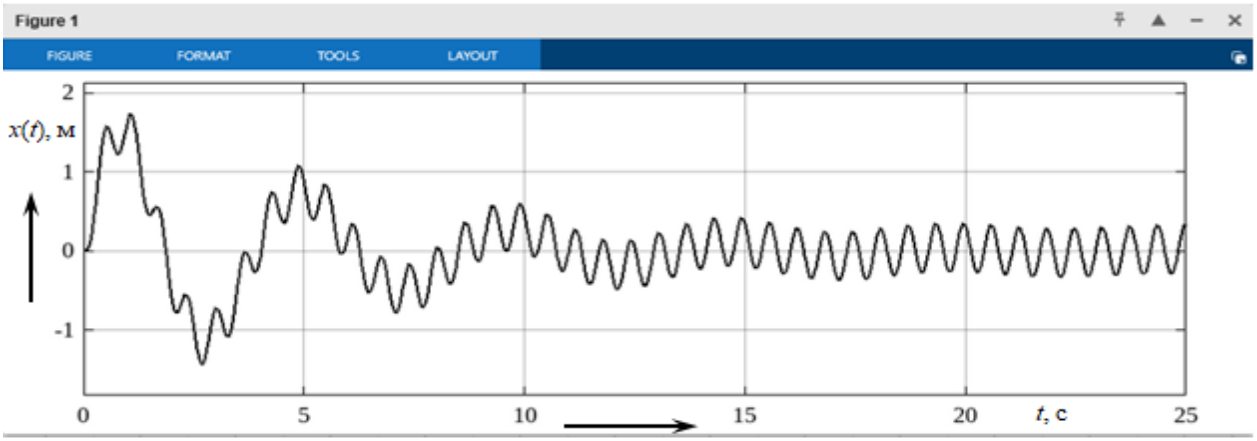


Рис. 9.3 – **Результати моделювання характеру коливання маси *m***

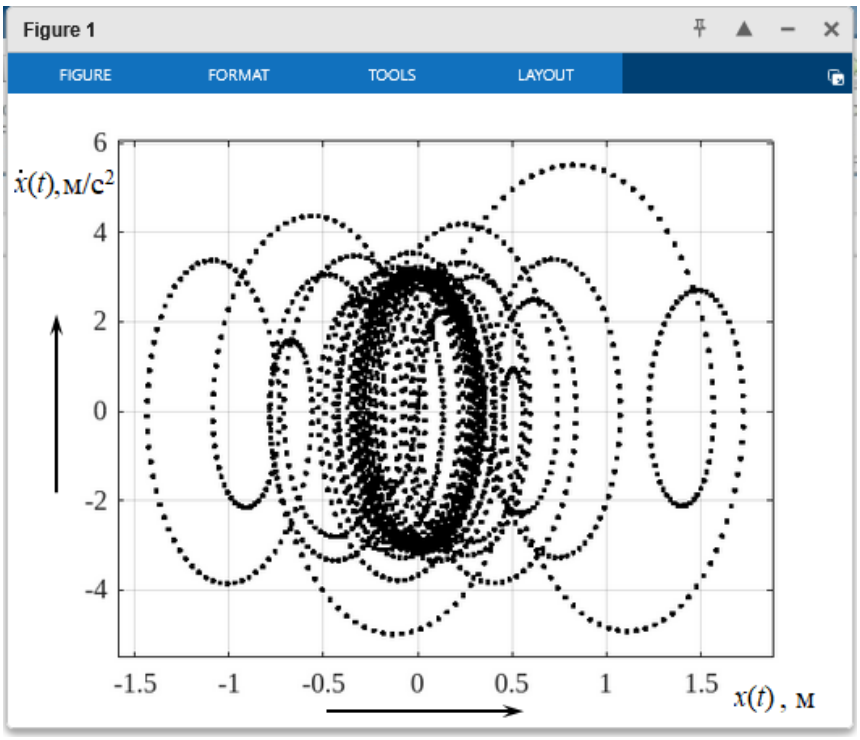


Рис. 9.4 – **Фазова траєкторія руху точки масою *m***

Якщо результати моделювання вивести в блок *XY Graph*, який має два входи, до яких можна під'єднати переміщення x та швидкість переміщення $\dot{x}$, то можна побудувати фазову траєкторію руху матеріальної точки масою m під час коливання системи у фазовому просторі (Рис. 9.4). Вона показує зміну стану коливальної системи, але не є траєкторією руху реального тіла в часі, як це показано на рисунку 9.3.

9.1.2 Коливальна система з двома ступенями вільності

Розгляд багатомасових механічних систем є важливим етапом дослідження динаміки реальних технічних об'єктів, оскільки більшість інженерних конструкцій не може бути адекватно описана моделями з одним ступенем вільності. Наприклад системи з двома ступенями вільності, як окремі випадки багатомасових механічних систем, дозволяють врахувати взаємодію між окремими масами, вплив пружних і демпфувальних елементів, а також особливості передачі коливань між елементами конструкції однієї системи.

Розглянемо механічну систему, що складається з двох тіл, які мають відповідні маси m_1 та m_2, що можуть здійснювати поступальний рух уздовж горизонтальної осі x. Переміщення мас описуються координатами $x_1(t)$ та $x_2(t)$ відповідно.

Перша маса m_1 з'єднана з нерухомою основою за допомогою пружного елемента жорсткістю c_1 та демпфуючого елемента з коефіцієнтом в'язкого тертя b_1. Між масами m_1 та m_2 розташовано додатковий пружний елемент жорсткістю c_2 та демпфер із коефіцієнтом в'язкого тертя b_2., які забезпечують взаємодію між масами. На коливальну систему діють дві зовнішні збурюючі сили $P_1(t)$ та $P_2(t)$, прикладені відповідно до мас m_1 та m_2.

Необхідно: скласти систему диференціальних рівнянь руху для заданої механічної системи; дослідити вплив параметрів c_1, c_2, b_1, b_2 на динамічну поведінку системи; проаналізувати взаємний вплив мас і характер передавання коливань між масами під дією зовнішніх збурень.

Розрахункова схема коливальної системи з двома ступенями вільності зображена на рисунку 9.5

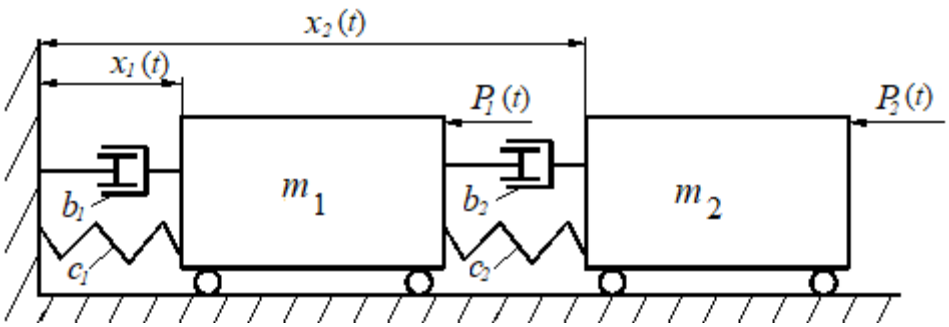


Рис. 9.5 – **Розрахункова схема двомасової системи з двома ступенями вільності:** c_1, c_2 – жорсткості пружних елементів; b_1, b_2 – коефіцієнти в'язкості; m_1, m_2 – маси; $P_1(t)$, $P_2(t)$ – зовнішні збурюючі сили

Складемо систему рівнянь на основі рівняння Лагранжа для розрахункової схеми, що зображена на рисунку 9.5

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_1} + Q_1, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_2} + Q_2. \end{cases} \tag{9.3}$$

Кінетичну енергію системи можна визначити, як суму кінетичних енергій двох тіл, що рухаються з відповідними швидкостями $\dot{x}_1$ та $\dot{x}_2$

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2}{2}. \tag{9.4}$$

Потенційну енергію визначимо, як суму потенційних енергій двох тіл масою m_1 та m_2 через їх переміщення

$$\Pi = \frac{c_1 x_1^2}{2} + \frac{c_2 (x_2 - x_1)^2}{2}. \tag{9.5}$$

Дисипативна функція Релея для схеми, що зображена на рисунку 9.5 матиме вигляд

$$\Phi = \frac{1}{2} b_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2. \tag{9.6}$$

Припускаючи, що

$$Q_1 = P_1(t) = P_1 \sin(\omega_1 t), \tag{9.7}$$

$$Q_2 = P_2(t) = P_2 \sin(\omega_2 t). \tag{9.8}$$

та підставляючи рівняння (9.4) – (9.8) в систему рівнянь (9.3) отримаємо рівняння коливання двох відповідних мас m_1 та m_2

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) + b_1 \dot{x}_1 - b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = P_1 \sin\left(\omega_1 t\right). \tag{9.9}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = P_2 \sin\left(\omega_2 t\right). \tag{9.10}$$

Доцільно попередньо перетворити отримані диференціальні рівняння в форми, що будуть зручними для реалізації в середовищі *MatLAB*. З цією метою виконаємо їх переписування, виділивши похідні найвищого порядку та представивши їх у вигляді рівняння (9.11) та рівняння (9.12). Таке подання рівнянь дозволяє реалізувати їх в блок-схемі моделі, що будується в *Simulink*.

$$\ddot{x}_1 = \frac{P_1 \sin\left(\omega_1 t\right) + c_2 x_2 - (c_2 + c_1) x_1 + b_2 \dot{x}_2 - (b_2 + b_1) \dot{x}_1}{m_1}, \tag{9.11}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{P_2 \sin\left(\omega_2 t\right) - c_2 (x_2 - x_1) - b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}{m_2}. \tag{9.12}$$

Використовуючи підхід, аналогічний до того, що було застосовано в підрозділі 9.1.1, виконаємо побудову блок-схеми коливальної системи з двома ступенями вільності (рис. 9.6).

Результати проведеного моделювання, на основі вихідних даних, що надані у Лістингу 9.2, доцільно представити у графічному вигляді (див. Рис. 9.7), що показує характер переміщення маси m_1 та m_2, в залежності від часу.

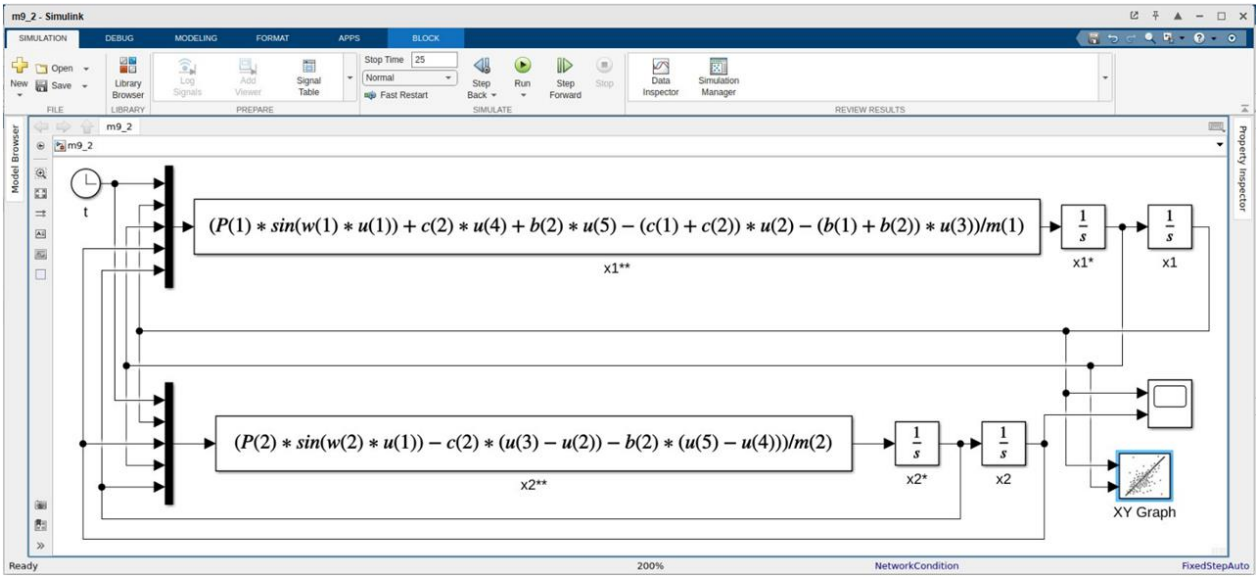


Рис. 9.6 – **Блок- схема коливальної системи з двома ступенями вільності**

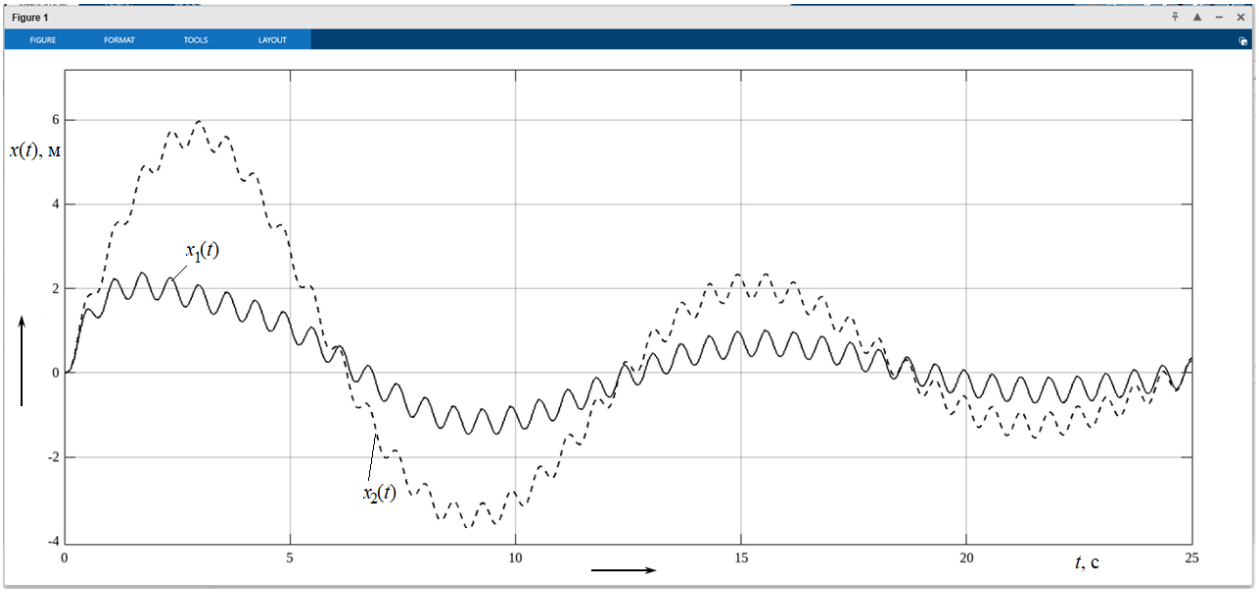


Рис. 9.7 – **Результати моделювання характеру переміщення маси m_1 та маси m_2**

Лістинг 9.2 – **Програма формування вихідних даних для моделювання характеру коливання мас m_1 та m_2 в пакеті *Simulink***

```
1. clear; clc;
2. m=[10 10]; % маси візків записані в матричній формі, відповідно [m1 m2], кг;
3. P=[300 300]; % збурюючі сили, що діють на відповідні візки, записані в матричній формі, відповідно [P1 P2], Н;
4. w=[10 10]; % частоти, з якими збурючі сили діють на відповідні візки, записані також у матричній формі [w1 w2], 1/с;
```

5. c=[10 4]; % коефіцієнти пружності системи, записані в матричній формі відповідно [c1 c2], Н/м;
6. b=[8 2]; % коефіцієнти в'язкості системи, записані в матричній формі відповідно [b1 b2], Н*с/м.

Аналіз результатів моделювання коливальної системи з двома ступенями вільності, параметри якої задані у лістингу 9.2, дозволяє зробити такі узагальнення.

Оскільки обидві маси мають однакові значення, а також на них діють гармонічні збуруюючи сили однакової амплітуди та частоти то це створює передумови для узгодженого (синфазного) руху цих мас, однак самі коливання суттєво залежать від параметрів пружних і демпфуючих елементів. Так жорсткість зв’язку з основою є більшою, ніж жорсткість пружного елемента розташованого між масами, що означає більш жорстке закріплення першої маси відносно нерухомої опори і як наслідок меншу кількість її коливань. У той же час коефіцієнт демпфування для першої маси значно перевищує відповідний коефіцієнт демпфування b_2, що зумовлює інтенсивніше гасіння коливань саме для m_1.

Результати моделювання підтверджують, що завдяки більшій жорсткості c_1 та в’язкості b_1 перша маса здійснює коливання з меншою амплітудою аніж друга маса m_2. На початковому етапі моделювання проявляються перехідні процеси, які з часом затухають завдяки наявності демпфування. Після цього система переходить в усталений гармонічний режим коливання з частотою зовнішнього збурення. Таким чином, результати моделювання підтверджують, що параметри жорсткості та демпфування істотно впливають на розподіл амплітуд, швидкість затухання перехідних процесів і фазові співвідношення між коливаннями мас.

Аналогічним чином можна аналізувати й системи з більшою кількістю ступенів вільності.

9.1.3 Одномасова коливальна система з двома ступенями вільності

Розглянемо приклад моделювання одномасової коливальної системи з двома ступенями вільності, що відповідає схемі плоскої моделі автомобіля, яка зображена на рисунку 6.2.

В підрозділі 6.4 ми визначили, що для коливання одномасової плоскої моделі автомобіля, яка має два ступеня вільності необхідно вирішити два рівняння, що характеризують характер переміщення передньої частини автомобіля над переднім колесом (рівняння (о.5) та характер переміщення задньої частини автомобіля, що розташована над заднім колесом (рівняння (п.5)). Перепишемо ці рівняння відносно $\ddot{z}_1$ та $\ddot{z}_2$, а також врахуємо наїзд коліс автомобіля на бордюр (f_i) висотою 0,1м на швидкості V_a

$$\ddot{z}_1 = \frac{c_1\left(f_1 - z_1\right)\left(1+\frac{a^2}{i_{Cy}^2}\right) - c_2\left(f_2 - z_2\right)\left(1-\frac{ab}{i_{Cy}^2}\right)}{m}, \qquad (9.13)$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{c_2\left(f_2 - z_2\right)\left(1+\frac{b^2}{i_{Cy}^2}\right) - c_1\left(f_1 - z_1\right)\left(1-\frac{ab}{i_{Cy}^2}\right)}{m}. \qquad (9.14)$$

Використовуючи підхід, аналогічний до того, що було застосовано в підрозділі 9.1.1 та підрозділі 9.1.2, виконаємо побудову блок-схеми одномасової коливальної системи з двома ступенями вільності у вигляді, що представлено на рисунку 9.8.

Програма для формування вихідних даних у *m*–файлі *MatLAB* можна представити у вигляді лістингу 9.3.

Лістинг 9.3 – **Програма формування вихідних даних для моделювання характеру коливання плоскої моделі автомобіля**

```
1. clear; clc;
2. m=2000; % маса автомобіля, кг;
3. m2=0.6*m; % маса автомобіля, що діє на заднє колесо, кг;
4. L=3.2; % колісна база автомобіля, м;
5. a=m2*L/m; % відстань від центра тяжіння до осі, що проходить
   вертикально через центр переднього колеса, м;
6. b=L-a; % відстань від центра тяжіння до осі, що проходить
   вертикально через центр заднього колеса, м;
7. iCy=sqrt(a*b*k); %радіус інерції (k=0.7-1.3 – коефіцієнт);
8. c=[80000 100000]; % жорсткість передньої та задньої підвіски,
   записані у матричній формі [c1 c2], 1/c;
9. Va=10/3.6; %Швидкість руху автомобіля, м/с.
```

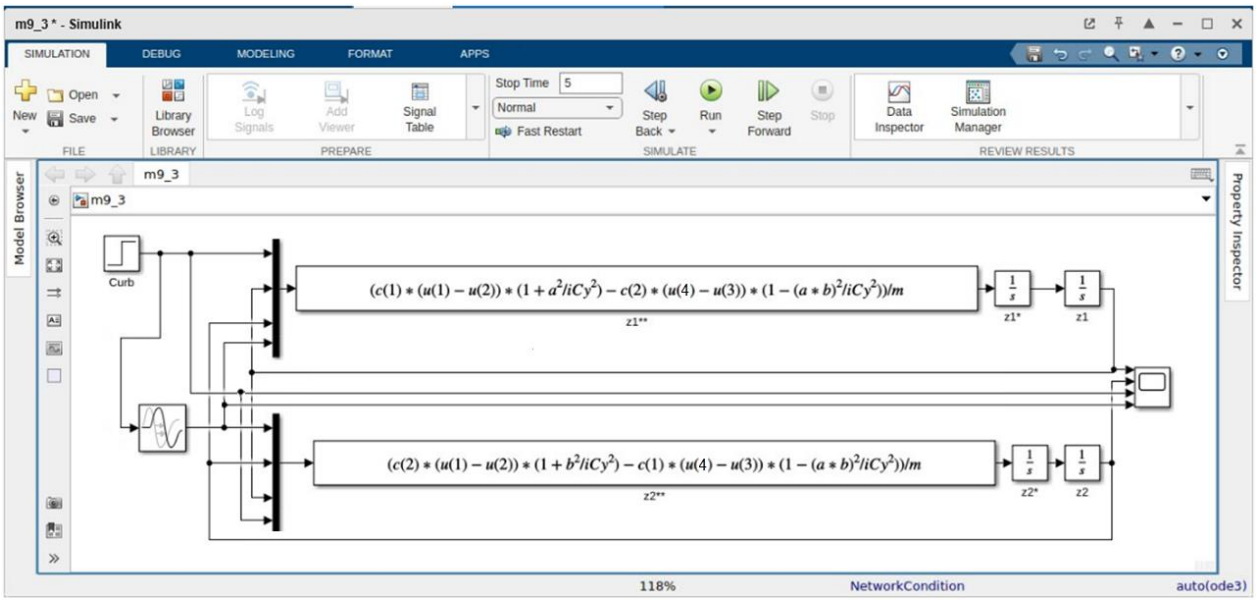


Рис. 9.8 – **Блок- схема коливальної системи з двома ступенями вільності**

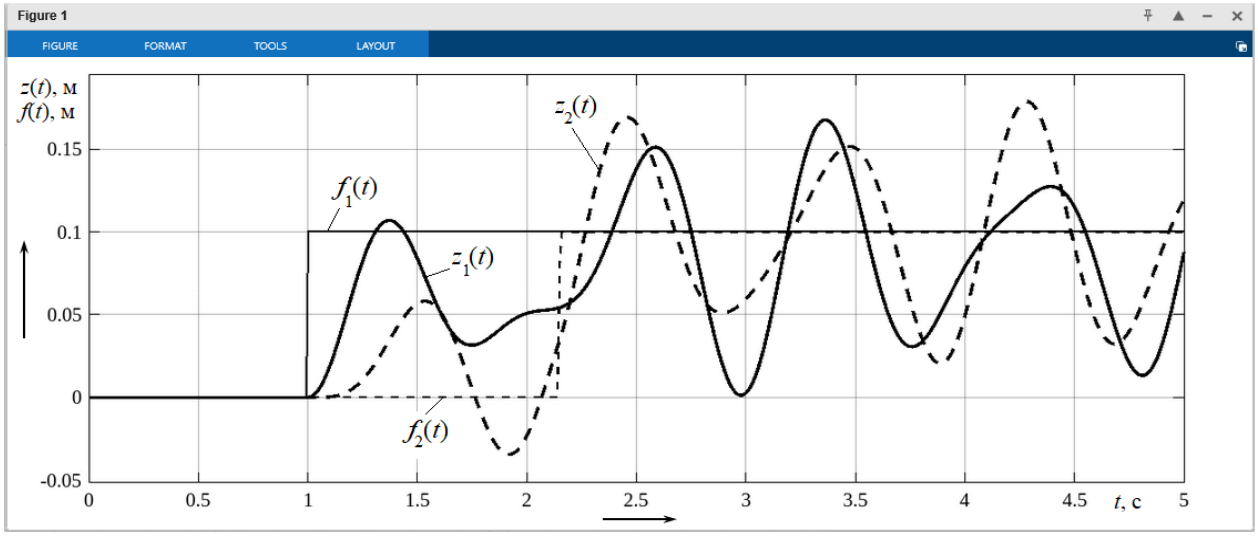


Рис. 9.9 – **Результати моделювання характеру переміщення передньої та задньої частини автомобіля масою *m***

Моделювання показало, що при наїзді на нерівність переднього колеса, це буде впливати на коливання задньої частини кузова автомобіля. Після наїзду на нерівність коливання передньої та задньої частини кузова відбуваються при різних величинах амплітуди та частоти, що призводить до взаємного гасіння коливань і через якийсь тривалий час ($t \to \infty$) вони повністю зникнуть не дивлячись на те, що в системі відсутні елементи в'язкого тертя. Додатково це свідчить про перерозподіл енергії між ступенями вільності та її періодичний обмін між формами коливань системи.

9.2 Континуальні (розподілені) системи

Для дослідження міцності, власних частот та інших характеристик складних конструкцій, для яких отримання аналітичного розв'язку в загальному вигляді є практично неможливим, на сьогодні широко застосовується метод скінченних елементів (МСЕ). Цей метод реалізований у сучасних програмних продуктах, зокрема таких, як *COSMOS, ANSYS* та інші.

Формат даного навчального посібника не дає змоги детально розглянути можливості та особливості зазначених програмних комплексів. Тому обмежимося стислим оглядом загальних характеристик *ANSYS* як одного з найефективніших і найперспективніших інструментів МСЕ, що широко використовується для виконання інженерних розрахунків.

9.2.1 Огляд програми ANSYS

Програмний комплекс *ANSYS* є сучасним і ефективним інструментом для проєктування та інженерного аналізу. Він функціонує в середовищі різних операційних систем і може використовуватися як на персональних комп'ютерах, так і на високопродуктивних обчислювальних системах. Завдяки універсальності *ANSYS* одну й ту саму розрахункову модель можна застосовувати для розв'язання взаємопов'язаних задач: аналізу міцності при механічних навантаженнях, дослідження температурних впливів, оцінки дії електромагнітних полів, а також процесів тепломасопереносу.

Обчислювальні можливості *ANSYS* дозволяють враховувати різні види нелінійностей, розв'язувати складні контактні задачі, моделювати великі деформації та переміщення, а також виконувати оптимізацію конструкцій у діалоговому режимі. Крім того, система дає змогу аналізувати задачі гідро- та аеродинаміки, що значно розширює сферу її застосування.

Спеціальний модуль *ANSYS Design Data Access* (*DDA*) забезпечує інтеграцію з системами автоматизованого проєктування (*CAD*), дозволяючи імпортувати вже створені моделі без необхідності їх повторного відтворення. Це сприяє збереженню цілісності вихідних

даних і забезпечує ефективний обмін інформацією між різними програмними середовищами.

Важливою складовою *ANSYS* є розвинена графічна система, яка забезпечує зручне введення, редагування та візуалізацію даних. Графічні інструменти використовуються як на етапі підготовки моделі, так і під час аналізу результатів. Вони дозволяють відображати граничні умови, будувати кольорові карти розподілу параметрів, формувати графіки, змінювати ракурс огляду, масштаб і орієнтацію моделі, а також виконувати тривимірну візуалізацію з використанням ізоповерхонь, градієнтів і анімації.

Програмні продукти *ANSYS* утворюють ціле сімейство взаємопов'язаних пакетів, орієнтованих на розв'язання широкого спектра інженерних задач. Серед них особливе місце займає *ANSYS/Multiphysics* – потужний універсальний інструмент, який дозволяє проводити комплексні дослідження в різних галузях, включаючи механіку, теплопередачу, гідрогазодинаміку та електромагнетизм, а також розв'язувати пов'язані міждисциплінарні задачі.

Процес розрахунку в *ANSYS* складається з трьох основних етапів: підготовки даних (препроцесор), безпосереднього розв'язання задачі та аналізу результатів (постпроцесор).

На етапі попередньої підготовки користувач формує вихідні дані: обирає систему координат, типи скінченних елементів, задає фізико-механічні властивості матеріалів, створює геометричну модель і виконує її дискретизацію шляхом побудови скінченно-елементної сітки. Також задаються граничні умови, зв'язки та обмеження. Як приклад, на рисунку 9.10 наведено побудову скінченно-елементної сітки шківа пасової передачі.

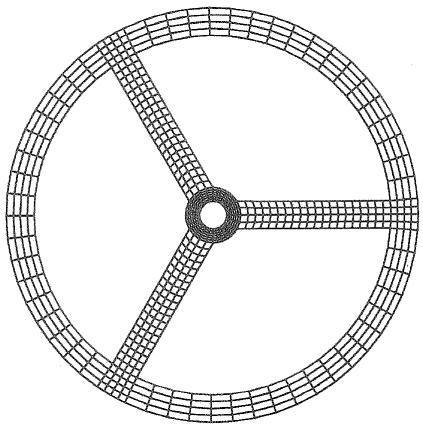


Рис. 9.10 – Скінчено-елементна сітка шківа пасової передачі

Результати аналізу користувач отримує на стадії розв’язання, після того як у процесі попередньої підготовки побудовано розрахункову модель. Ця фаза застосування програми *ANSYS* полягає у задаванні типу аналізу, навантажень і кроку розв’язання, і завершується запуском на розрахунок скінчено-елементної задачі.

Відповідно до спрямування цього навчального посібника цікавим є динамічний аналіз пов'язаний із коливаннями, а зокрема – модальний аналіз (визначення власних частот і форм коливань) на прикладі шківа пасової передачі.

9.2.2 Модальний аналіз

З курсу «Прикладної теорії коливань» відомо, що елементи конструкцій необхідно проєктувати так, щоб уникнути збудження коливань на одній з власних частот під час експлуатації. Саме для цього застосовують модальний аналіз, який дозволяє визначити власні частоти коливань системи. Як приклад, на рисунку 9.11 за допомогою модального аналізу шківа показано третю, четверту та п'яту форми його коливань.

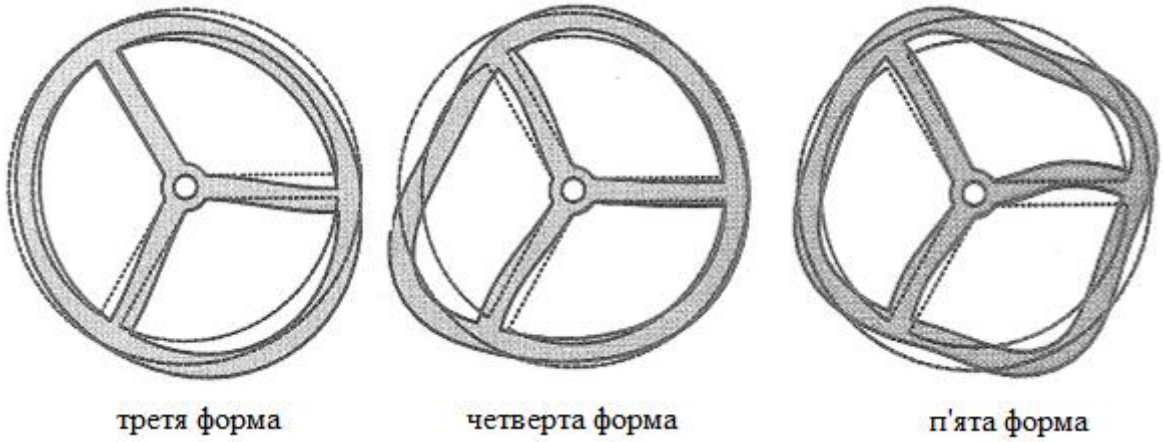


Рис. 9.11 – Приклад результатів модального аналізу конструкції шківа

Таким чином, модальний аналіз є розрахунковим інструментом для визначення власних частот і форм коливань конструкції. Він становить важливу складову будь-якого динамічного аналізу, оскільки знання форм і частот коливань дозволяє оцінити динамічну поведінку конструкції. За допомогою програми *ANSYS* модальний аналіз можна виконувати як для ненавантаженої, так і для навантаженої конструкції.

У програмі *ANSYS* модальний аналіз розв'язання задачі про **вільні, затухаючі або незатухаючі коливання** дискретної системи описується наступними рівняннями руху

$$[M]\{\ddot{U}\}+[C]\{\dot{U}\}+[K]\{U\}=0, \qquad (9.11)$$

де $[M]$ – матриця мас;

$[C]$ – матриця в'язкості;

$[K]$ – матриця пружності;

$\{\ddot{U}\}$ – вектор прискорень;

$\{\dot{U}\}$ – вектор швидкостей;

$\{U\}$ – вектор переміщень.

Методи розв'язання, які реалізовані в програмі *ANSYS*, дозволяють створювати швидкодіючі алгоритми, які добре описують твердотільні елементи.

Вихідні величини отриманих розв'язків (вузлові переміщення, деформації, напруження, зусилля тощо) подаються як функції часу. Кожну з них можна вивести на екран у вигляді графіка залежності від часу або іншої змінної. Виконаний аналіз дає змогу переглянути результати перехідного процесу для будь-якого моменту часу (наприклад, показати картину напружено-деформованого стану, тощо). За допомогою інструментів перегляду, закладених в програмі *ANSYS*, користувач може легко звернутися до результатів розв'язання та інтерпретувати їх потрібним чином. Підсумком роботи програми є графічне або табличне представлення результатів. Графічне зображення може бути виведене на монітор в інтерактивному.

Як приклад такого виведення на екран може бути розподіл еквівалентних напружень у шківі від зусиль у пасовій передачі (Рис. 9.12). Темні ділянки в маточині та спицях відповідають вищим значенням напружень. Ці значення можуть бути виведені також у табличному вигляді в файл.

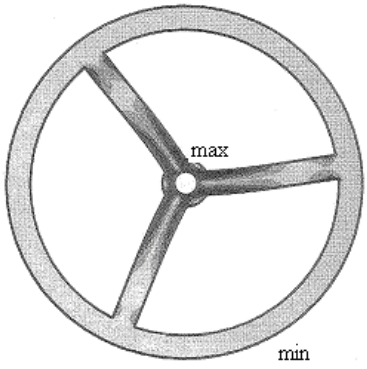


Рис. 9.12 – Графік розподілення еквівалентних напружень в шківу

Існує дві можливості звернутися до записаних результатів для подальшої постпроцесорної[1] обробки. Для ознайомлення з певним набором результатів, які стосуються всієї моделі або її частини, можна використовувати постпроцесор загального призначення. Або використовувати постпроцесор історії навантаження для виділення з масивів результатів потрібних параметрів, наприклад, вузлових переміщень або напружень в елементі.

ПИТАННЯ ДО САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому полягає ідея програмування в застосунку *Simulink* програмного середовища *Matlab*?
2. Де застосовується метод скінченних елементів у розрахунках?
3. Які можливості програмного забезпечення *ANSYS*?

[1] **Постпроцесорна обробка** – це етап, на якому результати чисельного розрахунку аналізуються, інтерпретуються та подаються у графічній або табличній формі для подальших інженерних висновків

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

1. Александров Є., Богомолов В., Клименко В., Леонтьєв Д. (2025). *Прикладна теорія коливань для студентів автомобільних спеціальностей вищів*. ФОП Бровін О. В.
2. Aleksandrov Ye., Bohomolov V., Klimenko V., Leontiev D. (2026) *Applied theory of vibrations for students of automotive specializations at higher education institutions : Study guide*. (2nd Edition). ФОП Бровін О. В.
3. Aleksandrov Ye., Aleksandrova T., Kostianyk I., Morgun Ya. (2023). Simulation of Random External Disturbance Acting on the Car Body in the Urgent Braking Mode. *Advanced Information Systems*. **7**(1). 14 – 17.
4. Alexandrov Ye., Alexandrova T., Morgun Ya. (2019). Parametric Synthesis of the Electronic Control Unit of the Course Stability System of the Car. *Easter-European Journal of Enterprise Technologies*,. **6/9 (102)**. 39 – 45.
5. Александров Є.Є., Александрова Т.Є., Григор'єв О.Л., Моргун Я.Ю. (2020). Стійкість та автоколивання електронної замкненої системи стабілізації курсу автомобіля з цистерною. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: «Математична моделювання в техніці та технологіях»*. **1**. 44 – 63.
6. Александров Є.Є., Александрова Т.Є., Григор'єв О.Л., Моргун Я.Ю. (2021). Про вплив коливань вільної поверхні рідини на курсову стійкість автомобіля-паливозаправника. *Озброєння та військова техніка*. **1**. 36 – 43.
7. Eswaran, M., Parulekar, Y.M., Reddy, G.R. (2019). Introduction to Structural Dynamics and Vibration of Single-Degree-of-Freedom Systems. *In: Reddy, G., Muruva, H., Verma, A. (eds) Textbook of Seismic Design*. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-13-3176-3_3
8. Kerschen, G., Vakakis, A.F. (2020). Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems. *In: Allemang, R., Avitabile, P. (eds) Handbook of Experimental Structural Dynamics. Springer*, New York, https://doi.org/10.1007/978-1-4939-6503-8_35-1
9. Linge, S., Langtangen, H.P. (2017). Vibration ODEs. In: Finite Difference Computing with PDEs. *Texts in Computational Science*

and Engineering, **16**. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-55456-3_1
10. Povstenko, Y. (2024). Essentials of Fractional Calculus. In: Fractional Thermoelasticity. *Solid Mechanics and Its Applications*, **278**. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-64587-7_1
11. Volterra, E., Zachmanoglou, E.C., & Kolsky, H. (1965). *Dynamics of vibrations*.
12. Chang, Zongyu & Ali, Rai & Ren, Ping & Zhang, Guangbin & Wu, Peixin. (2015). Dynamics and Vibration Analysis of Delta Robot. *Proceedings of the 5th International Conference on Information Engineering for Mechanics and Materials*. 1408-1417. https://doi.org/10.2991/icimm-15.2015.257
13. Genta, G. (2009). Vibration of Beams. *In: Genta, G. (eds) Vibration Dynamics and Control. Mechanical Engineering Series*. Springer, Boston. 263–320. https://doi.org/10.1007/978-0-387-79580-5_12

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Ван дер Поль Б.....72
Гамильтон У.Р. 27
Гук Р.....92, 131
Д'Аламбер Ж.Л.....27, 28, 93, 130
Дюффинг Г.....96, 97
Лагранж Ж.Л.....27, 31, 35, 41, 55, 62, 63, 64, 65, 68, 69, 71, 77, 85, 90, 93, 101, 107, 113, 124, 149
Маклорен К. 33
Ньютон. И.....27, 28, 29, 82, 111, 112, 125, 135, 141
Остроградский М.В.....27
Релей Д.У.....45, 46, 47, 48, 50, 51, 53, 55, 56, 63, 68, 72, 75, 126, 150
Фруд У.....69, 70
Фур'є Ж.Б.Ж. 23, 24, 76, 83, 84, 95, 126, 127, 132, 134
Юнг Т.....44, 131

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Автоколивання 8, 9, 70, 72, 75, 77
Амплітуда коливань 12, 31, 43, 66, 67, 82, 84, 87, 88
Амплітудно-частотна характеристика 81, 87
Антирезонанс 121
Векторна діаграма 15, 30
Віброгашення 121, 122
Віброізоляція 114
Головні координати 106, 108
Голономні зв'язки 10, 100
Дисипативна функція Релея 55, 63, 150
Кінематичне збудження 9,82,83, 115
Кінематичний зв'язок 10
Коливання:
– асинхронні 17, 19, 22
– вимушені 8, 11, 77, 78, 81, 82, 85, 89, 96, 121
– гармонійні 9, 12, 13, 15, 16, 17, 22
– детерміновані 9
– затухаючі 28, 60, 158
– крутильні 10, 42, 130, 140, 141
– квадратурні 19
– недетерміновані 9
– неперіодичні 9
– несинфазні 17
– нестаціонарні 9, 11
– параметричні 8, 9, 11
– періодичні 9, 13, 71
– вільні 8, 11, 27, 28, 29, 42, 55, 67, 79, 85, 93, 95, 100, 108, 123, 126, 130, 158
– синфазні 17, 152
– синхронні 17, 19
– випадкові 9, 23
– особисті 9, 11, 23, 24, 100

Коефіцієнти:
– в’язкого тертя 55, 57, 96, 149, 154
– жорсткості 25, 38, 39, 120
– інерції 45, 73
– передача сили 119
– розподілення 106
– сухого тертя 26, 64, 72, 92
Методи:
– гармонічного балансу 75, 76, 95, 96
– Релея 45, 46, 47, 48, 50, 51, 53, 56, 126
– енергетичного балансу 65, 88, 90
Початкова фаза 9, 12, 31, 43, 101
Періодичне збудження.....83
Принцип суперпозиції 84, 108
Резонанс.....77, 81, 84, 91, 116, 118
Сила:
– відновлююча 24, 26, 27, 66
– дисипативна 26
– сухого тертя 9, 26, 66, 67, 69, 92
Силове збудження 8, 77, 115
Система
– автономна.....76
– коливальна 69, 71, 72, 145, 148, 152
– консервативна.....10
– континуальна 155
– неавтономна.....10, 11, 69
– нестаціонарна 11
– з кінцевим числом ступеня вільності.....5, 144
– стаціонарна 11
Особиста частота коливань 43, 44
Рівняння
– Дюффінга 96, 97
– вільних коливань струни 125, 126
– Лагранжа 31, 35, 41, 55, 62, 63, 65, 77, 85, 93, 101, 107, 149

Умови
– граничні 46, 47, 54, 125, 156
– крайові 125, 127, 132, 138
– кінематичні..... 46, 47, 51, 52, 53, 54
– початкові 61, 79, 125, 130
– силові 46, 47, 51, 52, 53, 54
Фазова площина..... 15, 70, 148
Фазово-частотна характеристика..... 87
Форми коливань..... 45, 109, 131, 133, 139, 140
Еквівалентне в’язке демпфування..... 88

Навчальне видання

БОГОМОЛОВ Віктор Олександрович
КЛИМЕНКО Валерій Іванович
ЛЕОНТЬЄВ Дмитро Миколайович
УЖВА Анатолій Вікторович

ПРИКЛАДНА ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ в галузі машинобудування

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск *В.І. Клименко*

Редактор *Д.М. Леонтьєв*

Комп’ютерна верстка *Д.М. Леонтьєв*

Дизайн обкладинки *Д.М. Леонтьєв*