

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

# **ДИНАМІКА МАШИН З ПРУЖНИМИ ЛАНКАМИ.**

## **На прикладі автомобілів і тракторів**

Колективна монографія

За редакцією д-ра техн. наук М. А. Подригало  
та д-ра техн. наук О. С. Полянського

Харків



2024

УДК 629.017

Д 44

Рекомендована до видання Вченою радою Харківського національного автомобільно-дорожнього університету (протокол № 63/24 від 16.02.2024 р.)

### Рецензенти

**А. В. Бажинов**, завідувач кафедри «Автомобільна електроніка» Харківського національного автомобільно-дорожнього університету, доктор технічних наук, професор;

**А. Ю. Ребров**, завідувач кафедри тракторо- і автомобілебудування Національного технічного університету (ХП), доктор технічних наук, доцент;

**Є. М. Гецович**, професор кафедри транспортних технологій Сумського національного аграрного університету, доктор технічних наук, професор.

### Авторський колектив

А. У. Абдулгасіс (підрозділ 9.8), Д. В. Абрамов (підрозділ 8.2, підрозділи 9.1–9.7), М. П. Артьомов (розділ 8), М. В. Байцур (розділи 1, 2), **В. І. Гацько** (розділ 10), Р. О. Кайдалов (розділ 8), Д. М. Клец (розділ 10), О. О. Коряк (розділ 6), М. А. Подригало (розділи 1, 2, 3, 8), Н. М. Подригало (розділи 2, 3, 4, 5), О. С. Полянський (розділ 2), М. Л. Шуляк (розділ 8)

Д 44 **Динаміка машин з пружними ланками. На прикладі автомобілів і тракторів.** Монографія [текст] / за ред. М. А. Подригало та О. С. Полянського. Харків: Вид-во «Естет Прінт», 2024. 272 с. ISBN 978-617-95214-7-8

У монографії представлено матеріали досліджень, пов'язаних з динамікою машин, що мають пружні ланки. Визначено вплив пружних ланок на ККД та втрати енергії в механізмах з пружними ланками. Проведено оцінку вібростійкості моторно-трансмійних установок автомобілів і тракторів.

Для студентів, магістрантів, аспірантів, що навчаються за спеціальностями «Автомобільний транспорт», «Галузеве машинобудування» та «Прикладна механіка». Монографія корисна для фахівців, що працюють в галузі автомобіле- і тракторобудування.

Лл. 36, табл. 7, бібліограф.: 6 назв.

УДК 631.17

**ISBN 978-617-95214-7-8**

© М. А. Подригало, О. С. Полянський, А. У. Абдулгасіс та інш., 2024

*Чудовій людині  
Василю Івановичу Гацько  
присвячується*

## ВСТУП

Дослідженню динаміки машин присвячено значну кількість наукових робіт, що обумовлено новими вимогами до зазначених пристроїв: збільшенням робочих швидкостей, зменшенням власної ваги, застосуванням нових систем приводів, підвищенням точності витримки кінематичних параметрів тощо.

Роботи з динаміки машин ведуться у трьох напрямках: дослідження динаміки спеціальних машин; машин, що подаються у вигляді поєднань твердих тіл і у вигляді пружних систем.

У першому напрямку більш-менш точно визначено динамічні навантаження при усталених і перехідних (неусталених) режимах руху. Такі дослідження проводяться у певних вузьких галузях техніки і, природно, не мають загальних методів та методики, оскільки застосовні для обмеженої кількості машин.

У другому напрямку можна точно визначати кінематичні параметри систем (швидкості, прискорення), а динамічні навантаження – наближено.

Третій напрямок дозволяє знаходити частоти власних (вільних) і вимушених коливань, визначати умови резонансного стану, динамічні навантаження пружних систем при усталених і неусталених режимах роботи.

Для визначення динамічних навантажень машин останні необхідно представляти як пружні системи з урахуванням змінності рушійних сил і сил опору.

Монографія, що представлена, присвячена дослідженню динаміки машин з пружними ланками. Розгляд здійснюється на прикладі мобільних машин (автомобілів, тракторів та інших мобільних машин).

## РОЗДІЛ 1. РЕЖИМИ РУХУ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

### 1.1. Загальні положення

Рух механізмів і машин може бути усталеним і неусталеним (перехідним). Неусталений рух відбувається при переході від одного швидкісного режиму до іншого і є короточасним.

Багато хто плутає усталений режим з рівномірним, хоча останній є частковим випадком першого. При рівномірному русі постійною є миттєва швидкість, а при сталому – середня швидкість руху за цикл коливань.

Самим економічним з позиції витрати енергії є режим рівномірного прямолінійного руху тіла по горизонтальній площині. У класичній механіці рівномірним вважається рух, при якому незалежно від траєкторії тіла миттєва швидкість тіла постійна. У цьому випадку похідна швидкості за часом  $dV/dt$  і дотичне прискорення  $\bar{a}_k$  дорівнюють нулю. Однак зазначена вимога стосується незмінності модуля вектору швидкості  $\bar{V}$ . Якщо розглядати, наприклад, автомобіль, то в загальному випадку усталеного руху його траєкторія являє собою просторову криву. При усталеному русі по прямій, остання є середньою лінією, відносно якої у вертикальній і горизонтальній площині відбуваються коливальні рухи машини (рис. 1.1).

При усталеному русі за один період коливань лінійної швидкості тіла робота рушійних сил дорівнює роботі сил опору руху. При усталеному русі величина модуля вектору  $\bar{V}$  лінійної швидкості коливається відносно свого середнього значення  $V_{\text{ср}}$  (рис. 1.2).

### 1.2. Усталений рух

Рівномірний рух у реальних механізмах і машинах реалізувати неможливо. Це обумовлено наступними причинами:

- коливанням сил і моментів рушійних сил, що проявляється при використанні двигунів внутрішнього згорання;
- змінністю сил опору руху;
- зміною в процесі робочого циклу наведених до вихідної ланки мас і моментів інерції, обумовленою змінним передатним відношенням механізмів.

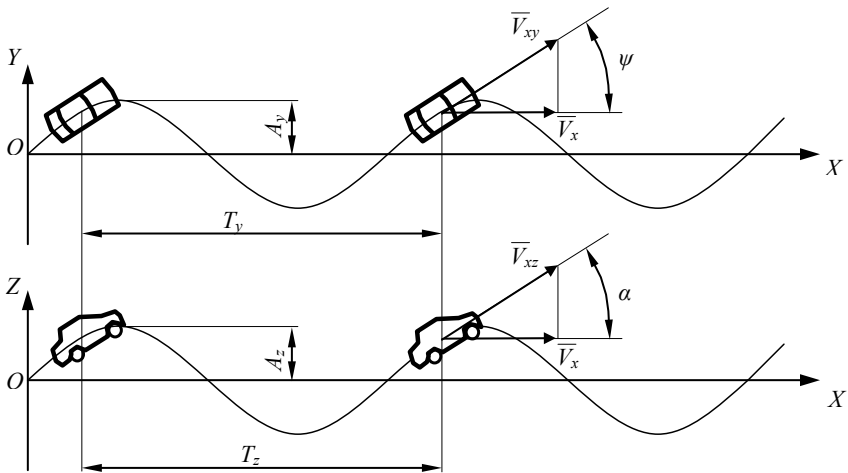


Рис. 1.1. Траєкторія усталеного руху автомобіля в просторі

Для оцінки точності руху і енергетичних витрат при усталеному русі зручно використати модель багатокомпонентного складного руху. Багатокомпонентність моделі в цьому випадку визначається наявністю одного переносного і трьох відносних рухів. На прикладі поступального руху автомобіля (рис. 1.1) зручно вважати переносним рівномірний рух тіла при напрямку і модулі вектору швидкості, що відповідають своїм середнім значенням. Приймаємо переносний рух рівномірним, прямолінійним і таким, що відбувається у горизонтальній площині.

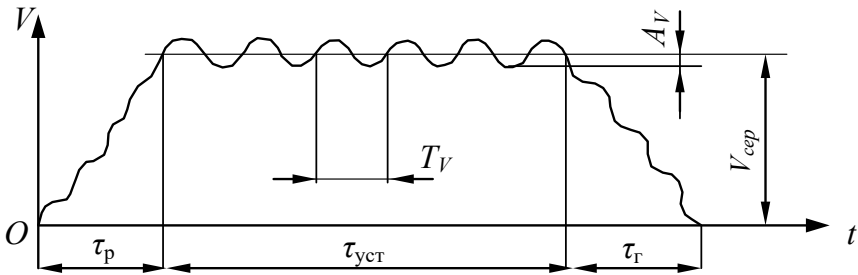


Рис. 1.2. Тахограма руху тіла:  $t$  – час;  $\tau_p$  – час розгону;  $\tau_r$  – час гальмування;  $\tau_{уст}$  – час усталеного руху;  $T_V$  – період коливань швидкості;  $A_V$  – амплітуда коливань лінійної швидкості

Відносними рухами можна вважати наступні:

- рух у напрямку заданої горизонтальної прямолінійної траєкторії зі швидкістю

$$\bar{V}_{\text{відн}} = \bar{V} - \bar{V}_{\text{пер}}, \quad (1.1)$$

де  $\bar{V}_{\text{відн}}$  – різниця векторів дійсної  $\bar{V}$  і переносної  $\bar{V}_{\text{пер}}$  швидкості тіла ( $\bar{V}_{\text{пер}} = \bar{V}_{\text{сер}}$ );

- компонента руху, обумовлена відхиленням вектору швидкості  $\bar{V}$  від свого середнього положення в горизонтальній площині;
- компонента руху тіла, обумовлена відхиленням вектору швидкості  $\bar{V}$  від свого середнього положення у вертикальній площині.

Таким чином, якщо розглядати усталений рух тіла з позиції теорії стійкості А. М. Ляпунова, то переносний рух можна вважати незбуреним, а відносні рухи – коливальними з постійними амплітудами (збуреними рухами). Із цих позицій усталений рух можна вважати нейтральним по А. М. Ляпунову.

Зменшення коливання відносних рухів наближає закон руху автомобіля до переносного руху, тобто до прямолінійного рівномірного

руху по горизонтальній площині. Такий рух буде ідеальним з позицій енергоефективності автомобіля.

### 1.3. Енергетика усталеного руху

Розглянемо рух у напрямку заданої горизонтальної прямолінійної траскторії зі швидкістю  $\bar{V}$ . Відносним буде рух у зазначеному напрямку зі швидкістю  $\bar{V}_{\text{відн}}$ . Назвемо цей рух «першим» відносним рухом. Апроксимуємо криву зміни лінійної швидкості  $V$  на рис. 1.2 гармонійною кривою виду

$$V = V_{\text{сер}} + A_V \sin(\omega_V \cdot t), \quad (1.2)$$

де  $\omega_V$  – кругова частота коливань лінійної швидкості

$$\omega_V = \frac{2\pi}{T_V}. \quad (1.3)$$

Після підстановки (1.3) в (1.2) визначимо

$$V = V_{\text{сер}} + A_V \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_V}\right). \quad (1.4)$$

Зміна кінетичної енергії тіла за один цикл із періодом  $T_V$  коливань лінійної швидкості

$$\Delta W_T = \frac{m(V_{\text{max}}^2 - V_{\text{min}}^2)}{2}, \quad (1.5)$$

де  $V_{\min}$ ;  $V_{\max}$  – мінімальне і максимальне значення лінійної швидкості

$$V_{\max} = V_{\text{сеп}} + A_V; \quad (1.6)$$

$$V_{\min} = V_{\text{сеп}} - A_V. \quad (1.7)$$

Рівняння (1.5) перетворимо до вигляду

$$\Delta W_T = \frac{m}{2}(V_{\max} - V_{\min})(V_{\max} + V_{\min}). \quad (1.8)$$

Величину  $\Delta V$  знаходимо шляхом вираховування окремо кожного члена рівняння (1.6) з рівняння (1.7)

$$\Delta V = V_{\max} - V_{\min} = V_{\text{сеп}} + A_V - (V_{\text{сеп}} - A_V) = 2A_V. \quad (1.9)$$

При гармонійному законі зміни лінійної швидкості тіла середня швидкість визначається

$$V_{\text{сеп}} = \frac{V_{\max} + V_{\min}}{2}. \quad (1.10)$$

Таким чином, після підстановки виразів (1.9) і (1.10) у рівняння (1.8) одержимо

$$\Delta W_T = 2m \cdot V_{\text{сеп}} \cdot A_V. \quad (1.11)$$

Енергія, затрачувана на «перший» відносний рух тіла при переміщенні останнього на відстань  $S$

$$\Delta W_S = \Delta W_T \frac{S}{S_{T_V}}, \quad (1.12)$$

де  $S_{T_V}$  – відстань, на яку переміщується тіло в переносному русі за період коливань лінійної швидкості

$$S_{T_V} = V_{\text{сеп}} T_V. \quad (1.13)$$

Після підстановки виразів (1.11) і (1.13) у рівняння (1.12) одержимо

$$\Delta W_S = 2m \cdot \frac{A_V}{T_V} \cdot S. \quad (1.14)$$

З виразу (1.14) видно, що витрати енергії на «перший» відносний рух не залежать від швидкості переносного руху  $V_{\text{сеп}}$ , а визначаються амплітудою і періодом коливань лінійної швидкості тіла масою  $m$ .

Витрати енергії на «перший» відносний рух пропорційні переносному переміщенню тіла  $S$ . Величина

$$2A_V = R_V, \quad (1.15)$$

де  $R_V$  – розмах коливань,

а величина

$$T_V = \frac{1}{\nu_V}, \quad (1.16)$$

де  $\nu_V$  – частота коливань швидкості.

Таким чином, вираження (1.14) з урахуванням співвідношень (1.15) і (1.16) прийме вигляд

$$\Delta W_S = m \cdot R_V \cdot v_V \cdot S. \quad (1.17)$$

З останнього випливає, що витрати енергії на «перший» відносний рух не залежать від форми коливань, а визначаються їхнім розмахом і частотою.

Потужність, затрачувана на «перший» відносний рух

$$\Delta N = \frac{d(\Delta W_S)}{dt} = m \cdot R_V \cdot v_V \cdot \frac{dS}{dt} = m \cdot R_V \cdot v_V \cdot V_{\text{сер}}. \quad (1.18)$$

Розглянемо відносний рух тіла в горизонтальній площині, обумовлений коливальним відхиленням напрямку вектору швидкості в зазначеній площині. Назвемо цей рух «другим» відносним рухом.

Закон руху тіла в горизонтальній площині представимо гармонійним законом (рис. 1.1)

$$Y = A_Y \cdot \sin(\omega_Y \cdot t), \quad (1.19)$$

де  $A_Y$ ;  $\omega_Y$  – амплітуда і кругова частота поперечних коливань автомобіля в напрямку осі  $OY$ .

Швидкість автомобіля в напрямку осі  $OY$

$$V_Y = \frac{dy}{dt} = A_Y \cdot \omega_Y \cdot \cos(\omega_Y \cdot t). \quad (1.20)$$

Кінетична енергія тіла, створювана швидкістю бічного зсуву  $V_Y$  у першому напівперіоді коливань

$$W_{TY1} = \frac{m}{2} V_Y^2 = \frac{m}{2} A_Y^2 \cdot \omega_Y^2 \cdot \cos^2(\omega_Y \cdot t). \quad (1.21)$$

З огляду на тригонометричне співвідношення

$$1 + \cos(2\omega_Y \cdot t) = 2 \cos^2(\omega_Y \cdot t), \quad (1.22)$$

перетворимо вираз (1.21) до наступного виду

$$W_{TY1} = \frac{m}{4} A_Y^2 \cdot \omega_Y^2 \cdot [1 + \cos(2\omega_Y \cdot t)]. \quad (1.23)$$

Найбільші витрати енергії на рух тіла в бічному напрямку за перший напівперіод коливань відповідає максимальному значенню  $W_{TY1} = (W_{TY1})_{\max}$ , яке реалізується при  $t = 0$  і дорівнює

$$W_{TY1} = (W_{TY1})_{\max} = \frac{mA_Y^2 \cdot \omega_Y^2}{2}. \quad (1.24)$$

Витрати енергії за період коливань

$$W_{TY} = 2(W_{TY1})_{\max} = mA_Y^2 \cdot \omega_Y^2. \quad (1.25)$$

Витрати енергії на коливання в напрямку осі  $OY$  за час переміщення тіла на величину  $S$

$$W_{SY} = W_{TY} \frac{S}{S_{TY}}, \quad (1.26)$$

де  $S_{T_Y}$  – переміщення тіла в напрямку осі  $OX$  за час  $T_Y$

$$S_{T_Y} = V_{\text{сеп}} T_Y. \quad (1.27)$$

Після підстановки виразів (1.25) і (1.27) у рівняння (1.26) одержимо

$$W_{S_Y} = m \frac{A_Y^2 \cdot \omega_Y^2}{V_{\text{сеп}} \cdot T_Y} \cdot S = m \frac{A_Y^2 \cdot \omega_Y^2}{T_Y} t. \quad (1.28)$$

З огляду на співвідношення

$$\omega_Y = 2\pi\nu_Y \quad (1.29)$$

і

$$T_Y = \frac{1}{\nu_Y} \quad (1.30)$$

перетворимо (1.28) наступним чином

$$W_{S_Y} = 4\pi^2 \cdot mA_Y^2 \cdot \nu_Y^3 \cdot t, \quad (1.31)$$

де  $\nu_Y$  – частота коливань тіла в напрямку осі  $OY$ .

Як і раніше, аналіз рівняння (1.31) показує, що витрати енергії на коливання в поперечній площині (уздовж осі  $OY$ ) не залежать від форми сигналу. На витрати енергії впливають розмах коливань

$$R_Y = 2A_Y \quad (1.32)$$

і частота коливань  $\nu_Y$ .

Вираз (1.31), з урахуванням (1.32), прийме вид

$$W_{S_Y} = \pi^2 \cdot m R_Y^2 \cdot \nu_Y^3 \cdot t. \quad (1.33)$$

Витрати потужності

$$N_Y = \frac{dW_{S_Y}}{dt} = \pi^2 m \cdot R_Y^2 \cdot \nu_Y^3. \quad (1.34)$$

Розглянемо відносний рух тіла у вертикальній площині. Назвемо цей рух «третім» відносним рухом (рис. 1.1). Рівняння руху представимо у вигляді

$$Z = A_Z \sin(\omega_Z \cdot t), \quad (1.35)$$

де  $A_Z$ ;  $\omega_Z$  – амплітуда і кругова частота коливань у вертикальній площині.

Втрати енергії тіла за один період коливань у вертикальній площині, викликані зміною потенційної енергії

$$W_{T_Z} = 2A_Z \cdot m \cdot g, \quad (1.36)$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ).

Втрати енергії при переміщенні тіла на відстань  $S$

$$W_{S_Z} = W_{T_Z} \frac{S}{S_{T_Z}}, \quad (1.37)$$

де  $S_{T_Z}$  – переміщення тіла за час  $T_Z$

$$S_{T_Z} = V_{\text{сеп}} T_Z. \quad (1.38)$$

Після підстановки (1.38) в (1.37) з урахуванням (1.36) одержимо

$$W_{S_Z} = 2mg \frac{A_Z}{V_{\text{сеп}} \cdot T_Z} \cdot S = 2mg \frac{A_Z}{T_Z} t = 2m \cdot g \cdot A_Z \cdot v_Z \cdot t. \quad (1.39)$$

Потужність, що витрачається на коливання у вертикальній площині

$$N_Z = \frac{dW_{S_Z}}{dt} = 2m \cdot g \cdot A_Z \cdot v_Z. \quad (1.40)$$

Аналіз виразів (1.39) і (1.40) показує, що витрати енергії і потужності на здійснення коливань у вертикальній площині пропорційні частоті і амплітуді зазначених коливань. Після введення в рівняння (1.39) і (1.40) величини розмаху коливань

$$R_Z = 2A_Z \quad (1.41)$$

перетворимо останні до виду

$$W_{SZ} = m \cdot g \cdot R_Z \cdot v_Z \cdot t; \quad (1.42)$$

$$N_Z = m \cdot g \cdot R_Z \cdot v_Z. \quad (1.43)$$

Остаточно визначаємо сумарні витрати енергії і потужності на відносні рухи в сталому режимі руху автомобіля

$$\begin{aligned} (W_S)_{\text{відн}} &= \Delta W_S + W_{SY} + W_{SZ} = \\ &= m \cdot t \left( R_V \cdot v_V + 2\pi^2 \cdot R_Y^2 \cdot v_Y^3 + g \cdot R_Z \cdot v_Z \right) = \\ &= \frac{mS}{V_{\text{сеп}}} \left( R_V \cdot v_V + \pi^2 \cdot R_Y^2 \cdot v_Y^3 + g \cdot R_Z \cdot v_Z \right). \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} N_{\text{відн}} &= \Delta N + N_Y + N_Z = \\ &= m \left( R_V \cdot v_V + \pi^2 \cdot R_Y^2 \cdot v_Y^3 + g \cdot R_Z \cdot v_Z \right). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Аналіз виразів (1.44) і (1.45) показує, що потужність, затрачувана на відносний рух, не залежить від швидкості переносного руху  $V_{\text{сеп}}$ . Чим більше буде швидкість переносного переміщення  $S$ , тим менше будуть втрати енергії  $(W_S)_{\text{відн}}$  на відносний рух.

#### 1.4. Неусталений рух, його параметри та характеристики

Неусталений рух відбувається при переході від одного швидкісного режиму руху тіла до іншого і є короткочасним. Окремими випад-

ками неусталеного руху є розгін автомобіля від нульової швидкості до заданої і гальмування (вибіг) автомобіля від заданої швидкості до нульової (рис. 1.2).

Усталений і рівномірний рухи характеризуються стійкістю. Рівномірний рух – статичною стійкістю, оскільки відбувається при відсутності збуреного руху, а усталений рух – динамічною стійкістю, оскільки супроводжується періодичним збуреним рухом.

Неусталений рух характеризується керованістю, що визначає точність переходу тіла від одного стійкого швидкісного режиму до іншого. Під керованістю об'єкта розуміється здатність адекватно реагувати на керуючий вплив.

Стійкість процесу керування (неусталеного руху) можна оцінити за часом переходу з одного стану в інший (рис. 1.3), тобто за тривалістю перехідного процесу.

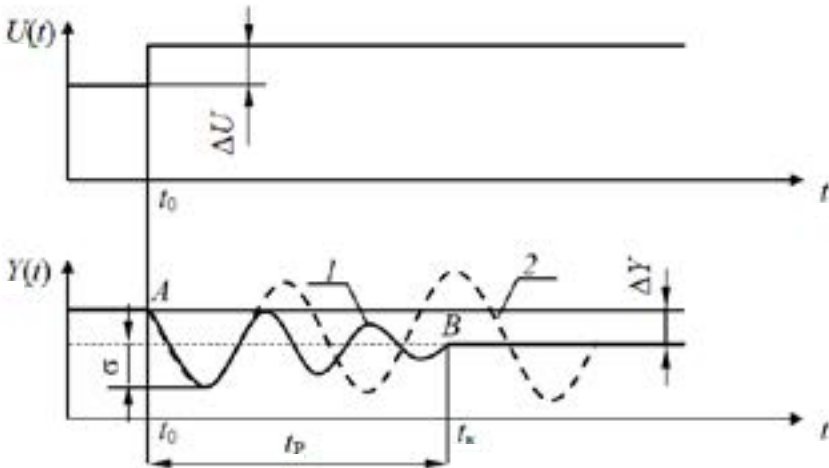


Рис. 1.3. Перехідний процес керованого об'єкта: 1 – стійкий перехідний процес; 2 – нестійкий перехідний процес;  $\sigma$  – перерегулювання;  $t_p$  – час регулювання (тривалість перехідного процесу);  $Y(t)$  – керований параметр;  $\Delta Y$  – зміна керованого параметра в результаті керуючого впливу;  $\Delta U$  – керуючий вплив

З позицій теорії автоматичного управління об'єкт вважається повністю керованим, якщо існує така керуюча дія  $U(t)$ , визначена на кінцевому інтервалі часу, яка переводить його з будь-якого початкового в будь-який заданий кінцевий стан.

Щоб здійснити таке переведення, керуючий вплив має прямо чи опосередковано впливати на всі змінні стану. Ця умова називається умовою спостережуваності.

Керований об'єкт (або автоматична система) називаються повністю спостережуваними, якщо всі змінні стану входять у вираз для керованої величини. Поняття керованості і спостережуваності важливі, наприклад, тоді, коли алгоритм управління формується незалежно від помилки системи, а функції змінних стану

$$U = U(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.46)$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – змінні стану.

Однак у викладеному вище сенсі ці поняття не завжди збігаються з практичними уявленнями. Навіть якщо будь-яка змінна стану і може бути обчислена за доступними для вимірювання вихідними величинами, обробка цих величин, особливо за наявності перешкод, може бути складною. Тому змінними, що практично спостерігаються, зазвичай вважаються ті з них, які можуть бути безпосередньо виміряні тими або іншими датчиками. Авторами ряду робіт зроблено висновок про те, що керованість і спостережуваність – це властивість не самого об'єкта (чи системи), а його математичної моделі у вигляді рівнянь стану.

На думку Філіпса Ч. і Харбора Р. [1] у загальному випадку вхід об'єкта управління є функцією змінних стану, тобто

$$U(t) = f[x(t)]. \quad (1.47)$$

Рівняння (1.47) зазвичай називають законом управління. Рівнянням стану або математичною моделлю системи називається її опис

якоюсь формальною мовою, що дозволяє виводити судження про деякі риси поведінки цієї системи за допомогою формальних процедур над її описом (А. Я. Лернер). Оскільки математичний опис не може бути всеосяжним та ідеально точним, то математичні моделі описують не реальні системи, а їх спрощені (гомоморфні) моделі. Тому рівень спостережуваності будь-якої керованої системи визначається ступенем наближення математичної моделі до опису реальної системи, тобто. кількістю змінних станів. Низький рівень спостережуваності спричиняє зниження функціональної стабільності об'єкта управління (стабільність – властивість об'єкта зберігати свої функціональні характеристики у часі).

### 1.5. Точність руху та її оцінка

Стійкість процесу управління (несталого руху) можна оцінити за часом переходу з одного стійкого стану до іншого (рис. 1.3).

Перехідним процесом називають зміни регульованої величини та інших величин у часі, що виникають при переході з одного стану рівноваги в інший (рис. 1.3). Точність перехідного процесу крім часу  $t_p$  визначається також величиною перерегулювання  $\sigma$ , коливальністю  $n$  (числом коливань регульованої величини  $Y(t)$  за час  $t_p$ ), а також точністю зміни  $\Delta Y$  керованого параметра при заданому  $\Delta U$  керуючому впливі.

Якщо перехідний процес являє собою аперіодичну криву або коливання з розмахом, що збільшується, то рух нестійкий. Якщо розмах коливань зменшується, то рух є стійким. Якщо коливання відбуваються з постійним розмахом, то рух нейтральний.

Точність усталеного руху визначається ступенем нерівномірності швидкості руху

$$\delta_V = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\text{сеп}}} = \frac{\Delta V}{V_{\text{сеп}}} = \frac{R_V}{V_{\text{сеп}}}; \quad (1.48)$$

$$\delta_Y = \frac{R_Y}{V_{\text{сеп}}}; \quad (1.49)$$

$$\delta_Z = \frac{R_Z}{V_{\text{сеп}}}. \quad (1.50)$$

Зниження величин  $\delta_V$ ,  $\delta_Y$ ,  $\delta_Z$  (підвищення точності руху) дозволяє знизити енергетичні витрати на рух автомобіля.

## **РОЗДІЛ 2. КОЕФІЦІЄНТ КОРИСНОЇ ДІЇ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН**

### **2.1. Визначення поняття коефіцієнта корисної дії механізмів і машин**

Механічний ККД (коефіцієнт корисної дії) – це один з найважливіших якісних показників роботи машини, який показує яка частина сумарної енергії, що підводиться, корисно використовується в пристрої, і є, таким чином, найбільш загальним показником економічності перетворення енергії машин, обладнання, приладів та інших виробів.

Відомо, що ККД визначають з урахуванням втрат на тертя, що знижують сили і моменти на вихідних ланках механізмів. При цьому деформація ланок при роботі механізму не враховується при визначенні ККД. Пов'язане це з тим, що ланки механізму у таких випадках розглядаються з позицій класичної механіки як тверде тіло, відстані між точками якого не змінюються.

Розрізняють миттєвий і цикловий ККД. Миттєвий ККД – це відношення корисної потужності  $N_{\text{п}}$ , що знімається з веденої ланки, до потужності зовнішніх (рушійних) сил  $N_{\text{дв}}$ , витраченої на провідній ланці. Цикловий ККД – це відношення витрат корисної роботи  $A_{\text{п}}$  до витрат роботи рушійних сил  $A_{\text{дв}}$  за цикл усталеного руху. Таким чином, миттєвий і цикловий ККД пристрою можуть бути визначені в такий спосіб

$$\eta^{\text{МГН}} = \frac{N_{\text{п}}}{N_{\text{дв}}}; \quad (2.1)$$

$$\eta^{\text{МГН}} = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{дв}}}. \quad (2.2)$$

При розрахунку миттєвого ККД механізму можна використати як значення потужності у розглянутий момент часу, так і середні значення, визначені за цикл усталеного руху. В останньому випадку миттєвий ККД буде дорівнювати цикловому. При нерівномірному русі ланок механізму в певні моменти часу миттєвий ККД може приймати значення більше одиниці. Це суперечить фізичному змісту ККД, і в такому випадку його можна розглядати як коефіцієнт динамічності. З огляду на останню обставину можна зтверджувати, що цикловий ККД (у ситуації, коли переважає нерівномірний режим руху машини або механізму) є найбільш коректним якісним і кількісним показником роботи.

Оскільки, як ми вже відзначали, рівномірний режим руху машин і механізмів зустрічається рідко, то визначення ККД через відношення сил або моментів на вихідному ( $F_2, T_2$ ) і вхідному ( $F_1, T_1$ ) ланках з урахуванням передатного відношення є неточним. У ряді робіт запропонована залежність для такого визначення ККД

$$\eta = \left| \frac{F_2}{F_1 \cdot U_{1-2}} \right| = \left| \frac{T_2}{T_1 \cdot U_{1-2}} \right|, \quad (2.3)$$

де  $U_{1-2}$  – передатне відношення механізму.

У відомих роботах відзначається, що в процесі роботи ланки мають деформації під впливом переданих навантажень, у результаті чого потенційна енергія пружних ланок переходить у теплову енергію. Такі втрати енергії мають місце при пружному контакті коліс фрикційних механізмів, у гнучких ланках відповідних механізмів (у пасових передачах). Відносні значення цих втрат залежать від пружних властивостей матеріалу ланки і його навантаження. При цьому відзначається, що в теорії механізмів і машин розглядаються тільки втрати в кінематичних парах, тобто втрати на тертя.

У роботах, що присвячені кваліметрії, відзначається, що процес перетворення роботи  $A_{\text{дв}}$  у роботу  $A_{\text{п}}$ , який характеризується у загаль-

ному виді енергетичним коефіцієнтом корисної дії, не показує основного принципу цього перетворення. Відомо, що перетворення роботи  $A_{\text{дв}}$  у роботу  $A_{\text{п}}$  у більшості машин механічної дії складається із двох одночасних процесів: перетворення рушійної сили  $F_{\text{дв}}$  у корисну силу  $F_{\text{п}}$ , що розвивається машиною на її виконавчому органі; перетворення переміщення  $S$ , сприйманого машиною від дії сили  $F_{\text{дв}}$ , у переміщення  $l$  від дії корисної сили  $F_{\text{п}}$ , що розвиває машина. Показником процесу перетворення сили служить відношення

$$k = \frac{F_{\text{дв}}}{F_{\text{п}}}, \quad (2.4)$$

де  $F_{\text{дв}}$  – рушійна сила;  
 $F_{\text{п}}$  – сила корисного опору.

Дане відношення, що характеризує силовий динамічний ефект роботи машини, називають коефіцієнтом перетворення сили.

Характер процесу перетворення переміщень оцінюють відношенням

$$m = \frac{S}{l}, \quad (2.5)$$

де  $S$  – лінійне переміщення елемента, що рухає машину;  
 $l$  – переміщення виконавчого (робочого) органу машини.

Коефіцієнт  $m$  характеризує кінематичний ефект роботи даної машини й називається коефіцієнтом перетворення (передачі) переміщень або передаточним числом переміщень крайніх елементів машини. Звідси справедливо співвідношення

$$\eta = \frac{A_{\Pi}}{A_{\text{дв}}} = \frac{1}{k \cdot m} \quad (2.6)$$

або

$$\eta \cdot m \cdot k = 1. \quad (2.7)$$

У відомих роботах також відзначається, що наведені вище коефіцієнти комплексно характеризують процес роботи машини шляхом перетворення енергії, сил і руху. Рівність (2.7) служить для перевірки вірогідності експериментально визначених коефіцієнтів, що характеризують рівень корисності досліджуваної машини.

Слід зазначити, що силові втрати, викликані тертям у кінематичних парах, впливають на відношення  $k$  та  $\eta$ . Однак, у відомих дослідженнях не розглянуте питання впливу деформацій ланок механізмів на відношення  $m$ , що приводить до неточної оцінки коефіцієнта корисної дії  $\eta$ .

## 2.2. Вплив інерційних, пружних ланок та дисипативного зв'язку на ККД механізмів і машин

Розглянемо визначення коефіцієнта корисної дії на прикладі трансмісії транспортно-тягових машин. Трансмісія є системою з розподіленими параметрами, де усі види втрат енергії відбуваються одночасно і паралельно в кожній окремій ланці.

Визначимо залежність для розрахунку загального ККД трансмісії. Розглянемо баланс потужності у трансмісії транспортно-тягової машини

$$N_{\text{к}} = N_e - N_{\text{ст}} - N_{\text{вт}} - N_{\text{вр}}, \quad (2.8)$$

де  $N_e$  – ефективна потужність двигуна;

$N_{ст}$  – витрати потужності двигуна на подолання сухого тертя;

$N_{вт}$  – витрати потужності двигуна на подолання в'язкого тертя;

$N_{вр}$  – витрати потужності двигуна на розгін обертових мас трансмісії;

$N_k$  – потужність на ведучих колесах транспортно-тягової машини.

Розділивши ліву та праву частини рівняння (2.8) на  $N_e$ , отримаємо загальний ККД трансмісії:

$$\eta''_{тр} = \frac{N_k}{N_e} = 1 - \frac{N_{ст}}{N_e} - \frac{N_{вт}}{N_e} - \frac{N_{вр}}{N_e} = 1 - (\psi_{тр}^{ст} + \psi_{тр}^{кин} + \psi_{тр}^{дин}), \quad (2.9)$$

де  $\psi_{тр}^{ст}$  – коефіцієнт втрат потужності на сухе тертя у трансмісії

$$\psi_{тр}^{ст} = 1 - \eta_{тр}^{ст};$$

$\psi_{тр}^{кин}$  – коефіцієнт втрат потужності на в'язке тертя у трансмісії

$$\psi_{тр}^{кин} = 1 - \eta_{тр}^{кин};$$

$\psi_{тр}^{дин}$  – коефіцієнт втрат потужності на розгін обертових мас

$$\psi_{тр}^{дин} = 1 - \eta_{тр}^{дин}.$$

Як видно з рівняння (2.9) сума втрат потужності в трансмісії не може перевищувати одиницю (інакше потужність корисно не використовується і рух машини неможливий)

$$\psi_{тр}^{ст} + \psi_{тр}^{кин} + \psi_{тр}^{дин} \leq 1, \quad (2.10)$$

з чого випливає наступне:

$$(1 - \eta_{тр}^{ст}) + (1 - \eta_{тр}^{кин}) + (1 - \eta_{тр}^{дин}) \leq 1, \quad (2.11)$$

отже, сума компонентів загального ККД трансмісії не може бути меншою, ніж 2, тобто

$$\eta_{\text{тр}}^{\text{ст}} + \eta_{\text{тр}}^{\text{кин}} + \eta_{\text{тр}}^{\text{дин}} \geq 2. \quad (2.12)$$

Зрештою, після перетворень (2.9) отримаємо залежність для визначення загального миттєвого ККД трансмісії

$$\eta_{\text{тр}}'' = \eta_{\text{тр}}^{\text{ст}} + \eta_{\text{тр}}^{\text{кин}} + \eta_{\text{тр}}^{\text{дин}} - 2. \quad (2.13)$$

### 2.3. Динамічна модель механізму з пружними ланками, що рухаються поступально

Любий механізм або машину можна представити як систему із зосередженими параметрами (див. рис. 2.1). На малюнку наведена динамічна модель механізму, у якій всі пружні й інерційні ланки представлені приведеною жорсткістю  $c_{\text{пр}}$  і приведеною масою  $m_{\text{пр}}$ .

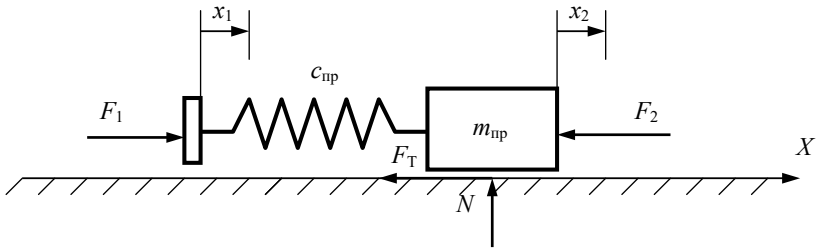


Рис. 2.1. Динамічна модель механізму з пружними ланками

Розглянемо варіант навантаження моделі, при якому  $F_1 = \text{const}$ ,  $F_2 = \text{const}$ . У початковий момент часу ( $t = 0$ ) сили  $F_1$  й  $F_2$  досягли свого максимального значення. Сила  $F_1$ , впливаючи на шайбу, здійснює переміщення лівого кінця пружини на відстань  $x_1$ , яке можна визначити як

$$x_1 = k_{x_1} \cdot t, \quad (2.14)$$

де  $k_{x_1}$  – кутовий коефіцієнт прямої  $x_1(t)$  (швидкість переміщення шайби).

Робота сили  $F_1$  на вході до механізму

$$A_1 = A_{\text{дв}} = F_1 \cdot x_{1\text{max}}, \quad (2.15)$$

де  $x_{1\text{max}}$  – максимальне переміщення вхідної ланки механізму.

Робота сили  $F_2$  на виході механізму

$$A_2 = A_{\text{п}} = F_2 \cdot x_{2\text{max}}, \quad (2.16)$$

де  $x_{2\text{max}}$  – максимальне переміщення вихідної ланки механізму.

Цикловий ККД механізму

$$\eta_{\text{цикл}} = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{дв}}} = \frac{F_2}{F_1} \cdot \frac{x_{2\text{max}}}{x_{1\text{max}}}. \quad (2.17)$$

Форма запису виразів (2.15) – (2.17) коректна, оскільки ми прийняли, що  $F_1 = \text{const}$  й  $F_2 = \text{const}$ . Розглядаючи рівновагу динамічної системи, визначимо

$$F_1 = F_2 + F_{\text{T}} = F_2 + f \cdot N = F_2 + f \cdot m_{\text{пр}} \cdot g, \quad (2.18)$$

де  $F_{\text{T}}$  – сила тертя (викликана дисипативним зв'язком у механізмі),

$$F_T = f \cdot N = f \cdot m_{\text{пр}} \cdot g; \quad (2.19)$$

$f$  – коефіцієнт тертя ковзання;  
 $N$  – нормальна реакція опори на ланку  $m_{\text{пр}}$ ,

$$N = m_{\text{пр}} \cdot g. \quad (2.20)$$

Зусилля пружини при досягненні  $x_{1\text{max}}$  й  $x_{2\text{max}}$

$$P_{\text{пр}} = c_{\text{пр}}(x_{1\text{max}} - x_{2\text{max}}) = F_1 = F_2 + f \cdot m_{\text{пр}} \cdot g. \quad (2.21)$$

З виразу (2.21) визначимо

$$x_{2\text{max}} = x_{1\text{max}} - \Delta x = x_{1\text{max}} - \frac{F_1}{c_{\text{пр}}} = x_{1\text{max}} - \frac{F_2 + f \cdot m_{\text{пр}} \cdot g}{c_{\text{пр}}}, \quad (2.22)$$

де  $\Delta x$  – різниця переміщень вхідної й вихідної ланок механізму.

Підставляючи вираз (2.18) і (2.22) у співвідношення (2.17), одержимо

$$\eta_{\text{цикл}} = \frac{F_1 - f \cdot m_{\text{пр}} \cdot g}{F_1} \cdot \left( \frac{x_{1\text{max}} - \frac{F_1}{c_{\text{пр}}}}{x_{1\text{max}}} \right) = \eta_f^{\text{цикл}} \cdot \eta_{\text{упр}}^{\text{цикл}}, \quad (2.23)$$

де  $\eta_f^{\text{цикл}}$  – цикловий ККД, враховуючий втрати на тертя,

$$\eta_f^{\text{цикл}} = \frac{F_1 - f \cdot m_{\text{пр}} \cdot g}{F_1} = 1 - \frac{f \cdot m_{\text{пр}} \cdot g}{F_1}; \quad (2.24)$$

$\eta_{\text{упр}}^{\text{цикл}}$  – цикловий пружний ККД, враховуючий втрати переміщення вихідної ланки, обумовлені втратами на деформації ланок механізму

$$\eta_{\text{упр}}^{\text{цикл}} = 1 - \frac{F_1}{c_{\text{пр}} \cdot x_{1 \max}}. \quad (2.25)$$

Аналізуючи рівняння (2.25), можна зробити висновок про те, що для абсолютно твердої системи ( $c_{\text{пр}} \rightarrow \infty$ ) величина  $\eta_{\text{упр}}^{\text{цикл}}$  прагне до одиниці. При

$$F_1 = c_{\text{пр}} \cdot x_{1 \max} \quad (2.26)$$

величина  $\eta_{\text{упр}}^{\text{цикл}} = 0$ .

Таким чином, піддатливість елементів (ланок) механізмів і машин варто враховувати при оцінці внутрішніх втрат енергії в механізмах та машинах і визначенні ККД. Слід також зазначити, що класичні курси теоретичної механіки й теорії механізмів і машин, вивчаючи абсолютно тверде тіло, не розглядають динаміку механізмів і машин з податливими пружними ланками. Тому, переходячи від загально інженерних дисциплін до спеціальних, студенти вищих технічних навчальних закладів не готові до сприйняття теорії спеціальних машин і механізмів, у якій це враховується.

Визначимо миттєвий ККД трансмісії моделі механізму (див. рис. 2.1). Для розглянутої моделі миттєвий ККД може бути визначений як

$$\eta^{\text{МГН}} = \frac{F_2 \cdot \dot{x}_2}{F_1 \cdot \dot{x}_1}, \quad (2.27)$$

де  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$  – швидкості переміщення вхідної й вихідної ланок,

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} = k_{x_1} \cdot t. \quad (2.28)$$

Рівняння динаміки поступального руху приведеної маси  $m_{\text{пр}}$

$$m_{\text{пр}} \cdot \ddot{x}_2 = P_{\text{пр}} - F_2 - f \cdot N, \quad (2.29)$$

де  $P_{\text{пр}}$  – зусилля стиску пружини,

$$P_{\text{пр}} = c_{\text{пр}}(x_1 - x_2) = c_{\text{пр}} \cdot k_{x_1} \cdot t - c_{\text{пр}} \cdot x_2. \quad (2.30)$$

Підставляючи вираз (2.20) і (2.29) у рівняння (2.30), одержимо

$$m_{\text{пр}} \cdot \ddot{x}_2 + c_{\text{пр}} \cdot x_2 = c_{\text{пр}} \cdot k_{x_1} \cdot t - (F_2 + f \cdot m_{\text{пр}} \cdot g) \quad (2.31)$$

або

$$\ddot{x}_2 + k_{\text{пр}}^2 \cdot x_2 = k_{\text{пр}}^2 \cdot k_{x_1} \cdot t - \left( \frac{F_2 + f \cdot m_{\text{пр}} \cdot g}{m_{\text{пр}}} \right), \quad (2.32)$$

де  $k_{\text{пр}}$  – кругова частота власних коливань пружної системи.

Рішення неоднорідного диференціального рівняння другого порядку має вигляд

$$x_2 = A_1 \cos(k_{\text{пр}} \cdot t) + A_2 \sin(k_{\text{пр}} \cdot t) + \frac{c_{\text{пр}} \cdot k_{x_1}}{k_{\text{пр}}^2 \cdot m_{\text{пр}}} t - \frac{F_2 + f \cdot m_{\text{пр}} \cdot g}{k_{\text{пр}}^2 \cdot m_{\text{пр}}}. \quad (2.33)$$

З урахуванням граничних умов (при  $t = 0$  величини  $\dot{x}_2 = 0$  й  $x_2 = 0$ ) одержимо

$$x_2 = \frac{c_{\text{пр}} \cdot k_{x_1}}{k_{\text{пр}}^2 \cdot m_{\text{пр}}} \left[ t - \frac{\sin(k_{\text{пр}} \cdot t)}{k_{\text{пр}}} \right] - \frac{F_2 + f \cdot m_{\text{пр}} \cdot g}{k_{\text{пр}}^2 \cdot m_{\text{пр}}} [1 - \cos(k_{\text{пр}} \cdot t)]. \quad (2.34)$$

Швидкість переміщення вихідної ланки

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{c_{\text{пр}} \cdot k_{x_1}}{k_{\text{пр}}^2 \cdot m_{\text{пр}}} [1 - \cos(k_{\text{пр}} \cdot t)] - \frac{F_2 + f \cdot m_{\text{пр}} \cdot g}{k_{\text{пр}} \cdot m_{\text{пр}}} \sin(k_{\text{пр}} \cdot t). \quad (2.35)$$

Виражаючи  $F_2$  через  $F_1$  за допомогою рівності (2.18), одержимо

$$\dot{x}_2 = \frac{c_{\text{пр}} \cdot k_{x_1}}{k_{\text{пр}}^2 \cdot m_{\text{пр}}} [1 - \cos(k_{\text{пр}} \cdot t)] - \frac{F_1}{k_{\text{пр}} \cdot m_{\text{пр}}} \sin(k_{\text{пр}} \cdot t). \quad (2.36)$$

С урахуванням того, що  $k_{\text{пр}}^2 = \frac{c_{\text{пр}}}{m_{\text{пр}}}$ , одержимо

$$\dot{x}_2 = k_{x_1} \left[ 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{c_{\text{пр}}}{m_{\text{пр}}}} \cdot t \right) \right] - \frac{F_1}{\sqrt{c_{\text{пр}} \cdot m_{\text{пр}}}} \sin \left( \sqrt{\frac{c_{\text{пр}}}{m_{\text{пр}}}} \cdot t \right). \quad (2.37)$$

Вираз (2.27) для визначення миттєвого ККД із урахуванням рівнянь (2.28), (2.18) і (2.37) прийме вигляд

$$\eta^{мгн} = \frac{F_1 - f \cdot m_{пр} \cdot g}{F_1} \left[ 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{c_{пр}}{m_{пр}}} \cdot t \right) - \frac{F_1}{k_{x_1} \sqrt{c_{пр} \cdot m_{пр}}} \sin \left( \sqrt{\frac{c_{пр}}{m_{пр}}} \cdot t \right) \right]. \quad (2.38)$$

Рівняння (2.38) можна представити у вигляді

$$\eta^{мгн} = \eta_f^{мгн} \cdot \eta_{упр}^{мгн}, \quad (2.39)$$

де  $\eta_f^{мгн}$  – миттєвий ККД, враховуючий втрати на тертя (силовий ККД);  
для даної динамічної моделі  $\eta_f^{мгн} = \eta_f^{цикл}$ ;  
 $\eta_{упр}^{мгн}$  – миттєвий пружний ККД, враховуючий втрати потужності,  
обумовлені втратами на деформації ланок механізму,

$$\eta_{упр}^{мгн} = 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{c_{пр}}{m_{пр}}} \cdot t \right) - \frac{F_1}{k_{x_1} \sqrt{c_{пр} \cdot m_{пр}}} \sin \left( \sqrt{\frac{c_{пр}}{m_{пр}}} \cdot t \right). \quad (2.40)$$

Аналіз залежності (2.40) показує, що при  $t = 0$  й  $\eta_{упр}^{мгн} = 0$ . Це означає, що в початковий момент часу передача потужності від вхідної до вихідної ланки відсутня. При виконанні умови

$$\sqrt{\frac{c_{\text{пр}}}{m_{\text{пр}}}} \cdot t = \frac{\pi}{2} \quad (2.41)$$

миттєвий пружний ККД динамічної моделі механізму (машини) може бути визначений як

$$\eta_{\text{упр}}^{\text{мгн}} = 1 - \frac{F_1}{k_{x_1} \sqrt{c_{\text{пр}} \cdot m_{\text{пр}}}}. \quad (2.42)$$

При

$$F_1 = k_{x_1} \sqrt{c_{\text{пр}} \cdot m_{\text{пр}}} \quad (2.43)$$

величина  $\eta_{\text{упр}}^{\text{мгн}} = 0$  в зазначеній точці.

Максимальний час  $t_{\text{max}}$  відповідає часу протікання процесу й може бути визначений з рівняння (2.14)

$$t_{\text{max}} = x_{1\text{max}} / k_{x_1}. \quad (2.44)$$

Після підстановки (2.44) в (2.40) одержимо

$$\eta_{\text{упр}}^{\text{мгн}} = 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{c_{\text{пр}}}{m_{\text{пр}}}} \cdot \frac{x_{1\text{max}}}{k_{x_1}}\right) - \frac{F_1}{k_{x_1} \sqrt{c_{\text{пр}} \cdot m_{\text{пр}}}} \sin\left(\sqrt{\frac{c_{\text{пр}}}{m_{\text{пр}}}} \cdot \frac{x_{1\text{max}}}{k_{x_1}}\right). \quad (2.45)$$

Очевидно, що обмеженням переміщення вхідної ланки буде умова

$$t_{\max} \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m_{\text{пр}}}{c_{\text{пр}}}} \quad (2.46)$$

або з урахуванням (2.44)

$$x_{1\max} \leq \frac{\pi \cdot k_{x_1}}{2} \sqrt{\frac{m_{\text{пр}}}{c_{\text{пр}}}}. \quad (2.47)$$

Отримані вирази (2.23) – (2.25) і (2.38) – (2.40) дозволяють визначити цикловий і миттєвий ККД механізмів і машин, що включають у себе податливі (пружні) ланки.

### **РОЗДІЛ 3. ДИНАМІКА І МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ МАШИННИХ АГРЕГАТІВ**

#### **3.1. Динамічна модель трансмісії з інерційними та пружними ланками і дисипативними зв'язками**

Під машинним агрегатом в теорії машин і механізмів розуміють систему, що складається з приводного двигуна і робочої машини. Машинний агрегат включає у себе пов'язаний функціональною єдністю приводний двигун (з системою регулювання і управління), передавальний механізм і робочі органи машини, що здійснюють рух відповідно до вимог технологічного процесу.

При динамічному розрахунку і дослідженні машинного агрегату завжди доводиться стикатися з визначенням характеристики приводного двигуна. Тому, з огляду на відмінності в динамічних характеристиках двигунів, розрахунки машинних агрегатів з електродвигунами і двигунами внутрішнього згоряння мають свої особливості.

Моторно-трансмісійні установки транспортно-тягових машини – це машинні агрегати, переважно, з двигунами внутрішнього згоряння (ДВЗ). Трансмісії транспортно-тягових машин включають інерційні, пружні і дисипативні ланки.

Елементи трансмісії, що володіють моментами інерції, називаються інерційними ланками. До них відносяться зубчасті колеса, маховики, шківні і т. п. Вали трансмісії, зважаючи на відносно малі величини моментів інерції, при моделюванні інерційних ланок не враховуються. Пружні і дисипативні властивості інерційних ланок виявляються настільки незначними, що при динамічних розрахунках теж не враховуються.

Інерційні ланки при роботі трансмісії накопичують і віддають кінетичну енергію. У режимі усталеного руху кутова швидкість інерційних ланок коливається щодо деякого середнього значення. Отже, і кінетична енергія інерційних ланок в режимі усталеного руху змі-

нюється відносно середнього значення. В ідеальному випадку, при постійній кутовій швидкості валів, рівень кінетичної енергії залишається постійним. Але це неможливо при використанні в моторно-трансмісійних установках ДВЗ і механічних передач, оскільки нерівномірність обертання колінчастого валу двигуна і похибки виготовлення зубчастих коліс призводять до порушення плавності роботи передачі і супроводжуються коливаннями кутових швидкостей валів трансмісії.

При розгоні трансмісії (несталій режим руху) інерційні ланки накопичують кінетичну енергію, зменшуючи величину потужності, що передається до ведучих коліс транспортно-тягових машин. У роботах Н. М. Подригало запропоновано враховувати втрати на розгін обертових мас трансмісії за допомогою динамічного ККД.

У режимі уповільнення (зупинки) машини інерційні ланки знижують рівень своєї кінетичної енергії, за рахунок чого відбувається збільшення переданої до ведучих коліс потужності двигуна. В цьому режимі зниження рівня кінетичної енергії інерційних ланок і додаткове навантаження трансмісії можна враховувати за допомогою коефіцієнта динамічності. Слід зазначити, що динамічний ККД і коефіцієнт динамічності мають загальну природу, що, безсумнівно, вимагає додаткового дослідження.

Пружні ланки при роботі трансмісії накопичують і віддають потенціальну енергію пружних деформацій, викликаних дією крутних моментів. Оскільки в сталому режимі руху кутові швидкості і крутний момент на валах коливаються навколо деякого середнього значення, відносно середнього значення коливається і рівень потенційної енергії пружних ланок.

Дослідженню пружних крутних моментів, присвячено роботи багатьох вчених. Слід погодитися з авторами багатьох робіт в тому, що вся потенційна енергія пружних деформацій валів трансмісії рано чи пізно буде перетворена в корисну роботу вихідної ланки. Цілком ймовірно, що частина цієї енергії може витратитися на опір передачі потужності від двигуна до ведучих коліс і на в'язке тертя в матеріалі пружних ланок. І це питання вимагає додаткового дослідження.

До пружних ланок відносяться: вали, з'єднувальні муфти та інші пружні елементи, що передають крутний момент.

Під час збільшення навантаження під дією крутних моментів, деформації валів збільшуються. Рівень потенційної енергії пружних ланок також збільшується, а, отже, збільшуються втрати переданої трансмісією потужності. Ці втрати також можна врахувати, вводячи показник миттєвого пружного ККД трансмісії. При зменшенні навантаження в трансмісії потенційна енергія пружних деформацій переходить в роботу, яка, в свою чергу, може бути роботою сил шкідливих опорів (при зменшенні крутного моменту), що перешкоджає передачі енергії двигуна до ведучих коліс, або корисною роботою (якщо зовнішнє навантаження зменшується швидше, ніж крутний момент).

Дисипативні ланки при роботі трансмісії частково розсіюють передану від двигуна до веденого валу енергію. До дисипативних ланок відносяться: гальма, фрикційні і гідравлічні муфти, різного роду демпфери і т. п. Слід згадати і про наявність дисипативних зв'язків у трансмісії: пар тертя – зубчастих коліс (між зубами), підшипників ковзання і кочення; в'язкого тертя, обумовленого зануренням зубчастих коліс в масляну ванну. Частина енергії витрачається на внутрішнє тертя при деформуванні валів. Дисипативні ланки розсіюють енергію всередині себе, а дисипативні зв'язки – між ланками кінематичних пар.

Дисипативні втрати, або втрати на дисипативні ланки і зв'язки можна враховувати статичним і кінематичним ККД трансмісії, як миттєвими, так і цикловими. Статичний ККД враховує дисипативні втрати потужності (енергії), що не залежать від швидкості обертання валів, а кінематичний – залежні від швидкості обертання валів дисипативні втрати на в'язке тертя.

До якого виду ланок (інерційних, пружних або дисипативних) віднести той чи інший елемент визначається його домінуючою властивістю. Але можуть бути ланки, що володіють порівнянними показниками інерційності, пружності і дисипативних, наприклад, автомобільне зчеплення. Таку складну ланку можна розкласти на простіші ланки, у яких можна визначити домінуючу властивість. В цілому

необхідний критерій, за яким ланка може бути віднесено до певного виду. Якщо ланка накопичує в набагато більшому ступені кінетичну енергію, ніж потенційну, то це – інерційний ланка (наприклад, зубчасте колесо). Якщо ланка накопичує в набагато більшому ступені потенційну енергію, ніж кінетичну – це пружна ланка (наприклад, вал). Якщо ланка розсіює енергію, то ця ланка – дисипативна (наприклад, демпфер).

Також можуть виникнути складності у визначенні деяких елементів як ланок або зв'язків. Наприклад, зубчасте колесо можна вважати як ланкою, так і зв'язком, але простіше його представити як дисипативний зв'язок з парним зубчастим колесом.

### 3.2. Системи з розподіленими і зосередженими параметрами

Для визначення діючих навантажень доцільно дійсні схеми машин уявити в наведеному вигляді. Залежно від цілей досліджень і конструктивних особливостей машин наведені розрахункові схеми можуть містити одну масу або систему зосереджених мас (дві, три, іноді чотири), з'єднаних пружними ланками (рис. 3.2) або мас, розподілених в межах певних ділянок (рис. 3.1).

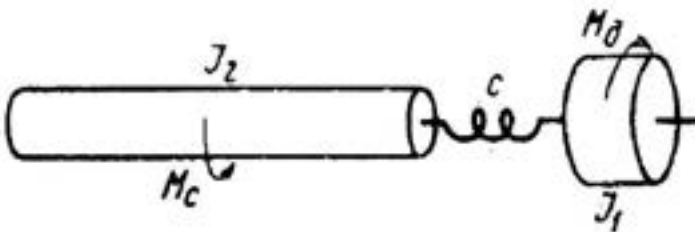


Рис. 3.1. Приведена розрахункова схема з розподіленою масою

За величиною приведені маси можуть бути постійними і змінними. Жорсткість пружних ланок і зовнішні сили (рушійні сили або мо-

менти і сили або моменти опору) в загальному випадку є змінними, залежними від стану системи або швидкості ведучого елемента.

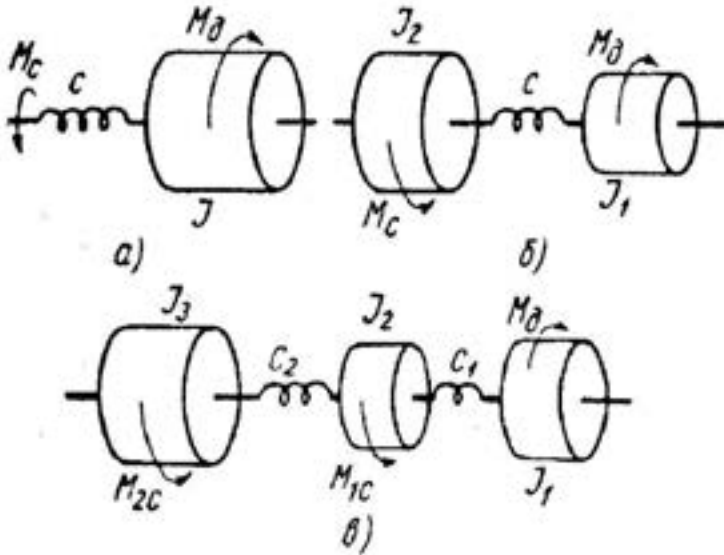


Рис. 3.2. Приведені розрахункові схеми з зосередженими масами:  
а – одномасова; б – двомасова; в – тримасова

### 3.3. Ефект Зоммерфельда–Кононенко

Цікавим з точки зору забезпечення динамічної стійкості машинних агрегатів є ефект, виявлений Арнольдом Зоммерфельдом, який отримав подальший розвиток в роботах В. О. Кононенко та його учнів.

Під ефектом Зоммерфельда–Кононенко розуміють сукупність специфічних явищ, обумовлених взаємодією механізмів збудження (джерел енергії) і коливального навантаження. Будучи проявом закону збереження енергії, цей ефект в тій чи іншій мірі присутній завжди, але особливо істотна його роль у випадках, коли потужність

механізму порівнянн з споживаною потужністю на внутрішньому демпфіруванні. Це випадок так званої «обмеженої» потужності механізму або неідеального джерела енергії, коли навантаження знаходиться під «обмеженим» (неідеальним збудженням).

У роботах Кононенко та його учнів показано, що для двигуна з валом, що обертається, навантаження «створює» додатковий момент, пропорційний коефіцієнту демпфірування, тим самим, зменшуючи швидкість обертання валу.

Ефект Зоммерфельда–Кононенко проявляється при роботі ексцентрикового вібратора, схема якого представлена на рис. 3.3. Для даної коливальної системи при відсутності моменту навантаження на валу кутова швидкість  $\omega = \dot{\varphi}$  змінюється за один оборот валу, що обумовлено наявністю ексцентрика (збудника коливань) і піддатливістю опори валу. Нестійкість руху відбуватиметься при кутовій швидкості, що знаходиться в межах

$$\omega_0 < \omega < \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2 \frac{m_1^2}{m_2} \cdot \frac{r^2}{I_{\text{пр}}}}}, \quad (3.1)$$

де  $\omega_0$  – власна кругова частота коливань пружної системи;

$m_1$  – нерівноважена маса;

$m_2$  – пружна маса опори;

$r$  – ексцентриситет;

$I_{\text{пр}}$  – приведений момент інерції обертових частин.

Цей приклад показує, що наявність пружних зв'язків в машинному агрегаті призводить до появи коливань кутової швидкості валів і, очевидно, – до втрати енергії, що передається. У цьому може проявитися нестабільність роботи моторно-трансмісійних установок транспортно-тягових машин.

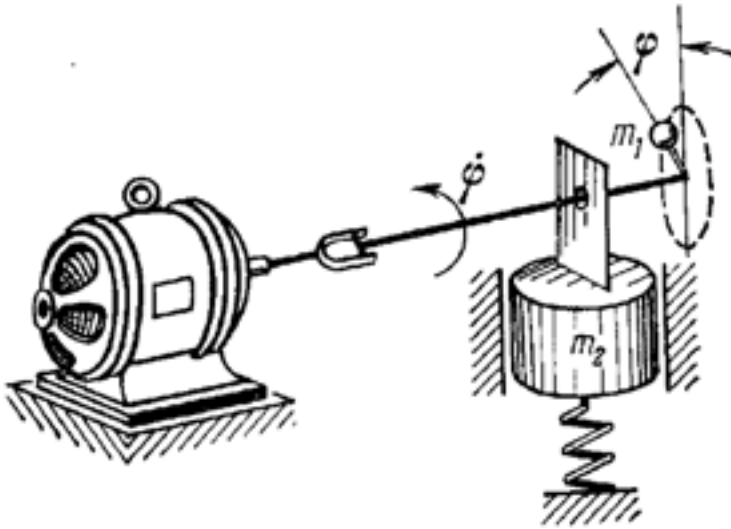


Рис. 3.3. Схема коливальної електромеханічної системи

Таким чином, можна зробити наступні висновки:

- динамічний ККД і коефіцієнт динамічності трансмісії мають загальну фізичну природу, що вимагає визначення узагальненого показника, що характеризує динамічну завантаженість трансмісії;
- необхідно з'ясувати в яких випадках потенційна енергія пружних деформацій валів трансмісії переходить в корисну роботу, а в яких – у роботу сил шкідливого опору;
- необхідно визначити критерії, що дозволяють врахувати втрати потужності і енергії двигуна на пружні ланки; в якості таких критеріїв можуть служити циклової і миттєвий пружні ККД трансмісії;
- існуючі методи розрахунку загального ККД трансмісії не відображають повною мірою структуру втрат потужності і енергії двигуна, що вимагає їх перегляду.

## РОЗДІЛ 4. ДВИГУН ВНУТРІШНЬОГО ЗГОРЯННЯ ЯК ДЖЕРЕЛО МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ У ТРАНСМІСІЇ

### 4.1. Нерівномірність крутного моменту та її залежність від числа циліндрів ДВЗ

Нерівномірність крутного моменту, що виникає в двигуні внутрішнього згоряння (ДВЗ), викликає появу нерівномірності ходу колінчастого валу та трансмісії автомобіля (трактора).

Нерівномірність ходу автотракторних двигунів залежить як від нерівномірності крутного моменту на колінчастому валу ДВЗ, так і від величини наведених до нього моментів інерції обертових мас трансмісії і маси автомобіля (трактору), що поступово рухається.

Нерівномірність ходу (нерівномірність обертання валу двигуна) поряд з нерівномірністю моменту, що крутить, призводить до появи нерівномірності потужності двигуна і до крутильних коливань валів трансмісії. Цю обставину потрібно враховувати під час проведення випробувань ДВЗ та визначення їхньої паспортної потужності. Нерівномірність крутного моменту, кутової швидкості та потужності двигуна внутрішнього згоряння через трансмісію передається до ведучих коліс, впливаючи на динамічні властивості транспортно-тягових машин.

Усталений режим характеризується рухом з постійною середньою швидкістю, а рівномірний режим руху – постійною миттєвою швидкістю. Тому при усталеному режимі роботи двигуна завжди виникає кутове прискорення колінчастого валу, що циклічно змінюється. Однією з причин виникнення коливань  $d\omega_e/dt$  є ступінь нерівномірності індикаторного крутного моменту ДВЗ.

Для оцінки ступеня рівномірності індикаторного крутного моменту двигуна зазвичай користуються коефіцієнтом нерівномірності крутного моменту

$$K_1 = \frac{M_{i \max} - M_{i \min}}{\bar{M}_i}, \quad (4.1)$$

де  $M_{i \max}$ ,  $M_{i \min}$ ,  $\bar{M}_i$  – відповідно максимальний, мінімальний та середній індикаторні крутні моменти.

Знаючи величину  $\bar{M}_i$ , нерівномірність крутного моменту, можна визначити за коефіцієнтом  $K_1$ , який називається ступенем нерівномірності крутного моменту

$$K = \frac{M_{i \max}}{\bar{M}_i}. \quad (4.2)$$

У таблиці 4.1 наведено значення ступеня нерівномірності крутного моменту для ДВЗ з різною кількістю циліндрів  $i_{ц}$ , які отримані відомими авторами.

**Таблиця 4.1. Ступінь нерівномірності крутного моменту**

Кількість циліндрів $i_{ц}$	1	2	3	4	6	6*	8	8*	2*
						$\gamma = 90^\circ$ $\delta = 120^\circ$		$\gamma = 90^\circ$ $\delta = 120^\circ$	
$K$	7,74	5,52	3,62	3,35	2,25	2,88	1,36	1,36	1,16

\*V-подібні двигуни.

Крива 1 на рис. 4.1 характеризує залежність  $K = f(i_{ц})$ , побудовану за наведеними у таблиці 4.1 даними.

На цьому ж рисунку (крива 2) наведено графік апроксимуючої залежності

$$\hat{K} = 1,04 + \frac{7,22}{i_{ц}}, \quad (4.3)$$

отриманої при апроксимації за допомогою методу найменших квадратів.

В таблиці 4.2 наведено результати оцінки похибки, що створюється при розрахунку показника  $\tilde{K}$  за запропонованою апроксимуючою залежністю (4.3).

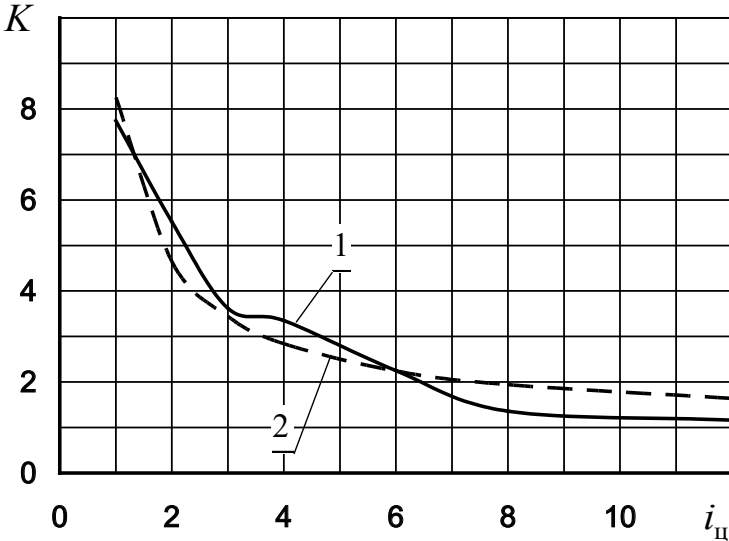


Рис. 4.1. Залежність ступеня нерівномірності крутного моменту від кількості циліндрів двигуна:

1 – крива, побудована за даними таблиці 4.1; 2 – апроксимуюча крива

Таблиця 4.2. Оцінка похибки, що створюється при апроксимації залежності (4.3)

$i_{\text{ц}}$	1	2	3	4	6	8	12
$K$	7,74	5,52	3,62	3,35	2,25	1,36	1,16
$\tilde{K}$	8,25	4,65	3,44	2,84	2,24	1,94	1,64
$\delta K$	-0,066	0,158	0,049	0,152	0,004	-0,426	-0,413

Порівнюючи вирази (4.1) і (4.2), отримаємо співвідношення між параметрами  $K$  і  $K_1$

$$K_1 = 2(K - 1). \quad (4.4)$$

#### 4.2. Моделювання зміни індикаторного крутного моменту гармонійним законом

Приймаючи  $K = \widehat{K}$ , визначимо після підстановки (4.3) у (4.4)

$$\widehat{K}_1 = 0,08 + \frac{14,44}{i_{ц}}. \quad (4.5)$$

Рівняння динаміки двигуна в усталеному режимі має вигляд

$$M_i = \overline{M}_i + \left( I_{пр}^{дв} + I_{пркв}^{тр} \right) \frac{d\omega_e}{dt}, \quad (4.6)$$

де  $I_{пркв}^{тр}$  – приведений до колінчастого валу двигуна момент інерції мас трансмісії, що обертаються, і поступально рухомої маси автомобіля (трактора).

При аналізі прийнято, що втрати на тертя в механізмах двигуна враховано у моменті опору  $M_{сопр}$  на валу двигуна.

На рис. 4.2 наведено криві зміни крутних моментів чотиритактних ДВЗ з різним числом однакових циліндрів, що отримано відомими авторами.

Аналізуючи зазначені графіки, можна запропонувати для опису гармонійний закон зміни індикаторного крутного моменту  $M_i$  за один цикл роботи ДВЗ

$$M_i = \overline{M}_i + \frac{M_{i \max} - M_{i \min}}{2} \sin(\Omega t), \quad (4.7)$$

де  $\Omega$  – кругова частота зміни гармоніки індикаторного крутного моменту двигуна,

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_1}, \quad (4.8)$$

де  $T_1$  – період коливань індикаторного крутного моменту двигуна.

Період коливань крутного моменту залежить від кількості циліндрів двигуна і для чотиритактного ДВЗ може бути визначений як

$$T_1 = \frac{T}{i_{\text{ц}}} = \frac{4\pi}{\overline{\omega}_e i_{\text{ц}}}, \quad (4.9)$$

де  $T$  – час циклу чотиритактного двигуна внутрішнього згоряння;  
 $\overline{\omega}_e$  – середнє (за цикл роботи ДВЗ) значення кутової швидкості колінчастого валу.

Вирішуючи спільно (4.8) та (4.9), отримаємо

$$\Omega = \frac{\overline{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}}. \quad (4.10)$$

Рівняння (4.7) з урахуванням (4.10) матиме вигляд

$$M_i = \overline{M}_i \left[ 1 + \frac{K_1}{2} \sin\left(\frac{\overline{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right) \right]. \quad (4.11)$$

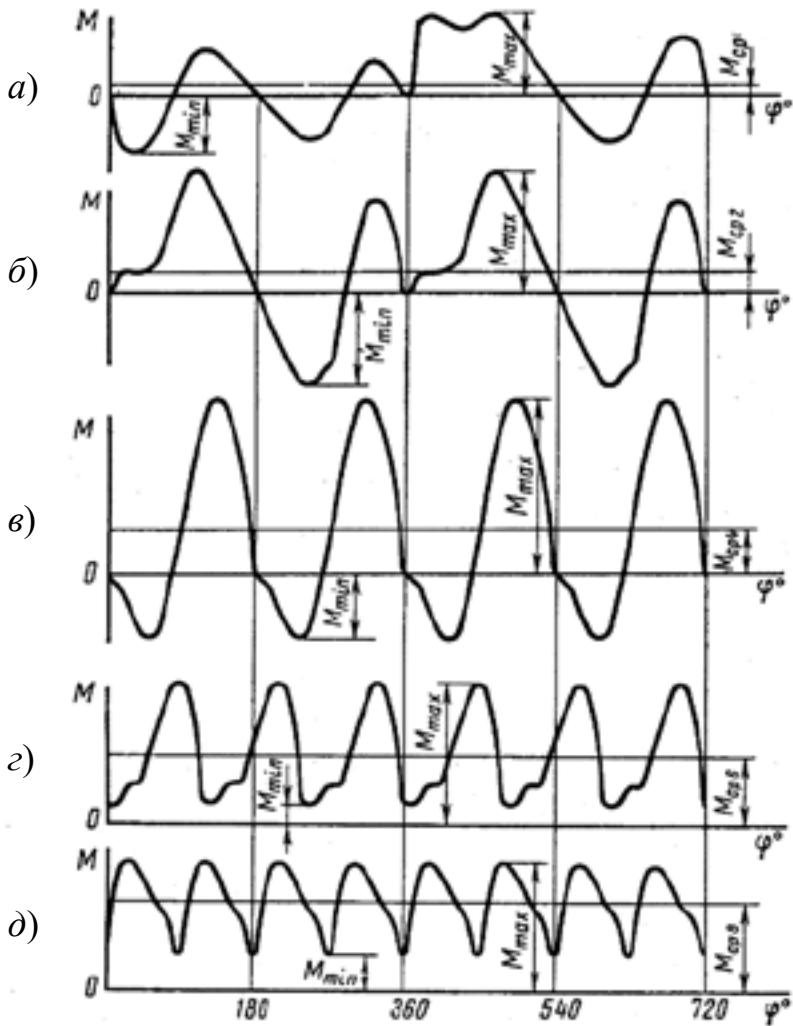


Рис. 4.2. Криві крутних моментів чотиритактних двигунів з різною кількістю однакових циліндрів: а – при  $i_{\text{ц}} = 1$ ; б – при  $i_{\text{ц}} = 2$ ; в – при  $i_{\text{ц}} = 4$ ; г – при  $i_{\text{ц}} = 6$ ; д – при  $i_{\text{ц}} = 8$

Вид кривої, що характеризує зміну індикаторного крутного моменту  $M_i$  у часі, можна подати у відносних величинах, розділивши ліву та праву частини рівняння (4.11) на  $\bar{M}_i$

$$\frac{M_i}{\bar{M}_i} = 1 + \frac{K_1}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right). \quad (4.12)$$

Приймаючи припущення, що кут повороту  $\varphi_{\text{в}}$  колінчастого валу дорівнює

$$\varphi_{\text{в}} \cong \bar{\omega}_e \cdot t, \quad (4.13)$$

а також, враховуючи співвідношення (4.5), перетворюємо (4.12) на вигляд

$$\frac{M_i}{\bar{M}_i} = 1 + \left(0,04 + \frac{7,22}{i_{\text{ц}}}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi_{\text{в}}}{2} i_{\text{ц}}\right). \quad (4.14)$$

Графіки залежності (4.14) для ДВЗ з різною кількістю однакових циліндрів наведено на рис. 4.3.

Порівнюючи графіки, наведені на рис. 4.3 з графіками, наведеними на рис. 4.2, можна констатувати, що:

- для одноциліндрового двигуна (рис. 4.2а і рис. 4.3а) спостерігається отримання великих як позитивних, так і негативних значень індикаторного крутного моменту, але є асиметрія на користь позитивних значень; зі збільшенням числа циліндрів асиметрія збільшується;

- починаючи з шестициліндрового двигуна, криві не мають негативних значень, за винятком невеликих негативних значень у кривої, що моделюється (рис. 4.3г). Це відрізняє її від реальної кривої (рис. 4.2г), оскільки моделююча крива побудована за гармонійним законом.

Таким чином, залежність (4.14) в остаточному вигляді може використовуватися для моделювання нерівномірності індикаторного крутного моменту автотракторних ДВЗ.

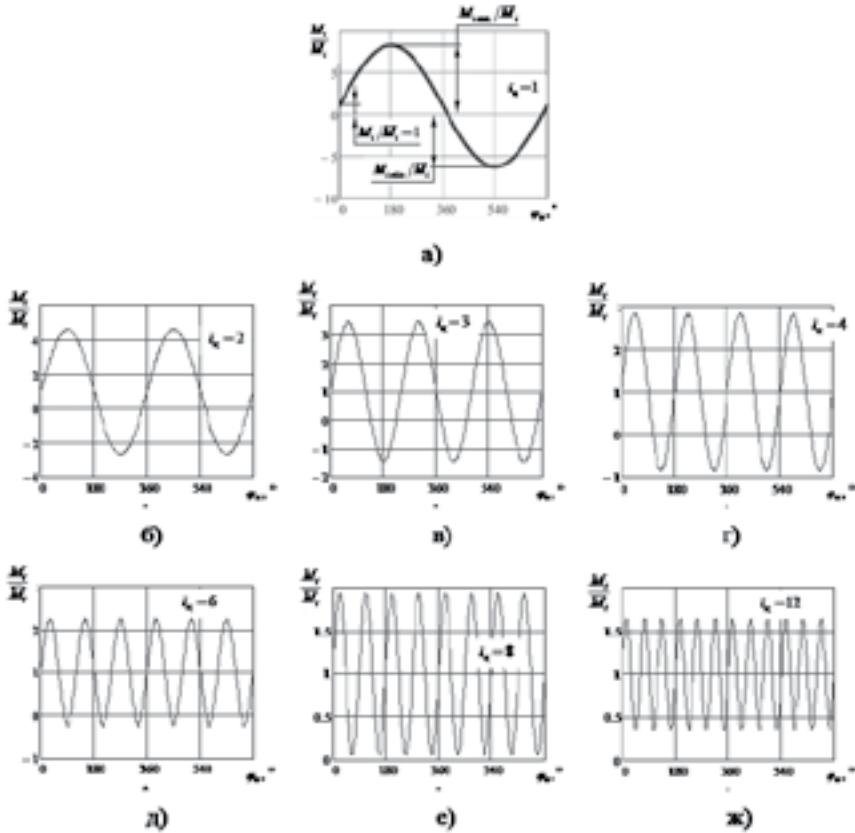


Рис. 4.3. Графіки залежності  $M_i/\bar{M}_i = f(\varphi_B)$ , побудовані відповідно до апроксимуючої залежності (4.14): а – при  $i_u = 1$ ; б – при  $i_u = 2$ ; в – при  $i_u = 3$ ; з – при  $i_u = 4$ ; д – при  $i_u = 6$ ; е – при  $i_u = 8$ ; ж – при  $i_u = 12$

### 4.3. Оцінка нерівномірності обертання валу двигуна

Приведений момент інерції трансмісії і від маси автомобіля (трактора), що поступально рухається, можна представити у вигляді

$$I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} = I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + I_{\text{пра}}^{\text{тр}}, \quad (4.15)$$

де  $I_{\text{прI}}^{\text{тр}}$  – приведений до колінчастого валу момент інерції обертових мас трансмісії, пов'язаних з колінчастим валом постійним передатним відношенням;

$I_{\text{прII}}^{\text{тр}}$  – приведений до колінчастого валу момент інерції обертових мас трансмісії, пов'язаних з колінчастим валом змінним передатним відношенням;

$I_{\text{пра}}^{\text{тр}}$  – приведений до колінчастого валу момент інерції маси автомобіля (трактора), що поступально рухається,

$$I_{\text{пра}}^{\text{тр}} = \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2}, \quad (4.16)$$

де  $m$  – загальна маса автомобіля чи трактора;

$r_{\text{к}}$  – кінематичний радіус коліс.

З виразу (4.6), підставляючи в нього співвідношення (4.15), (4.19) і (4.20), визначимо кутове прискорення колінчастого валу

$$\frac{d\omega_e}{dt} = 0,5K_1 \frac{\sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right)}{I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2}} \bar{M}_i. \quad (4.17)$$

Підставляючи (4.5) у (4.17), отримаємо

$$\frac{d\omega_e}{dt} = \left( 0,04 + \frac{7,22}{i_{\text{ц}}} \right) \frac{\sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right)}{I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2}} \bar{M}_i. \quad (4.18)$$

Провівши інтегрування рівняння (4.17), визначимо кутову швидкість колінчастого валу

$$\omega_e = C - \frac{K_1 \frac{\bar{M}_i}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}}{I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2}} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right). \quad (4.19)$$

Постійна інтегрування  $C$  знаходиться з наступних граничних умов: за  $\omega_e \cdot i_{\text{ц}} \cdot t = \pi$  величина  $\omega_e = \bar{\omega}_e$ .

В остаточному вигляді рівняння кутової швидкості колінчастого валу ДВЗ набуде вигляду

$$\omega_e = \bar{\omega}_e - \frac{K_1 \cdot \bar{M}_i}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right)} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right). \quad (4.20)$$

У рівнянні (4.20) визначимо амплітуду коливань кутової швидкості колінчастого валу

$$A_\omega = \frac{K_1 \cdot \bar{M}_i}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right)}. \quad (4.21)$$

З урахуванням (4.13) залежність (4.20) можна подати у наступному вигляді:

$$\omega_e = \bar{\omega}_e - A_\omega \cos\left(\frac{\varphi_{\text{в}}}{2} i_{\text{ц}}\right). \quad (4.22)$$

Розділивши ліву та праву частини виразу (4.22) на  $\bar{\omega}_e$ , отримаємо

$$\frac{\omega_e}{\bar{\omega}_e} = 1 - \frac{A_\omega}{\bar{\omega}_e} \cos\left(\frac{\varphi_{\text{в}}}{2} i_{\text{ц}}\right). \quad (4.23)$$

У рівнянні (4.23)

$$\frac{A_\omega}{\bar{\omega}_e} = \frac{\delta_\omega}{2}, \quad (4.24)$$

де  $\delta_\omega$  – ступінь нерівномірності обертання (ходу) колінчастого валу двигуна

$$\delta_\omega = \frac{\omega_{e\text{max}} - \omega_{e\text{min}}}{\bar{\omega}_e}, \quad (4.25)$$

де  $\omega_{e\text{max}}$ ,  $\omega_{e\text{min}}$  – максимальна та мінімальна кутові швидкості колінчастого валу.

Отже

$$\frac{\omega_e}{\bar{\omega}_e} = 1 - \frac{\delta_\omega}{2} \cos\left(\frac{\varphi_B}{2} i_{\text{ц}}\right). \quad (4.26)$$

Таким чином, ступінь нерівномірності обертання колінчастого валу двигуна може бути визначена з урахуванням співвідношення (4.21)

$$\delta_\omega = \frac{2K_1 \cdot \bar{M}_i}{\bar{\omega}_e^2 \cdot i_{\text{ц}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right)} \quad (4.27)$$

або з урахуванням (4.5)

$$\delta_\omega = \frac{\bar{M}_i}{\bar{\omega}_e^2 \cdot i_{\text{ц}}} \cdot \frac{0,16 + \frac{28,88}{i_{\text{ц}}}}{I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2}}. \quad (4.28)$$

Аналіз виразу (4.28) показує, що зі зростанням  $\bar{M}_i$  та зменшенням  $\bar{\omega}_e$  відбувається збільшення ступеня нерівномірності ходу колінчастого валу двигуна  $\delta_\omega$ . Збільшення  $u_0$  та  $u_{\text{к}}$  також веде до збільшення  $\delta_\omega$ . Зі збільшенням кількості циліндрів  $i_{\text{ц}}$  величина  $\delta_\omega$  зменшується. Збільшення  $I_{\text{прI}}^{\text{тр}}$ ,  $I_{\text{пр}}^{\text{дв}}$ ,  $m$  і  $r_{\text{к}}$  також призводить до зменшення  $\delta_\omega$ .

#### 4.4. Моделювання зміни індикаторної потужності ДВЗ

Індикаторна потужність двигуна може бути визначена як

$$N_i = M_i \cdot \omega_e. \quad (4.29)$$

Підставляючи вирази для  $M_i$  (див. (4.11)) і  $\omega_e$  (див. (4.20)) у залежність (4.29), після перетворень отримаємо

$$N_i = \bar{M}_i \cdot \bar{\omega}_e \left[ 1 + \frac{K_1}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right) - \frac{K_1 \cdot \bar{M}_i}{\bar{\omega}_e^2 \cdot i_{\text{ц}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{ДВ}} + I_{\text{прI}}^{\text{ТР}} + I_{\text{прII}}^{\text{ТР}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right)} \cdot \left( \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right) + \frac{K_1}{4} \sin(\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}} \cdot t) \right) \right]. \quad (4.30)$$

Середня за цикл індикаторна потужність двигуна дорівнює

$$\bar{N}_i = \bar{M}_i \cdot \bar{\omega}_e. \quad (4.31)$$

Таким чином, вираз (4.30) з урахуванням (4.31), (4.28) та (4.13) набуде вигляду

$$N_i = \bar{N}_i \left[ 1 + \frac{K_1}{2} \sin\left(\frac{\varphi_B}{2} i_{\text{ц}}\right) - \frac{\delta_\omega}{2} \left( \cos\left(\frac{\varphi_B}{2} i_{\text{ц}}\right) + \frac{K_1}{4} \sin(\varphi_B \cdot i_{\text{ц}}) \right) \right]. \quad (4.32)$$

Після підстановки (4.5) у (4.32) і перетворення, остаточно отримаємо

$$\frac{N_i}{\bar{N}_i} = 1 + \left( 0,04 + \frac{7,22}{i_{\text{ц}}} \right) \sin\left(\frac{\varphi_B}{2} i_{\text{ц}}\right) - \frac{\delta_\omega}{2} \left( \cos\left(\frac{\varphi_B}{2} i_{\text{ц}}\right) + \left( 0,02 + \frac{3,61}{i_{\text{ц}}} \right) \sin(\varphi_B \cdot i_{\text{ц}}) \right). \quad (4.33)$$

На рис. 4.4 наведено графіки залежності  $N_i/\bar{N}_i = f(\varphi_B)$  при різних значеннях ступеня нерівномірності обертання колінчастого валу двигуна  $\delta_\omega$ , що знаходиться в межах  $[0; 2]$ . Зазначені межі є межами можливих значень ступеня нерівномірності обертання колінчастого валу двигуна. При  $\delta_\omega = 0$ :  $\omega_{\text{emax}} = \omega_{\text{emin}} = \bar{\omega}_e$ , тобто кутова швидкість постійна; при  $\delta_\omega = 2$ :  $\omega_{\text{emin}} = 0$ ,  $\omega_{\text{emax}} = 2\bar{\omega}_e$ .

Аналіз наведених на рис. 4.4 графіків показує, що ступінь нерівномірності обертання колінчастого валу ДВЗ істотно впливає на характер зміни залежності  $N_i/\bar{N}_i = f(\varphi_B)$ . За  $\delta_\omega = 0$  вираз (4.33) набуде вигляду

$$\left( \frac{N_i}{\bar{N}_i} \right)_0 = 1 + \left( 0,04 + \frac{7,22}{i_{\text{ц}}} \right) \sin\left(\frac{\varphi_B}{2} i_{\text{ц}}\right). \quad (4.34)$$

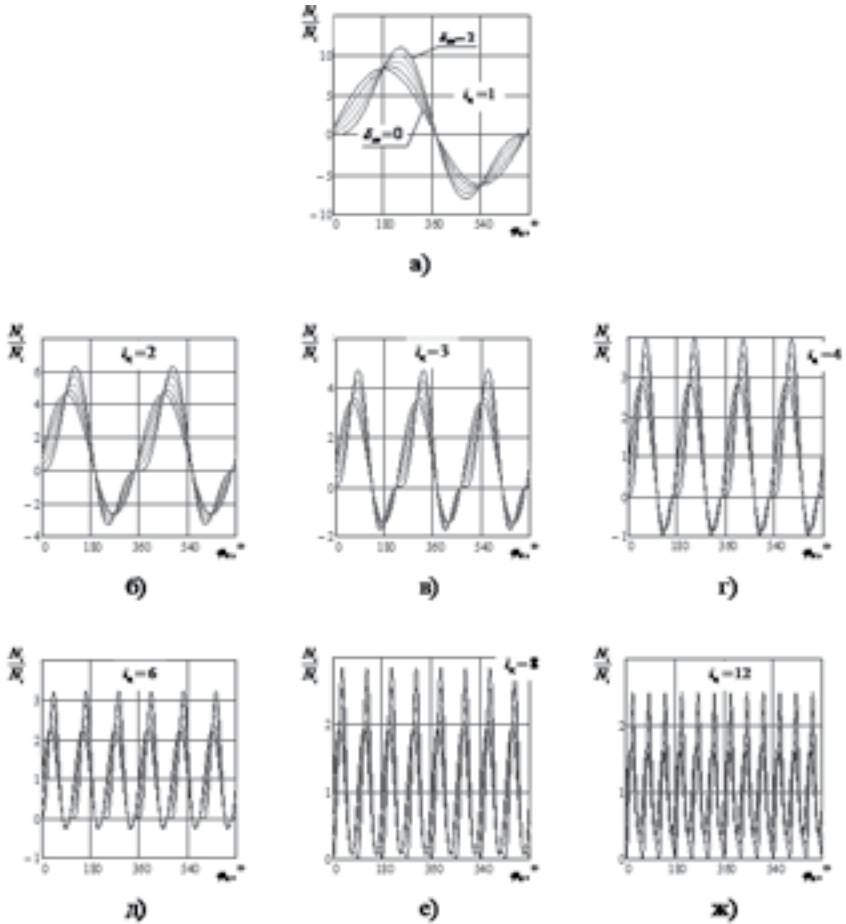


Рис. 4.4. Графіки залежності  $N_i / \bar{N}_i = f(\varphi_{\text{в}})$ , побудовані при різних значеннях ступеня нерівномірності обертання колінчастого валу  $\delta_{\omega}$  та кількості циліндрів  $i_{\text{ц}}$  двигуна: *a* – при  $i_{\text{ц}} = 1$ ; *б* – при  $i_{\text{ц}} = 2$ ; *в* – при  $i_{\text{ц}} = 3$ ; *г* – при  $i_{\text{ц}} = 4$ ; *д* – при  $i_{\text{ц}} = 6$ ; *е* – при  $i_{\text{ц}} = 8$ ; *ж* – при  $i_{\text{ц}} = 12$

У цьому випадку графік функції  $N_i/\bar{N}_i = f(\varphi_B)$  є синусоїдою, зміщеною в позитивному напрямку на одиницю і має амплітуду рівну  $K_1/2 = 0,04 + 7,22/i_{\text{ц}}$ .

Зі збільшенням  $\delta_{\omega}$  збільшується амплітуда коливань величини  $N_i/\bar{N}_i$  при тій самій кількості циліндрів  $i_{\text{ц}}$ .

Це дозволило визначити зв'язок між кількістю циліндрів, нерівномірністю крутного моменту та нерівномірністю обертання колінчастого валу ДВЗ. Зі зростанням середнього індикаторного крутного моменту  $\bar{M}_i$  та зменшенням середньої кутової швидкості обертання колінчастого валу  $\bar{\omega}_e$  відбувається збільшення значення коефіцієнта нерівномірності обертання  $\delta_{\omega}$ . Зі збільшенням кількості циліндрів  $i_{\text{ц}}$  величина  $\delta_{\omega}$  зменшується. Збільшення передавального числа трансмісії (параметрів  $u_0$  та  $u_{\text{к}}$ ) призводить до збільшення ступеня нерівномірності ходу колінчастого валу двигуна.

Показник ступеня нерівномірності обертання колінчастого валу ДВЗ  $\delta_{\omega}$  істотно впливає на характер зміни залежності  $N_i/\bar{N}_i = f(\varphi_B)$ . Зі збільшенням  $\delta_{\omega}$  збільшується амплітуда коливань величини  $N_i/\bar{N}_i$  при тій самій кількості циліндрів  $i_{\text{ц}}$ .

#### 4.5. Моделювання зміни ефективних потужностей та крутного моменту ДВЗ

Ефективна потужність може бути визначена таким чином

$$N_e = \omega_e \left( M_i \cdot \eta_{\text{мдв}} - I_{\text{пр}}^{\text{дв}} \frac{d\omega_e}{dt} \right), \quad (4.35)$$

де  $\eta_{\text{мдв}}$  – миттєвий механічний ККД двигуна;

$$\eta_{\text{мдв}} = \eta_{\text{мдв}}^{\text{ст}} + \eta_{\text{мдв}}^{\text{кин}} - 1; \quad (4.36)$$

$\eta_{\text{мдв}}^{\text{ст}}$ ,  $\eta_{\text{мдв}}^{\text{кин}}$  – миттєві статичний та кінематичний ККД двигуна.

Підставивши в рівняння (4.35) вирази (4.11), (4.17) та (4.20), після перетворень отримаємо

$$\begin{aligned}
 N_e = \bar{M}_i \cdot \bar{\omega}_e \cdot \eta_{\text{мдв}} & \left[ 1 - \frac{K_1 \cdot \bar{M}_i}{\bar{\omega}_e^2 \cdot i_{\text{ц}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right)} \right] \cdot \\
 & \cdot \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right) \times \left[ 1 + \frac{K_1}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right) \left( 1 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{\eta_{\text{мдв}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right)} \right) \right] \cdot \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Враховуючи співвідношення (4.27) і (4.31), перетворюємо рівняння (4.37) на вигляд

$$N_e = \bar{N}_i \cdot \eta_{\text{мдв}} \left[ 1 - \delta_{\omega} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right) \right] \times \left[ 1 + \right.$$

$$+ \frac{K_1}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{ц} \cdot t\right) \left[ 1 - \frac{I_{пр}^{дв}}{\eta_{мдв} \left( I_{пр}^{дв} + I_{прI}^{тр} + I_{прII}^{тр} + \frac{mr_{к}^2}{u_0^2 u_{к}^2} \right)} \right]. \quad (4.38)$$

Очевидно, що середня за цикл роботи ДВЗ ефективна потужність двигуна дорівнюватиме

$$\bar{N}_e = \bar{N}_i \cdot \eta_{мдв}. \quad (4.39)$$

При виведенні залежностей (4.37) і (4.39) приймалося, що миттєвий механічний ККД двигуна протягом циклу роботи ДВЗ є постійною величиною ( $\eta_{мдв} = const$ )

Таким чином,

$$\frac{N_e}{\bar{N}_i \cdot \eta_{мдв}} = \frac{N_e}{\bar{N}_e} = \left[ 1 - \delta_{\omega} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{ц} \cdot t\right) \right] \times \left[ 1 + \frac{K_1}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{ц} \cdot t\right) \left[ 1 - \frac{I_{пр}^{дв}}{\eta_{мдв} \left( I_{пр}^{дв} + I_{прI}^{тр} + I_{прII}^{тр} + \frac{mr_{к}^2}{u_0^2 u_{к}^2} \right)} \right] \right]. \quad (4.40)$$

У рівнянні (4.40) показано добуток показників впливу на величину ефективної потужності двигуна коефіцієнта нерівномірності обер-

тання колінчастого валу (вираз у першій квадратній дужці) та коефіцієнта нерівномірності індикаторного крутного моменту двигуна та трансмісії (вираз у другій квадратній дужці). Таким чином, показник  $N_e/\bar{N}_e$  є параметром динамічного навантаження двигуна внутрішнього згоряння. Величина

$$\begin{aligned}
 & 1 - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{ДВ}}}{\eta_{\text{МДВ}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{ДВ}} + I_{\text{прI}}^{\text{ТР}} + I_{\text{прII}}^{\text{ТР}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right)} = \\
 & = \frac{I_{\text{прI}}^{\text{ТР}} + I_{\text{прII}}^{\text{ТР}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} - I_{\text{пр}}^{\text{ДВ}} \left( \frac{1}{\eta_{\text{МДВ}}} - 1 \right)}{I_{\text{пр}}^{\text{ДВ}} + I_{\text{прI}}^{\text{ТР}} + I_{\text{прII}}^{\text{ТР}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2}} \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

характеризує частку приведених до колінчастого валу ДВЗ моментів інерції обертових мас трансмісії та поступально рухомих мас автомобіля (трактора) у загальній величині приведеного до валу двигуна

моменту інерції, а величина  $I_{\text{пр}}^{\text{ДВ}} / \left[ \eta_{\text{МДВ}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{ДВ}} + I_{\text{прI}}^{\text{ТР}} + I_{\text{прII}}^{\text{ТР}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \right]$  харак-

теризує частку наведеного моменту інерції обертових мас двигуна в загальній величині приведеного до валу двигуна моменту інерції.

Оскільки  $N_e = M_e \cdot \omega_e$ , то ефективний крутний момент двигуна може бути визначений з рівняння (4.37) з урахуванням (4.20)

$$M_e = \frac{N_e}{\omega_e} = \bar{M}_i \cdot \eta_{\text{мдв}} \left[ 1 + \frac{K_1}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right) \right] \left( 1 - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{\eta_{\text{мдв}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right)} \right) \quad (4.42)$$

Амплітуда коливань ефективного крутного моменту

$$A_{Me} = \frac{\bar{M}_i \cdot K_1 \cdot \eta_{\text{мдв}}}{2} \left( 1 - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{\eta_{\text{мдв}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right)} \right) =$$

$$= \frac{\bar{M}_i \cdot K_1}{2} \left( \eta_{\text{мдв}} - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2}} \right) \quad (4.43)$$

У випадку, коли

$$\eta_{\text{мдв}} - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2}} = 0, \quad (4.44)$$

$A_{M_e} = 0$ , ми отримуємо ідеальний випадок. Після перетворень отримаємо вираз, що ілюструє залежність миттєвого механічного ККД двигуна від приведених моментів інерції мас двигуна, що обертаються, і трансмісії та поступально рухомих мас автомобіля (трактора) при нульовому значенні амплітуди коливань ефективного крутного моменту

$$\eta_{\text{мдв}} = \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2}}. \quad (4.45)$$

Перетворивши (4.45), отримаємо залежність, що дозволяє здійснювати вибір моменту інерції маховика двигуна (з урахуванням загальної маси транспортно-тягової машини та передавального відношення трансмісії) з метою отримання нульового значення амплітуди коливань ефективного крутного моменту

$$I_{\text{пр}}^{\text{дв}} = \frac{\eta_{\text{мдв}} I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + \eta_{\text{мдв}} I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \eta_{\text{мдв}} \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2}}{(1 - \eta_{\text{мдв}})}. \quad (4.46)$$

Амплітуду коливань індикаторного крутного моменту визначимо з рівняння (4.11)

$$A_{Mi} = \frac{\bar{M}_i K_1}{2}. \quad (4.47)$$

Очевидно, що амплітуда коливань ефективного крутного моменту менше ніж амплітуда коливань індикаторного крутного моменту. Формулу для визначення амплітуди коливань ефективного крутного моменту з урахуванням (4.47) можна визначити у вигляді

$$A_{Me} = A_{Mi} \left( \eta_{\text{мдв}} - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2}} \right). \quad (4.48)$$

При  $I_{\text{пр}}^{\text{дв}} = 0$  величина амплітуди коливань ефективного крутного моменту дорівнюватиме

$$A_{Me} = A_{Mi} \cdot \eta_{\text{мдв}}. \quad (4.49)$$

Рівняння (4.42) для визначення ефективного крутного моменту можна записати з урахуванням (4.43) в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} M_e &= \bar{M}_i \cdot \eta_{\text{мдв}} \left[ 1 + \frac{A_{Me}}{\bar{M}_i \cdot \eta_{\text{мдв}}} \sin \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t \right) \right] = \\ &= \bar{M}_e \left[ 1 + \frac{A_{Me}}{\bar{M}_e} \sin \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Таким чином, за допомогою виразу (4.50) можна моделювати зміну ефективного крутного моменту ДВЗ.

## РОЗДІЛ 5. ВПЛИВ ПРУЖНИХ ЛАНОК ТРАНСМІСІЇ НА ВИХІДНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИГУНА ВНУТРІШНЬОГО ЗГОРЯННЯ

### 5.1. Вплив пружних ланок трансмісії на нерівномірність обертання колінчастого валу

Наявність пружних ланок у трансмісії транспортно-тягових машин впливає на нерівномірність обертання валу двигуна. За наявності пружних ланок рівняння (4.6) набуде наступного вигляду:

$$M_i = \bar{M}_i + C_{\text{пр}}^{\text{угл}} \cdot \alpha_e + \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \right) \frac{d\omega_e}{dt}, \quad (5.1)$$

де  $C_{\text{пр}}^{\text{угл}}$  – приведена до колінчастого валу жорсткість трансмісії на крутіння;

$\alpha_e$  – кут закручування вхідного валу трансмісії,

$$\alpha_e = \varphi_e - \bar{\varphi}_e, \quad (5.2)$$

$\varphi_e$  – кут повороту валу двигуна;

$\bar{\varphi}_e$  – середній кут повороту валу двигуна за один цикл зміни індикаторного крутного моменту,

$$\bar{\varphi}_e = \bar{\omega}_e \cdot t. \quad (5.3)$$

Рівняння (5.1) можна перетворити на вигляд

$$\ddot{\alpha}_e + \frac{C_{\text{пр}}^{\text{угл}}}{I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}}} \cdot \alpha_e = \frac{M_i - \bar{M}_i}{I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}}} \quad (5.4)$$

або з урахуванням (4.11)

$$\ddot{\alpha}_e + k^2 \alpha_e = \frac{0,5 \bar{M}_i \cdot K_1}{I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}}} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right), \quad (5.5)$$

де  $k$  – кругова частота власних (вільних) коливань вихідного кінця валу двигуна з урахуванням приведених до колінчастого валу моментів інерції обертових мас двигуна та трансмісії та наведеної жорсткості трансмісії на кручення,

$$k = \sqrt{\frac{C_{\text{пр}}^{\text{угл}}}{I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}}}}. \quad (5.6)$$

Очевидно, що

$$\dot{\alpha}_e = \dot{\varphi}_e - \frac{d\bar{\varphi}_e}{dt} = \omega_e - \bar{\omega}_e, \quad (5.7)$$

$$\ddot{\alpha}_e = \dot{\omega}_e = \ddot{\varphi}_e. \quad (5.8)$$

Рішення неоднорідного диференціального рівняння (5.5) складається із суми загального та часткового рішень. Загальне рішення відповідає руху під час здійснення вільних коливань, а часткового – вимушених. У русі, з часом, амплітуда і частота коливань об'єкта стають відповідними параметрами вимушених коливань. У цьому випадку

загальне рішення рівняння (5.5) стає рівним нулю, а часткове рішення можна знайти з використанням методу невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$\alpha_e = A \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right). \quad (5.9)$$

Відповідно,

$$\dot{\alpha}_e = A \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right), \quad (5.10)$$

$$\ddot{\alpha}_e = -A \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\text{ц}}^2 \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right). \quad (5.11)$$

Після підстановки виразів (5.9) та (5.11) до рівняння (5.5) визначимо

$$A = \frac{0,5 \bar{M}_i \cdot K_1}{\left(I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}}\right) \left(k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\text{ц}}^2\right)}. \quad (5.12)$$

Таким чином, (5.9) з урахуванням (5.12) набуде вигляду

$$\dot{\alpha}_e = \frac{0,25 \bar{M}_i \cdot K_1 \cdot \bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right)}{\left(I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}}\right) \left(k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\text{ц}}^2\right)} =$$

$$= \frac{\bar{M}_i \cdot K_1 \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right)}{\left(I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}}\right) \left( \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 - 1 \right) \bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}. \quad (5.13)$$

Кутова швидкість закручування вхідного валу трансмісії

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_e &= \frac{0,25 \bar{M}_i \cdot K_1 \cdot \bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right)}{\left(I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}}\right) \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\text{ц}}^2 \right)} = \\ &= \frac{\bar{M}_i \cdot K_1 \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right)}{\left(I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}}\right) \left( \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 - 1 \right) \bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Підставивши (5.14) у (5.7), і з урахуванням рівнянь (5.15) та (5.16), після перетворень визначимо

$$\omega_e = \bar{\omega}_e -$$

$$- \frac{\bar{M}_i \cdot K_1}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right). \quad (5.15)$$

Максимальне та мінімальне значення кутової швидкості колінчастого валу двигуна при  $\frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{ц}} < 1$  (зарезонансна зона) визначаються наступним чином:

$$\omega_{e \max} = \bar{\omega}_e + \frac{\bar{M}_i \cdot K_1}{\bar{\omega}_e \cdot i_{ц} \left( I_{пр}^{дв} + I_{прI}^{тр} + I_{прII}^{тр} + \frac{mr_{к}^2}{u_0^2 u_{к}^2} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{ц}} \right)^2 \right)}, \quad (5.16)$$

$$\omega_{e \min} = \bar{\omega}_e - \frac{\bar{M}_i \cdot K_1}{\bar{\omega}_e \cdot i_{ц} \left( I_{пр}^{дв} + I_{прI}^{тр} + I_{прII}^{тр} + \frac{mr_{к}^2}{u_0^2 u_{к}^2} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{ц}} \right)^2 \right)}. \quad (5.17)$$

Якщо ж  $\frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{ц}} > 1$  (дорезонансна зона), то складова  $\left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{ц}} \right)^2 \right)$  матиме негативне значення і, отже, вираз (5.16) слід використовувати для визначення  $\omega_{e \min}$ , а вираз (5.17) – для визначення  $\omega_{e \max}$ .

Ступінь нерівномірності обертання колінчастого валу визначимо після підстановки залежностей (5.16) і (5.17) в (4.29), виключивши при цьому можливість отримання негативних значень

$$\delta'_\omega = \frac{2\bar{M}_i \cdot K_1}{\bar{\omega}_e^2 \cdot i_{\text{ц}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left| 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right|}. \quad (5.18)$$

Порівнюючи між собою вирази (4.20) та (5.15), а також (4.27) та (5.18), можна зробити висновок про те, що наявність пружних елементів трансмісії впливає на амплітуду коливань кутової швидкості та ступінь нерівномірності обертання колінчастого валу двигуна.

Це враховується співмножником  $\left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)$  у знаменниках рівнянь (5.15) та (5.18). У міру наближення кругової частоти коливань індикаторного крутного моменту двигуна  $\Omega = 0,5\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}$  до величини  $k$  відбувається збільшення амплітуди коливань кутової швидкості колінчастого валу  $A_\omega$  та ступеня нерівномірності його обертання  $\delta'_\omega$ .

Вираз (5.18) з урахуванням (4.27) можна подати у вигляді

$$\delta'_\omega = \frac{\delta_\omega}{\left| 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right|}. \quad (5.19)$$

Вплив  $\delta_\omega$  в даному випадку визначається із співвідношення (4.27). На рис. 5.1 наведено ілюстрацію залежності  $\delta'_\omega \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)$  при різних значеннях  $\delta_\omega$ .

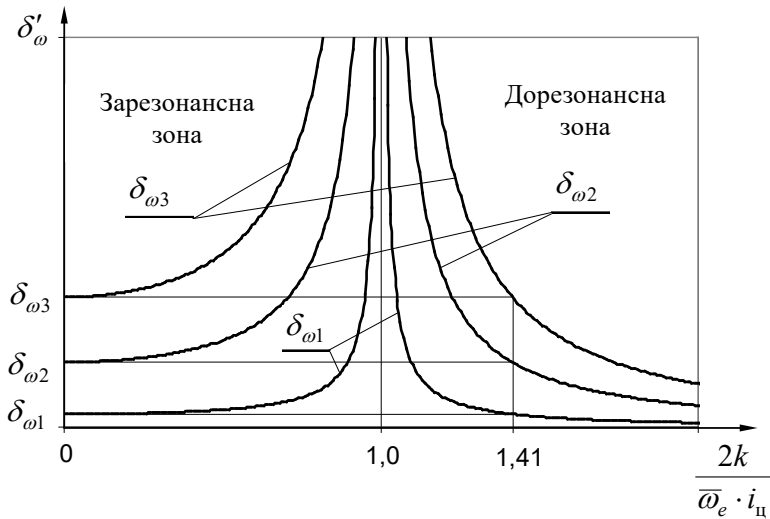


Рис. 5.1. Залежність  $\delta'_\omega \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{ц}} \right)$  при різних значеннях  $\delta_\omega$  ( $\delta_{\omega 1} < \delta_{\omega 2} < \delta_{\omega 3}$ )

Таким чином, величина ступеня нерівномірності обертання колінчастого валу двигуна  $\delta'_\omega$  (що відповідає абсолютно жорсткій трансмісії) при значенні показника  $\frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{ц}} = 0$  також буде досягнуто при

$\frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{ц}} > 1,414$ , а у випадку  $\frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{ц}} > 1,414$  величина  $\delta'_\omega$  буде менше, ніж

при  $\frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{ц}} = 0$ .

## 5.2. Визначення індикаторної потужності двигуна з урахуванням впливу пружних ланок

Підставляючи вирази для  $M_i$  (4.11) і  $\omega_e$  (5.15) у залежність (4.29), після перетворень отримаємо

$$N_i = \bar{N}_i \left[ 1 + \frac{K_1}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right) - \frac{\bar{M}_i \cdot K_1}{\bar{\omega}_e^2 \cdot i_{\text{ц}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} \times \right. \\ \left. \times \left( \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right) + \frac{K_1}{4} \sin(\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}} \cdot t) \right) \right]. \quad (5.20)$$

Аналіз виразу (5.20) показує, що наближення відношення  $\frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}$

до одиниці, тобто прагнення кругової частоти власних коливань вихідного кінця валу двигуна до частоти збурюючих коливань

$\left( k \rightarrow \frac{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}{2} \right)$ , призводить до зменшення індикаторної потужності двигуна  $N_i$ .

### 5.3. Визначення ефективних потужності і крутного моменту ДВЗ з урахуванням впливу пружних ланок у трансмісії

Використовуючи залежності (4.11), (4.35), (5.1), (5.6), (5.13) та (5.15), визначимо ефективну потужність двигуна

$$\begin{aligned}
 N_e = & \bar{N}_i \cdot \eta_{\text{мдв}} \times \\
 & \times \left[ 1 - \frac{\bar{M}_i \cdot K_1 \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right)}{\bar{\omega}_e^2 \cdot i_{\text{ц}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} \right] \times \\
 & \times \left[ 1 + \frac{K_1}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right) \right] \left[ 1 - \right. \\
 & \left. - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{\eta_{\text{мдв}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} \right]. \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

Ефективний крутний момент двигуна

$$M_e = \frac{N_e}{\omega_e} = \bar{M}_i \cdot \eta_{\text{мдв}} \left[ 1 + \frac{K_1}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{\eta_{\text{мдв}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} \right) \right]. \quad (5.22)$$

Аналіз виразів (5.21) та (5.22) показує, що в міру наближення кругової частоти коливань  $\Omega = 0,5\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}$  індикаторного крутного моменту до кругової частоти власних коливань  $k$  відбувається зниження ефективних потужності та крутного моменту двигуна.

## **РОЗДІЛ 6. УДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДІВ ОЦІНКИ ВІБРОСТІЙКОСТІ МОТОРНО-ТРАНСМІСІЙНИХ УСТАНОВОК АВТОМОБІЛІВ І ТРАКТОРІВ**

### **6.1. Уточнення апроксимуючої залежності коефіцієнту нерівномірності крутного моменту від кількості циліндрів ДВЗ**

Коливальні процеси в моторно-трансмісійних установках автомобілів і тракторів обумовлені нерівномірністю крутного моменту двигунів внутрішнього згоряння (ДВЗ). Втрати енергії в пружно-інерційно-дисипативній системі, до якої відноситься система «двигун–трансмсія–ведучі колеса–опорна поверхня–поступальна маса машини», визначається зазначеними коливальними процесами.

Дослідженню динаміки машинних агрегатів присвячені багато відомих праць. У відомих роботах досліджена динаміка машинних агрегатів з електричними двигунами і двигунами внутрішнього згоряння. Представлення трансмісії у вигляді сукупності інерційних, пружних і дисипативних ланок виконано в роботах М. С. Комарова. Запропоновано показники оцінки ефективності передачі та перетворення енергії трансмісією і двигуном. Динамічні моделі машин з пружними ланками, що деформуються запропоновані в роботі С. Н. Кожевнікова. Дослідженню динаміки машинних агрегатів при коливаннях крутного моменту ДВЗ також присвячено багато робіт. Аналізуючи результати відомих досліджень, присвячених динаміці машинних агрегатів, можна зробити висновок про те, що параметри коливань крутного моменту ДВЗ впливають на величину непродуктивних втрат енергії і ККД трансмісій. Відомі патентні пропозиції дозволяють реалізувати технічні можливості, що виключають непродуктивні втрати енергії в трансмісії і підвищити надійність моторно-трансмісійної установки.

У дослідженні [2] отримані криві, які описують зміну індикаторного крутного моменту ДВЗ в часі при різній кількості циліндрів.

Це дозволило автору роботи апроксимувати їх гармонійним законом

$$M_i = \bar{M}_i \left[ 1 + \frac{K_1}{2} \sin \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t \right) \right], \quad (6.1)$$

де  $\bar{M}_i$  – середнє за цикл коливань значення індикаторного крутного моменту ДВЗ;

$\bar{\omega}_e$  – середнє за цикл коливань значення кутової швидкості колінчастого валу;

$i_{\text{ц}}$  – число циліндрів ДВЗ;

$t$  – час;

$K_1$  – коефіцієнт нерівномірності крутного моменту [2],

$$K_1 = \frac{M_{i \max} - M_{i \min}}{\bar{M}_i} = K - \frac{M_{i \min}}{\bar{M}_i}; \quad (6.2)$$

$M_{i \max}$ ;  $M_{i \min}$  – максимальне і мінімальне значення індикаторного крутного моменту за цикл коливань;

$K$  – ступінь нерівномірності індикаторного крутного моменту ДВЗ [2],

$$K = \frac{M_{i \max}}{\bar{M}_i}. \quad (6.3)$$

Автор роботи [2], врахувавши співвідношення

$$\bar{M}_i = \frac{M_{i \max} + M_{i \min}}{2}, \quad (6.4)$$

отримав з (6.2) вираз

$$K_1 = 2(K - 1). \quad (6.5)$$

У таблиці 6.1 наведені значення ступеня нерівномірності індикаторного крутного моменту двигунів внутрішнього згоряння з різним числом циліндрів [2]. На рис. 6.1 наведено графік залежності  $K(i_{\text{ц}})$ , побудованої в роботі [2] за даними таблиці 6.1. В роботі [2] запропоновано також апроксимуюча гіперболічна залежність  $\hat{K}(i_{\text{ц}})$ , що має наступний вигляд:

$$\hat{K} = 1,04 + 7,22/i_{\text{ц}}. \quad (6.6)$$

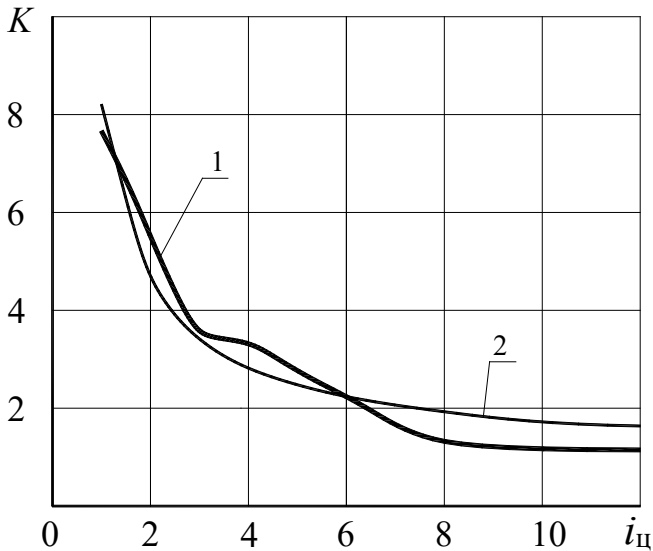


Рис. 6.1. Залежність ступеня нерівномірності крутного моменту від числа циліндрів двигуна: 1 – крива, побудована за даними джерела [2]; 2 – апроксимуюча крива [2]

У таблиці 6.1 наведені також значення відносної похибки апроксимації.

**Таблиця 6.1. Залежність ступеня нерівномірності індикаторного крутного моменту від числа циліндрів ДВЗ [2]**

$i_{ц}$	1	2	3	4	6	8	12
$K$	7,74	5,52	3,62	3,35	2,25	1,36	1,16
$\hat{K}$	8,25	4,65	3,44	2,84	2,24	1,94	1,64
$\delta K$	-0,066	0,158	0,049	0,152	0,004	-0,426	-0,413

Аналіз похибок апроксимації кривої  $K(i_{ц})$  показує, що її максимальне значення може досягати 41,3 % (при  $i_{ц} = 12$ ).

У дослідженні [2] визначено, що причиною виникнення енергетичних втрат в трансмісії при коливаннях крутного моменту є наявність відбитих хвиль пружних коливань валів. Це дозволило автору роботи [2] визначити коефіцієнт корисної дії трансмісії, названий пружним цикловим ККД

$$\left(\eta_{тр}^{пр}\right)_{цикл} = 1 - \frac{A_M \left(1 - \frac{A_M}{2\bar{M}_i}\right)}{\pi I_{зв} \bar{\omega}_e \omega_M \left(\frac{k^2}{\omega_M^2} - 1\right)}, \quad (6.7)$$

де  $A_M$  – амплітуда коливань індикаторного крутного моменту (див. співвідношення (6.1)),

$$A_M = 0,5K_1\bar{M}_i; \quad (6.8)$$

$I_{зв}$  – зведений до колінчастого валу ДВЗ момент інерції обертових мас двигуна і трансмісії, а також поступальної маси машини, що рухається;

$\omega_M$  – кругова частота коливань індикаторного крутного моменту ДВЗ,

$$\omega_M = 0,5\bar{\omega}_e i_{\text{Ц}}; \quad (6.9)$$

$k$  – кругова частота вільних (власних) коливань системи «двигун–трансмсія–ведучі колеса–опорна поверхня–поступальна маса машини»,

$$k = \sqrt{\frac{c_{\text{ЗВ}}}{I_{\text{ЗВ}}}}; \quad (6.10)$$

$c_{\text{ЗВ}}$  – зведена до колінчастого валу ДВЗ жорсткість розглянутої коливної системи.

Аналіз виразу (6.7) показує, що при

$$k = \omega_M \quad (6.11)$$

настає резонанс коливань, при якому  $(\eta_{\text{тр}}^{\text{пр}})_{\text{цикл}} \rightarrow -\infty$ . Такий стан коливної системи є вібраційно нестійким.

Після підстановки виразу (6.8) в рівняння (6.7), з урахуванням співвідношень (6.50), (6.6), (6.8) і (6.9), отримаємо після перетворень:

$$(\eta_{\text{тр}}^{\text{пр}})_{\text{цикл}} = 1 - \frac{\bar{M}_i}{I_{\text{ЗВ}}} \frac{(0,006i_{\text{Ц}} + 1,126) \left(1 - \frac{3,68}{i_{\text{Ц}}}\right)}{k^2 - \omega_M^2}. \quad (6.12)$$

З виразу (6.12) видно, що при  $i_{\text{Ц}}^*$  умовно рівному 3,68, величина  $(\eta_{\text{тр}}^{\text{пр}})_{\text{цикл}} = 1$  при будь-яких значеннях параметрів, що входять в вказане

рівняння. Невизначеність виникає тільки при  $k = \omega_M$  (при резонансі). Йдеться про умовне значення числа циліндрів  $i_{\text{ц}}^* = 3,68$ , оскільки реалізувати його неможливо.

Вібростійкість моторно-трансмісійної установки буде забезпечена при значеннях циклового пружного ККД трансмісії, що знаходиться в межах

$$0 < \left( \eta_{\text{тр}}^{\text{пр}} \right)_{\text{цикл}} \leq 1. \quad (6.13)$$

Виходячи з цих міркувань (див. вираз (6.12)), при  $i_{\text{ц}} < 3,68$  величина  $\omega_M > k$ , тобто коливальна система повинна працювати в зарезонансній зоні, а при  $i_{\text{ц}} > 3,68$  – в дорезонансній. Однак при отриманні апроксимуючої залежності (6.6) була допущена значна відносна похибка визначення коефіцієнта  $\hat{K}$  (див. таблицю 6.1), що, природно, призвело до неточності визначення параметра  $i_{\text{ц}}^*$  і показника  $\left( \eta_{\text{тр}}^{\text{пр}} \right)_{\text{цикл}}$ .

Для підвищення точності апроксимуюча залежність повинна являти собою кускову функцію, що складається з двох гіперболічних частин виду [2]

$$\hat{K} = B + A/i_{\text{ц}}, \quad (6.14)$$

де  $A, B$  – коефіцієнти регресії.

Вузловою точкою апроксимації повинна бути точка з абсцисою  $i_{\text{ц}} = i_{\text{ц}}^*$ .

Для визначення ординати  $K^*$  вузлової точки з умови  $\left( \eta_{\text{тр}}^{\text{пр}} \right)_{\text{цикл}} = 1$  (див. залежність (6.7)) знаходимо

$$\frac{A_M}{2M_i} = 1, \quad (6.15)$$

або, з урахуванням співвідношення (6.8),

$$K_1^* = 4. \quad (6.16)$$

Величина  $K_1^* = 4$  відповідає  $K^* = 3$  (див. співвідношення (6.5)). Використовуючи інтерполяційний метод за допомогою даних, наведених у таблиці 6.1, знаходимо  $i_{ц}^* = 4,636$ . Застосовуючи метод найменших квадратів для визначення коефіцієнтів регресії  $A$  і  $B$  апроксимуючої кускової гіперболічної функції (6.14), отримаємо

$$K = \begin{cases} 1,686 + 6,090 / i_{ц} - \text{при } i_{ц} \leq 4; & (6.17) \\ 14,1 / i_{ц} - 0,041 - \text{при } i_{ц} > 4. & (6.18) \end{cases}$$

Використовуючи залежність (6.8), перетворимо (6.17) і (6.18) до наступного вигляду:

$$K_1 = \begin{cases} 1,372 + 12,18 / i_{ц} - \text{при } i_{ц} \leq 4; & (6.19) \\ 28,2 / i_{ц} - 2,082 - \text{при } i_{ц} > 4. & (6.20) \end{cases}$$

Для порівняння на рис. 6.2 наведені графіки залежності  $K(i_{ц})$  і  $\widehat{K}(i_{ц})$  при апроксимації гіперболічною (рис. 6.2а) і частково-гіперболічною (рис. 6.2б) функціями.

У таблиці 6.2 для порівняння наведені значення ступеня нерівномірності  $K$  для ДВЗ з різним числом циліндрів, значення  $\widehat{K}$ , отримані за апроксимуючою кусковою залежністю (див. співвідношення (6.17) і (6.18)), і відносна похибка розрахунку за апроксимуючою залежністю.

**Таблиця 6.2. Оцінка точності розрахунку величини  $K$  при використанні кускової гіперболічної апроксимуючої залежності**

$i_{ц}$	1	2	3	4	4,636	6	8	12
$K$	7,74	5,52	3,62	3,35	3,00	2,25	1,36	1,16
$\hat{K}$	7,78	4,73	3,71	3,21	3,00	2,31	1,72	1,13
$\delta K$	-0,005	0,167	-0,024	0,044	0	-0,026	-0,209	-0,027

Таким чином, апроксимація кусковою функцією дозволяє отримати відносну похибку визначення ступеня нерівномірності індикаторного крутного моменту  $\delta K$ , що не перевищує 27 % (див. таблицю 6.2). Апроксимація єдиною гіперболічною залежністю (див. таблицю 6.1) дає максимальну відносну похибку 42,6 %.

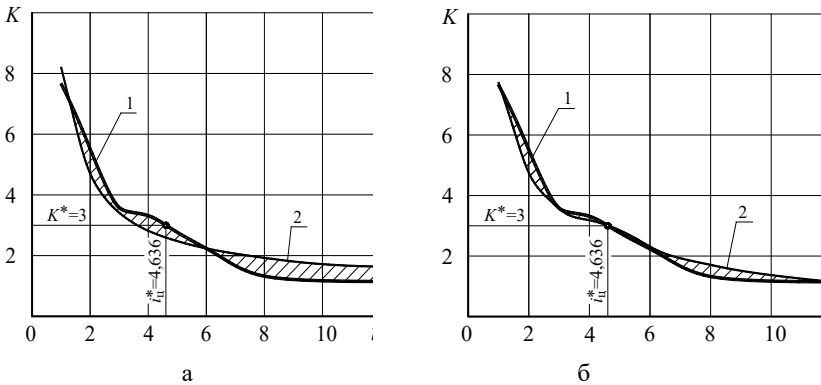


Рис. 6.2. Залежність ступеня нерівномірності крутного моменту ДВЗ від числа циліндрів: 1 – дійсна залежність [2]; 2 – апроксимація гіперболічним законом (а); 2 – апроксимація кусковою функцією (б)

## 6.2. Уточнення умов забезпечення вібростійкості силового агрегату

Вираз (6.7) після підстановки в нього співвідношень (6.8), (6.9) з урахуванням отриманих виразів (6.19) і (6.20) прийме наступний вигляд:

$$\left( \eta_{\text{тр}}^{\text{пр}} \right)_{\text{цикл}} = 1 - \frac{\bar{M}_i}{I_{\text{зв}}} \times \begin{cases} \frac{0,072(i_{\text{ц}} + 8,847) \left( \frac{4,636}{i_{\text{ц}}} - 1 \right)}{\omega_{\text{м}}^2 - k^2} - \text{при } i_{\text{ц}} \leq 4; & (6.21) \\ \frac{0,252(13,536 - i_{\text{ц}}) \left( 1 - \frac{4,636}{i_{\text{ц}}} \right)}{k^2 - \omega_{\text{м}}^2} - \text{при } i_{\text{ц}} > 4; & (6.22) \\ \frac{0,252(i_{\text{ц}} - 13,536) \left( 1 - \frac{4,636}{i_{\text{ц}}} \right)}{\omega_{\text{м}}^2 - k^2} - \text{при } i_{\text{ц}} \geq 14. & (6.23) \end{cases}$$

Аналіз рівняння (6.22) дозволяє визначити для  $i_{\text{ц}} > 4$  другу характерну точку  $i_{\text{ц}}^{**} = 13,536$ , при якій  $\left( \eta_{\text{тр}}^{\text{пр}} \right)_{\text{цикл}} = 1$ .

Умова  $\left( \eta_{\text{тр}}^{\text{пр}} \right)_{\text{цикл}} < 1$  виконується у випадках

$$\begin{cases} i_{\text{ц}} \leq 4,636; \\ \omega_{\text{м}} > k \end{cases} \quad (6.24)$$

або

$$\begin{cases} i_{\text{ц}} > 4,636; \\ \omega_{\text{м}} < k. \end{cases} \quad (6.25)$$

На відміну від раніше отриманого результату [2] в зарезонансній зоні система повинна працювати при  $i_{\text{ц}} \leq 4$ , а не при  $i_{\text{ц}} \leq 3$ . Відповідно, в дорезонансній зоні система повинна працювати при  $i_{\text{ц}} > 4$ . Крім того, з рівняння (6.22) видно, що при числі циліндрів  $i_{\text{ц}} > 13,536$  система повинна працювати в зарезонансній зоні. Для цього випадку умова  $(\eta_{\text{тр}}^{\text{пр}})_{\text{цикл}} < 1$  буде мати вигляд

$$\begin{cases} i_{\text{ц}} > 13,536; \\ \omega_{\text{м}} > k. \end{cases} \quad (6.26)$$

Умова  $(\eta_{\text{тр}}^{\text{пр}})_{\text{цикл}} > 0$  виконується в разі

$$0,072(i_{\text{ц}} + 8,847) \left( \frac{4,636}{i_{\text{ц}}} - 1 \right) < \frac{I_{\text{зв}}}{M_i} (\omega_{\text{м}}^2 - k^2) - \text{при } i_{\text{ц}} \leq 4; \quad (6.27)$$

$$0,252(13,536 - i_{\text{ц}}) \left( 1 - \frac{4,636}{i_{\text{ц}}} \right) < \frac{I_{\text{зв}}}{M_i} (k^2 - \omega_{\text{м}}^2) - \text{при } i_{\text{ц}} > 4; \quad (6.28)$$

$$0,252(i_{\text{ц}} - 13,536) \left( 1 - \frac{4,636}{i_{\text{ц}}} \right) < \frac{I_{\text{зв}}}{M_i} (\omega_{\text{м}}^2 - k^2) - \text{при } i_{\text{ц}} \geq 14. \quad (6.29)$$

Позначимо вираз в лівій частині нерівностей (6.27), (6.28), (6.29) через  $\chi_{\text{min}}$ , тобто

$$\chi_{\min} = \begin{cases} 0,072(i_{\text{ц}} + 8,847) \left( \frac{4,636}{i_{\text{ц}}} - 1 \right) - \text{при } i_{\text{ц}} \leq 4; & (6.30) \\ 0,252(13,536 - i_{\text{ц}}) \left( 1 - \frac{4,636}{i_{\text{ц}}} \right) - \text{при } i_{\text{ц}} > 4; & (6.31) \\ 0,252(i_{\text{ц}} - 13,536) \left( 1 - \frac{4,636}{i_{\text{ц}}} \right) - \text{при } i_{\text{ц}} \geq 14. & (6.32) \end{cases}$$

Вирази в правих частинах нерівностей (6.27), (6.28), (6.29) позначимо через  $\chi$ , тобто

$$\chi = \begin{cases} \frac{I_{\text{зв}}}{M_i} (\omega_{\text{м}}^2 - k^2) - \text{при } i_{\text{ц}} \leq 4; & (6.33) \end{cases}$$

$$\chi = \begin{cases} \frac{I_{\text{зв}}}{M_i} (k^2 - \omega_{\text{м}}^2) - \text{при } i_{\text{ц}} > 4; & (6.34) \end{cases}$$

$$\chi = \begin{cases} \frac{I_{\text{зв}}}{M_i} (\omega_{\text{м}}^2 - k^2) - \text{при } i_{\text{ц}} \geq 14. & (6.35) \end{cases}$$

Таким чином, вирази (6.21), (6.22), (6.23) з урахуванням співвідношень (6.30) – (6.35) приймуть наступний вигляд:

$$\left( \eta_{\text{тр}}^{\text{нр}} \right)_{\text{цикл}} = 1 - \frac{\chi_{\min}}{\chi}. \quad (6.36)$$

На рис. 6.3 наведені графіки залежності  $\chi_{\min}(i_{\text{ц}})$ , отримані за допомогою виразів (6.30), (6.31) і (6.32). На цьому графіку заштрихована зона (що лежить нижче кривої  $\chi_{\min}(i_{\text{ц}})$ ) є зоною нестійкості. При проектуванні автомобілів і тракторів необхідно вибирати параметр  $\chi$  таким чином, щоб він знаходився в зоні, що лежить вище кривої  $\chi_{\min}(i_{\text{ц}})$ .

Чим вище значення  $\chi$  по відношенню до  $\chi_{\min}$ , тим вище цикловий пружний ККД трансмісії і енергоефективність автомобілів і тракторів.

Слід зазначити, що при числі циліндрів ДВЗ, що знаходиться в межах  $4 < i_{\text{ц}} < 14$  здійснити роботу системи «двигун–трансмісія–поступальна маса машини» в дорезонансній зоні складно. Для цього потрібно значно збільшити частоту власних (вільних) коливань системи. Останнє неможливо з причин високих необхідних значень приведеної жорсткості трансмісії і низьких необхідних значень приведенного моменту інерції. В цьому випадку необхідно в зчепленні встановити демпфер крутильних коливань.

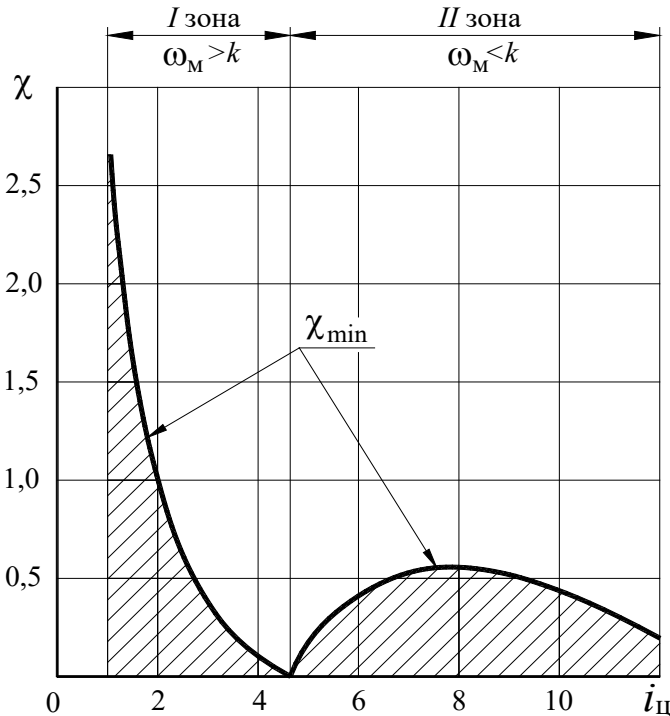


Рис. 6.3. Зона вібраційної нестійкості моторно-трансмісійної установки з ДВЗ (заштрихована): I – зарезонансна зона; II – дорезонансна зона

### 6.3. Оцінка стійкості роботи автомобільного двигуна за умови постійної кутової швидкості колінчастого валу

Робота автомобільного двигуна за умови постійної кутової швидкості колінчастого валу на неусталеному режимі руху автомобіля дозволяє підвищити його енергетичну й паливну економічність. Зазначене можливо при використанні безступінчастої трансмісії, що дозволяє змінювати швидкість руху автомобіля за рахунок безступінчастої зміни передаточного числа коробки передач без розгону обертових мас двигуна від мінімальної до максимальної швидкості обертання.

#### 6.3.1. Аналіз останніх досягнень і публікацій

На рис. 6.4 наведено статичні й динамічні характеристики двигуна в внутрішнього згоряння. На рис. 6.4:  $M_{еном}$  – номінальний ефективний крутний момент двигуна;  $\omega_{еном}$  – кутова швидкість колінчастого вала при  $M_e = M_{еном}$ ;  $M_e$ ;  $\omega_e$  – поточні значення  $M_e$  і  $\omega_e$ .

Режим роботи ДВЗ при постійній кутовій швидкості колінчастого валу ілюструють навантажувальні характеристики (криві 3, 4). Пунктирними лініями показані динамічні характеристики ДВЗ, а суцільними – статичні.

Системи регулювання режимів роботи двигуна відносяться до систем стабілізації. Такі системи за допомогою зміни навантаження двигуна шляхом зміни передатного відношення безступінчастої передачі підтримують роботу двигуна в тому або іншому заданому (оптимальному) режимі.

Оптимальні режими роботи двигуна автомобіля з безступінчастою передачею вперше обґрунтував Е. А. Чудаков. У працях В. А. Петрова викладений загальний підхід складання структурних схем і рівнянь руху систем регулювання режимів роботи двигуна, які враховують змінність приведенної інерційної маси, обмеженою потужністю на вході механічної безступінчастої передачі, розосередження пружності і т. д., що раніше не було розглянуто в загальній теорії регулювання машин.

У період часу, впродовж якого проводилися зазначені дослідження, існували безступінчасті гідродинамічні, гідрооб'ємні і фрикційні передачі. Останні передачі були обмежені величиною потужності, що передається. Тому було створено конструктивні схеми двопотокових коробок передач. Поява автомобілів з комбінованою енергетичною установкою (гібридних автомобілів) знову дозволило повернутися до питання про безступінчасту зміну передатного числа трансмісії [3].

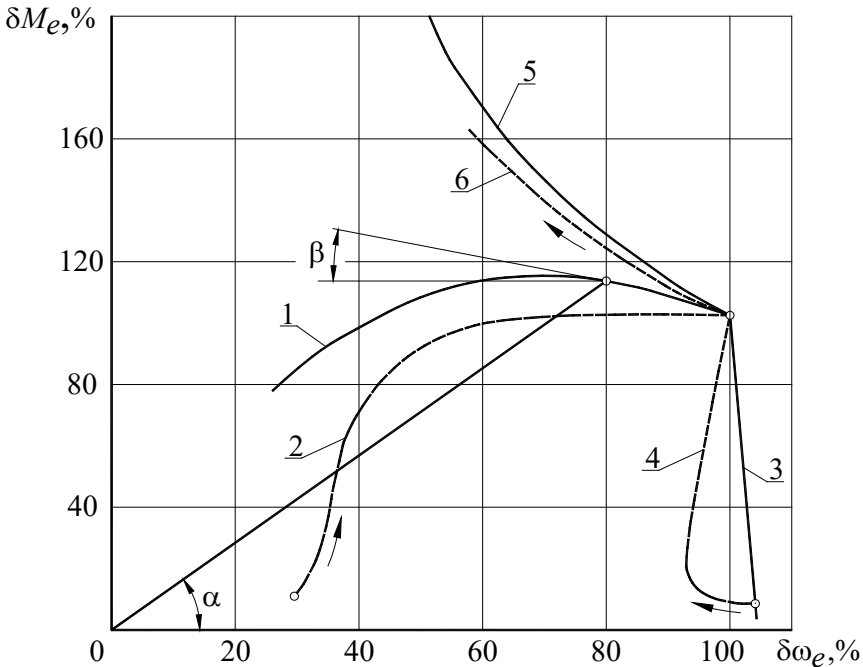


Рис. 6.4. Статичні і динамічні характеристики двигуна  
( $\delta M_e = M_e / M_{eном}$ ;  $\delta \omega_e = \omega_e / \omega_{eном}$ ): 1, 2 – зовнішні швидкісні;  
3, 4 – навантажувальні; 5, 6 – при постійній потужності

Для випадку безступінчастої автоматичної зміни передавального числа трансмісії у відомих працях розглянуто роботу двигуна на режимах, що забезпечують:

- максимальну ефективну потужність двигуна;
- максимальний ефективний крутний момент двигуна;
- мінімальну ефективну питому витрату палива.

Слід зазначити, що навіть у разі ідеального керування безступінчастою трансмісією не вдається забезпечити роботу двигуна при постійному значенні кутової швидкості колінчастого валу, оскільки ДВЗ генерує коливання індикаторного крутного моменту.

У дисертації [2] запропонована математична модель зміни індикаторного крутного моменту ДВЗ (див. (6.1)), а також визначений коефіцієнт нерівномірності крутного моменту

$$K_1 = 0,08 + 14,44 / i_{\text{ц}}. \quad (6.37)$$

У зазначеній роботі [2] отриманий закон зміни кутової швидкості  $\omega_e$  колінчастого валу на усталеному режимі роботи двигуна

$$\omega_e = \bar{\omega}_e - \bar{M}_i \frac{K_1 \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right)}{\bar{\omega}_e i_{\text{ц}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e i_{\text{ц}}} \right)^2 \right]}, \quad (6.38)$$

де  $I_{\text{зв}}^{\text{дв}}$  – момент інерції обертових мас двигуна, зведений до колінчастого валу;

$I_{\text{звI}}^{\text{тр}}$  – момент інерції зведених до колінчастого валу обертових мас трансмісії, пов'язаних із двигуном постійним передаточним відношенням;

$I_{звII}^{тр}$  – момент інерції приведення до колінчастого валу обертових мас трансмісії, пов'язаних із двигуном змінним передатним відношенням;

$m_a$  – маса автомобіля;

$r_d$  – динамічний радіус ведучих коліс автомобіля;

$u_0$ ;  $u_k$  – передаточні числа головної передачі і коробки передач відповідно;

$k$  – кругова частота власних коливань мас, приведення до колінчастого валу,

$$k = \sqrt{\frac{c_{кут}^{зв}}{I_{зв}^{дв} + I_{звI}^{тр} + I_{звII}^{тр} + \frac{m_a r_d^2}{u_0^2 u_k^2}}}; \quad (6.39)$$

де  $c_{кут}^{зв}$  – зведена до колінчастого валу двигуна кутова жорсткість колівальної системи.

Однак у роботі [2] не проводилася оцінка стійкості роботи двигуна при постійній швидкості обертання колінчастого валу на усталеному і неусталеному режимах.

### 6.3.2. Стійкість роботи двигуна на усталеному режимі руху автомобіля

Визначимо ефективний крутний момент двигуна внутрішнього згоряння

$$M_e = M_i \eta_{мдв} - I_{зв}^{дв} \frac{d\omega_e}{dt}, \quad (6.40)$$

де  $\eta_{\text{мдв}}$  – механічний ККД двигуна;  
 $d\omega_e/dt$  – кутове прискорення колінчастого валу.

Кутове прискорення колінчастого валу визначимо після диференціювання правої частини рівняння (6.38)

$$\frac{d\omega_e}{dt} = \bar{M}_i \frac{0,5K_1 \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right)}{\left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тр}} + I_{\text{звII}}^{\text{тр}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e i_{\text{ц}}} \right)^2 \right]}. \quad (6.41)$$

Після підстановки виразу (6.41) у рівняння (6.40) і проведення ряду перетворень, одержимо

$$M_e = \bar{M}_e + 0,5K_1 \bar{M}_e \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right) - \frac{0,5K_1 \bar{M}_e \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right)}{\eta_{\text{мдв}} \left[ 1 + \frac{I_{\text{звI}}^{\text{тр}} + I_{\text{звII}}^{\text{тр}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2}}{I_{\text{зв}}^{\text{дв}}} \right] \left[ 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e i_{\text{ц}}} \right)^2 \right]}, \quad (6.42)$$

де  $\bar{M}_e$  – середнє за цикл коливань значення ефективного крутного моменту двигуна,

$$\overline{M}_e = \overline{M}_i \cdot \eta_{\text{мдв}}. \quad (6.43)$$

З рівняння (6.43) визначимо

$$\overline{M}_i = \overline{M}_e / \eta_{\text{мдв}}. \quad (6.44)$$

Підставляючи співвідношення (6.44) у рівняння (6.38), одержимо

$$\omega_e = \overline{\omega}_e - \frac{\overline{M}_e K_1 \cos\left(\frac{\overline{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right)}{\eta_{\text{мдв}} \overline{\omega}_e i_{\text{ц}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тр}} + I_{\text{звII}}^{\text{тр}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{2k}{\overline{\omega}_e i_{\text{ц}}} \right)^2 \right]}. \quad (6.45)$$

При роботі коливальної системи двигун–трансмсія–автомобіль у дорезонансній зоні ( $k > 0,5\overline{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}$ ) максимальна й мінімальна величини кутової швидкості  $\omega_e$  будуть дорівнювати

$$\omega_{e\text{max}} = \overline{\omega}_e + \frac{\overline{M}_e K_1}{\eta_{\text{мдв}} \overline{\omega}_e i_{\text{ц}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тр}} + I_{\text{звII}}^{\text{тр}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left[ \left( \frac{2k}{\overline{\omega}_e i_{\text{ц}}} \right)^2 - 1 \right]}; \quad (6.46)$$

$$\omega_{e\min} = \bar{\omega}_e - \frac{\bar{M}_e K_1}{\eta_{\text{мдв}} \bar{\omega}_e i_{\text{ц}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тп}} + I_{\text{звII}}^{\text{тп}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left[ \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e i_{\text{ц}}} \right)^2 - 1 \right]}. \quad (6.47)$$

При роботі коливальної системи двигун–трансмійсія–автомобіль у зарезонансній зоні ( $k < 0,5\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}$ )

$$\omega_{e\max} = \bar{\omega}_e + \frac{\bar{M}_e K_1}{\eta_{\text{мдв}} \bar{\omega}_e i_{\text{ц}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тп}} + I_{\text{звII}}^{\text{тп}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e i_{\text{ц}}} \right)^2 \right]}; \quad (6.48)$$

$$\omega_{e\min} = \bar{\omega}_e - \frac{\bar{M}_e K_1}{\eta_{\text{мдв}} \bar{\omega}_e i_{\text{ц}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тп}} + I_{\text{звII}}^{\text{тп}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e i_{\text{ц}}} \right)^2 \right]}. \quad (6.49)$$

Приймаючи, що середнє значення кутової швидкості колінчасто-го валу  $\bar{\omega}_e$  дорівнює розрахунковому значенню, на яке налаштований дворегіжний регулятор ДВЗ, то максимальне відхилення кутової швидкості від свого розрахункового значення  $\omega_{\text{ероз}}$  можна визначити за формулою

$$\Delta\omega_{e\max} = \omega_{e\max} - \omega_{e\text{роз}} = \pm \overline{M}_e \cdot$$

$$\frac{K_1}{\eta_{\text{мдв}} \omega_{e\text{роз}} i_{\text{ц}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{ДВ}} + I_{\text{звI}}^{\text{ТР}} + I_{\text{звII}}^{\text{ТР}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left| 1 - \left( \frac{2k}{\omega_{e\text{роз}} i_{\text{ц}}} \right)^2 \right|}. \quad (6.50)$$

Після підстановки співвідношення (6.37) у вираз (6.50) остаточно одержимо

$$\begin{aligned} & \Delta\omega_{e\max} = \\ & = \pm \overline{M}_e \frac{0,08 + 14,44 / i_{\text{ц}}}{\eta_{\text{мдв}} \omega_{e\text{роз}} i_{\text{ц}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{ДВ}} + I_{\text{звI}}^{\text{ТР}} + I_{\text{звII}}^{\text{ТР}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left| 1 - \left( \frac{2k}{\omega_{e\text{роз}} i_{\text{ц}}} \right)^2 \right|}. \quad (6.51) \end{aligned}$$

Отриманий вираз (6.51) дозволяє робити оцінку впливу різних параметрів на стійкість роботи двигуна при постійній кутовій швидкості колінчастого валу на усталеному режимі руху автомобіля. Чим вище величина  $\Delta\omega_{e\max}$ , тим менш стійка робота двигуна. Найбільший вплив на величину  $\Delta\omega_{e\max}$  чинить відношення  $2k/(\omega_{e\text{роз}} \cdot i_{\text{ц}})$ . У випадку рівності цього відношення одиниці (настання явища резонансу) величина  $\Delta\omega_{e\max}$  прямує до нескінченності. Для запобігання цьому явищу необхідно забезпечити величину  $2k/(\omega_{e\text{роз}} \cdot i_{\text{ц}})$  з урахуванням заданого коефіцієнта динамічності коливань.

Величина  $\Delta\omega_{e\max}$  пов'язана із середнім ефективним моментом двигуна  $\overline{M}_e$  лінійною залежністю, зі зростанням  $\overline{M}_e$  величина  $\Delta\omega_{e\max}$  також збільшується. З виразу (6.51) також видно, що зі збільшенням кількості циліндрів  $i_{\text{ц}}$  ДВЗ величина  $\Delta\omega_{e\max}$  зменшується. На рис. 6.5 показані зовнішні швидкісні характеристики ДВЗ і статична характеристика дворежимного регулятора.

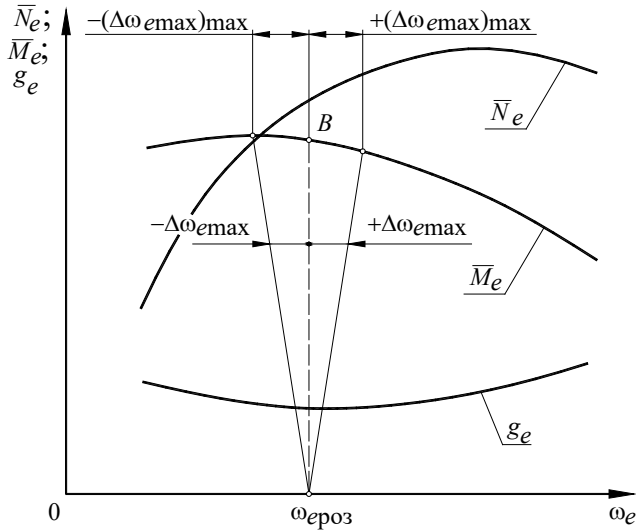


Рис. 6.5. Статичні зовнішні швидкісні характеристики і регуляторна характеристика ДВЗ

Таким чином, запропонований метод дозволяє робити оцінку стійкості роботи ДВЗ на постійному швидкісному режимі при усталеному русі автомобіля.

### 6.3.3. Стійкість роботи двигуна на неусталеному режимі руху автомобіля

На неусталеному режимі руху середня величина ефективного крутного моменту  $\bar{M}_e$  є функцією часу, яку можна представити у вигляді

$$\bar{M}_e = \begin{cases} \bar{M}_{e\max} \frac{t}{t_H} - \text{при } t \leq t_H; \\ \bar{M}_{e\max} - \text{при } t > t_H, \end{cases} \quad (6.52)$$

$$\bar{M}_e = \bar{M}_{e\max} - \text{при } t > t_H, \quad (6.53)$$

де  $\overline{M}_{e\max}$  – максимальне значення середнього ефективного крутного моменту;

$t_n$  – час наростання середнього ефективного крутного моменту  $\overline{M}_e$  від нуля до  $\overline{M}_{e\max}$ .

На неусталеному режимі руху автомобіля закон зміни ефективного крутного моменту відповідає рівнянню (6.52).

В роботі [2] для моторно-трансмісійної установки, що має в своєму складі пружні та інерційні ланки, отримане рівняння для визначення індикаторного крутного моменту

$$M_i = \overline{M}_i + C_{\text{кут}}^{\text{ЗВ}} \alpha_e + \left( I_{\text{ЗВ}}^{\text{ДВ}} + I_{\text{ЗВІ}}^{\text{ТР}} + I_{\text{ЗВІІ}}^{\text{ТР}} + \frac{m_a r_{\text{Д}}^2}{u_0^2 u_{\text{К}}^2} \right) \frac{d\omega_e}{dt}, \quad (6.54)$$

де  $\alpha_e$  – кут закручування вхідного валу трансмісії,

$$\alpha_e = \varphi_e - \overline{\varphi}_e; \quad (6.55)$$

$\varphi_e$  – кут повороту колінчастого валу;

$\overline{\varphi}_e$  – середній кут повороту валу двигуна за один цикл зміни індикаторного крутного моменту

$$\overline{\varphi}_e = \overline{\omega}_e t. \quad (6.56)$$

В дисертації [2] рівняння (6.54) було перетворено до виду

$$\ddot{\alpha}_e + \frac{C_{\text{кут}}^{\text{ЗВ}}}{I_{\text{ЗВ}}^{\text{ДВ}} + I_{\text{ЗВІ}}^{\text{ТР}} + I_{\text{ЗВІІ}}^{\text{ТР}} + \frac{m_a r_{\text{Д}}^2}{u_0^2 u_{\text{К}}^2}} \alpha_e = \frac{M_i - \overline{M}_i}{I_{\text{ЗВ}}^{\text{ДВ}} + I_{\text{ЗВІ}}^{\text{ТР}} + I_{\text{ЗВІІ}}^{\text{ТР}} + \frac{m_a r_{\text{Д}}^2}{u_0^2 u_{\text{К}}^2}}. \quad (6.57)$$

З урахуванням рівняння (6.1) в роботі [2] отриманий вираз

$$\ddot{\alpha}_e + k^2 \alpha_e = \frac{0,5 \bar{M}_i K_1 \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{цt}\right)}{I_{зв}^{дв} + I_{звI}^{тр} + I_{звII}^{тр} + \frac{m_a r_d^2}{u_0^2 u_k^2}}. \quad (6.58)$$

Враховуючи співвідношення (6.34) і залежність (6.52), перетворимо рівняння (6.58) до вигляду

$$\ddot{\alpha}_e + k^2 \alpha_e = \frac{0,5 \bar{M}_{e\max} t K_1 \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{цt}\right)}{\eta_{мдв} t_H \left( I_{зв}^{дв} + I_{звI}^{тр} + I_{звII}^{тр} + \frac{m_a r_d^2}{u_0^2 u_k^2} \right)}. \quad (6.59)$$

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (6.59) складається із суми загального й часткового розв'язків. Загальний розв'язок відповідає розв'язку однорідного диференціального рівняння і описує вільні коливання. Частковий розв'язок неоднорідного диференціального рівняння описує вимушені коливання. В усталеному русі, із часом, амплітуда й частота коливань об'єкта стають відповідними до параметрів вимушених коливань. Це дозволило авторові роботи [2] прирівняти загальний розв'язок рівняння (6.59) до нуля.

Неусталений режим руху автомобіля є короткочасним і тому нехтувати загальним розв'язком рівняння не можна.

Очевидно, що в рівнянні (6.59)

$$\dot{\alpha}_e = \dot{\varphi}_e = \frac{d\bar{\varphi}_e}{dt} = \omega_e - \bar{\omega}_e \quad (6.60)$$

та

$$\ddot{\alpha}_e = \dot{\omega}_e = \ddot{\phi}_e. \quad (6.61)$$

Представимо рівняння (6.59) у вигляді

$$\ddot{\alpha}_e + k^2 \alpha_e = ut \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right), \quad (6.62)$$

де  $u$  – коефіцієнт, що визначається за формулою

$$u = \frac{0,5 M_{\text{emax}} K_1}{\eta_{\text{МДВ}} t_{\text{н}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{ДВ}} + I_{\text{звI}}^{\text{ТР}} + I_{\text{звII}}^{\text{ТР}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right)}. \quad (6.63)$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\ddot{\alpha}_e + k^2 \alpha_e = 0 \quad (6.64)$$

маємо у вигляді

$$\bar{\alpha}_e = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt). \quad (6.65)$$

Частковий розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (6.62)

$$\alpha_{e0} = u \frac{\left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\Pi}^2 \right) t \sin \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi} t \right) - \bar{\omega}_e i_{\Pi} \cos \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi} t \right)}{\left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\Pi}^2 \right)^2}. \quad (6.66)$$

Після підстановки (6.63) в (6.66) одержимо

$$\alpha_{e0} = \frac{0,5 M_{e\max} K_1 \left[ \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\Pi}^2 \right) t \sin \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi} t \right) - \bar{\omega}_e i_{\Pi} \cos \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi} t \right) \right]}{\eta_{\text{мдв}} t_{\text{н}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тр}} + I_{\text{звII}}^{\text{тр}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\Pi}^2 \right)^2}. \quad (6.67)$$

Загальний розв'язок рівняння (6.67)

$$\alpha_e = \bar{\alpha}_e + \alpha_{e0} = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt) + \frac{0,5 M_{e\max} K_1 \left[ \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\Pi}^2 \right) t \sin \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi} t \right) - \bar{\omega}_e i_{\Pi} \cos \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi} t \right) \right]}{\eta_{\text{мдв}} t_{\text{н}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тр}} + I_{\text{звII}}^{\text{тр}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\Pi}^2 \right)^2}. \quad (6.68)$$

Диференціюючи праву частину рівняння (6.68), одержимо

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_e = \omega_e - \bar{\omega}_e = c_2 k \cos(kt) - c_1 k \sin(kt) + \\ + \frac{0,5 M_{e\max} K_1}{\eta_{\text{МДВ}} t_{\text{н}} \left( I_{\text{ЗВ}}^{\text{ДВ}} + I_{\text{ЗВІ}}^{\text{ТР}} + I_{\text{ЗВІІ}}^{\text{ТР}} + \frac{m_a r_{\text{Д}}^2}{u_0^2 u_{\text{К}}^2} \right)} \times \\ \times \left[ \frac{\sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right) + t \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right)}{k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\text{ц}}^2} + \frac{\frac{\bar{\omega}_e^2}{2} i_{\text{ц}}^2 \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right)}{\left(k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\text{ц}}^2\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.69)$$

З рівняння (6.69) знаходимо

$$\begin{aligned} \omega_e = \bar{\omega}_e + c_2 k \cos(kt) - c_1 k \sin(kt) + \\ + \frac{0,5 M_{e\max} K_1}{\eta_{\text{МДВ}} t_{\text{н}} \left( I_{\text{ЗВ}}^{\text{ДВ}} + I_{\text{ЗВІ}}^{\text{ТР}} + I_{\text{ЗВІІ}}^{\text{ТР}} + \frac{m_a r_{\text{Д}}^2}{u_0^2 u_{\text{К}}^2} \right)} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[ \frac{\sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right) + t \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right)}{k^2 - \frac{\bar{\omega}_e}{4} i_{\text{ц}}^2} + \frac{\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}}^2 \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right)}{\left(k^2 - \frac{\bar{\omega}_e}{4} i_{\text{ц}}^2\right)^2} \right]. \quad (6.70)$$

Введемо граничні умови при  $t = 0$ :

$$\omega_e = \bar{\omega}_e = \omega_{\text{епроз}}; \quad (6.71)$$

$$\alpha_e = 0. \quad (6.72)$$

В цьому випадку

$$c_2 = 0; \quad (6.73)$$

$$c_1 = \frac{0,5M_{\text{emax}} K_1 \bar{\omega}_e i_{\text{ц}}}{\eta_{\text{мдв}} t_{\text{н}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тп}} + I_{\text{звII}}^{\text{тп}} + \frac{m_a r_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e}{4} i_{\text{ц}}^2 \right)^2}. \quad (6.74)$$

Після підстановки (6.73) і (6.74) в (6.69) визначимо

$$\omega_e = \bar{\omega}_e + \frac{0,5M_{\text{emax}} K_1}{\eta_{\text{мдв}} t_{\text{н}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тп}} + I_{\text{звII}}^{\text{тп}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e}{4} i_{\text{ц}}^2 \right)^2} \times$$

$$\times \left[ \left( k^2 + \frac{\bar{\omega}_e^{-2}}{2} i_{\Pi}^2 \right) \sin \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi} t \right) + t \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi} \cos \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi} t \right) - \right. \\ \left. - k \bar{\omega}_e i_{\Pi} \sin(kt) \right] = \bar{\omega}_e + \Delta \omega_e, \quad (6.75)$$

де  $\Delta \omega_e$  – відхилення кутової швидкості колінчастого валу від розрахункової величини  $\omega_{\text{ероз}} = \bar{\omega}_e$ ,

$$\Delta \omega_e = \frac{0,5 M_{\text{emax}} \cdot K_1}{\eta_{\text{мдв}} t_{\text{н}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тр}} + I_{\text{звII}}^{\text{тр}} + \frac{m_d r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^{-2}}{4} i_{\Pi}^2 \right)^2} \times \\ \times \left[ \left( k^2 + \frac{\bar{\omega}_e^{-2}}{2} i_{\Pi}^2 \right) \sin \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi} t \right) + t \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi} \cos \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi} t \right) - \right. \\ \left. - k \bar{\omega}_e i_{\Pi} \sin(kt) \right]. \quad (6.76)$$

Визначимо величину  $\Delta \omega_e$  як суму аперіодичної  $\Delta \omega_e^{\text{А}}$  і періодичної  $\Delta \omega_e^{\text{П}}$  складових:

$$\Delta\omega_e^A = \frac{0,25M_{\text{emax}}K_1\bar{\omega}_e i_{\text{ц}} \frac{t}{t_{\text{н}}} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right)}{\eta_{\text{мдв}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тp}} + I_{\text{звII}}^{\text{тp}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\text{ц}}^2 \right)^2}; \quad (6.77)$$

$$\Delta\omega_e^{\text{П}} = \frac{0,5M_{\text{emax}}K_1 \left[ \left( k^2 + \frac{\bar{\omega}_e^2}{2} i_{\text{ц}}^2 \right) \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right) - k\bar{\omega}_e i_{\text{ц}} \sin(kt) \right]}{\eta_{\text{мдв}} t_{\text{н}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тp}} + I_{\text{звII}}^{\text{тp}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\text{ц}}^2 \right)^2}. \quad (6.78)$$

Для  $t > t_{\text{н}}$  величина аперіодичного відхилення кутової швидкості  $\Delta\omega_e^A$  досягне свого максимального значення при

$$\cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} t\right) = 1. \quad (6.79)$$

В цьому випадку

$$\left(\Delta\omega_e^A\right)_{\text{max}} = \frac{0,25M_{\text{emax}}K_1\bar{\omega}_e i_{\text{ц}}}{\eta_{\text{мдв}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тp}} + I_{\text{звII}}^{\text{тp}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e^2}{2} i_{\text{ц}}^2 \right)^2}. \quad (6.80)$$

Періодична складова відхилення кутової швидкості складається із двох гармонік:

- вільних коливань  $\Delta\omega_{e1}^{\text{П}}$ ;
- вимушених коливань  $\Delta\omega_{e2}^{\text{П}}$ .

Ці гармоніки описуються такими залежностями:

$$\Delta\omega_{e1}^{\Pi} = - \frac{0,5M_{e\max} K_1 k \bar{\omega}_e i_{\Pi} \sin(kt)}{\eta_{\text{мдв}} t_{\text{н}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тр}} + I_{\text{звII}}^{\text{тр}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e}{4} i_{\Pi}^2 \right)^2}; \quad (6.81)$$

$$\Delta\omega_{e2}^{\Pi} = \frac{0,5M_{e\max} K_1 \left( k^2 + \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi}^2 \right) \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi} t\right)}{\eta_{\text{мдв}} t_{\text{н}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тр}} + I_{\text{звII}}^{\text{тр}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e}{4} i_{\Pi}^2 \right)^2}. \quad (6.82)$$

Максимальні значення зазначених відхилень кутової швидкості:

$$\left(\Delta\omega_{e1}^{\Pi}\right)_{\max} = - \frac{0,5M_{e\max} K_1 k \bar{\omega}_e i_{\Pi}}{\eta_{\text{мдв}} t_{\text{н}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тр}} + I_{\text{звII}}^{\text{тр}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e}{4} i_{\Pi}^2 \right)^2}; \quad (6.83)$$

$$\left(\Delta\omega_{e2}^{\Pi}\right)_{\max} = \frac{0,5M_{e\max} K_1 \left( k^2 + \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\Pi}^2 \right)}{\eta_{\text{мдв}} t_{\text{н}} \left( I_{\text{зв}}^{\text{дв}} + I_{\text{звI}}^{\text{тр}} + I_{\text{звII}}^{\text{тр}} + \frac{m_a r_{\text{д}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( k^2 - \frac{\bar{\omega}_e}{4} i_{\Pi}^2 \right)^2}. \quad (6.84)$$

Аналіз виразів (6.80), (6.83), (6.84) показує, що чим менше величина

$$A = \left( k^2 - \frac{\omega_e^{-2}}{4} i_{\Pi}^2 \right)^2, \quad (6.85)$$

тим більші значення максимальних відхилень кутової швидкості валу двигуна  $(\Delta\omega_e^A)_{\max}$ ,  $(\Delta\omega_{e1}^{\Pi})_{\max}$ ,  $(\Delta\omega_{e2}^{\Pi})_{\max}$ . Тому при проектуванні автомобілів треба прагнути до одержання  $A = A_{\max}$ .

## **РОЗДІЛ 7. ВПЛИВ МУФТИ ЗЧЕПЛЕННЯ І ДЕМПФЕРА КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ НА ЕНЕРГЕТИЧНІ ВТРАТИ У ТРАНСМІСІЇ**

### **7.1. Визначення дисипативних втрат енергії у демпфері крутильних коливань зчеплення**

Демпфери кутових (крутильних) коливань встановлюють між веденим диском фрикційного зчеплення та його матчиною. Основним призначенням пружно-дисипативних демпферів, вбудованих у ведений диск, є зниження рівнів крутильних коливань у трансмісіях, спричинених нерівномірністю роботи поршневого двигуна. Це сприяє зменшенню рівнів вібрації у трансмісії. Вони також впливають на зниження динамічних навантажень у трансмісії, що викликаються включенням фрикційного зчеплення або різким гальмуванням машини з невимкненим зчепленням.

Однак у відомій літературі втрати енергії двигуна на роботу пружно-дисипативного демпфера не досліджені тому в розрахунках не враховуються, що призводить до отримання завищених значень ККД моторно-трансмісійних установок.

При роботі демпфера кут відносного переміщення елементів пари тертя дорівнює

$$\alpha_d = \varphi_e - \varphi_{\text{вх}}, \quad (7.1)$$

де  $\varphi_{\text{вх}}$  – кут повороту вхідного валу трансмісії.

Кутова швидкість відносного руху поверхонь тертя буде рівна

$$\dot{\alpha}_d = \dot{\varphi}_e - \dot{\varphi}_{\text{вх}} = \omega_e - \omega_{\text{вх}}, \quad (7.2)$$

а кутове прискорення

$$\ddot{\alpha}_d = \dot{\omega}_e - \dot{\omega}_{\text{вх}}. \quad (7.3)$$

Рівняння динаміки відносного руху ланок пружно-дисипативного демпфера

$$I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \cdot \ddot{\alpha}_d + C_d^{\text{угл}} \cdot \dot{\alpha}_d = M_e - M_{\text{сопр}} - \text{sign}(\dot{\alpha}_d) M_{\text{тр}}, \quad (7.4)$$

де  $C_d^{\text{угл}}$  – кутова жорсткість, створювана пружинами демпфера;  
 $M_{\text{сопр}}$  – момент опору, що діє з боку трансмісії,

$$M_{\text{сопр}} = \bar{M}_e = \bar{M}_i \cdot \eta_{\text{мдв}}; \quad (7.5)$$

$M_{\text{тр}}$  – момент тертя фрикційних поверхонь демпфера,  $M_{\text{тр}} = \text{const}$ .

Підставивши вирази (4.15), (4.16), (6.22) та (7.5) в рівняння (7.4) після перетворень отримаємо

$$\ddot{\alpha}_d + k_{\text{дм}}^2 \cdot \alpha_d = \frac{\bar{M}_i \cdot K_1}{2I_{\text{пркв}}^{\text{тр}}} \left( \eta_{\text{мдв}} - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{\left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} \right) \times$$

$$\times \sin \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t \right) - \text{sign}(\dot{\alpha}_d) \frac{M_{\text{тр}}}{I_{\text{пркв}}^{\text{тр}}}, \quad (7.6)$$

де  $k_{\text{дм}}$  – кругова частота власних коливань демпфера,

$$k_{\text{дм}} = \sqrt{\frac{C_{\text{д}}^{\text{угл}}}{I_{\text{пркв}}^{\text{гр}}}}. \quad (7.7)$$

Розв'язання диференціального рівняння (7.6) шукаємо у вигляді

$$\alpha_{\text{д}} = A_1 \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right) - A_2 \text{sign}(\dot{\alpha}_{\text{д}}). \quad (7.8)$$

З залежності (7.8) визначимо

$$\dot{\alpha}_{\text{д}} = A_1 \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right); \quad (7.9)$$

$$\ddot{\alpha}_{\text{д}} = -A_1 \frac{\bar{\omega}_e^2}{4} i_{\text{ц}}^2 \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right). \quad (7.10)$$

Після підстановки (7.8) та (7.10) у (7.6), отримаємо

$$A_1 \left( k_{\text{дм}}^2 - \left( \frac{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}{2} \right)^2 \right) \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right) - A_2 k_{\text{дм}}^2 \text{sign}(\dot{\alpha}_{\text{д}}) = \frac{\bar{M}_i \cdot K_1}{2I_{\text{пркв}}^{\text{гр}}} \times$$

$$\times \left( \eta_{\text{мдв}} - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{\left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} \right) \sin \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t \right) -$$

$$- \text{sign}(\dot{\alpha}_{\text{д}}) \frac{M_{\text{тр}}}{I_{\text{пркв}}^{\text{тр}}}, \quad (7.11)$$

звідки визначимо

$$A_1 = \frac{\bar{M}_i \cdot K_1}{2I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \left( k_{\text{дм}}^2 - \left( \frac{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}{2} \right)^2 \right)} \times$$

$$\times \left( \eta_{\text{мдв}} - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{\left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} \right); \quad (7.12)$$

$$A_2 = \frac{M_{\text{тр}}}{I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} k_{\text{дм}}^2}. \quad (7.13)$$

Після підстановки (7.12) та (7.13) у (7.8) отримаємо

$$\alpha_d = \frac{\bar{M}_i \cdot K_1}{2I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \left( k_{\text{дм}}^2 - \left( \frac{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}{2} \right)^2 \right)} \left( \eta_{\text{мдв}} - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{\left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} \right) \times$$

$$\times \sin \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t \right) - \frac{M_{\text{тр}}}{I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} k_{\text{дм}}^2} \text{sign}(\dot{\alpha}_d). \quad (7.14)$$

Отже, кутова швидкість визначається як

$$\dot{\alpha}_d = \frac{\bar{M}_i \cdot K_1}{I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \left( \left( \frac{2k_{\text{дм}}}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 - 1 \right) \bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \left( \eta_{\text{мдв}} - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{\left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} \right) \cos \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t \right), \quad (7.15)$$

а кутове прискорення

$$\ddot{\alpha}_d = \frac{\bar{M}_i \cdot K_1}{2I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \left( 1 - \left( \frac{2k_{\text{дм}}}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} \left( \eta_{\text{мдв}} - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{\left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} \right) \sin \left( \frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t \right), \quad (7.16)$$

На рис. 7.1 наведено графіки функцій  $\alpha_d(t)$  та  $\dot{\alpha}_d(t)$ . Крива 1, яка визначається за допомогою залежності (7.14), відповідає відносному кутовому переміщенню ланок демпфера при  $M_{\text{тр}} = 0$ . Крива 2 визначає закон зміни швидкості відносного кутового переміщення ланок демпфера крутильних коливань (залежність (7.15)). Крива 3 відповідає залежності (7.14), що описує закон зміни відносного кутового переміщення ланок демпфера крутильних коливань при  $M_{\text{тр}} \neq 0$ .

Потужність тертя на фрикційних поверхнях демпфера

$$N_{\text{тр}} = |M_{\text{тр}} \cdot \dot{\alpha}_d| = M_{\text{тр}} |\dot{\alpha}_d|. \quad (7.17)$$

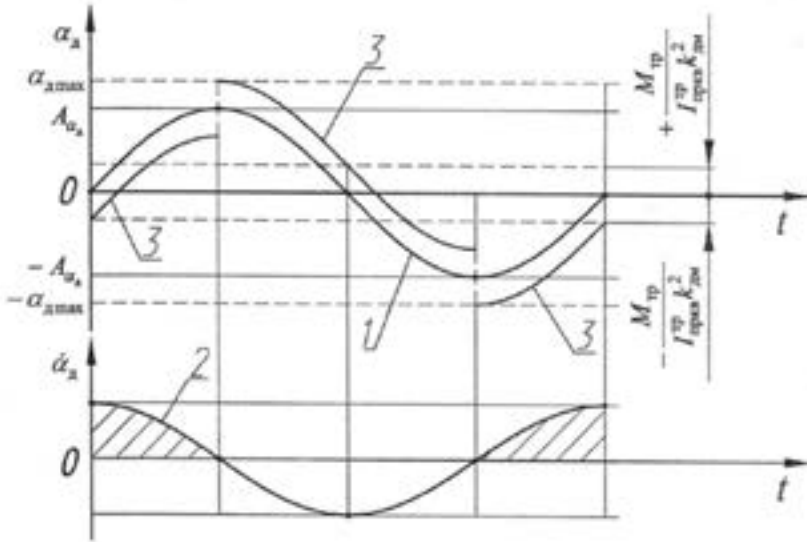


Рис. 7.1. Графіки функцій  $\alpha_d(t)$  і  $\dot{\alpha}_d(t)$  : 1 –  $\alpha_d(t)$  при  $M_{тр} = 0$ ; 2 –  $\alpha_d(t)$ ; 3 –  $\alpha_d(t)$  при  $M_{тр} \neq 0$

Після підстановки виразу (7.15) у (7.17) отримаємо

$$N_{тр} = \frac{M_{тр} \cdot \bar{M}_i \cdot K_1}{I_{пркв}^{тр} \cdot \bar{\omega}_e \cdot i_{ц}} \left( \eta_{мдв} - \right)$$

$$-\frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{\left(I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}}\right) \left(1 - \left(\frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}\right)^2\right)} \left| \frac{\cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right)}{\left(\frac{2k_{\text{дм}}}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}\right)^2 - 1} \right|. \quad (7.18)$$

Миттєвий дисипативний ККД демпфера крутильних коливань

$$\eta_{\text{дмгн}}^{\text{дисс}} = 1 - \frac{N_{\text{тр}}}{M_e \cdot \omega_e}. \quad (7.19)$$

Після підстановки (6.15), (6.22) та (7.18) до (7.19) з урахуванням (4.15) та (4.16) остаточно отримаємо

$$\eta_{\text{ДМГН}}^{\text{дисс}} = 1 -$$

$$\left[ \frac{M_{\text{тр}} \cdot K_1}{I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \cdot \bar{\omega}_e^2 \cdot i_{\text{ц}}} \left| \frac{\cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right)}{\left(\frac{2k_{\text{дм}}}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}\right)^2 - 1} \right| \right] \times$$

$$\left[ \eta_{\text{мдв}} - \frac{1}{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}} + \frac{K_1}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right) \right]$$

$$\left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)$$

$$\times \left[ \frac{1}{1 - \frac{\bar{M}_i \cdot K_1 \cos\left(\frac{\bar{\omega}_e}{2} i_{\text{ц}} \cdot t\right)}{\bar{\omega}_e^2 \cdot i_{\text{ц}} \left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)}} \right]. \quad (7.20)$$

Визначимо цикловий дисипативний ККД демфера крутильних коливань. Робота двигуна за один цикл зміни крутного моменту двигуна

$$A_e = \int_0^{T_1} N_e dt. \quad (7.21)$$

Після підстановки рівняння (6.21) у вираз (7.21) та проведення інтегрування за часом в інтервалі від  $t = 0$  до  $t = T_1 = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{4\pi}{\bar{\omega}_e \cdot i_{ц}}$  (див. залежності (4.8) та (4.9)) отримаємо

$$A_e = \bar{N}_i \cdot \eta_{мдв} \frac{4\pi}{\bar{\omega}_e \cdot i_{ц}} = \bar{M}_i \cdot \eta_{мдв} \frac{4\pi}{i_{ц}} = \bar{M}_e \frac{4\pi}{i_{ц}}. \quad (7.22)$$

Робота тертя на фрикційних поверхнях демпфера за один цикл зміни крутного моменту двигуна

$$A_{тр} = \int_0^{2\pi} |M_{тр} d\alpha_{д}| = M_{тр} \int_0^{2\pi} |d\alpha_{д}| = M_{тр} \alpha_{д\Sigma}. \quad (7.23)$$

де  $\alpha_{д\Sigma}$  – сумарний кут повороту фрикційних поверхонь демпфера, що визначається з урахуванням напрямку обертання за один цикл зміни крутного моменту.

Вказану величину  $\alpha_{д\Sigma}$  зручно визначати за допомогою графіка, наведеного на рис. 7.1. Таким чином

$$\alpha_{д\Sigma} = 4\alpha_{д\max}, \quad (7.24)$$

де  $\alpha_{д\max}$  – максимальне значення кута відносного зміщення ланок демпфера крутильних коливань,

$$\alpha_{\text{дmax}} = A_{\alpha_{\text{д}}} + \frac{M_{\text{тр}}}{I_{\text{пркв}} k_{\text{дм}}^2}; \quad (7.25)$$

$A_{\alpha_{\text{д}}}$  – амплітуда коливань кута відносного зміщення ланок демпфера крутильних коливань

$$A_{\alpha_{\text{д}}} = \frac{\bar{M}_i \cdot K_1}{2I_{\text{пркв}} \left( k_{\text{дм}}^2 - \left( \frac{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}{2} \right)^2 \right)} \left( \eta_{\text{мдв}} - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{\left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} \right). \quad (7.26)$$

Таким чином, підставляючи вирази (7.25) та (7.26) у рівняння (7.24), отримаємо

$$\alpha_{\text{д}\Sigma} = \frac{2\bar{M}_i \cdot K_1}{I_{\text{пркв}} \left( k_{\text{дм}}^2 - \left( \frac{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}{2} \right)^2 \right)} \left( \eta_{\text{мдв}} - \right)$$

$$- \frac{I_{\text{пр}}^{\text{ДВ}}}{\left( I_{\text{пр}}^{\text{ДВ}} + I_{\text{пркв}}^{\text{ТР}} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} + \frac{4M_{\text{тр}}}{I_{\text{пркв}}^{\text{ТР}} k_{\text{дм}}^2}. \quad (7.27)$$

Цикловий дисипативний ККД демпфера крутильних коливань може бути визначений як

$$\eta_{\text{дискл}}^{\text{дисс}} = 1 - \frac{A_{\text{тр}}}{A_e} = 1 - \frac{M_{\text{тр}} \cdot \alpha_{\text{д}\Sigma}}{A_e}. \quad (7.28)$$

Після підстановки (7.22) та (7.27) у (7.28), отримаємо

$$\eta_{\text{дискл}}^{\text{дисс}} = 1 - \frac{M_{\text{тр}}^2 \cdot i_{\text{ц}}}{\pi \cdot I_{\text{пркв}}^{\text{ТР}} k_{\text{дм}}^2 \bar{M}_i \cdot \eta_{\text{мдв}}} - \frac{M_{\text{тр}} \cdot K_1 \cdot i_{\text{ц}}}{2\pi \cdot I_{\text{пркв}}^{\text{ТР}} \left( k_{\text{дм}}^2 - \left( \frac{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}{2} \right)^2 \right)} \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{ДВ}}}{\left( I_{\text{пр}}^{\text{ДВ}} + I_{\text{пркв}}^{\text{ТР}} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right)} \eta_{\text{мдв}} \right], \quad (7.29)$$

а з урахуванням співвідношень (4.15) і (4.16) вираз (7.29) перетворюється на наступний вид

$$\eta_{\text{цикл}}^{\text{дисс}} = 1 - \frac{M_{\text{тр}}^2 \cdot i_{\text{ц}}}{\pi \cdot I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} k_{\text{дм}}^2 \bar{M}_i \cdot \eta_{\text{мдв}}} - \frac{M_{\text{тр}} \cdot K_1 \cdot i_{\text{ц}}}{2\pi \cdot I_{\text{пркв}}^{\text{тр}} \left( k_{\text{дм}}^2 - \left( \frac{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}}{2} \right)^2 \right)} \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{I_{\text{пр}}^{\text{дв}}}{\left( I_{\text{пр}}^{\text{дв}} + I_{\text{прI}}^{\text{тр}} + I_{\text{прII}}^{\text{тр}} + \frac{mr_{\text{к}}^2}{u_0^2 u_{\text{к}}^2} \right) \left( 1 - \left( \frac{2k}{\bar{\omega}_e \cdot i_{\text{ц}}} \right)^2 \right) \eta_{\text{мдв}}} \right]. \quad (7.30)$$

Аналіз рівняння (7.30) показує, що зі зростанням значень величин  $M_{\text{тр}}$ ,  $u_0$  і  $u_{\text{к}}$  відбувається зменшення циклового дисипативного ККД демпфера крутильних коливань муфти зчеплення моторно-трансмісійної установки транспортно-тягових машин.

## **РОЗДІЛ 8. ВПЛИВ НЕРІВНОМІРНОСТІ КРУТНОГО МОМЕНТУ ДВЗ І ТЯГОВОЇ СИЛИ НА ДОДАТКОВІ ВТРАТИ ЕНЕРГІЇ ПРИ УСТАЛЕНОМУ РУСІ АВТОМОБІЛЯ**

### **8.1. Загальний підхід**

При усталеному русі колісних машин виникають додаткові втрати енергії, оскільки зазначений рух супроводжується появою поздовжніх лінійних прискорень, що викликає коливання лінійної швидкості машини щодо свого середнього значення. Усталений рух транспортно-тягової машини відбувається при постійному значенні середньої швидкості, а рівномірний – при постійному значенні миттєвої швидкості руху.

При рівномірному русі, здійснюваному при постійній миттєвій швидкості колісних машин, енергія двигуна витрачається на подолання сил опору руху. У цьому випадку тягова сила на ведучих колесах у будь-який момент часу дорівнює сумі сил опору руху, а прискорення машини дорівнює нулю в будь-який момент часу. При усталеному русі машини рівновага (на відміну від рівномірного руху) є не статична, а динамічна. Це обумовлено періодичною зміною як тягової сили, так і сил опору руху й призводить до появи лінійних прискорень, що викликають періодичну (коливальну) зміну лінійної швидкості транспортно-тягової машини. Очевидно, що будь-які зміни швидкості призводять до додаткової витрати енергії машини. Однак у відомій літературі, присвяченій енергетичній ефективності транспортно-тягових машин, дослідженню зазначеного питання не приділено потрібної уваги.

### **8.2. Транспортні операції**

Транспортні роботи виконуються колісними машинами (авто-транспортними засобами і тракторами) на дорогах із твердим покрит-

тям. У цьому випадку амплітуда коливання величини сил опору руху незначні в порівнянні з амплітудою коливань тягової сили машини. Приймаючи суму сил опору руху  $P_{c\Sigma}$  величиною постійною, представимо рівняння динаміки поступального руху транспортної машини у вигляді

$$m \cdot \dot{V} = P_{\kappa} - P_{c\Sigma}, \quad (8.1)$$

де  $m$  – загальна маса машини;

$\dot{V}$  – поздовжнє лінійне прискорення машини;

$P_{\kappa}$  – сумарна тягова (рушійна) сила на ведучих колесах.

Сумарна тягова сила на ведучих колесах, з огляду на нерівномірність крутильного моменту двигуна, змінюється за періодичним законом. При моделюванні крутного моменту двигуна внутрішнього згорання був запропонований гармонійний закон. Тому можна також прийняти гармонійний закон для моделювання сумарної тягової сили на ведучих колесах

$$P_{\kappa} = \bar{P}_{\kappa} + A_{p\kappa} \cdot \sin(\Omega \cdot t), \quad (8.2)$$

де  $\bar{P}_{\kappa}$  – середнє значення сумарної тягової сили на ведучих колесах;

$A_{p\kappa}$  – амплітуда коливань сумарної тягової сили на ведучих колесах (залежить від амплітуди коливань крутного моменту ДВЗ і передатного числа трансмісії);

$\Omega$  – кругова частота коливань крутного моменту ДВЗ (дорівнює круговій частоті коливань сумарної тягової сили на ведучих колесах);

$t$  – час.

Після підстановки рівняння (8.2) у вираз (8.1) і невеликих перетворень одержимо

$$\dot{V} = \frac{\bar{P}_k - P_{c\Sigma}}{m} + \frac{A_{pk}}{m} \cdot \sin(\Omega \cdot t). \quad (8.3)$$

Інтегрування диференціального рівняння (8.3) з відокремленими змінними і врахування граничної умови дозволяє визначити зміну швидкості поступального руху машини

$$V = V_n + \frac{\bar{P}_k - P_{c\Sigma}}{m} \cdot t + \frac{A_{pk}}{m \cdot \Omega} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t)], \quad (8.4)$$

де  $V_n$  – початкова в циклі зміни (при  $t = 0$ ) лінійна швидкість машини.

При усталеному русі лінійна швидкість машини коливається навколо середньої величини  $\bar{V}$ . Другий член у правій частині рівняння (8.4) є аперіодичним. Оскільки в усталеному русі це неможливо, то умовою зазначеного руху буде

$$\bar{P}_k - P_{c\Sigma} = 0 \quad (8.5)$$

або

$$\bar{P}_k = P_{c\Sigma}. \quad (8.6)$$

Таким чином, при усталеному русі машини на транспортних операціях (при  $P_{c\Sigma} = const$ ) виконання рівності (8.6) є обов'язковим.

З урахуванням рівняння (8.5) вираз (8.4) прийме наступний вигляд

$$V = V_n + \frac{A_{pk}}{m \cdot \Omega} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t)]. \quad (8.7)$$

На рис. 8.1 наведені графіки функцій  $P_{\kappa}(t)$  і  $V(t)$ . Аналіз цих кривих показує, що коливання лінійної швидкості  $V$  машини по фазі зсунені щодо коливань тягової сили на кут  $\frac{\pi}{2}$ .

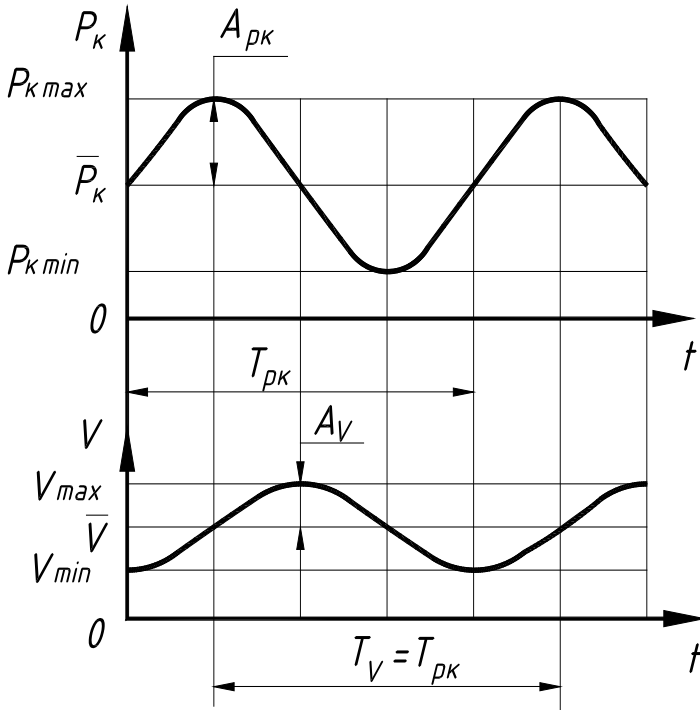


Рис. 8.1. Залежності  $P_{\kappa}(t)$  і  $V(t)$  при усталеному режимі руху машини

Рівняння (8.7) можна представити у вигляді

$$V = \bar{V} - A_V \cdot \cos(\Omega \cdot t), \quad (8.8)$$

де  $A_V$  – амплітуда коливань лінійної швидкості машини,

$$A_V = \frac{A_{pk}}{m \cdot \Omega}; \quad (8.9)$$

$\bar{V}$  – середня лінійна швидкість машини,

$$\bar{V} = V_n + \frac{A_{pk}}{m \cdot \Omega}. \quad (8.10)$$

Кінетична енергія поступального руху машини (з урахуванням рівнянь (8.8), (8.9), (8.10))

$$W_{кін} = \frac{m}{2} \cdot V^2 = \frac{m}{2} \cdot \left[ \bar{V} - \frac{A_{pk}}{m \cdot \Omega} \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right]^2. \quad (8.11)$$

Провівши перетворення, представимо рівняння (8.11) у вигляді

$$W_{кін} = \frac{m \cdot \bar{V}^2}{2} - \frac{A_{pk}}{\Omega} \cdot \cos(\Omega \cdot t) \cdot \left[ \bar{V} - \frac{A_{pk}}{2 \cdot m \cdot \Omega} \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right]. \quad (8.12)$$

У правій частині рівняння (8.12) перший доданок визначає середній рівень кінетичної енергії поступального руху машини, а другий доданок – її зміна протягом одного циклу коливань лінійної швидкості. Вказана зміна кінетичної енергії

$$\Delta W_{кін} = -\frac{A_{pk}}{\Omega} \cdot \cos(\Omega \cdot t) \cdot \left[ \bar{V} - \frac{A_{pk}}{2 \cdot m \cdot \Omega} \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right]. \quad (8.13)$$

При  $t = 0$   $V = V_{\min}$  і  $\Delta W_{\text{кін}} = (\Delta W_{\text{кін}})_{\min}$ . Таким чином

$$(\Delta W_{\text{кін}})_{\min} = -\frac{A_{\text{рк}}}{\Omega} \cdot \left[ \bar{V} - \frac{A_{\text{рк}}}{2 \cdot m \cdot \Omega} \right]. \quad (8.14)$$

При  $\Omega \cdot t = \pi$   $V = V_{\max}$  і  $\Delta W_{\text{кін}} = (\Delta W_{\text{кін}})_{\max}$ . Тобто

$$(\Delta W_{\text{кін}})_{\max} = \frac{A_{\text{рк}}}{\Omega} \cdot \left[ \bar{V} + \frac{A_{\text{рк}}}{2 \cdot m \cdot \Omega} \right]. \quad (8.15)$$

Максимальна зміна кінетичної енергії поступального руху машини

$$\begin{aligned} (\Delta W_{\text{кін}})_{\max} &= (W_{\text{кін}})_{\max} - (W_{\text{кін}})_{\min} = \\ &= (\Delta W_{\text{кін}})_{\max} - (\Delta W_{\text{кін}})_{\min} = \frac{2 \cdot A_{\text{рк}}}{\Omega} \cdot \bar{V}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Визначимо максимальну зміну кінетичної енергії, що характеризує додаткові втрати енергії за час  $T_v = T_{\text{рк}}$ . Додаткові втрати енергії за час  $t$

$$\Delta W = (\Delta W_{\text{кін}})_{\max} \cdot \frac{t}{T_{\text{рк}}} = (\Delta W_{\text{кін}})_{\max} \cdot \frac{\Omega \cdot t}{2 \cdot \pi}. \quad (8.17)$$

Підставляючи (8.16) в (8.17), одержимо

$$\Delta W = \frac{A_{pk}}{\pi} \cdot \bar{V} \cdot t = \frac{A_{pk}}{\pi} \cdot S, \quad (8.18)$$

де  $S$  – довжина шляху, пройденого машиною,

$$S = \bar{V} \cdot t. \quad (8.19)$$

Таким чином, при усталеному русі машини на транспортних операціях (при  $P_{c\Sigma} = \text{const}$ ) додаткова витрата енергії пропорційна пройденому шляху й амплітуді коливань сумарної тягової сили на ведучих колесах.

### 8.3. Технологічні операції

При виконанні технологічних операцій транспортно-тягова машина (машинно-тракторний агрегат) рухається по опорній поверхні, що деформується, крім того, робочі органи причіпних або навісних машин, у взаємодії з ґрунтом, створюють додаткові сили опору руху. У цьому випадку залежність для визначення  $P_{c\Sigma}$  має вигляд

$$P_{c\Sigma} = \bar{P}_{c\Sigma} + A_{pc} \cdot \sin(\Omega_1 \cdot t + \Delta), \quad (8.20)$$

де  $\bar{P}_{c\Sigma}$  – середнє значення сумарної сили опору руху;

$A_{pc}$  – амплітуда коливань сумарної сили опору руху;

$\Omega_1$  – кругова частота коливань сумарної сили опору руху;

$\Delta$  – початковий зсув по фазі між коливаннями тягової сили і сумарної сили опору при  $t = 0$ .

Рівняння динаміки має наступний вигляд:

$$m \cdot \dot{V} = \bar{P}_\kappa - \bar{P}_{c\Sigma} + A_{p\kappa} \cdot \sin(\Omega \cdot t) - A_{pc} \cdot \sin(\Omega_1 \cdot t + \Delta) \quad (8.21)$$

або

$$\dot{V} = \frac{\bar{P}_\kappa - \bar{P}_{c\Sigma}}{m} + \frac{A_{p\kappa}}{m} \cdot \sin(\Omega \cdot t) - \frac{A_{pc}}{m} \cdot \sin(\Omega_1 \cdot t + \Delta). \quad (8.22)$$

Інтегруючи рівняння (8.22) з урахуванням граничної умови (при  $t = 0$ ;  $V = V_n$ ), отримуємо

$$V = V_n + \frac{\bar{P}_\kappa - \bar{P}_{c\Sigma}}{m} \cdot t + \frac{A_{p\kappa}}{m \cdot \Omega} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t)] - \frac{A_{pc}}{m \cdot \Omega_1} \cdot [\cos \Delta - \cos(\Omega_1 \cdot t + \Delta)], \quad (8.23)$$

де  $V_n$  – початкова швидкість тягово-транспортного засобу, відповідна  $t = 0$ .

При сталому русі, коли

$$\bar{P}_\kappa - \bar{P}_{c\Sigma} = 0, \quad (8.24)$$

рівняння (8.23) спроститься

$$V = V_n + \frac{A_{p\kappa}}{m \cdot \Omega} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t)] -$$

$$-\frac{A_{pc}}{m \cdot \Omega_1} \cdot [\cos \Delta - \cos(\Omega_1 \cdot t + \Delta)]. \quad (8.25)$$

Середньо значення лінійної швидкості

$$\bar{V} = V_n + \frac{A_{pk}}{m \cdot \Omega} - \frac{A_{pc}}{m \cdot \Omega_1} \cos \Delta. \quad (8.26)$$

Вираз (8.25) з урахуванням (8.26) матиме вигляд

$$V = \bar{V} - \frac{A_{pk}}{m \cdot \Omega} \cos(\Omega \cdot t) + \frac{A_{pc}}{m \cdot \Omega_1} [\cos(\Omega_1 \cdot t + \Delta)]. \quad (8.27)$$

Мінімальне значення швидкості реалізується при  $t = 0$  і дорівнює  $\bar{V}$ .

Для вирішення задачі визначення додаткових втрат енергії, що обумовлені коливанням тягової сили і сумарною силою опору руху, скористаємося методом парціальних прискорень. Рівняння (8.22) представляє собою рівняння парціальних прискорень, інтегрування якого дало змогу отримати рівняння парціальних швидкостей (8.25), яке наведемо у вигляді

$$V = V_n + V_{pk} + V_{pc}, \quad (8.28)$$

де  $V_{pk}$ ,  $V_{pc}$  – парціальні швидкості, що створюються змінами тягової сили  $P_k$  в сумарною силою опору руху  $P_{cs}$ , відповідно,

$$V_{pk} = \frac{A_{pk}}{m \cdot \Omega} \cos(\Omega \cdot t); \quad (8.29)$$

$$V_{pc} = \frac{A_{pc}}{m \cdot \Omega_1} [\cos(\Omega_1 \cdot t + \Delta)]. \quad (8.30)$$

Парціальні швидкості  $V_{pk}$  и  $V_{pc}$  змінюються незалежно одна від одної за своїми законами, в чому проявляється принцип суперпозиції в механіці.

Падіння кінетичної енергії машини за один період коливання тягової сили буде дорівнювати

$$\Delta W_{pkmax} = \frac{m}{2} (V_{pkmax}^2 - V_{pkmin}^2) = m \Delta V_{pkmax} \cdot \bar{V}, \quad (8.31)$$

де  $\Delta V_{pkmax}$  – максимальна зміна парціальної швидкості, що створюється тяговою силою за один період її коливання,

$$\Delta V_{pkmax} = V_{pkmax} - V_{pkmin}. \quad (8.32)$$

З рівняння (8.29) визначимо

$$V_{pkmax} = \frac{2A_{pk}}{m\Omega}; \quad (8.33)$$

$$V_{pkmin} = 0. \quad (8.34)$$

Таким чином

$$\Delta V_{pkmax} = V_{pkmax} = \frac{2A_{pk}}{m\Omega}. \quad (8.35)$$

Падіння кінетичної енергії машини за один період коливання сумарної сили опору руху

$$\Delta W_{pc\max} = \frac{m}{2} (V_{pc\max}^2 - V_{pc\min}^2) = m \Delta V_{pc\max} \cdot \bar{V}, \quad (8.36)$$

де  $\Delta V_{pc\max}$  – максимальна зміна парціальної швидкості, що створюється сумарною силою опору руху за один період її коливання,

$$\Delta V_{pc\max} = V_{pc\max} - V_{pc\min}. \quad (8.37)$$

З рівняння (8.30) визначимо

$$V_{pc\max} = \frac{A_{pc}}{m\Omega_1} (1 - \cos \Delta); \quad (8.38)$$

$$V_{pc\min} = -\frac{A_{pc}}{m\Omega_1} (1 - \cos \Delta), \quad (8.39)$$

тоді

$$\Delta V_{pc\max} = \frac{2A_{pc}}{m\Omega_1}. \quad (8.40)$$

Втрати енергії машини за час  $t$ , обумовлені коливаннями тягової сили  $P_k$  і сумарної сили опору руху  $P_{c\varepsilon}$

$$\Delta W = \left( \frac{\Delta W_{pk\max}}{T_{pk}} + \frac{\Delta W_{pc\max}}{T_{pc}} \right) t, \quad (8.41)$$

де  $T_{pk}$ ,  $T_{pc}$  – періоди коливань тягової сили  $P_k$  і сумарної сили опору руху  $P_{c\Sigma}$ ,

$$T_{pk} \frac{2\pi}{\Omega}; \quad (8.42)$$

$$T_{pk} \frac{2\pi}{\Omega_1}. \quad (8.43)$$

Підставляючи у вираз (8.41) рівняння (8.31), (8.36), (8.42), (8.43), з урахуванням (8.35) і (8.40) отримаємо

$$\Delta W = \frac{A_{pk} + A_{pc}}{\pi} \bar{V} \cdot t. \quad (8.44)$$

Шлях, який проходить машина за час  $t$  при сталому русі,

$$S = \bar{V} \cdot t. \quad (8.45)$$

Або, з урахуванням співвідношення (9.7),

$$S = (V_n + \frac{A_{pk}}{m\Omega} - \frac{A_{pc}}{m\Omega_1} \cos \Delta) t. \quad (8.46)$$

Рівняння (8.44) з урахуванням (8.45) прийме вид

$$\Delta W = \frac{A_{pk} + A_{pc}}{\pi} S. \quad (8.47)$$

Рівняння (8.44) і (8.47) дозволяють визначити додаткову витрату енергії машини, обумовлену коливаннями тягової сили і сумарної сили опору руху.

#### **8.4. Оцінка зниження енергетичних втрат автомобіля з комбінованою енергетичною установкою**

##### **8.4.1. Метод оцінювання непродуктивних втрат енергії на рух автомобіля, як обумовлені нерівномірністю крутного моменту ДВЗ**

При використанні механічного приводу від ДВЗ крутний момент на ведучих колесах автомобіля визначається залежністю

$$M_{\kappa} = \frac{r_{\partial}}{n} \left( \sum P_o + m_a \dot{V}_a \right) = \frac{r_{\partial}}{n} \left[ \bar{P}_{\kappa} + A_{P\kappa} \sin(\Omega t) \right], \quad (8.48)$$

де  $r_{\partial}$  – динамічний радіус ведучих коліс;

$n$  – число ведучих коліс автомобіля;

$\sum P_o$  – сума сил зовнішнього опору руху автомобіля;

$m_a$  – маса автомобіля;

$\dot{V}_a$  – лінійне прискорення автомобіля.

При сталому русі автомобіля середній крутний момент на колесі, що підведений від ДВЗ, дорівнює моменту опору руху [3]. У цьому випадку рівняння (8.48) прийме вигляд

$$M_{\kappa} = \frac{r_{\partial}}{n} \cdot \sum P_o = \frac{r_{\partial}}{n} \bar{P}_{\kappa} = \bar{M}_{\kappa}, \quad (8.49)$$

де  $\bar{M}_{\kappa}$  – середній крутний момент на колесі,

$$\overline{M}_\kappa = \frac{\overline{M}_i \cdot U_{mp} \cdot \eta_{mp} \cdot \eta_{мдв}}{n}; \quad (8.50)$$

$U_{mp}$  – передатне число трансмісії;

$\eta_{mp}$  – ККД трансмісії;

$\eta_{мдв}$  – механічний ККД ДВЗ;

$\overline{M}_i$  – середній індикаторний момент ДВЗ.

Індикаторний крутний момент ДВЗ [2]

$$M_i = \overline{M}_i + 0,5\overline{M}_i \cdot K_1 \cdot \sin\left(\frac{\overline{\omega}_e}{2} \cdot i_y \cdot t\right), \quad (8.51)$$

де  $K_1$  – коефіцієнт нерівномірності крутного моменту ДВЗ [2, 3],

$$K_1 = 0,08 + \frac{14,44}{i_y}; \quad (8.52)$$

$i_y$  – число циліндрів ДВЗ;

$\frac{\overline{\omega}_e}{2}$  – середнє значення кутової швидкості колінчастого валу ДВЗ.

Тоді крутний момент на колесі може бути визначено як

$$M_\kappa = \frac{M_i \cdot U_{mp} \cdot \eta_{mp} \cdot \eta_{мдв}}{n} = \frac{U_{mp} \cdot \eta_{mp} \cdot \eta_{мдв}}{n} \times \left[ \overline{M}_i + 0,5\overline{M}_i \cdot K_1 \cdot \sin\left(\frac{\overline{\omega}_e}{2} \cdot i_y \cdot t\right) \right]. \quad (8.53)$$

Зіставляючи рівняння (8.48) та (8.53), можна визначити

$$\frac{\overline{P}_\kappa}{n} = \frac{U_{тр} \cdot \eta_{тр} \cdot \eta_{мдв}}{n \cdot r_\partial} \overline{M}_i \quad (8.54)$$

або

$$\overline{P}_\kappa = \frac{\overline{M}_i \cdot U_{тр} \cdot \eta_{тр} \cdot \eta_{мдв}}{r_\partial}. \quad (8.55)$$

Тоді амплітуда коливань сумарної тягової сили буде дорівнювати

$$A_{рк} = \frac{A_{мк} \cdot n}{r_\partial} = \frac{U_{тр} \cdot \eta_{тр} \cdot \eta_{мдв} \cdot K_1}{2 \cdot r_\partial} \cdot \overline{M}_i. \quad (8.56)$$

Додаткові витрати енергії на рух машини

$$\Delta W = \frac{U_{тр} \cdot \eta_{тр} \cdot \eta_{мдв} \cdot K_1}{2\pi \cdot r_\partial} \cdot \overline{M}_i \cdot S. \quad (8.57)$$

При використанні комбінованого електромеханічного приводу [3] ведучого колеса крутний момент на колесі дорівнює

$$M_\kappa = M_n = M_1 + M_3, \quad (8.58)$$

де  $M_n$  – крутний момент на валу водила Н (який дорівнює крутному моменту на колесі);

$M_1$  – крутний момент на сонячній шестерні 1 (який підводиться від ДВЗ);

$M_3$  – крутний момент на епіциклі 3 (який підводиться від електродвигуна).

У цьому випадку вираз (8.47) прийме вигляд

$$M_{\kappa} = \frac{r_{\partial}}{n} \left( \sum P_o + m_a \dot{V}_a \right) = \frac{U_{mp} \cdot \eta_{mp} \cdot \eta_{мдв}}{n} \times \\ \times \left[ \overline{M}'_i + 0,5 \overline{M}'_i \cdot K_1 \cdot \sin \left( \frac{\overline{\omega}_e}{2} \cdot i_y \cdot t \right) \right] + M_{ед}, \quad (8.59)$$

де  $M_{ед}$  – момент, що підведений від електродвигуна  $M_{ед} = M_n$ ;

$\overline{M}'_i$  – індикаторний крутний момент ДВЗ, що реалізується при гібридному приводі ведучих коліс,  $\overline{M}'_i < \overline{M}_i$ .

У сталому режимі руху

$$M_{\kappa} = \frac{r_{\partial}}{n} \sum P_o = \frac{U_{mp} \cdot \eta_{mp} \cdot \eta_{мдв}}{n} \cdot \overline{M}'_i + M_{ед}. \quad (8.60)$$

Прирівнюючи праві частини (8.50) та (8.60), визначимо

$$\overline{M}'_i = \overline{M}_i - M_{ед} \frac{n}{U_{mp} \cdot \eta_{mp} \cdot \eta_{мдв}}. \quad (8.61)$$

Підставляючи у рівняння (8.56) рівняння (8.61), отримаємо

$$A_{рк} = \frac{K_1}{2r_{\partial}} \left( \overline{M}_i \cdot U_{mp} \cdot \eta_{mp} \cdot \eta_{мдв} - M_{ед} \cdot n \right). \quad (8.62)$$

З урахуванням співвідношень (8.50) та (8.49) вираз (8.62) прийме вигляд

$$A_{pk} = \frac{K_1}{2} \left( \sum P_o - M_{e\partial} \frac{n}{r_\partial} \right) = \frac{K_1}{2} \sum P_o \left( 1 - \frac{M_{e\partial} \frac{n}{r_\partial}}{\sum P_o} \right). \quad (8.63)$$

Підставляючи співвідношення (8.63) у вираз для визначення додаткових втрат енергії, отримаємо для комбінованого електромеханічного приводу ведучих коліс

$$\Delta W = \frac{K_1}{2\pi} \sum P_o \cdot S \left( 1 - \frac{M_{e\partial} \cdot n}{r_\partial \cdot \sum P_o} \right). \quad (8.64)$$

У виразі (8.64) виділимо долю крутного моменту на ведучих колесах, яка створюється електродвигуном

$$K_{e\partial} = \frac{M_{e\partial} \cdot n}{r_\partial \cdot \sum P_o}. \quad (8.65)$$

#### **8.4.2. Коефіцієнт непродуктивних втрат енергії автомобіля з комбінованою енергетичною установкою**

У рівнянні (8.64) робота сил зовнішнього опору руху автомобіля

$$A_o = S \cdot \sum P_o. \quad (8.66)$$

Коефіцієнт відносних додаткових втрат енергії, що обумовлено коливаннями крутного моменту ДВЗ

$$\eta_{\Delta W} = \frac{\Delta W}{A_o} = \frac{K_1}{2\pi} (1 - K_{e\partial}). \quad (8.67)$$

Назвемо запропонований показник коефіцієнтом непродуктивних втрат, що враховує вплив нерівномірності крутного моменту ДВЗ [3]. Після підстановки співвідношення для  $K_1$  у рівняння (8.67) остаточно отримаємо

$$\eta_{\Delta W} = \frac{0,04 + \frac{7,22}{i_u}}{\pi} (1 - K_{e\partial}). \quad (8.68)$$

У таблиці 8.1 наведено результати розрахунку показника  $\eta_{\Delta W}$  для комбінованої енергетичної установки автомобіля з різним числом  $i_u$  циліндрів ДВЗ і коефіцієнті  $K_{e\partial}$  [3] за формулою (8.68).

**Таблиця 8.1. Результати розрахунку коефіцієнту  $\eta_{\Delta W}$  додаткових втрат**

$i_u$	$\eta_{\Delta W}$					
	$K_{e\partial} = 0$	$K_{e\partial} = 0,2$	$K_{e\partial} = 0,4$	$K_{e\partial} = 0,6$	$K_{e\partial} = 0,8$	$K_{e\partial} = 1,0$
1	2,310	1,849	1,386	0,924	0,462	0
2	1,162	0,929	0,697	0,464	0,232	0
4	0,587	0,470	0,352	0,235	0,117	0
6	0,396	0,317	0,237	0,158	0,079	0
8	0,300	0,240	0,180	0,120	0,060	0
10	0,242	0,194	0,145	0,097	0,048	0
12	0,204	0,163	0,123	0,082	0,040	0

Таким чином, у результаті проведеного дослідження запропоновано метод зниження непродуктивних втрат енергії (потужності) ДВЗ шляхом зменшення величини амплітуди коливань тяглової сили (при використанні комбінованої енергетичної установки). Запропоновано також показник – коефіцієнт непродуктивних втрат енергії, що пред-

ставляє собою співвідношення додаткової витрати енергії до роботи сил зовнішнього опору руху автомобіля.

Отриманий аналітичний вираз для коефіцієнта непродуктивних втрат енергії автомобіля з комбінованою енергетичною установкою дозволив визначити наступне:

– найбільше значення коефіцієнт непродуктивних втрат енергії має для одноциліндрового двигуна при відсутності електричного приводу ( $K_{\text{ед}} = 0$ ); це значення дорівнює  $\eta_{\Delta W} = 2,31$ ;

– при числі циліндрів ДВЗ  $i_u = 12$  коефіцієнт  $\eta_{\Delta W}$  складає 0,204 при  $K_{\text{ед}} = 0$ ;

– застосування комбінованої енергетичної установки дозволяє знизити  $\eta_{\Delta W}$ , наприклад, для шестициліндрового двигуна від 0,396 при  $K_{\text{ед}} = 0$  до 0,158 при  $K_{\text{ед}} = 0,6$ , що дозволяє знизити коефіцієнт непродуктивних втрат енергії майже на 40 %.

Отримані результати дозволяють дати рекомендації щодо обґрунтування вимог до автомобілів з комбінованою енергетичною установкою не тільки на стадії її проектування, а й модернізації існуючих зразків.

#### **8.4.3. Оцінка впливу поздовжньої податливості ходової частини на додаткові втрати енергії для комбінованої енергетичної установки при сталому русі автомобіля**

При використанні комбінованої енергетичної установки автомобілів відбувається зменшується амплітуда коливань тягової сили [3].

Для оцінювання додаткових витрат енергії, викликаних коливаннями тягової сили, використовуємо наступний вираз

$$\frac{\Delta W_S}{W_{\text{пер}}} = \frac{0,04 + \frac{7,22}{i_u}}{\pi \cdot \left| \frac{k^2}{\Omega_M^2} - 1 \right|}. \quad (8.69)$$

В роботі [3] отримана залежність для визначення амплітуди коливань тягової сили у разі використання комбінованої енергетичної установки автомобіля

$$A_{pk} = \frac{K_1}{2r_\delta} \cdot (\bar{M}_i \cdot U_{mp} \cdot \eta_{мдв} \cdot \eta_{mp} - M_{ед} \cdot n_1) =$$

$$= \frac{K_1}{2} \cdot \sum P_o \cdot (1 - K_{ед}) = \left( 0,04 + \frac{7,22}{i_y} \right) \cdot (1 - K_{ед}) \cdot \sum P_o. \quad (8.70)$$

Після перетворень, наведених у роботі [3], вираз (8.64) прийме наступний вигляд

$$\Delta W'_S = \frac{\left( 0,04 + \frac{7,22}{i_y} \right) \cdot S \cdot \sum P_o \cdot (1 - K_{ед}) \cdot \Omega_M^2}{\pi \cdot \sqrt{\left( k^2 - \Omega_M^2 \right)^2 + 4n^2 \cdot \Omega_M^2}}. \quad (8.71)$$

Перетворивши рівняння (8.71), отримаємо відносні додаткові втрати енергії

$$\frac{\Delta W'_S}{S \cdot \sum P_o} = \frac{\Delta W'_S}{A_o} = \frac{\Delta W'_S}{W_S} = \frac{\left( 0,04 + \frac{7,22}{i_y} \right) \cdot (1 - K_{ед})}{\pi \cdot \sqrt{\left( \frac{k^2}{\Omega_M^2} - 1 \right)^2 + \frac{4 \cdot n^2}{\Omega_M^2}}}. \quad (8.72)$$

Приймаючи припущення, що демпфірування відсутнє ( $n = 0$ ), перетворимо (8.72) до вигляду

$$\frac{\Delta W'_S}{W_S} = \frac{\left(0,04 + \frac{7,22}{i_y}\right) \cdot (1 - K_{ed})}{\pi \cdot \left| \frac{k^2}{\Omega_M^2} - 1 \right|}. \quad (8.73)$$

Порівнюючи між собою вирази (8.69) і (8.73), можна зробити висновок про те, що застосування комбінованої енергетичної установки автомобіля дозволяє зменшити (в порівнянні з механічним приводом) додаткові енергетичні втрати. При  $K_{ed} = 1$  (при повністю електричному приводі) зазначені втрати дорівнюють нулю.

Таким чином, поздовжня податливість ходової частини автомобіля при коливаннях тягової сили на колесах призводить до збільшення додаткових витрат енергії. Ці витрати збільшуються в міру наближення частоти коливань крутного моменту ДВЗ до частоти вільних (власних коливань) ходової частини автомобіля в поздовжньому напрямку.

При створенні автомобілів необхідно прагнути до того, щоб відношення  $\frac{k}{\Omega_M}$  було значно більше одиниці. При  $\frac{k}{\Omega_M} > 4$  відносні додаткові втрати енергії  $\frac{\Delta W_S}{W_S}$  не перевищують величини 0,2, а при  $\frac{k}{\Omega_M} > 6$  – не перевищують величини 0,1.

При використанні комбінованої енергетичної установки (як і у випадку з механічною установкою) виникає небезпечний резонанс, тобто рівність  $k = \Omega M$ . Але зі збільшенням частки  $K_{ed}$  крутного моменту на колесах, що створений електродвигуном, відносні додаткові втрати енергії на рух автомобіля знижуються. При  $K_{ed} = 1$  ці втрати дорівнюють нулю.

## РОЗДІЛ 9. ДИНАМІКА ВЕДУЧОГО КОЛЕСА АВТОМОБІЛЯ

### 9.1. Усталений рух жорсткого колеса автомобіля

#### 9.1.1. Рух при постійному значенні крутного моменту

Для визначення впливу амплітуди і частоти коливань крутного моменту, обумовлених організацією робочого процесу двигуна внутрішнього згоряння, на кінематичні параметри ведучого колеса автомобіля скористаємося схемою навантаження одиночного жорсткого ведучого колеса автомобіля, наведеною на рис. 9.1.

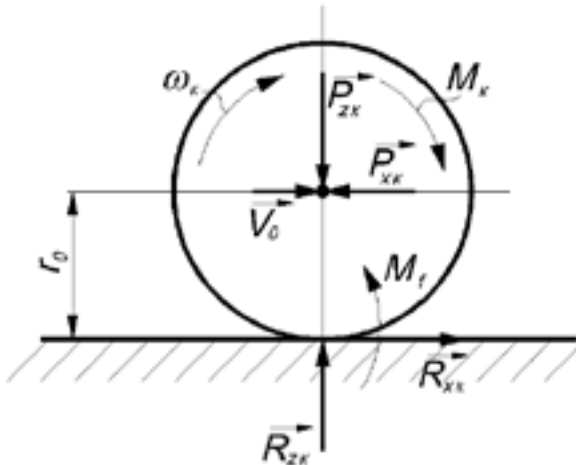


Рис. 9.1. Схема сил і моментів, що діють на тверде ведуче колесо автомобіля

Рівняння плоскопаралельного руху жорсткого ведучого колеса автомобіля

$$\begin{cases} J_{\kappa} \cdot \dot{\omega}_{\kappa} = M_{\kappa} - M_f - R_{\text{зк}} \cdot r_0; & (9.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_{\kappa} \cdot \dot{V}_0 = R_{\text{зк}} - P_{\text{зк}}, & (9.2) \end{cases}$$

де  $J_{\kappa}$  – момент інерції колеса з урахуванням приведення до нього моментів інерції обертових мас трансмісії і двигуна;

$\omega_{\kappa}$ ;  $\dot{\omega}_{\kappa}$  – кутові швидкість і прискорення колеса;

$M_{\kappa}$  – крутний момент на колесі;

$M_f$  – момент опору коченню,

$$M_f = f \cdot R_{\text{зк}} \cdot r_0; \quad (9.3)$$

$f$  – коефіцієнт опору коченню;

$R_{\text{зк}}$  – нормальна реакція дороги на колесо;

$r_0$  – вільний радіус колеса;

$R_{\text{зк}}$  – дотична реакція дороги на колесо;

$m_{\kappa}$  – маса колеса з урахуванням приведення до неї частини маси автомобіля, що поступально рухається;

$V$ ;  $\dot{V}_0$  – лінійні швидкість і прискорення осі колеса;

$P_{\text{зк}}$ ,  $P_{\text{зк}}$  – нормальне навантаження на колесо і горизонтальна реакція на колесо від рами автомобіля.

З рівняння (9.1) визначимо з урахуванням співвідношення (9.3)

$$R_{\text{зк}} = \frac{M_{\kappa}}{r_0} - f \cdot R_{\text{зк}} - \frac{J_{\kappa}}{r_0} \cdot \dot{\omega}_{\kappa}. \quad (9.4)$$

Після підстановки (9.4) в (9.2) і, з огляду на те, що

$$\dot{\omega}_{\kappa} = \frac{\dot{V}_0}{r_0}, \quad (9.5)$$

отримаємо

$$\dot{V}_0 = r_0 \cdot \frac{M_\kappa - f \cdot R_{z\kappa} \cdot r_0 - P_{x\kappa} \cdot r_0}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_0^2}. \quad (9.6)$$

Поздовжній коефіцієнт зчеплення колеса з дорогою

$$\varphi_x = \frac{R_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} = \frac{M_\kappa - f \cdot R_{z\kappa} \cdot r_0 - J_\kappa \cdot \dot{\omega}_\kappa}{R_{z\kappa} \cdot r_0}. \quad (9.7)$$

Після підстановки (9.6) в (9.7) і перетворень з урахуванням (9.5)

$$\varphi_x = \frac{m_\kappa \cdot r_0 \cdot \left( \frac{M_\kappa}{R_{z\kappa}} - f \cdot r_0 \right) + J_\kappa \cdot \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}}}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_0^2}. \quad (9.8)$$

Залежність (9.8) визначає величину реалізованого поздовжнього коефіцієнта зчеплення. Очевидно, що повинна виконуватися умова

$$\varphi_x \leq \varphi_{x \max}, \quad (9.9)$$

де  $\varphi_{x \max}$  – максимальне значення поздовжнього коефіцієнта зчеплення.

При невиконанні умови (9.9) колесо буксує, і автомобіль втрачає стійкість поступального руху.

В режимі усталеного (в даному випадку рівномірного руху при  $M_\kappa = \text{const}$ )  $\dot{V}_0 = 0$  та  $V_0 = \text{const}$ . За умови  $\dot{V}_0 = 0$  з рівняння (9.6) отримаємо

$$M_{\kappa} = (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_0. \quad (9.10)$$

Залежність (9.10) визначає величину крутильного моменту  $M_{\kappa}$ , при якій забезпечується рівномірний рух колеса.

### 9.1.2. При зміні крутного моменту за гармонійним законом

При зміні крутного моменту на колесі за гармонійним законом виду

$$M_{\kappa} = \bar{M}_{\kappa} + A_M \cdot \sin(\Omega \cdot t), \quad (9.11)$$

де  $\bar{M}_{\kappa}$  – середнє значення крутного моменту;

$A_M \cdot \Omega$  – амплітуда і колова частота коливань крутного моменту;

$t$  – час.

Після підстановки (9.11) в (9.6) отримаємо

$$\dot{V}_0 = \frac{r_0}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2} \cdot [\bar{M}_{\kappa} + A_M \cdot \sin(\Omega \cdot t) - f \cdot R_{z\kappa} \cdot r_0 - P_{x\kappa} \cdot r_0]. \quad (9.12)$$

Лінійна швидкість осі колеса

$$V_0 = \frac{r_0}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2} \int [\bar{M}_{\kappa} + A_M \cdot \sin(\Omega \cdot t) - r_0 (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa})] dt. \quad (9.13)$$

Провівши інтегрування, з урахуванням граничної умови (при  $t = 0$   $V_0 = V_{0n}$ ), отримаємо

$$V_0 = V_{0n} + \frac{r_0}{J_k + m_k \cdot r_0^2} \cdot \left( [\bar{M}_k - r_0 \cdot (f \cdot R_{z_k} + P_{xk})] \cdot t + \frac{A_M}{\Omega} [1 - \cos(\Omega \cdot t)] \right). \quad (9.14)$$

де  $V_{0n}$  – початкова лінійна швидкість осі колеса (мінімальна за цикл).

Кутова швидкість колеса

$$\omega_k = \frac{V_0}{r_0} = \omega_{kn} + \frac{[\bar{M}_k - r_0 \cdot (f \cdot R_{z_k} + P_{xk})] \cdot t + \frac{A_M}{\Omega} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t)]}{J_k + m_k \cdot r_0^2}, \quad (9.15)$$

де  $\omega_{kn}$  – початкова кутова швидкість колеса (мінімальна за цикл).

В сталому режимі (в даному випадку при рівномірному русі) справедливе співвідношення (9.10). В цьому випадку рівняння (9.14) і (9.15) приймуть вигляд

$$V_0 = V_{0n} + \frac{A_M \cdot r_0}{\Omega \cdot (J_k + m_k \cdot r_0^2)} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t)]; \quad (9.16)$$

$$\omega_k = \omega_{kn} + \frac{A_M}{\Omega \cdot (J_k + m_k \cdot r_0^2)} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t)]. \quad (9.17)$$

Виходячи з виразу (9.16), середня лінійна швидкість осі колеса за цикл буде визначатися за формулою

$$\bar{V}_0 = V_{0n} + \frac{A_M \cdot r_0}{\Omega \cdot (J_\kappa + m_\kappa \cdot r_0^2)}. \quad (9.18)$$

Амплітуда коливань лінійної швидкості осі колеса

$$A_V = \frac{A_M \cdot r_0}{\Omega \cdot (J_\kappa + m_\kappa \cdot r_0^2)}. \quad (9.19)$$

На основі виразу (9.17), середня кутова швидкість колеса за цикл буде визначатися за формулою

$$\bar{\omega}_\kappa = \omega_{\kappa n} + \frac{A_M}{\Omega \cdot (J_\kappa + m_\kappa \cdot r_0^2)}. \quad (9.20)$$

Амплітуда коливань кутової швидкості колеса

$$A_\omega = \frac{A_M}{\Omega \cdot (J_\kappa + m_\kappa \cdot r_0^2)}. \quad (9.21)$$

Після підстановки (9.11) в (9.8) отримаємо

$$\varphi_x = \frac{m_\kappa \cdot r_0 \cdot \left( \frac{\bar{M}_\kappa}{R_{z\kappa}} + \frac{A_M}{R_{z\kappa}} \cdot \sin(\Omega \cdot t) - f \cdot r_0 \right) + J_\kappa \cdot \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}}}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_0^2}. \quad (9.22)$$

Найбільше реалізоване значення поздовжнього коефіцієнта зчеплення за цикл зміни  $M_k$

$$\varphi_{x\text{най}} = \frac{m_k \cdot r_0 \cdot \left( \frac{\bar{M}_k + A_M}{R_{zk}} - f \cdot r_0 \right) + J_k \cdot \frac{P_{xk}}{R_{zk}}}{J_k + m_k \cdot r_0^2} \leq \varphi_{x\text{max}}. \quad (9.23)$$

Таким чином, вирази (9.16) – (9.23) дозволяють визначити кінематичні і динамічні параметри одиночного жорсткого ведучого колеса автомобіля.

## 9.2. Усталений рух еластичного колеса автомобіля

### 9.2.1. Рух при постійному значенні крутного моменту

Рух еластичного колеса, навантаженого крутним моментом, можна розглядати як складний рух, що складається з суми переносного і відносного рухів. Переносний рух – це рух жорсткого колеса з лінійною швидкістю  $V_0$  його осі. Відносний рух обумовлено кутовою піддатливістю шини колеса. Сумарний кут повороту колеса при складному русі можна визначити як

$$\varphi_k = \varphi_k^{nep} + \varphi_k^{відн}, \quad (9.24)$$

де  $\varphi_k^{nep}$ ,  $\varphi_k^{відн}$  – кути повороту колеса в переносному і відносному русі, відповідно.

Кутові швидкості і прискорення колеса при складному русі

$$\dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}_k^{nep} + \dot{\varphi}_k^{відн}; \quad (9.25)$$

$$\ddot{\varphi}_\kappa = \ddot{\varphi}_\kappa^{nep} + \ddot{\varphi}_\kappa^{відн}. \quad (9.26)$$

При складному русі справедливо рівняння (9.2) і наступні рівняння

$$J_\kappa \cdot \ddot{\varphi}_\kappa^{nep} = M_\kappa - (R_{z\kappa} \cdot f + R_{x\kappa}) \cdot r_\delta; \quad (9.27)$$

$$J_\kappa \cdot \ddot{\varphi}_\kappa^{відн} = M_\kappa - C_{кут} \cdot \varphi_\kappa^{відн} - K_{кут} \cdot \dot{\varphi}_\kappa^{відн}, \quad (9.28)$$

де  $C_{кут}$  – кутова жорсткість шини;

$K_{кут}$  – кутовий коефіцієнт в'язкого тертя в шині.

Кутове прискорення переносного руху

$$\ddot{\varphi}_\kappa^{nep} = \dot{\omega}_\kappa^{nep} = 0 \quad (9.29)$$

відповідно до виразу (9.5), оскільки  $V_0 = \text{const}$  і  $\dot{V}_0 = 0$ . Тому права частина (9.27) також дорівнює нулю. З рівняння (9.27) визначимо дотичну реакцію на колесі

$$R_{x\kappa} = \frac{M_\kappa}{r_\delta} - f \cdot R_{z\kappa}. \quad (9.30)$$

Рівняння (9.30) може бути отримано з (9.4) при  $\dot{\omega}_\kappa = 0$  і  $r_0 = r_\delta$ .

Рівняння (9.28) можна перетворити до вигляду

$$\ddot{\varphi}_\kappa^{відн} + k^2 \cdot \varphi_\kappa^{відн} + 2n \cdot \dot{\varphi}_\kappa^{відн} = \frac{M_\kappa}{J_\kappa}, \quad (9.31)$$

де  $k$  – колова частота власних (вільних) коливань колеса,

$$k = \sqrt{\frac{C_{кут}}{J_{к}}}; \quad (9.32)$$

$2n$  – відносний коефіцієнт в'язкого тертя,

$$2n = \frac{K_{кут}}{J_{к}}. \quad (9.33)$$

Рівняння (9.31) є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку, рішення якого складається із загального і частинного розв'язку. При усталеному русі в процесі вимушених коливань (відповідно до теорії коливань) загальне рішення можна прийняти рівним нулю. Частинний розв'язок рівняння (9.31) має вигляд

$$\varphi_{к}^{відн} = \frac{M_{к}}{k^2 \cdot J_{к}} = \frac{M_{к}}{C_{кут}}. \quad (9.34)$$

Відповідно, отримаємо

$$\omega_{к}^{відн} = \dot{\varphi}_{к}^{відн} = 0 \quad (9.35)$$

і

$$\dot{\omega}_{к}^{відн} = \ddot{\varphi}_{к}^{відн} = 0. \quad (9.36)$$

Відповідно до виразу, наведеному в роботі [4], визначимо відносне буксування

$$S_x = \frac{\omega_{\kappa}^{\text{відн}}}{\omega_{\kappa}^{\text{відн}} + \omega_{\kappa}^{\text{нер}}} = 0. \quad (9.37)$$

Таким чином, в усталеному русі еластичного колеса при  $M_{\kappa} = \text{const}$  вплив відносного буксування дорівнює нулю.

### 9.2.2. Рух при зміні крутильного моменту за гармонійним законом

Рівняння (9.27) і (9.28) після підстановки в них виразу (9.11) приймуть вигляд

$$J_{\kappa} \cdot \ddot{\varphi}_{\kappa}^{\text{нер}} = M_{\kappa} + A_M \cdot \sin(\Omega \cdot t) - (R_{z\kappa} \cdot f + P_{x\kappa}) \cdot r_{\partial}; \quad (9.38)$$

$$J_{\kappa} \cdot \ddot{\varphi}_{\kappa}^{\text{відн}} = M_{\kappa} + A_M \cdot \sin(\Omega \cdot t) - C_{\text{кут}} \cdot \varphi_{\kappa}^{\text{відн}} - K_{\text{кут}} \cdot \dot{\varphi}_{\kappa}^{\text{відн}}. \quad (9.39)$$

Рівняння (9.39) перетворимо до вигляду

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_{\kappa 1}^{\text{відн}} + \ddot{\varphi}_{\kappa 2}^{\text{відн}} + k^2 \cdot (\varphi_{\kappa 1}^{\text{відн}} + \varphi_{\kappa 2}^{\text{відн}}) + \mu \cdot (\dot{\varphi}_{\kappa 1}^{\text{відн}} + \dot{\varphi}_{\kappa 2}^{\text{відн}}) = \\ = \frac{\overline{M}_{\kappa}}{J_{\kappa}} + \frac{A_M}{J_{\kappa}} \cdot \sin(\Omega \cdot t), \end{aligned} \quad (9.40)$$

де  $\ddot{\varphi}_{\kappa 1}^{\text{відн}}$ ;  $\ddot{\varphi}_{\kappa 2}^{\text{відн}}$  – парціальні кутові прискорення колеса, зумовлені дією середнього значення крутильного моменту  $\overline{M}_{\kappa}$  і його змінної частини  $A_M \cdot \sin(\Omega \cdot t)$ , відповідно;

$\varphi_{\kappa 1}^{\text{відн}}$ ;  $\varphi_{\kappa 2}^{\text{відн}}$ ;  $\dot{\varphi}_{\kappa 1}^{\text{відн}}$ ;  $\dot{\varphi}_{\kappa 2}^{\text{відн}}$  – відповідні парціальні кути повороту і швидкості обертання колеса.

Використовуючи принцип суперпозиції дії сил у механіці розкладемо рівняння (9.40) на два

$$\ddot{\varphi}_{\kappa 1}^{відн} + k^2 \cdot \varphi_{\kappa 1}^{відн} + 2n \cdot \dot{\varphi}_{\kappa 1}^{відн} = \frac{\overline{M}_{\kappa}}{J_{\kappa}}; \quad (9.41)$$

$$\ddot{\varphi}_{\kappa 2}^{відн} + k^2 \cdot \varphi_{\kappa 2}^{відн} + 2n \cdot \dot{\varphi}_{\kappa 2}^{відн} = \frac{A_M}{J_{\kappa}} \cdot \sin(\Omega \cdot t). \quad (9.42)$$

Частинний розв'язок рівняння (9.41) представлено залежністю (9.34) (з заміною  $M_{\kappa}$  на  $\overline{M}_{\kappa}$ ). Частинний розв'язок рівняння (9.42) маємо у вигляді

$$\varphi_{\kappa 2}^{відн} = \frac{A_M}{J_{\kappa} \cdot \sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \Omega^2}} \cdot \sin(\Omega \cdot t - \Delta), \quad (9.43)$$

де  $\Delta$  – кут зсуву по фазі між коливаннями крутильного моменту і шини колеса,

$$\Delta = \arctg\left(\frac{2n \cdot \Omega}{k^2 - \Omega^2}\right). \quad (9.44)$$

Таким чином

$$\varphi_{\kappa}^{відн} = \varphi_{\kappa 1}^{відн} + \varphi_{\kappa 2}^{відн} = \frac{\overline{M}_{\kappa}}{k^2 \cdot J_{\kappa}} + \frac{A_M \cdot \sin(\Omega \cdot t - \Delta)}{J_{\kappa} \cdot \sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \Omega^2}}. \quad (9.45)$$

Кутова швидкість відносного руху колеса

$$\dot{\varphi}_\kappa^{\text{відн}} = \frac{A_M \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega \cdot t - \Delta)}{J_\kappa \cdot \sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \Omega^2}} = \omega_\kappa^{\text{відн}}. \quad (9.46)$$

Кутове прискорення відносного руху

$$\ddot{\varphi}_\kappa^{\text{відн}} = -\frac{A_M \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t - \Delta)}{J_\kappa \cdot \sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \Omega^2}} = \dot{\omega}_\kappa^{\text{відн}}. \quad (9.47)$$

Підставляючи рівняння (9.11) у вираз (9.6), отримаємо (при  $r_0 = r_\partial$ )

$$\dot{V}_0 = r_\partial \cdot \frac{\bar{M}_\kappa + A_M \cdot \sin(\Omega \cdot t) - f \cdot R_{z\kappa} \cdot r_\partial - P_{x\kappa} \cdot r_\partial}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\partial^2}. \quad (9.48)$$

При усталеному русі колеса справедлива умова рівноваги

$$\bar{M}_\kappa - r_\partial \cdot (f \cdot R_{z\kappa} + R_{x\kappa}) = 0. \quad (9.49)$$

З огляду на співвідношення (9.49), визначимо лінійну швидкість осі колеса

$$\begin{aligned} V_0 &= \int V_0 dt = \frac{A_M \cdot r_\partial}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\partial^2} \int \sin(\Omega \cdot t) dt = \\ &= C - \frac{A_M \cdot r_\partial}{\Omega \cdot (J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\partial^2)} \cdot \cos(\Omega \cdot t). \end{aligned} \quad (9.50)$$

При  $t = 0$  величина  $V_0 = V_{0n}$ . В цьому випадку вираз (9.50) набуде вигляду

$$V_0 = V_{0n} + \frac{A_M \cdot r_\delta}{\Omega \cdot (J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\delta^2)} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t)]. \quad (9.51)$$

Підставивши вираз (9.51) в рівняння, наведене в роботі [4], отримаємо кутову швидкість переносного руху колеса

$$\omega_\kappa^{nep} = \frac{V_0}{r_\delta} = \omega_{\kappa n}^{nep} + \frac{A_M}{\Omega \cdot (J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\delta^2)} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t)], \quad (9.52)$$

де  $\omega_{\kappa n}^{nep}$  – початкова кутова швидкість переносного руху,

$$\omega_{\kappa n}^{nep} = \frac{V_{0n}}{r_\delta}. \quad (9.53)$$

Відносне буксування колеса визначаємо з рівняння, наведеного в роботі [4], з урахуванням виразів (9.46) і (9.52)

$$S_x = \frac{\omega_\kappa^{відн}}{\omega_\kappa^{відн} + \omega_\kappa^{nep}} =$$

$$= \frac{\Omega^2 \cdot \cos(\Omega \cdot t - \Delta)}{J_\kappa \cdot \sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \Omega^2}};$$

$$\frac{\omega_{\kappa n}^{nep} \cdot \Omega}{A_M} + \frac{1 - \cos(\Omega \cdot t)}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\delta^2} + \frac{\Omega^2}{J_\kappa} \cdot \frac{\cos(\Omega t - \Delta)}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \Omega^2}} \quad (9.54)$$

$$S_x = \frac{1}{1 + \frac{J_\kappa}{\Omega^2} \cdot \frac{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \Omega^2}}{\cos(\Omega \cdot t - \Delta)}} \times \left[ \frac{\omega_{kn}^{nep} \cdot \Omega}{A_M} + \frac{1 - \cos(\Omega \cdot t)}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\partial^2} \right]. \quad (9.55)$$

Аналіз виразу (9.55) показує, що при наближенні колової частоти коливань  $\Omega$  крутильного моменту до власної частоти колових коливань шини величина  $S_x$  прагне до одиниці, тобто колесо прагне до повного буксування.

При зміні крутильного моменту за гармонійним законом (9.11) вираз (9.4) набуде вигляду

$$R_{x\kappa} = \frac{\bar{M}_\kappa}{r_\partial} + \frac{A_M \cdot \sin(\Omega \cdot t)}{r_\partial} - f \cdot R_{z\kappa} - \frac{J_\kappa}{r_\partial} \cdot \dot{\omega}_\kappa. \quad (9.56)$$

Кутове прискорення колеса  $\dot{\omega}_\kappa$  знаходимо з урахуванням рівнянь (9.25), (9.47) і, диференціюючи вираз (9.52)

$$\dot{\omega}_\kappa = \dot{\omega}_\kappa^{nep} + \dot{\omega}_\kappa^{відн} = \frac{A_M \cdot \sin(\Omega \cdot t)}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\partial^2} - \frac{A_M \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t - \Delta)}{J_\kappa \cdot \sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \Omega^2}}. \quad (9.57)$$

Підставляючи (9.57) в (9.56), отримуємо після перетворень

$$R_{xk} = \frac{\bar{M}_k}{r_\partial} - f \cdot R_{zk} + \frac{A_M}{r_\partial} \times \left[ \frac{\sin(\Omega \cdot t)}{1 + \frac{J_k}{m_k \cdot r_\partial^2}} + \frac{\Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t - \Delta)}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \Omega^2}} \right]. \quad (9.58)$$

В усталеному режимі руху при  $M_k = \bar{M}_k$  і  $\dot{\omega}_k = 0$  справедливе співвідношення (9.30) і рівняння (9.58) набуде вигляду

$$R_{xk} = -P_{xk} = \frac{A_M}{r_\partial} \cdot \left[ \frac{\sin(\Omega \cdot t)}{1 + \frac{J_k}{m_k \cdot r_\partial^2}} + \frac{\Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t - \Delta)}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \Omega^2}} \right]. \quad (9.59)$$

Використовуваний поздовжній коефіцієнт зчеплення колеса

$$\varphi_x = \frac{R_{xk}}{R_{zk}} = \frac{P_{xk}}{R_{zk}} + \frac{A_M}{R_{zk} \cdot r_\partial} \cdot \left[ \frac{\sin(\Omega \cdot t)}{1 + \frac{J_k}{m_k \cdot r_\partial^2}} + \frac{\Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t - \Delta)}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \Omega^2}} \right] \leq \varphi_{x \max}. \quad (9.60)$$

Вираз (9.60) в поєднанні з рівнянням (9.55) в подальшому дозволить побудувати  $\varphi_x S_x$  діаграми колеса в тяговому режимі руху, визначити критичне буксування  $S_{кр}$ , при перевищенні якого колесо зривається в буксування. Аналіз виразу (9.60) показує, що з наближенням колової частоти  $\Omega$  до власної колової частоти  $K$  коливань шини відбувається різке зростання  $\varphi_x$ . Це може привести до того, що  $\varphi_x$  перевищить  $\varphi_{x \max}$  і колесо почне буксувати, а автомобіль буде втрачати швидкість. Це може відбуватися на певних фазах обертання колеса.

### 9.3. Рух жорсткого колеса автомобіля в неусталеному режимі

#### 9.3.1. Рух при зміні крутного моменту за лінійним законом

Зміна крутного моменту відбувається за законом

$$M_k = M_{k \max} \frac{t}{t_H}, \quad (9.61)$$

де  $M_{k \max}$  – максимальне значення крутного моменту;  
 $t_H$  – час наростання  $M_k$  від нуля до  $M_{k \max}$ ;  
 $t$  – час.

Підставляючи рівняння (9.61) у вираз (9.4), отримаємо

$$R_{xk} = \frac{M_{k \max}}{r_0} \cdot \frac{t}{t_H} - f \cdot R_{zk} - \frac{J_k}{r_0} \cdot \dot{\omega}_k. \quad (9.62)$$

З огляду на співвідношення (9.61) після підстановки (9.62) в (9.2), отримаємо

$$\dot{V}_0 = r_0 \cdot \frac{M_{\kappa \max} \cdot \frac{t}{t_H} - (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_0}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2}. \quad (9.63)$$

Поздовжній коефіцієнт зчеплення колеса з дорогою, що реалізується

$$\varphi_x = \frac{R_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} = \frac{M_{\kappa \max}}{R_{z\kappa} \cdot r_0} \cdot \frac{t}{t_H} - f - \frac{J_{\kappa}}{R_{z\kappa} \cdot r_0} \cdot \dot{\omega}_{\kappa}. \quad (9.64)$$

З рівняння (9.63) визначимо

$$\dot{\omega}_{\kappa} = \frac{\dot{V}_0}{r_0} = \frac{M_{\kappa \max} \cdot \frac{t}{t_H} - (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_0}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2}. \quad (9.65)$$

Після підстановки (9.65) в (9.64) і проведення перетворень, отримаємо

$$\varphi_x = \frac{m_{\kappa} \cdot r_0 \cdot \left( \frac{M_{\kappa \max}}{R_{z\kappa}} \cdot \frac{t}{t_H} - f \cdot r_0 \right) + J_{\kappa} \cdot \frac{P_{x\kappa}}{R_{x\kappa}}}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2}. \quad (9.66)$$

### 9.3.2. Рух при зміні крутного моменту за гармонійним законом, а середнього значення крутного моменту – за лінійним законом

Беручи гармонійний закон зміни крутильного моменту (9.11) з урахуванням того, що в ДВС [2], можна прийняти

$$A_M = K_M \cdot \bar{M}_\kappa, \quad (9.67)$$

перетворимо (9.11) до вигляду

$$M_\kappa = \bar{M}_\kappa \cdot [1 + K_M \cdot \sin(\Omega \cdot t)], \quad (9.68)$$

де  $K_M$  – коефіцієнт пропорційності між  $A_M$  і  $\bar{M}_\kappa$ .

Підставляючи рівняння (9.68) в співвідношення (9.4), отримаємо

$$R_{\text{зк}} = \frac{\bar{M}_\kappa}{r_0} \cdot [1 + K_M \cdot \sin(\Omega \cdot t)] - f \cdot R_{\text{зк}} - \frac{J_\kappa}{r_0} \cdot \dot{\omega}_\kappa, \quad (9.69)$$

а після підстановки (9.68) в (9.6)

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 = & \frac{r_0}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_0^2} \cdot \left( \frac{\bar{M}_{\kappa \max}}{t_H} \times \right. \\ & \left. \times [t + K_M \cdot t \cdot \sin(\Omega \cdot t)] - (f \cdot R_{\text{зк}} + P_{\text{зк}}) \cdot r_0 \right). \end{aligned} \quad (9.70)$$

Лінійна швидкість осі колеса

$$\begin{aligned} V_0 = & \int \dot{V}_0 dt = \frac{r_0}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_0^2} \times \\ & \times \left( \frac{\bar{M}_{\kappa \max}}{t_H} \cdot \left[ \int t \cdot dt + K_M \int t \cdot \sin(\Omega \cdot t) \cdot dt \right] - (f \cdot R_{\text{зк}} + P_{\text{зк}}) \cdot r_0 \int dt \right). \end{aligned} \quad (9.71)$$

Після інтегрування виразу (9.71) з урахуванням граничних умов (при  $t = 0, V_0 = 0$ ) маємо

$$V_0 = \frac{r_0}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2} \times \left( \frac{\overline{M}_{\kappa \max}}{t_h} \cdot \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{K_M}{\Omega^2} \cdot (\sin(\Omega \cdot t) - \Omega \cdot t \cdot \cos(\Omega \cdot t)) \right] - (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_0 \cdot t \right). \quad (9.72)$$

Кутова швидкість колеса

$$\omega_{\kappa} = \frac{V_0}{r_0} = \frac{\frac{\overline{M}_{\kappa \max}}{t_h} \left( \frac{t^2}{2} + \frac{K_M}{\Omega^2} \cdot (\sin(\Omega \cdot t) - \Omega \cdot t \cdot \cos(\Omega \cdot t)) \right)}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2} - \frac{(f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_0 \cdot t}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2}. \quad (9.73)$$

Поздовжній коефіцієнт зчеплення колеса з дорогою, що реалізується (з використанням рівнянь (9.69), (9.70) і (9.5))

$$\varphi_x = \frac{R_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m_{\kappa} \cdot r_0 \left[ \overline{M}_{\kappa \max} \cdot \frac{t}{t_H \cdot R_{z\kappa}} \cdot (1 + K_M \cdot \sin(\Omega \cdot t)) - f \cdot r_0 \right]}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2} + \\
&\quad + \frac{J_{\kappa} \cdot \frac{P_{x\kappa}}{R_{x\kappa}}}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2}. \tag{9.74}
\end{aligned}$$

Вочевидь,  $\varphi_x \leq \varphi_{x \max}$  за умовою відсутності зриву колеса в повне буксування.

## 9.4. Рух еластичного колеса автомобіля в неусталеному режимі

### 9.4.1. Рух при зміні крутного моменту за лінійним законом

Приймаємо закон зміни крутного моменту, описуваний рівнянням (9.61). Рівняння (9.27) і (9.28) в цьому випадку наберуть вигляду

$$J_{\kappa} \cdot \ddot{\varphi}_{\kappa}^{nep} = \frac{M_{\kappa \max}}{t_H} \cdot t - (R_{z\kappa} \cdot f + P_{x\kappa}) \cdot r_0; \tag{9.75}$$

$$J_{\kappa} \cdot \ddot{\varphi}_{\kappa}^{vidn} = \frac{M_{\kappa \max}}{t_H} \cdot t - C_{\text{кут}} \cdot \varphi_{\kappa}^{vidn} - K_{\text{кут}} \cdot \dot{\varphi}_{\kappa}^{vidn}. \tag{9.76}$$

Рівняння (9.76) можна представити у вигляді

$$\ddot{\varphi}_\kappa^{відн} + 2n \cdot \dot{\varphi}_\kappa^{відн} + k^2 \cdot \varphi_\kappa^{відн} = \frac{M_{\kappa \max}}{J_\kappa \cdot t_H} \cdot t. \quad (9.77)$$

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку (9.77) складається із загального і частинного рішень. Загальне рішення

$$\overline{\varphi}_\kappa^{відн} = e^{-nt} \cdot \left( A^* \cdot \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + B^* \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t \right), \quad (9.78)$$

де  $A$  і  $B$  – постійні інтегрування.

Частинний розв'язок

$$\varphi_{\kappa 0}^{відн} = \frac{M_{\kappa \max}}{k^2 \cdot J_\kappa \cdot t_H} \cdot \left( t - \frac{2n}{k^2} \right), \quad (9.79)$$

Таким чином

$$\begin{aligned} \varphi_\kappa^{відн} = \overline{\varphi}_\kappa^{відн} + \varphi_{\kappa 0}^{відн} = e^{-nt} \cdot \left( A^* \cdot \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \right. \\ \left. + B^* \cdot \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t \right) + \frac{M_{\kappa \max}}{k^2 \cdot J_\kappa \cdot t_H} \cdot \left( t - \frac{2n}{k^2} \right). \quad (9.80) \end{aligned}$$

Кутова швидкість відносного руху

$$\dot{\varphi}_\kappa^{відн} = -e^{-nt} \cdot \left( A^* \cdot \left[ n \cdot \cos \left( \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t \right) - \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \right. \right.$$

$$\cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + B^* \cdot \left[ \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) - n \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \right] + \frac{M_{\kappa \max}}{k^2 \cdot J_{\kappa} \cdot t_H} \cdot \left( t - \frac{2n}{k^2} \right). \quad (9.81)$$

Постійні інтегрування визначаються з граничних умов (при  $t = 0$  величини  $\varphi_{\kappa}^{oidH} = 0$  і  $\dot{\varphi}_{\kappa}^{oidH} = 0$ )

$$A^* = \frac{M_{\kappa \max} \cdot 2n}{k^4 \cdot J_{\kappa} \cdot t_H}; \quad (9.82)$$

$$B^* = \frac{M_{\kappa \max} \cdot 2n^2}{k^4 \cdot J_{\kappa} \cdot t_H \cdot \sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (9.83)$$

Після підстановки виразів (9.82) і (9.83) рівняння (9.80) і (9.81) набудуть вигляду

$$\varphi_{\kappa}^{oidH} = \frac{M_{\kappa \max}}{k^2 \cdot J_{\kappa} \cdot t_H} \times \left\{ e^{-nt} \cdot \frac{2n}{k^2} \left[ \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + \frac{n}{\sqrt{n^2 - k^2}} \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \right] + t - \frac{2n}{k^2} \right\}; \quad (9.84)$$

$$\omega_{\kappa}^{відн} = \dot{\varphi}_{\kappa}^{відн} = \frac{M_{\kappa \max}}{k^2 \cdot J_{\kappa} \cdot t_H} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{4n^2}{k^2} \cdot e^{-nt} \left[ \cos\left(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t\right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{k^2}{2n \cdot \sqrt{k^2 - n^2}} \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t\right) \right] \right\}. \quad (9.85)$$

Підставляючи замість  $r_0$  динамічний радіус  $r_{\delta}$ , рівняння (9.61) у вираз (9.6), отримаємо

$$\dot{V}_0 = r_{\delta} \cdot \frac{\frac{M_{\kappa \max}}{t_H} \cdot t - (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_{\delta}}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_{\delta}^2}. \quad (9.86)$$

Кутове прискорення переносного руху

$$\dot{\omega}_{\kappa}^{неп} = \frac{\dot{V}_0}{r_{\delta}} = \frac{\frac{M_{\kappa \max}}{t_H} \cdot t - (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_{\delta}}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_{\delta}^2}. \quad (9.87)$$

Лінійна швидкість осі колеса

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \int \dot{V}_0 dt = \\
 &= \frac{r_\partial}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\partial^2} \cdot \left[ \frac{M_{\kappa \max}}{t_H} \int t dt - (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_\partial \int dt \right] = \\
 &= r_\partial \cdot \frac{\frac{M_{\kappa \max}}{2 \cdot t_H} \cdot t^2 - (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_\partial \cdot t}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\partial^2}. \quad (9.88)
 \end{aligned}$$

Кутова швидкість переносного руху

$$\omega_\kappa^{nep} = \frac{\frac{M_{\kappa \max}}{2 \cdot t_H} \cdot t^2 - (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_\partial \cdot t}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\partial^2}. \quad (9.89)$$

Відносне буксування колеса визначаємо за формулою (9.37) з підстановкою в неї (9.85) і (9.89)

$$S_x = \frac{\omega_\kappa^{відн}}{\omega_\kappa^{відн} + \omega_\kappa^{nep}} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_\kappa^{nep}}{\omega_\kappa^{відн}}} =$$

$$= \left( 1 + \frac{2}{k^2 \cdot J_K} \cdot \frac{t^2 - \frac{2 \cdot t_H \cdot (f \cdot R_{zK} + P_{xK}) \cdot r_\partial}{M_{K\max}} \cdot t}{J_K + m_K \cdot r_\partial^2} \times \right. \\ \times \left. \left\{ 1 - \frac{4n^2}{k^2} \cdot e^{-nt} \left[ \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{k^2}{2n \cdot \sqrt{k^2 - n^2}} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \right] \right\} \right)^{-1}. \quad (9.90)$$

Дотична реакція на колесі визначається з рівняння (9.64) з урахуванням (9.86)

$$R_{xK} = m_K \cdot \dot{V}_0 + P_{xK} = P_{xK} + m_K \cdot r_\partial \cdot \frac{\frac{M_{K\max}}{R_{zK}} \cdot t - (f \cdot R_{zK} + P_{xK}) \cdot r_\partial}{J_K + m_K \cdot r_\partial^2}. \quad (9.91)$$

Поздовжній коефіцієнт зчеплення колеса з дорогою, що реалізується

$$\varphi_x = \frac{R_{xK}}{R_{zK}} = \frac{P_{xK}}{R_{zK}} + m_K \cdot r_\partial \cdot \frac{\frac{M_{K\max}}{R_{zK}} \cdot t - \left( f + \frac{P_{xK}}{R_{zK}} \right) \cdot r_\partial}{J_K + m_K \cdot r_\partial^2}. \quad (9.92)$$

### 9.4.2. Рух при зміні крутного моменту за гармонійним законом, а його середнього значення – за лінійним

Зміну крутного моменту визначаємо за залежністю (9.68) після підстановки в неї виразу

$$\overline{M}_\kappa = \overline{M}_{\kappa \max} \cdot \frac{t}{t_H}. \quad (9.93)$$

Таким чином, маємо

$$M_\kappa = \overline{M}_{\kappa \max} \cdot \frac{t}{t_H} \cdot [1 + K_M \cdot \sin(\Omega \cdot t)]. \quad (9.94)$$

Рівняння (9.75) і (9.76) в цьому випадку наберуть вигляду

$$J_\kappa \cdot \ddot{\varphi}_\kappa^{nep} = \overline{M}_{\kappa \max} \cdot \frac{t}{t_H} \cdot [1 + K_M \cdot \sin(\Omega \cdot t)] - (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_\delta; \quad (9.95)$$

$$J_\kappa \cdot \ddot{\varphi}_\kappa^{відн} = \overline{M}_{\kappa \max} \cdot \frac{t}{t_H} \cdot [1 + K_M \cdot \sin(\Omega \cdot t)] - C_{кут} \cdot \varphi_\kappa^{відн} - K_{кут} \cdot \dot{\varphi}_\kappa^{відн}. \quad (9.96)$$

Рівняння (9.96) перетворимо до вигляду

$$\ddot{\varphi}_\kappa^{відн} + k^2 \cdot \varphi_\kappa^{відн} + 2 \cdot n \cdot \dot{\varphi}_\kappa^{відн} =$$

$$= \bar{M}_{\kappa \max} \cdot \frac{t}{J_{\kappa} \cdot t_n} + \frac{K_M \cdot \bar{M}_{\kappa \max}}{J_{\kappa} \cdot t_n} \cdot t \cdot \sin(\Omega \cdot t). \quad (9.97)$$

Загальний розв'язок рівняння (9.97) маємо у вигляді рівняння (9.78). Для отримання частинного розв'язку розіб'ємо рівняння (9.97) на два

$$\ddot{\varphi}_{\kappa 1}^{\text{відн}} + k^2 \cdot \varphi_{\kappa 1}^{\text{відн}} + 2 \cdot n \cdot \dot{\varphi}_{\kappa 1}^{\text{відн}} = \frac{\bar{M}_{\kappa \max}}{J_{\kappa} \cdot t_n}; \quad (9.98)$$

$$\ddot{\varphi}_{\kappa 2}^{\text{відн}} + k^2 \cdot \varphi_{\kappa 2}^{\text{відн}} + 2 \cdot n \cdot \dot{\varphi}_{\kappa 2}^{\text{відн}} = \frac{K_M \cdot \bar{M}_{\kappa \max}}{J_{\kappa} \cdot t_n} \cdot t \cdot \sin(\Omega \cdot t). \quad (9.99)$$

Частинний розв'язок рівняння (9.98) маємо у вигляді

$$\varphi_{\kappa 01}^{\text{відн}} = \frac{\bar{M}_{\kappa \max}}{k^2 \cdot J_{\kappa} \cdot t_n} \cdot \left(1 - \frac{2n}{k^2}\right) = \frac{\bar{M}_{\kappa \max}}{C_{\text{кут}} \cdot t_n} \cdot \left(1 - \frac{2n}{k^2}\right). \quad (9.100)$$

Для отримання частинного розв'язку рівняння (9.99) розкладемо функцію  $\sin(\Omega \cdot t)$  в ряд Маклорена, обмежившись четвертим членом ряду

$$\sin(\Omega \cdot t) = \Omega \cdot t - \frac{1}{6} \cdot \Omega^3 \cdot t^3. \quad (9.101)$$

Рівняння (9.99) з урахуванням (9.101) набуде вигляду

$$\ddot{\varphi}_{\kappa 2}^{\text{відн}} + k^2 \cdot \varphi_{\kappa 2}^{\text{відн}} + 2 \cdot n \cdot \dot{\varphi}_{\kappa 2}^{\text{відн}} = \frac{K_M \cdot \bar{M}_{\kappa \max}}{J_{\kappa} \cdot t_H} \cdot \left( \Omega \cdot t^2 - \frac{1}{6} \cdot \Omega^3 \cdot t^4 \right). \quad (9.102)$$

Частинний розв'язок рівняння (9.102) шукаємо у вигляді

$$\varphi_{\kappa 02}^{\text{відн}} = A \cdot t^4 + B \cdot t^3 + C \cdot t^2 + D \cdot t + E. \quad (9.103)$$

Коефіцієнти в рівнянні (9.103) визначалися відомими методами та дорівнюють

$$A = \frac{K_M \cdot \bar{M}_{\kappa \max} \cdot \Omega^3}{6 \cdot J_{\kappa} \cdot k^2 \cdot t_H}; \quad (9.104)$$

$$B = -\frac{4 K_M \cdot \bar{M}_{\kappa \max} \cdot \Omega^3 \cdot n}{3 J_{\kappa} \cdot k^4 \cdot t_H}; \quad (9.105)$$

$$C = \frac{K_M \cdot \bar{M}_{\kappa \max} \cdot \Omega}{J_{\kappa} \cdot k^2 \cdot t_H} \cdot \left( 1 - \frac{2 \cdot \Omega}{k^2} \right); \quad (9.106)$$

$$D = -\frac{4 \cdot K_M \cdot \bar{M}_{\kappa \max} \cdot \Omega \cdot n}{J_{\kappa} \cdot k^4 \cdot t_H} \cdot \left( 4 \cdot \frac{\Omega^2}{k^2} - 1 \right); \quad (9.107)$$

$$E = \frac{2 \cdot K_M \cdot \bar{M}_{\kappa \max} \cdot \Omega^4}{J_{\kappa} \cdot k^4 \cdot t_n} \cdot \left( 4 \cdot \frac{n^2}{k^2} + 2 \frac{\Omega^2}{k^2} - 16 \frac{\Omega^2 \cdot n}{k^4} \right). \quad (9.108)$$

Таким чином

$$\begin{aligned} \varphi_{\kappa 02}^{\text{відн}} = & \frac{K_M \cdot \bar{M}_{\kappa \max} \cdot \Omega}{J_{\kappa} \cdot k^2 \cdot t_n} \cdot \left[ \frac{\Omega^2}{6} \cdot t^4 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\Omega^2 \cdot n}{k^2} \cdot t^3 + \left( 1 - \frac{2 \cdot \Omega}{k^2} \right) \cdot t^2 + \right. \\ & \left. + 4 \cdot \frac{n}{k^2} \cdot \left( 4 \cdot \frac{\Omega^2}{k^2} - 1 \right) \cdot t + \frac{2}{k^2} \cdot \left( 4 \frac{n^2}{k^2} - 16 \frac{\Omega^2 \cdot n}{k^4} + \frac{2 \cdot \Omega^2}{k^2} - 1 \right) \right]. \quad (9.109) \end{aligned}$$

Частинний розв'язок рівняння (9.97) маємо у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_{\kappa 0}^{\text{відн}} = \varphi_{\kappa 01}^{\text{відн}} + \varphi_{\kappa 02}^{\text{відн}} = & \frac{\bar{M}_{\kappa \max}}{C_{\text{кут}} \cdot t_n} \times \left\{ 1 - \frac{2n}{k^2} + K_M \cdot \Omega \cdot \right. \\ & \cdot \left[ \frac{\Omega^2}{6} \cdot t^4 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\Omega^2 \cdot n}{k^2} \cdot t^3 + \left( 1 - \frac{2 \cdot \Omega}{k^2} \right) \cdot t^2 + 4 \cdot \frac{n}{k^2} \cdot \right. \\ & \left. \left. \cdot \left( 4 \cdot \frac{\Omega^2}{k^2} - 1 \right) \cdot t + \frac{2}{k^2} \cdot \left( 4 \frac{n^2}{k^2} - 16 \frac{\Omega^2 \cdot n}{k^4} + \frac{2 \cdot \Omega^2}{k^2} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (9.110) \end{aligned}$$

Розв'язок диференціального рівняння (9.97)

$$\begin{aligned}
\varphi_{\kappa}^{\text{відн}} &= \bar{\varphi}_{\kappa}^{\text{відн}} + \varphi_{\kappa 0}^{\text{відн}} = e^{-nt} \cdot \left[ A^* \cdot \cos\left(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t\right) + \right. \\
&+ B^* \cdot \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t\right) \left. \right] + \frac{\bar{M}_{\kappa \max}}{C_{\text{кут}} \cdot t_n} \cdot \left\{ 1 - \frac{2n}{k^2} + K_M \cdot \Omega \cdot \right. \\
&\cdot \Omega \cdot \left[ \frac{\Omega^2}{6} \cdot t^4 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\Omega^2 \cdot n}{k^2} \cdot t^3 + \left( 1 - \frac{2 \cdot \Omega}{k^2} \right) \cdot t^2 + 4 \cdot \frac{n}{k^2} \cdot \right. \\
&\cdot \left. \left( 4 \cdot \frac{\Omega^2}{k^2} - 1 \right) \cdot t + \frac{2}{k^2} \cdot \left( 4 \frac{n^2}{k^2} - 16 \frac{\Omega^2 \cdot n}{k^4} + \frac{2 \cdot \Omega^2}{k^2} - 1 \right) \right]. \quad (9.111)
\end{aligned}$$

При  $t = 0$   $\varphi_{\kappa}^{\text{відн}} = 0$  і рівняння (9.111) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
0 &= A^* + \frac{\bar{M}_{\kappa \max}}{C_{\text{кут}} \cdot t_n} \cdot \left[ 1 - \frac{2n}{k^2} + \right. \\
&+ \left. \frac{2 \cdot K_M \cdot \Omega}{k^2} \cdot \left( 4 \cdot \frac{n^2}{k^2} - 16 \cdot \frac{\Omega^2 \cdot n}{k^4} + \frac{2 \Omega^2}{k^2} - 1 \right) \right]. \quad (9.112)
\end{aligned}$$

Звідки визначимо

$$A^* = \frac{\bar{M}_{\kappa \max}}{C_{\text{кут}} \cdot t_H} \cdot \left[ \frac{2n}{k^2} - 1 - \right. \\ \left. - \frac{2 \cdot K_M \cdot \Omega}{k^2} \cdot \left( 4 \cdot \frac{n^2}{k^2} - 16 \cdot \frac{\Omega^2 \cdot n}{k^4} + \frac{2\Omega^2}{k^2} - 1 \right) \right]. \quad (9.113)$$

Кутова швидкість відносного руху

$$\omega_{\kappa}^{\text{відн}} = \dot{\varphi}_{\kappa}^{\text{відн}} = e^{-nt} \cdot \left\{ B^* \cdot \left[ \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \cos\left(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - n \cdot \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t\right) \right] - A^* \cdot \left[ n \cdot \cos\left(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t\right) + \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t\right) \right] \right\} + \frac{\bar{M}_{\kappa \max} \cdot K_M \cdot \Omega}{C_{\text{кут}} \cdot t_H} \times \left[ \frac{2}{3} \cdot \Omega^2 \cdot t^3 - \right. \\ \left. - 4 \frac{\Omega^2 \cdot n}{k^2} \cdot t^2 + 2 \cdot \left( 1 - \frac{2 \cdot \Omega}{k^2} \right) \cdot t + 4 \frac{n}{k^2} \cdot \left( 4 \cdot \frac{\Omega^2}{k^2} - 1 \right) \right]. \quad (9.114)$$

При  $t = 0$   $\varphi_{\kappa}^{\text{відн}} = 0$ . У цьому випадку маємо

$$0 = B^* \cdot \sqrt{k^2 - n^2} -$$

$$-A^* \cdot n + \frac{\overline{M}_{\kappa \max} \cdot K_M \cdot \Omega}{C_{\text{кут}} \cdot t_H} \cdot 4 \cdot \frac{n}{k^2} \cdot \left( 4 \cdot \frac{\Omega^2}{k^2} - 1 \right). \quad (9.115)$$

З рівняння (9.115) з урахуванням (9.113) визначимо

$$B^* = \frac{\overline{M}_{\kappa \max} \cdot n}{C_{\text{кут}} \cdot t_H \cdot \sqrt{k^2 - n^2}} \times \left[ \frac{2n}{k^2} - 1 - \frac{2 \cdot K_M \cdot \Omega}{k^2} \cdot \left( 4 \cdot \frac{n^2}{k^2} - 16 \cdot \frac{\Omega^2 \cdot n}{k^4} + \frac{10 \cdot \Omega^2}{k^2} - 3 \right) \right]. \quad (9.116)$$

Рівняння (9.91) для даного випадку набуде вигляду

$$R_{x\kappa} = P_{x\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_{\delta} \cdot \frac{\frac{\overline{M}_{\kappa \max}}{t_H} \cdot t \cdot [1 + K_M \cdot \sin(\Omega t)] - (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_{\delta}}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_{\delta}^2}. \quad (9.117)$$

Поздовжній коефіцієнт зчеплення колеса з дорогою, що реалізується

$$\varphi_x = \frac{R_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} = \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} + m_{\kappa} \cdot r_{\delta} \cdot$$

$$\frac{\frac{\bar{M}_{\kappa \max}}{R_{z\kappa} \cdot t_H} \cdot t \cdot [1 + K_M \cdot \sin(\Omega t)] - \left( f + \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot r_\partial}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\partial^2} \leq \varphi_{x \max} \cdot (9.118)$$

Лінійна швидкість осі колеса може бути визначена залежністю (9.72) після заміни  $r_0$  на  $r_\partial$

$$V_0 = \frac{r_\partial}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\partial^2} \times \left\{ \frac{\bar{M}_{\kappa \max}}{t_H} \cdot \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{K_M}{\Omega^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\sin(\Omega \cdot t) - \Omega \cdot t \cdot \cos(\Omega \cdot t)) \right] - (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_\partial \cdot t \right\} \cdot (9.119)$$

Відносне буксування колеса може бути знайдено з виразу (9.90) після підстановки в нього рівнянь (9.114) і (9.119)

$$\omega_k^{nep} = \frac{V_0}{r_\partial} = \frac{\frac{\bar{M}_{\kappa \max}}{t_H} \cdot \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{K_M}{\Omega^2} \cdot (\sin(\Omega \cdot t) - \Omega \cdot t \cdot \cos(\Omega \cdot t)) \right]}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\partial^2} - \\ - \frac{(f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_\partial \cdot t}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\partial^2} \cdot (9.120)$$

## 9.5. Рух жорсткого колеса автомобіля при реалізації граничної за зчепленням дотичної реакції дороги

### 9.5.1. Усталений рух при зміні крутного моменту за гармонійним законом

Зрив колеса в повне буксування при гармонійному законі зміни крутного моменту можливий в разі невиконання умови (9.80). Вираз (9.80) можна представити в наступному вигляді:

$$\varphi_x = \bar{\varphi}_x + A_{\varphi x} \cdot \sin(\Omega \cdot t) \leq \varphi_{x \max}, \quad (9.121)$$

де  $\bar{\varphi}_x$  – середнє значення коефіцієнта зчеплення, що реалізується,

$$\bar{\varphi}_x = \frac{m_k \cdot r_0 \cdot \left( \frac{\bar{M}_k}{R_{zk}} - f \cdot r_0 \right) + J_k \cdot \frac{P_{xk}}{R_{zk}}}{J_k + m_k \cdot r_0^2}; \quad (9.122)$$

$A_{\varphi x}$  – амплітуда коливань коефіцієнта зчеплення, що реалізується,

$$A_{\varphi x} = \frac{m_k \cdot r_0 \cdot \frac{A_M}{R_{zk}}}{J_k + m_k \cdot r_0^2}. \quad (9.123)$$

При зриві жорсткого колеса в повне буксування (в точці контакту) його обертальний рух також можна подати як складний у вигляді суми переносного і відносного. Переносний рух визначається лінійною швидкістю поступального руху його осі. Кутова швидкість переносного руху

$$\omega_{\kappa}^{nep} = \frac{V_0}{r_0}. \quad (9.124)$$

Кутова швидкість відносного руху визначається швидкістю ковзання в точці контакту колеса з дорогою

$$\omega_{\kappa}^{відн} = \frac{\omega_{\kappa} \cdot r_0 - V_0}{r_0} = \omega_{\kappa} - \omega_{\kappa}^{nep}. \quad (9.125)$$

Рівняння руху жорсткого колеса при реалізації граничної дотичної реакції в точці його контакту з дорогою (див. рис. 9.1)

$$\begin{cases} J_{\kappa} \cdot \ddot{\varphi}_{\kappa} = M_{\kappa} - M_f - \xi \cdot \varphi_{x \max} \cdot R_{z\kappa} \cdot r_0; \\ m_{\kappa} \cdot \dot{V}_0 = \xi \cdot \varphi_{x \max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}, \end{cases} \quad (9.126)$$

$$\quad (9.127)$$

де  $\xi$  – коефіцієнт, що враховує падіння  $\varphi_{x \max}$  при повному буксуванні колеса.

З огляду на співвідношення (9.65), перетворимо (9.126) до вигляду

$$\ddot{\varphi}_{\kappa} = \dot{\omega}_{\kappa} = \frac{\overline{M}_{\kappa} + A_M \cdot \sin(\Omega \cdot t)}{J_{\kappa}} - \frac{(\xi \cdot \varphi_{x \max} + f) \cdot R_{z\kappa} \cdot r_0}{J_{\kappa}}. \quad (9.128)$$

Кутова швидкість колеса

$$\omega_{\kappa} = \frac{\overline{M}_{\kappa} - (\xi \cdot \varphi_{x \max} + f) \cdot R_{z\kappa} \cdot r_0}{J_{\kappa}} \cdot \int dt + \frac{A_M}{J_{\kappa}} \int \sin(\Omega \cdot t) \cdot dt. \quad (9.129)$$

Провівши інтегрування з урахуванням граничних умов, отримаємо

$$\omega_{\kappa} = \omega_{\kappa 1} + \frac{\bar{M}_{\kappa} - (\xi \cdot \varphi_{x \max} + f) \cdot R_{z\kappa} \cdot r_0}{J_{\kappa}} \cdot (t - t_1) + \frac{A_M}{\Omega \cdot J_{\kappa}} \cdot \{1 - \cos[\Omega \cdot (t - t_1)]\}, \quad (9.130)$$

де  $t_1$  – момент часу, при якому почалося повне буксування колеса;  
 $\omega_{\kappa 1}$  – кутова швидкість колеса в момент часу  $t_1$ .

З рівняння (9.128) визначимо

$$\dot{V}_0 = \xi \cdot \varphi_{x \max} \cdot \frac{R_{z\kappa}}{m_{\kappa}} - \frac{P_{x\kappa}}{m_{\kappa}}. \quad (9.131)$$

Лінійна швидкість осі колеса

$$V_0 = \frac{\xi \cdot \varphi_{x \max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{m_{\kappa}} \cdot \int dt. \quad (9.132)$$

Після інтегрування з урахуванням граничних умов

$$V_0 = V_{01} + \frac{\xi \cdot \varphi_{x \max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{m_{\kappa}} \cdot (t - t_1), \quad (9.133)$$

де  $V_{01}$  – лінійна швидкість осі колеса в момент часу, що відповідає зриву в повне буксування; для жорсткого колеса справедливе співвідношення

$$V_{01} = \omega_{k1} \cdot r_0. \quad (9.134)$$

Після підстановки (9.133) в (9.124) отримаємо

$$\omega_{\kappa}^{пер} = \frac{V_{01}}{r_0} + \frac{\xi \cdot \varphi_{x \max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{r_0 \cdot m_{\kappa}} \cdot (t - t_1). \quad (9.135)$$

Відносне поздовжнє буксування колеса визначається за формулою (9.95) з урахуванням (9.134) після підстановки в неї співвідношень (9.130) і (9.135)

$$S_x = 1 - \frac{\frac{V_{01}}{r_0} + \frac{\xi \cdot \varphi_{x \max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{r_0 \cdot m_{\kappa}} \cdot (t - t_1)}{\frac{V_{01}}{r_0} + \frac{\bar{M}_{\kappa} - (\xi \cdot \varphi_{x \max} + f) \cdot R_{z\kappa} \cdot r_0}{J_{\kappa}} \cdot (t - t_1) + \frac{A_M}{\Omega \cdot J_{\kappa}} \cdot \{1 - \cos[\Omega \cdot (t - t_1)]\}}. \quad (9.136)$$

На рис. 9.2 в якості ілюстрації наведені графіки залежності (9.121)

При  $\varphi_x > \varphi_{x \max}$  колесо переходить в стан повного буксування. Момент часу  $t_1$ , в який відбувається зрив в повне буксування визначається з рівняння (9.121) (див. рис. 9.2)

$$t_1 = \frac{1}{\Omega} \cdot \arcsin\left(\frac{\varphi_{x \max} - \bar{\varphi}_x}{A \cdot \varphi_x}\right). \quad (9.137)$$

З рівняння (9.121), з використанням рис. 9.2, визначимо момент часу  $t_2$ , при перевищенні якого  $\varphi_x < \varphi_{x \max}$

$$t_2 = \frac{\pi}{\Omega} - t_1. \quad (9.138)$$

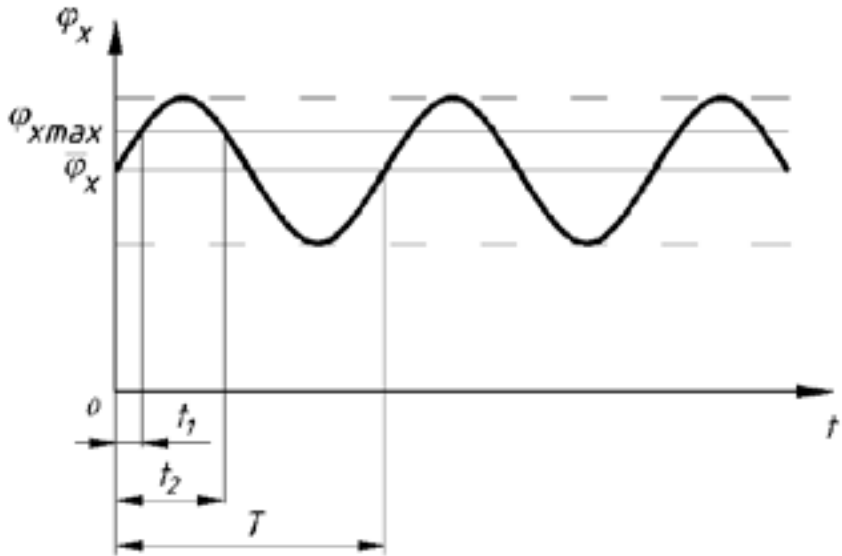


Рис. 9.2. Залежність  $\varphi_x(t)$  для жорсткого колеса автомобіля при зміні крутильного моменту за гармонійним законом

Після підстановки співвідношень (9.122) і (9.123) в рівняння (9.137) і (9.138) отримаємо

$$t_1 = \frac{1}{\Omega} \times$$

$$\times \arcsin \left( \frac{\varphi_{x \max} \cdot (J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2) - m_{\kappa} \cdot r_0 \cdot \left( \frac{\bar{M}_{\kappa}}{R_{z\kappa}} - f \cdot r_0 \right) + J_{\kappa} \cdot \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}}}{m_{\kappa} \cdot r_0 \cdot \frac{A_M}{R_{z\kappa}}} \right), \quad (9.139)$$

$$t_2 = \frac{1}{\Omega} \cdot \times$$

$$\times \left\{ \pi - \arcsin \left[ \frac{\varphi_{x \max} \cdot (J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2) - m_{\kappa} \cdot r_0 \cdot \left( \frac{\bar{M}_{\kappa}}{R_{z\kappa}} - f \cdot r_0 \right) + J_{\kappa} \cdot \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}}}{m_{\kappa} \cdot r_0 \cdot \frac{A_M}{R_{z\kappa}}} \right] \right\}. \quad (9.140)$$

Припустимо, що в даному випадку (див. рис. 9.2)

$$\bar{\varphi}_x < \varphi_{x \max} < \bar{\varphi}_x + A_{\varphi x}. \quad (9.141)$$

В інтервалі часу  $[0; t_1]$  (див. рис. 9.2)

$$\varphi_x \leq \varphi_{x \max}. \quad (9.142)$$

При усталеному русі колеса в інтервалі часу  $[0; t_1]$

$$\bar{M}_{\kappa} - (f \cdot R_{z\kappa} + R_{x\kappa}) \cdot r_0 = 0 \quad (9.143)$$

і рівняння (9.16) і (9.17) приймуть вигляд

$$V_0 = V_{0n} + \frac{r_0 \cdot A_M}{\Omega \cdot (J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2)} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t)]; \quad (9.144)$$

$$\omega_{\kappa} = \frac{V_{0n}}{r_0} + \frac{A_M}{\Omega \cdot (J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2)} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t)]. \quad (9.145)$$

При  $t = t_1$  ( $\varphi_x = \varphi_{x\max}$ ), після підстановки виразу (9.139) в рівняння (9.144) і (9.145), отримаємо

$$V_{01} = V_{0n} + \frac{r_0 \cdot A_M}{\Omega \cdot (J_k + m_k \cdot r_0^2)} \times \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{1}{\Omega} \cdot \arcsin \left( \frac{\varphi_{x\max} \cdot (J_k + m_k \cdot r_0^2) - m_k \cdot r_0 \cdot \left( \frac{\bar{M}_k}{R_{zk}} - f \cdot r_0 \right) + J_k \cdot \frac{P_{xk}}{R_{zk}}}{m_k \cdot r_0 \cdot \frac{A_M}{R_{zk}}} \right) \right] \right\}; \quad (9.146)$$

$$\omega_{k1} = \frac{V_{0n}}{r_0} + \frac{A_M}{\Omega \cdot (J_k + m_k \cdot r_0^2)} \times \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{1}{\Omega} \cdot \arcsin \left( \frac{\varphi_{x\max} \cdot (J_k + m_k \cdot r_0^2) - m_k \cdot r_0 \cdot \left( \frac{\bar{M}_k}{R_{zk}} - f \cdot r_0 \right) + J_k \cdot \frac{P_{xk}}{R_{zk}}}{m_k \cdot r_0 \cdot \frac{A_M}{R_{zk}}} \right) \right] \right\}. \quad (9.147)$$

У зазначеному інтервалі часу  $[0; t_1]$  величина відносного буксування  $S_x = 1$ .

В інтервалі часу  $[t_1; t_2]$  справедливі залежності (9.130) і (9.132).

Відносне буксування колеса визначається залежністю (9.136).  
У момент часу  $t = t_2$  вирази (9.130) і (9.133) набудуть вигляду

$$V_{02} = V_{01} + \frac{\xi \cdot \varphi_{x \max} \cdot R_{zK} - P_{xK}}{m_K} \cdot (t_2 - t_1); \quad (9.148)$$

$$\begin{aligned} \omega_{K2} = \omega_{K1} + \frac{\bar{M}_K - (\xi \cdot \varphi_{x \max} + f) \cdot R_{zK} \cdot r_0}{J_K} \cdot (t_2 - t_1) + \\ + \frac{A_M}{\Omega \cdot J_K} \cdot \{1 - \cos[\Omega \cdot (t_2 - t_1)]\}. \end{aligned} \quad (9.149)$$

З огляду на рівняння (9.138), визначимо

$$t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\Omega} - 2 \cdot t_1. \quad (9.150)$$

При інтегруванні рівняння (9.75) прийемо таку граничну умо-  
ву: при  $t = t_2$ ;  $V_0 = V_{02}$ . З урахуванням прийнятої граничної умови  
визначимо

$$\begin{aligned} V_0 = V_{02} + \\ + \frac{r_0 \cdot \left\{ \left[ \bar{M}_K - (f \cdot R_{zK} + P_{xK}) \cdot r_0 \right] \cdot (t - t_2) + \frac{A_M}{\Omega} \cdot \{1 - \cos[\Omega \cdot (t - t_2)]\} \right\}}{J_K + m_K \cdot r_0^2}. \end{aligned} \quad (9.151)$$

Відповідно, кутова швидкість колеса

$$\omega_{\kappa} = \omega_{\kappa}^{nep} = \frac{V_0}{r_0} = \frac{V_{02}}{r_0} +$$

$$+ \frac{[\bar{M}_{\kappa} - (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_0] \cdot (t - t_2) + \frac{A_M}{\Omega} \cdot \{1 - \cos[\Omega \cdot (t - t_2)]\}}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2}. \quad (9.152)$$

Відносне буксування колеса  $S_x = 0$  при  $t_2 \leq t \leq T$  (див. рис. 9.2).

Цікавим є визначення кінематичних параметрів колеса при  $t = T$ . У точці  $t = T$  кінематичні параметри колеса будуть визначатися в такий спосіб

$$V_{0T} = V_{02} +$$

$$+ \frac{r_0 \cdot \left\{ [\bar{M}_{\kappa} - (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_0] \cdot (T - t_2) + \frac{A_M}{\Omega} \cdot \{1 - \cos[\Omega \cdot (T - t_2)]\} \right\}}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2}. \quad (9.153)$$

Отже,

$$\omega_{\kappa T} = \frac{V_{02}}{r_0} +$$

$$+ \frac{[\bar{M}_{\kappa} - (f \cdot R_{z\kappa} + P_{x\kappa}) \cdot r_0] \cdot (T - t_2) + \frac{A_M}{\Omega} \cdot \{1 - \cos[\Omega \cdot (T - t_2)]\}}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_0^2}. \quad (9.154)$$

З урахуванням рівняння

$$\Omega \cdot T = 2 \cdot \pi, \quad (9.155)$$

перетворимо (9.153) і (9.154) до вигляду

$$V_{0T} = V_{02} + r_0 \cdot \left\{ \frac{[\bar{M}_k - (f \cdot R_{zk} + P_{xk}) \cdot r_0] \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi}{\Omega} - t_2 \right) - \frac{A_M}{\Omega} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t_2)]}{J_k + m_k \cdot r_0^2} \right\}; \quad (9.156)$$

$$\omega_{kT} = \frac{V_{02}}{r_0} + \frac{[\bar{M}_k - (f \cdot R_{zk} + P_{xk}) \cdot r_0] \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi}{\Omega} - t_2 \right) - \frac{A_M}{\Omega} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t_2)]}{J_k + m_k \cdot r_0^2}. \quad (9.157)$$

Відносне поздовжнє ковзання колеса в цьому випадку  $S_x = 0$ . За умови сталого руху справедливе співвідношення (9.107) (при  $r_d = r_0$ ), тому рівняння (9.156) і (9.157) спростяться

$$V_{0T} = V_{02} - \frac{r_0 \cdot \frac{A_M}{\Omega} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t_2)]}{J_k + m_k \cdot r_0^2}; \quad (9.158)$$

$$\omega_{kT} = \frac{V_{02}}{r_0} - \frac{\frac{A_M}{\Omega} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t_2)]}{J_k + m_k \cdot r_0^2}. \quad (9.159)$$

Час  $t = T$  відповідає завершенню першого циклу коливань крутильного моменту на колесі. При переході до наступного (другого) циклу необхідно в рівняння (9.16) замість  $V_{0n}$  підставити  $V_{0T}$ , а в рівняння (9.17) замість  $\omega_{kn}$  підставити  $\omega_{kT}$ . І так поступати необхідно на кожному наступному циклі коливань крутного моменту на колесі.

### 9.5.2. Рух в неусталеному режимі при зміні крутного моменту за гармонійним законом

В цьому випадку вираз для визначення поздовжнього коефіцієнта зчеплення колеса з дорогою, що використовується, буде мати вигляд з урахуванням співвідношення (9.61), (9.121)

$$\varphi_x = \frac{m_k \cdot r_0 \cdot \left[ \bar{M}_{k\max} \cdot \frac{t}{t_h} \cdot \left( 1 + \frac{K_1}{2} \cdot \sin(\Omega \cdot t) \right) - f \cdot r_0 \right] + J_k \cdot \frac{P_{zk}}{R_{zk}}}{J_k + m_k \cdot r_0^2}. \quad (9.160)$$

З рівняння (9.160) визначимо компоненти рівняння (9.121)

$$\bar{\varphi}_x = \frac{m_k \cdot r_0 \cdot \left( \bar{M}_{k\max} \cdot \frac{t}{t_h} - f \cdot r_0 \right) + J_k \cdot \frac{P_{zk}}{R_{zk}}}{J_k + m_k \cdot r_0^2}; \quad (9.161)$$

$$A_{\varphi x} = \frac{m_k \cdot r_0 \cdot \frac{K_1}{2} \cdot \bar{M}_{k\max} \cdot \frac{t}{t_h} \cdot \sin(\Omega \cdot t)}{J_k + m_k \cdot r_0^2}. \quad (9.162)$$

На рис. 9.3 наведено графік залежності  $M_k = M_k(t)$ , який побудовано у відповідності з рівнянням (9.68) з урахуванням (9.61).

Це рівняння має вигляд

$$M_k = \frac{\bar{M}_{k \max} \cdot t}{t_n} \cdot [1 + K_M \cdot \sin(\Omega \cdot t)]. \quad (9.163)$$

На рис. 9.4 наведено графік залежності від часу поздовжнього коефіцієнта зчеплення колеса з дорогою, побудований за формулою (9.121) з урахуванням співвідношень (9.161) і (9.162)

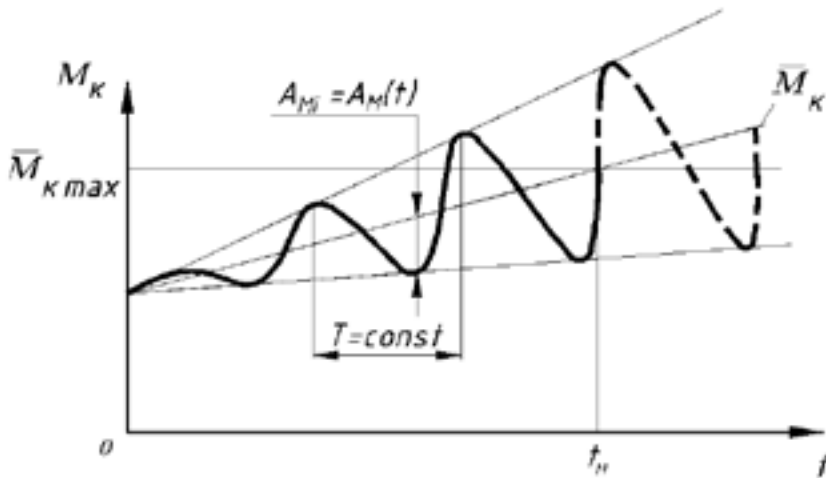


Рис. 9.3. Залежність  $M_k(t)$  для жорсткого колеса автомобіля при русі в неусталеному режимі і зміні крутильного моменту за гармонійним законом

Прирівнюючи праву частину рівняння (9.160) до величини  $\varphi_{x \max}$ , визначимо величини  $t_1$  і  $t_2$ . Визначення при  $t < t_n$  доцільно проводити чисельними методами, оскільки аналітичне рішення занадто складне. Визначити достатньо  $t_1$ , а  $t_2$  можна визначити потім за формулою (9.138). При  $t > t_n$  величини  $t_1$  і  $t_2$  можна визначити за формулами (9.139) і (9.140), відповідно. При  $t < t_n$  кінематичні параметри жорсткого колеса слід визначити за формулами (9.72) і (9.73). Час  $t_2$  — за формулою (9.138).

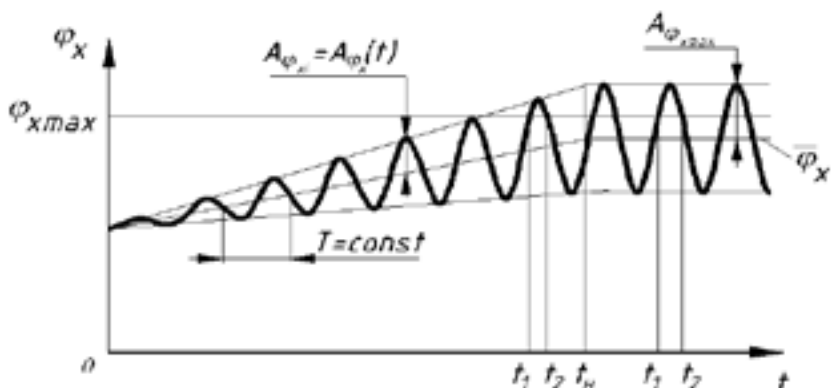


Рис. 9.4. Залежність  $\varphi_x = \varphi_x(t)$  для жорсткого колеса автомобіля при русі в неусталеному режимі і зміні крутного моменту за гармонійним законом

При  $t_1 < t \leq t_2$  кінематичні параметри визначаються з виразів (9.130) і (9.133). При цьому величини  $V_{01}$  і  $\omega_{k1}$  обчислюються за співвідношеннями (9.72) і (9.73) при  $t = t_1$ . При  $t = t_2$  за формулами (9.130) і (9.133) знаходять  $V_{02}$  і  $\omega_{k2}$ . В інтервалі часу  $[t_1; t_2]$  за допомогою рівняння (9.136) розраховується  $S_x$ . При  $t > t_n$  кінематичні параметри колеса слід визначати з виразів (9.72) і (9.73).

## 9.6. Рух еластичного колеса автомобіля при реалізації граничної за зчепленням дотичної реакції дороги

### 9.6.1. Неусталений рух при зміні крутного моменту за лінійним законом

Зміна крутильного моменту на колесі визначається залежністю (9.61), а величини  $\varphi_x$  – виразом (9.92). Перетворивши рівняння (9.92), отримаємо

$$\varphi_x = \frac{m_k \cdot r_\partial \cdot \left( \frac{M_{\kappa \max}}{R_{z\kappa} \cdot t_H} \cdot t - f \cdot r_\partial \right) + J_\kappa \cdot \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}}}{J_\kappa + m_k \cdot r_\partial^2}. \quad (9.164)$$

Максимальне значення  $\varphi_{x \max}$  реалізується при  $t = t_1$ . У цьому випадку рівняння (9.164) набуде вигляду

$$\varphi_{x \max} = \frac{m_k \cdot r_\partial \cdot \left( \frac{M_{\kappa \max}}{R_{z\kappa} \cdot t_H} \cdot t_1 - f \cdot r_\partial \right) + J_\kappa \cdot \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}}}{J_\kappa + m_k \cdot r_\partial^2}. \quad (9.165)$$

З рівняння (9.165) визначимо

$$t_1 = \frac{\left( \varphi_{x \max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \left( 1 + \frac{J_\kappa}{m_k \cdot r_\partial^2} \right) + f + \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}}}{\frac{M_{\kappa \max}}{R_{z\kappa} \cdot t_H \cdot r_\partial}}; \quad (9.166)$$

$$t_1 = \frac{R_{z\kappa} \cdot t_H \cdot r_\partial}{M_{\kappa \max}} \cdot \left[ \varphi_{x \max} + f + \left( \varphi_{x \max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_\kappa}{m_k \cdot r_\partial^2} \right]. \quad (9.167)$$

При  $t = t_1$  і  $V_0 = V_{01}$ . Підставляючи (9.167) в (9.88), отримаємо

$$V_{01} = \frac{r_{\partial}^3}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \cdot \frac{R_{z\kappa}^2 \cdot t_H}{M_{\kappa \max}} \cdot \left[ \varphi_{x \max} + f + \left( \varphi_{x \max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right] \times \left\{ 0,5 \cdot \left[ \varphi_{x \max} + f + \left( \varphi_{x \max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right] - f - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right\}. \quad (9.168)$$

Використовуючи рівняння (9.133), при  $r_0 = r_{\partial}$ , отримаємо швидкість осі колеса після підстановки в нього виразів (9.167) і (9.168)

$$V_0 = \frac{r_{\partial}^3}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \cdot \frac{R_{z\kappa}^2 \cdot t_H}{M_{\kappa \max}} \cdot \left[ \varphi_{x \max} + f + \left( \varphi_{x \max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right] \times \left\{ 0,5 \cdot \left[ \varphi_{x \max} + f + \left( \varphi_{x \max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right] - f - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right\} + \frac{\xi \cdot \varphi_{x \max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{m_{\kappa}} \cdot \left\{ t - \frac{R_{z\kappa} \cdot t_H \cdot r_{\partial}}{M_{\kappa \max}} \cdot \left[ \varphi_{x \max} + f + \left( \varphi_{x \max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right] \right\}. \quad (9.169)$$

Кутова швидкість переносного руху колеса

$$\omega_{\kappa}^{nep} = \frac{V_0}{r_{\partial}} = \frac{R_{z\kappa}^2 \cdot t_H \cdot r_{\partial}^2}{M_{\kappa \max} \cdot (J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2)} \cdot \left[ \varphi_{x \max} + f + \left( \varphi_{x \max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right] \times \left\{ 0,5 \cdot \left[ \varphi_{x \max} + f + \left( \varphi_{x \max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right] - f - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right\} + \frac{\xi \cdot \varphi_{x \max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{r_{\partial} \cdot m_{\kappa}}.$$

$$\cdot \left\{ t - \frac{R_{z\kappa} \cdot t_H \cdot r_\partial}{M_{\kappa\max}} \cdot \left[ \varphi_{x\max} + f + \left( \varphi_{x\max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_\kappa}{m_\kappa \cdot r_\partial^2} \right] \right\}. \quad (9.170)$$

При  $t < t_1$  кінематичні параметри колеса необхідно визначити з виразів (9.85), (9.88), (9.89), (9.90) і (9.92). При  $t > t_1$  необхідно визначити  $\omega_\kappa^{nep}$  за формулою (9.170).

При русі еластичного колеса з ковзанням справедливе рівняння

$$J_\kappa \cdot (\dot{\omega}_\kappa^{nep} + \dot{\omega}_{\kappa 1}^{відн}) = \frac{M_{\kappa\max}}{t_H} \cdot t - R_{z\kappa} \cdot r_\partial \cdot (\varphi_{x\max} + f). \quad (9.171)$$

Розв'язок диференціального рівняння (9.171) з роздільними змінними маємо у вигляді

$$\omega_\kappa^{nep} + \omega_{\kappa 1}^{nep} = C + \frac{M_{\kappa\max}}{2 \cdot J_\kappa \cdot t_H} \cdot t^2 - \frac{R_{z\kappa} \cdot r_\partial}{J_\kappa} \cdot (\varphi_{x\max} + f) \cdot t. \quad (9.172)$$

Постійну інтегрування  $C$  знаходимо з граничних умов: при  $t = t_1$   $\omega_\kappa^{nep} + \omega_{\kappa 1}^{nep} = \omega_{\kappa 1}^{nep}$ .

Величину  $\omega_\kappa^{nep}$  визначаємо з рівняння (9.89). Після підстановки (9.89) в (9.172) з урахуванням граничних умов отримаємо

$$C = R_{z\kappa} \cdot r_\partial \cdot \frac{\varphi_{x\max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} + \frac{m_\kappa \cdot r_\partial^2}{J_\kappa} \cdot (\varphi_{x\max} + f)}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\partial^2} \cdot t_1 - \frac{M_{\kappa\max} \cdot t_1^2}{2 \cdot t_H} \cdot \frac{m_\kappa \cdot r_\partial^2}{J_\kappa \cdot (J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\partial^2)}. \quad (9.173)$$

Рівняння (9.172) з урахуванням (9.173) набуде вигляду

$$\omega_{\kappa}^{nep} + \omega_{\kappa 1}^{відн} = \frac{M_{\kappa \max}}{2 \cdot J_{\kappa} \cdot t_H} \cdot \left( t^2 - \frac{t_1^2}{1 + \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2}} \right) - \frac{R_{z\kappa} \cdot r_{\partial} \cdot (\varphi_{x\max} + f)}{J_{\kappa}} \cdot \left( t - t_1 \cdot \frac{\frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \cdot \frac{\varphi_{x\max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} + 1}{\varphi_{x\max} + f} + 1}{1 + \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2}} \right). \quad (9.174)$$

З виразу (9.174) знайдемо

$$\omega_{\kappa 1}^{відн} = \frac{M_{\kappa \max}}{2 \cdot J_{\kappa} \cdot t_H} \cdot \left( t^2 - \frac{t_1^2}{1 + \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2}} \right) - \frac{R_{z\kappa} \cdot r_{\partial} \cdot (\varphi_{x\max} + f)}{J_{\kappa}} \cdot \left( t - t_1 \cdot \frac{\frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \cdot \frac{\varphi_{x\max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} + 1}{\varphi_{x\max} + f} + 1}{1 + \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2}} \right) - \omega_{\kappa}^{nep}. \quad (9.175)$$

Підставляючи вираз (9.170) в (9.175), визначимо

$$\begin{aligned}
 \omega_{\kappa 1}^{\text{відн}} &= \frac{M_{\kappa \max}}{2 \cdot J_{\kappa} \cdot t_H} \cdot \left( t^2 - \frac{t_1^2}{1 + \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2}} \right) - \frac{R_{z\kappa} \cdot r_{\partial} \cdot (\varphi_{x \max} + f)}{J_{\kappa}} \times \\
 &\times \left( t - t_1 \cdot \frac{\frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \cdot \frac{\varphi_{x \max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} + 1}{\varphi_{x \max} + f}}{1 + \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2}} \right) - \frac{R_{z\kappa}^2 \cdot t_H \cdot r_{\partial}^2}{M_{\kappa \max} \cdot (J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2)} \times \\
 &\times \left[ \varphi_{x \max} + f + \left( \varphi_{x \max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right] \times \left\{ 0,5 \cdot \left[ \varphi_{x \max} + f + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \left( \varphi_{x \max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right] - f - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right\} - \frac{\xi \cdot \varphi_{x \max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{r_{\partial} \cdot m_{\kappa}} \times \\
 &\times \left\{ t - \frac{R_{z\kappa} \cdot t_H \cdot r_{\partial}}{M_{\kappa \max}} \cdot \left[ \varphi_{x \max} + f + \left( \varphi_{x \max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right] \right\}. \quad (9.176)
 \end{aligned}$$

Для оцінювання впливу кутової жорсткості шини на величину  $\omega_{\kappa 2}^{\text{відн}}$  складемо рівняння

$$J_{\kappa} \cdot \ddot{\varphi}_{\kappa 2}^{\text{відн}} = M_{\kappa}^* - C_{\text{кут}} \cdot \varphi_{\kappa 2}^{\text{відн}} - K_{\text{кут}} \cdot \dot{\varphi}_{\kappa 2}^{\text{відн}}, \quad (9.177)$$

де  $\varphi_{\kappa 2}$  – кут повороту колеса, обумовлений кутовою піддатливістю шини;

$M_{\kappa}^*$  – момент, що викликає кутову деформацію шини.

При ковзанні колеса справедливо співвідношення

$$M_{\kappa}^* = (\varphi_{x \max} + f) \cdot R_{z\kappa} \cdot r_{\delta}. \quad (9.178)$$

З урахуванням (9.178) перетворимо (9.177) до вигляду

$$\ddot{\varphi}_{\kappa 2}^{\text{відн}} + 2 \cdot n \cdot \dot{\varphi}_{\kappa 2}^{\text{відн}} + k^2 \cdot \varphi_{\kappa 2}^{\text{відн}} = (\xi \cdot \varphi_{x \max} + f) \cdot R_{z\kappa} \cdot r_{\delta}. \quad (9.179)$$

Загальне рішення неоднорідного диференціального рівняння (9.179) маємо у вигляді

$$\overline{\varphi}_{\kappa 2}^{\text{відн}} = e^{-n \cdot t} \cdot \left[ A \cdot \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + B \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \right]. \quad (9.180)$$

Частинний розв'язок

$$\varphi_{\kappa 2 0}^{\text{відн}} = \frac{(\xi \cdot \varphi_{x \max} + f) \cdot R_{z\kappa} \cdot r_{\delta}}{k^2} = J_{\kappa} \cdot \frac{(\xi \cdot \varphi_{x \max} + f) \cdot R_{z\kappa} \cdot r_{\delta}}{C_{\text{кут}}}. \quad (9.181)$$

Рішення рівняння (9.179) маємо у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_{\kappa 2}^{\text{відн}} = \overline{\varphi}_{\kappa 2}^{\text{відн}} + \varphi_{\kappa 2 0}^{\text{відн}} = e^{-n \cdot t} \cdot \left[ A \cdot \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + \right. \\ \left. + B \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \right] + J_{\kappa} \cdot R_{z\kappa} \cdot r_{\delta} \cdot \frac{\xi \cdot \varphi_{x \max} + f}{C_{\text{кут}}}. \quad (9.182) \end{aligned}$$

Кутова швидкість

$$\begin{aligned} \omega_{\kappa 2}^{відн} = \dot{\varphi}_{\kappa 2}^{відн} = e^{-n \cdot t} \cdot \left\{ B \cdot \left[ \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \cos\left(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - n \cdot \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t\right) \right] - A \cdot \left[ n \cdot \cos\left(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{k^2 - n^2} \cdot \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.183)$$

При  $t = t_1$  граничними умовами будуть  $\varphi_{\kappa 2}^{відн} = \varphi_{\kappa}^{відн}$  і  $\omega_{\kappa 2}^{відн} = \omega_{\kappa}^{відн}$ , визначені за формулами (9.84) і (9.85) з урахуванням (9.167). Визначення коефіцієнтів  $A$  і  $B$  в рівняннях (9.182) і (9.183) необхідно визначати чисельними методами з урахуванням співвідношень (9.84), (9.85) і (9.167).

Відносне буксування колеса в зоні контакту в даному випадку

$$S_x = \frac{\omega_{\kappa 1}^{відн} + \omega_{\kappa 2}^{відн}}{\omega_{\kappa}^{nep} + \omega_{\kappa 1}^{відн} + \omega_{\kappa 2}^{відн}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_{\kappa}^{nep}}{\omega_{\kappa 1}^{відн} + \omega_{\kappa 2}^{відн}}}. \quad (9.184)$$

При  $t > t_n$  рівняння (9.64) набуде вигляду (оскільки  $R_{x\kappa} = \varphi_{x\max} \cdot R_{z\kappa}$ )

$$m_{\kappa} \cdot \dot{V}_0 = \xi \cdot \varphi_{x\max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}. \quad (9.185)$$

З огляду на співвідношення (9.124), перетворимо (9.185) до вигляду

$$\dot{\omega}_{\kappa}^{nep} = \frac{\dot{V}_0}{r_{\partial}} = \frac{\xi \cdot \varphi_{x\max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}}. \quad (9.186)$$

У рівняння (9.64) замість  $\dot{\omega}_\kappa^{nep}$  потрібно в даному випадку підставити  $\dot{\omega}_\kappa^{nep} + \dot{\omega}_{\kappa 1}^{відн}$ . Зазначене рівняння перетворимо наступним чином (за наявності  $M_\kappa = M_{\kappa \max}$ )

$$\begin{aligned} & \dot{\omega}_\kappa^{nep} + \dot{\omega}_{\kappa 1}^{відн} = \\ & = \frac{M_{\kappa \max} - f \cdot R_{z\kappa} \cdot r_\delta - R_{x\kappa} \cdot r_\delta}{J_\kappa} = \frac{M_{\kappa \max} - R_{z\kappa} \cdot r_\delta \cdot (f + \xi \cdot \varphi_{x \max})}{J_\kappa}. \end{aligned} \quad (9.187)$$

Інтегруючи рівняння (9.187), отримаємо

$$\omega_\kappa^{nep} + \omega_{\kappa 1}^{відн} = C_1 + \frac{M_{\kappa \max} - R_{z\kappa} \cdot r_\delta \cdot (f + \xi \cdot \varphi_{x \max})}{J_\kappa} \cdot t. \quad (9.188)$$

При  $t = t_n$

$$\omega_\kappa^{nep} + \omega_{\kappa 1}^{відн} = \omega_{\kappa n}^{nep} + \omega_{\kappa 1 n}^{відн}, \quad (9.189)$$

де  $\omega_{\kappa n}^{nep}$ ;  $\omega_{\kappa 1 n}^{відн}$  – переносна і відносна компоненти кутової швидкості колеса.

Зазначені кутові швидкості (а точніше їх сума) можуть бути знайдені з рівняння (9.174) при  $t = t_n$ , тобто

$$\omega_{\kappa n}^{nep} + \omega_{\kappa 1 n}^{відн} = t_n \cdot \frac{0,5 \cdot M_{\kappa \max} - r_\delta \cdot (f \cdot R_{z\kappa} + P_x)}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\delta^2}. \quad (9.190)$$

Рівняння (9.188) з урахуванням (9.189) і (9.290) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \omega_{\kappa}^{nep} + \omega_{\kappa 1}^{відн} = t_n \cdot \frac{0,5 \cdot M_{\kappa \max} - r_{\delta} \cdot (f \cdot R_{z\kappa} + P_x)}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_{\delta}^2} + \\ + \frac{M_{\kappa \max} - R_{z\kappa} \cdot r_{\delta} \cdot (f + \xi \cdot \varphi_{x \max})}{J_{\kappa}} \cdot t. \end{aligned} \quad (9.191)$$

Переносну кутову швидкість  $\omega_{\kappa}^{nep}$  колеса визначимо, інтегруючи рівняння (9.186)

$$\omega_{\kappa}^{nep} = \frac{V_0}{r_{\delta}} = C_2 + \frac{\xi \cdot \varphi_{x \max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\delta}} \cdot t. \quad (9.192)$$

При  $t = t_n$

$$\omega_{\kappa}^{nep} = \frac{V_{0n}}{r_{\delta}}, \quad (9.193)$$

Швидкість  $V_{0n}$  визначаємо після підстановки  $t = t_n$  в рівняння (9.169). Таким чином

$$C_2 = \frac{V_{0n}}{r_{\delta}} - \frac{\xi \cdot \varphi_{x \max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\delta}} \cdot t_n \quad (9.194)$$

і

$$\omega_{\kappa}^{nep} = \frac{V_{0n}}{r_{\delta}} + \frac{\xi \cdot \varphi_{x \max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\delta}} \cdot (t - t_n). \quad (9.195)$$

Після підстановки в (9.195) рівняння (9.172) (при  $t = t_H$ ) отримаємо

$$\begin{aligned} \omega_{\kappa}^{nep} = & \frac{\xi \cdot \varphi_{x\max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}} \cdot t + \frac{R_{z\kappa}^2 \cdot t_H}{M_{\kappa\max}} \cdot \frac{r_{\partial}^2}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \times \\ & \times \left[ \varphi_{x\max} + f + \left( \varphi_{x\max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right] \times \left\{ 0,5 \cdot \left[ \varphi_{x\max} + f + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \varphi_{x\max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right] - f - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right\} - \frac{\xi \cdot \varphi_{x\max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{m_{\kappa}} \times \\ & \times \frac{R_{z\kappa} \cdot t_H}{M_{\kappa\max}} \cdot \left[ \varphi_{x\max} + f + \left( \varphi_{x\max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right]. \end{aligned} \quad (9.196)$$

З рівняння (9.191), після підстановки в нього виразу для  $\omega_{\kappa}^{nep}$  (рівняння (9.196)), визначимо  $\omega_{\kappa 1}^{відн}$

$$\begin{aligned} \omega_{\kappa 1}^{відн} = & \left[ \frac{M_{\kappa\max} - R_{z\kappa} \cdot r_{\partial} \cdot (\xi \cdot \varphi_{x\max} + f)}{J_{\kappa}} - \frac{\xi \cdot \varphi_{x\max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}} \right] \cdot t - \\ & - \frac{R_{z\kappa}^2 \cdot t_H}{M_{\kappa\max}} \cdot \frac{r_{\partial}^2}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \cdot \left[ \varphi_{x\max} + f + \left( \varphi_{x\max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right] \times \left\{ 0,5 \times \right. \\ & \left. \times \left[ \varphi_{x\max} + f + \left( \varphi_{x\max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_{\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} \right] - f - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right\} - \frac{\xi \cdot \varphi_{x\max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{m_{\kappa}} \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{R_{z\kappa} \cdot t_H}{M_{\kappa \max}} \cdot \left[ \varphi_{x\max} + f + \left( \varphi_{x\max} - \frac{P_{x\kappa}}{R_{z\kappa}} \right) \cdot \frac{J_\kappa}{m_\kappa \cdot r_\delta^2} \right]. \quad (9.197)$$

Компонента кутової швидкості відносного руху, обумовлена кутовою піддатливістю шини, може бути визначена за формулою (9.183). Відносне буксування в плямі контакту колеса в даному випадку може бути визначене за формулою (9.184).

### 9.6.2. Усталений рух при зміні крутного моменту за гармонійним законом

В цьому випадку, сума кутових швидкостей  $\omega_\kappa^{nep} + \omega_{\kappa 1}^{vidn}$  може бути визначена за формулою (9.130), тобто, з урахуванням  $r_0 = r_\delta$ , отримаємо (при  $t_1 < t < t_2$ )

$$\omega_\kappa^{nep} + \omega_{\kappa 1}^{vidn} = \omega_{\kappa 1}^{nep} + \frac{\bar{M}_\kappa - (\xi \cdot \varphi_{x\max} + f) \cdot R_{z\kappa} \cdot r_\delta}{J_\kappa} \times \\ \times (t - t_1) + \frac{A_M}{\Omega \cdot J_\kappa} \cdot \{1 - \cos[\Omega \cdot (t - t_1)]\}, \quad (9.198)$$

де  $\omega_{\kappa 1}^{nep}$  – кутова швидкість переносного руху колеса при  $t = t_1$ ; визначається з рівняння (9.135).

Визначимо  $\omega_{\kappa 1}^{nep}$  при  $t = t_1$  з виразу

$$\omega_{\kappa 1}^{nep} = \omega_{\kappa H}^{nep} + \frac{[\bar{M}_\kappa - (f \cdot R_{z\kappa} + R_{x\kappa}) \cdot r_\delta] \cdot t_1 + \frac{A_M}{\Omega} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t_1)]}{J_\kappa + m_\kappa \cdot r_\delta^2}. \quad (9.199)$$

Таким чином

$$\begin{aligned} \omega_{\kappa}^{nep} + \omega_{\kappa 1}^{відн} &= \omega_{\kappa H}^{nep} + \\ &+ \frac{[\bar{M}_{\kappa} - (f \cdot R_{z\kappa} + R_{x\kappa}) \cdot r_{\partial}] \cdot t_1 + \frac{A_M}{\Omega} \cdot [1 - \cos(\Omega \cdot t_1)]}{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2} + \\ &+ \frac{\bar{M}_{\kappa} - (\xi \cdot \varphi_{x\max} + f) \cdot R_{z\kappa} \cdot r_{\partial}}{J_{\kappa}} \cdot (t - t_1) + \frac{A_M}{\Omega \cdot J_{\kappa}} \cdot \{1 - \cos[\Omega \cdot (t - t_1)]\}. \end{aligned} \quad (9.200)$$

Кутова швидкість переносного руху (при  $t_1 < t < t_2$ ) може бути визначена з виразу (9.135)

$$\omega_{\kappa}^{nep} = \omega_{\kappa 1}^{nep} + \frac{\xi \cdot \varphi_{x\max} \cdot R_{z\kappa} - P_{x\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}} \cdot (t - t_1). \quad (9.201)$$

Віднімаючи почленно рівняння (9.201) з рівняння (9.198), визначимо

$$\begin{aligned} \omega_{\kappa 1}^{відн} &= \left( \frac{\bar{M}_{\kappa} - f \cdot R_{z\kappa} \cdot r_{\partial}}{J_{\kappa}} + \frac{P_{x\kappa}}{m_{\kappa} \cdot r_{\partial}} - \xi \cdot \varphi_{x\max} \cdot R_{z\kappa} \cdot \frac{J_{\kappa} + m_{\kappa} \cdot r_{\partial}^2}{J_{\kappa} \cdot m_{\kappa} \cdot r_{\partial}} \right) \times \\ &\times (t - t_1) + \frac{A_M}{\Omega \cdot J_{\kappa}} \cdot \{1 - \cos[\Omega \cdot (t - t_1)]\}. \end{aligned} \quad (9.202)$$

В інтервалі часу  $[t_1, t_2]$  відносну кутову швидкість  $\omega_{\kappa 1}^{ому}$ , зумовлену кутовою деформацією шини, слід визначати за формулою (9.183), а відносне буксування – з виразу (9.184).

### **9.6.3. Неусталений рух при зміні крутного моменту за гармонійним законом, а його середнього значення – за лінійним**

Рішення поставленого завдання для еластичного колеса слід вирішувати в двох варіантах: при  $t_1 < t_n$  та при  $t_1 > t_n$ .

При першому варіанті для інтервалу часу  $t < t_1$  необхідно використовувати співвідношення, наведені в пункті 9.4.2, а при  $t \geq t_1$  – в пункті 9.6.2. При цьому обов'язково необхідно враховувати граничні умови. У другому варіанті ( $t_1 > t_n$ ) необхідно використовувати рівняння, наведені в пункті 9.6.2, також з урахуванням граничних умов.

## **9.7. Метод експериментального оцінювання параметрів контакту коліс автомобіля з дорогою**

### **9.7.1. Послідовність визначення кінематичного параметра контакту колеса з дорогою**

При дослідженні кочення деформованого колеса використовується гіпотеза кріпа (псевдоковзання) [4]. Вперше явище псевдоковзання спостерігалось в ремінній передачі і описане Н. Є. Жуковським.

При використанні теорії кріпа приймалися два наступних твердження [4]:

- величина кріпа пропорційна поздовжній деформації периферії колеса в області контакту;
- сила, з якою опорна площа діє на колесо в поздовжньому напрямку при псевдоковзанні, пропорційна поздовжній деформації колеса.

Для оцінювання впливу псевдоковзання на втрати швидкості поступального руху колеса в відомих роботах використовується показник – відносне буксування колеса.

Залежність для визначення буксування колеса має вигляд

$$S_x = 1 - \frac{V_0}{\omega_k \cdot r_\delta}, \quad (9.203)$$

де  $V_0$  – швидкість осі колеса (дорівнює швидкості автомобіля);  
 $\omega_k$  – кутова швидкість колеса;  
 $r_\delta$  – динамічний радіус колеса.

З рівняння (9.203) визначимо лінійну швидкість осі колеса

$$V_0 = \omega_k \cdot r_\delta \cdot (1 - S_x), \quad (9.204)$$

Зі збільшенням  $S_x$  відбувається зменшення  $V_0$ . Причиною появи відносного буксування  $S_x$  є деформація периферійної частини шини. Дослідженню впливу еластичності шини на її властивості і відносне буксування присвячено роботу [4].

Однак у відомих дослідженнях не розглянуто вплив нерівномірності крутильного моменту, прикладеного до колеса, на лінійну, кутову швидкості і відносне буксування колеса.

Ковзання (буксування або юз) колеса в зоні контакту є одним з параметрів, які характеризують його контакт з дорожньою поверхнею. Однак визначення зазначеного параметра при проведенні експериментальних досліджень пов'язане з рядом проблем. Однією з проблем є визначення динамічного радіуса колеса, що утворюється в результаті деформації шини в плямі контакту з дорогою.

Ковзанням колеса [4] називається одночасне переміщення всіх точок, які знаходяться в контакті колеса з опорною поверхнею. Поздовжнє ковзання колеса, що збігається з напрямком тангенціальних швидкостей точок колеса в контакті, називається буксуванням колеса, а при розбіжності – називається юзом [4]. Коченням без ковзання колеса з еластичною шиною твердою опорною поверхнею (окремий випадок) слід називати такий рух колеса, при якому в плямі його контакту з опорною поверхнею існує хоча б одна точка, яка не ковзає (нековзний відрізок прямої, паралельної осі колеса) [4].

При наявності в плямі контакту еластичного колеса з опорною поверхнею нековзних точок швидкісні втрати відбуваються через наявність пружного ковзання (буксування). Таке ковзання в літературі прийнято називати псевдоковзанням або явищем кріпа [4].

Проведені відомими авторами експериментальні дослідження показали, що для діагональної шини основний вплив на окружну деформацію надає внутрішній тиск повітря в шині і нормальне навантаження в плямі контакту. Радіус кочення може бути представлений у вигляді двох складних функцій, одна з яких залежить від окружної деформації шини, викликаной нормальним навантаженням, а друга – від окружної деформації, викликаной прикладеним до колеса моментом

$$r_k = f(\Delta G_k) + \varphi(\Delta M_k), \quad (9.205)$$

де  $\Delta G_k$  – нормальне навантаження на колесо;

$\Delta M_k$  – крутний момент, прикладений до колеса.

При визначенні відносного буксування за формулою (9.203) багатьма авторами допускалася помилка, оскільки використовувався не динамічний радіус, а кінематичний радіус. З огляду на те, що кінематичний радіус визначається з умови

$$r_k = \frac{V_0}{\omega_k}, \quad (9.206)$$

то при підстановці (9.206) в (9.203) отримаємо  $S_x = 0$ . Тому в рівняння (9.213) доцільно підставляти не кінематичний радіус, а динамічний.

Динамічний радіус колеса визначається в функції від  $\Delta G_k$  і  $\Delta M_k$ , як і радіус кочення (див. вираз (9.205)).

Оскільки як динамічний радіус колеса, так і псевдоковзання визначаються пружними властивостями шини, то автори роботи [4] ввели поняття кінематичного параметра  $K$ , що визначається з наступного співвідношення

$$K = \frac{V_0}{\omega_k \cdot r_0} = (1 - S_x) \cdot \left( 1 - \frac{P_z}{c_z \cdot r_0} \right) = (1 - S_x) \cdot (1 - \lambda_z), \quad (9.207)$$

де  $\lambda_z$  – параметр радіальної деформації колеса;

$r_0$  – вільний радіус колеса, який визначається при відсутності нормального навантаження  $P_z$  на колесо;

$c_z$  – радіальна жорсткість шини.

З виразу (9.207) видно, що кінематичний радіус колеса дорівнює

$$r_k = r_0 \cdot K, \quad (9.208)$$

а лінійна швидкість осі колеса

$$V_0 = \omega_k \cdot r_k = \omega_k \cdot K \cdot r_0. \quad (9.209)$$

При експериментальних дослідженнях існує проблема визначення відносного буксування ведучих коліс. Проблема обумовлена труднощами виміру динамічного радіуса колеса особливо при русі опорною поверхнею, що деформується. В цьому випадку доцільно використовувати кінематичний параметр  $K$  контакту коліс з дорогою.

Параметр радіальної деформації колеса визначається за формулою [4]

$$\lambda_z = \frac{P_z}{c_z \cdot r_0}, \quad (9.210)$$

де  $P_z$  – нормальне навантаження на колесо.

Відносне буксування колеса часто використовується як аргумент функції визначення реалізованого коефіцієнта зчеплення ко-

леса з опорною поверхнею  $\varphi_x = f(S_x)$ . На рисунку 9.5 наведена  $\varphi-S$  діаграма, отримана експериментальним шляхом на стенді з біговим барабаном. Експериментальна крива реалізованого коефіцієнта зчеплення була отримана для колеса автомобіля ЗіЛ-4335 з шиною 11,0-R20 в гальмівному режимі при наступних початкових умовах: зусилля притиснення колеса до бігового барабану 2700 кг; початкова швидкість гальмування 60 км/год; тиск в шині 0,65 МПа; максимальний тиск в гальмівній камері 0,8 МПа; час спрацьовування гальмівного крана 0,18 с; час наповнення гальмової камери від 0 до 0,8 МПа – 0,5 с [4].

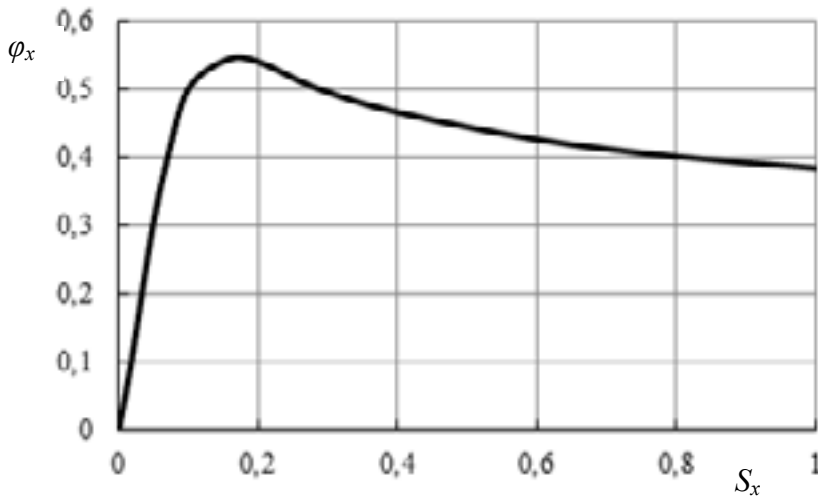


Рис. 9.5. Експериментально отримана  $\varphi_x - S_x$  діаграма для колеса автомобіля ЗіЛ-4335 з шиною 11,0-R20 [4]

При переході від гальмівного до тягового режиму величина відносного буксування колеса  $S_x$  в функції коефіцієнта зчеплення колеса з опорною поверхнею  $\varphi_x$ , що реалізується, змінює лише знак, що дозволяє говорити про ідентичність  $\varphi_x - S_x$  діаграм в гальмівному і тяговому режимах.

Параметр контакту колеса з дорогою враховує як деформацію шини під дією прикладеного навантаження, так і ковзання в зоні контакту.

З рівняння (9.203) визначимо швидкість  $V_0$  осі (автомобіля)

$$V_a = V_0 = \omega_k \cdot r_\delta \cdot (1 - S_x), \quad (9.211)$$

де  $V_a$  – лінійна швидкість автомобіля.

Диференціювання рівняння (9.211) дозволяє визначити лінійне прискорення автомобіля

$$\dot{V}_a = \frac{dV_a}{dt} = r_\delta \cdot \left[ \frac{d\omega_k}{dt} \cdot (1 - S_x) - \omega_k \frac{dS_x}{dt} \right]. \quad (9.212)$$

В даний час в ХНАДУ розроблено реєстраційний-вимірювальний комплекс, що включає в себе два трикоординатних датчика лінійних прискорень і персональний комп'ютер.

Зазначений комплекс дозволяє вимірювати лінійні прискорення автомобіля по трьох просторових координатах і за вказаними параметрами здійснювати розрахунок швидкості руху автомобіля і ряду інших кінематичних, динамічних і енергетичних параметрів машини. Використання цього комплексу можливо і для вирішення поставленого завдання.

Використовуючи метод парціальних прискорень, представимо рівняння (9.212) у вигляді системи двох рівнянь. Кількість рівнянь визначається кількістю невідомих параметрів ( $r_\delta$  і  $S_x$ ), що входять в рівняння (9.212).

$$\begin{cases} \dot{V}_{a1} = r_\delta \cdot [\dot{\omega}_{k1} \cdot (1 - S_x) - \omega_{k1} \cdot \dot{S}_x] \\ \dot{V}_{a2} = r_\delta \cdot [\dot{\omega}_{k2} \cdot (1 - S_x) - \omega_{k2} \cdot \dot{S}_x] \end{cases} \quad (9.213)$$

де  $\dot{V}_{a1}, \dot{\omega}_{\kappa 1}$  – лінійне осі і кутове прискорення колеса в момент часу  $t_1$ ;  
 $\dot{V}_{a2}, \dot{\omega}_{\kappa 2}$  – лінійне осі і кутове прискорення колеса в момент часу  
 $t_2 = t_1 + \Delta t$ ;  
 $\Delta t$  – крок часу.

Приймаємо припущення, що за час  $\Delta t$  величини  $r_\partial, S_x$  і  $\dot{S}_x$  залишаються постійними.

З рівняння (9.211) визначимо

$$1 - S_x = \frac{V_a}{\omega_\kappa \cdot r_\partial}. \quad (9.214)$$

Підставляючи співвідношення (9.214) в систему рівнянь (9.213), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{V}_{a1} = \frac{\dot{\omega}_{\kappa 1}}{\omega_{\kappa 1}} \cdot V_{a1} - \omega_{\kappa 1} \cdot r_\partial \cdot \dot{S}_x; \\ \dot{V}_{a2} = \frac{\dot{\omega}_{\kappa 2}}{\omega_{\kappa 2}} \cdot V_{a2} - \omega_{\kappa 2} \cdot r_\partial \cdot \dot{S}_x, \end{cases} \quad (9.215)$$

де  $V_{a1}, \omega_{\kappa 1}$  – лінійна осі і кутова швидкості колеса при  $t = t_1$ ;  
 $V_{a2}, \omega_{\kappa 2}$  – лінійна осі і кутова швидкості колеса при  $t = t_2$ .

Однак розв'язати систему рівнянь (9.215) (при вимірних параметрах  $\dot{V}_{a1}; \dot{V}_{a2}; \omega_{\kappa 1}; \omega_{\kappa 2}$  і розрахованих  $V_{a1}; V_{a2}; \dot{\omega}_{\kappa 1}; \dot{\omega}_{\kappa 2}$  відносно параметрів  $r_\partial$  і  $\dot{S}_x$  неможливо, оскільки немає змоги їх розділити.

При використанні кінематичного параметра  $K$  проведемо диференціювання рівняння (9.209)

$$\dot{V}_a = \dot{V}_0 = r_0 \cdot (K \cdot \dot{\omega}_\kappa + \omega_\kappa \cdot \dot{K}). \quad (9.216)$$

З рівняння (9.209) визначимо

$$K = \frac{V_a}{\omega_\kappa \cdot r_0}. \quad (9.217)$$

Для розрахунку  $K$  за формулою (9.217) достатньо виміряти  $\omega_\kappa$  і  $V_a$  за допомогою реєстраційного-вимірювального комплексу. Після підстановки (9.217) в (9.216) отримаємо

$$\dot{V}_a = V_a \cdot \frac{\dot{\omega}_\kappa}{\omega_\kappa} + \omega_\kappa \cdot \dot{K} \cdot r_0. \quad (9.218)$$

З рівняння (9.218) визначимо

$$\dot{K} = \frac{dK}{dt} = \frac{\dot{V}_a - V_a \cdot \frac{\dot{\omega}_\kappa}{\omega_\kappa}}{\omega_\kappa \cdot r_0} = \frac{\dot{V}_a}{\omega_\kappa \cdot r_0} - \frac{V_a}{r_0} \cdot \frac{\dot{\omega}_\kappa}{\omega_\kappa^2}. \quad (9.219)$$

Величина  $\dot{K}$  визначається з урахуванням того, що  $r_0$  від початку відомий, а величини  $\dot{V}_a$ ;  $V_a$ ;  $\omega_\kappa$ ;  $\dot{\omega}_\kappa$  вимірюються за допомогою реєстраційного вимірювального комплексу.

З рівняння (9.219) визначимо умову отримання  $\dot{K} = 0$

$$\frac{\dot{V}_a}{V_a} = \frac{\dot{\omega}_\kappa}{\omega_\kappa}. \quad (9.220)$$

Параметр  $\dot{K}$  може бути використаний при розробці алгоритмів функціонування протибуксувальних пристроїв автомобіля.

### 9.7.2. Визначення залежності коефіцієнта зчеплення шини з опорною поверхнею від кінематичного параметра колеса

Діапазон зміни параметра радіальної деформації колеса  $\lambda_z$  буде обмежений з наступних умов. При високих значеннях радіальної жорсткості шини ( $c_z \rightarrow \infty$ ), значення параметра радіальної деформації колеса, відповідно до залежності (9.220), буде прагнути до нуля ( $\lambda_z \rightarrow 0$ ). Таким чином,  $\lambda_z$  буде завжди більше нуля. Для визначення верхньої межі зміни  $\lambda_z$  вираз (9.213) підставимо в формулу (9.217), отримаємо

$$\frac{V_0}{\omega_k \cdot r_0} = \frac{V_0}{\omega_k \cdot r_\partial} \cdot (1 - \lambda_z). \quad (9.221)$$

Звідки

$$\lambda_z = 1 - \frac{r_\partial}{r_0}. \quad (9.222)$$

Відповідно до виразу (9.222),  $\lambda_z$  прийме максимальне значення при мінімальному  $r_\partial$  для конкретного колеса, яке не може бути меншим радіуса обода колеса  $r_{об}$ . Таким чином,

$$\lambda_{z \max} = 1 - \frac{r_{об}}{r_0}. \quad (9.223)$$

Для більшості шин нормального профілю можна прийняти  $r_{об}/r_0 \approx 0,6$ . Тоді  $\lambda_{z \max} = 0,4$ . Таким чином, діапазон зміни параметра радіальної деформації колеса  $0 < \lambda_z \leq 0,4$ .

Підставивши в формулу (9.217) значення  $S_x$  при певних значеннях реалізованого коефіцієнта зчеплення  $\varphi_x$ , визначених на підставі діа-

грами, представленої на рис. 1.1, отримаємо можливість побудувати графіки залежності  $\varphi_x$  від кінематичного параметра колеса  $K$  при різних значеннях параметра радіальної деформації колеса  $\lambda_z$ , як це показано на рис. 9.6 та рис. 9.7.

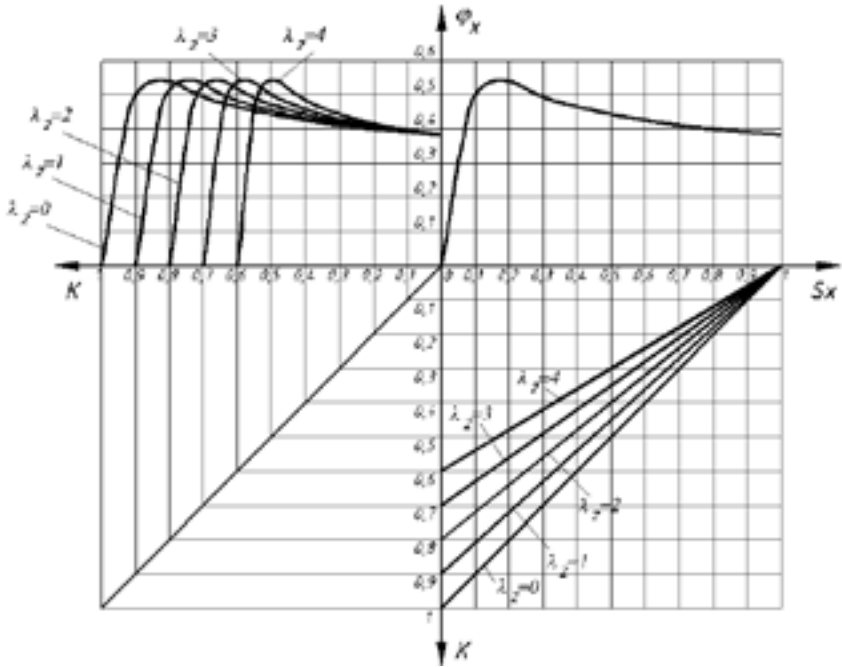
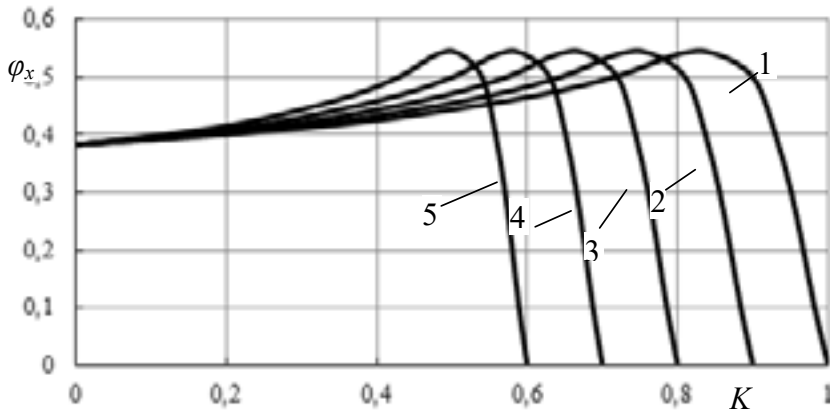


Рис. 9.6. Перетворення графіка функції  $\varphi_x = f(S_x)$  в графік функції  $\varphi_x = f(K)$  при різних значеннях параметра радіальної деформації колеса  $\lambda_z$



1 – при  $\lambda_z = 0$ ; 2 – при  $\lambda_z = 0,1$ ; 3 – при  $\lambda_z = 0,2$ ; 4 – при  $\lambda_z = 0,3$ ;  
5 – при  $\lambda_z = 0,4$

Рис. 9.7. Графіки залежності реалізованого коефіцієнта зчеплення колеса з опорною поверхнею  $\varphi_x$  від кінематичного параметра колеса  $K$  при різних значеннях параметра радіальної деформації колеса  $\lambda_z$  для колеса автомобіля ЗіЛ-4335 з шиною 11,0-R20

## 9.8. Механіка одиночного колеса при рівномірному русі

В роботі [4] з посиланням на раніше проведене дослідження В. А. Петрушова, зазначається протиріччя у визначенні опору коченню колеса на підставі рівнянь силового балансу та балансу потужності

В роботі [4] розглянуті рівняння силового балансу ведучого колеса автомобіля та балансу потужності

$$N_f = M_k w_k - P_x V_a, \quad (9.224)$$

$$R_z a = M_k - R_x r_d, \quad (9.225)$$

де  $N_f$  – потужність, що втрачається колесом при його коченні (потужність опору коченню);

$P_x$  – поздовжнє зусилля, що діє на вісь колеса зі сторони рами автомобіля;

$V_a$  – лінійна швидкість автомобіля, що дорівнює лінійній швидкості осі колеса  $V_0$ ;

$R_z$  – нормальна реакція дороги на колесо ( $R_z = -P_z$ );

$R_x$  – дотична реакція дороги на колесо ( $R_x = -P_x$ ).

В теорії кочення колеса автомобіля, що запропонував Є. А. Чудаков використовуються чотири категорії радіусів: вільний радіус колеса  $r_g$ , що відповідає повністю розвантаженій від всіх навантажень шині; статичний радіус колеса  $r_{cm}$ , кінематичний радіус  $r_k$  і динамічний радіус колеса  $r_d$ . Вказані радіуси можуть бути визначені як

$$r_g = D_0/2; \quad (9.226)$$

$$r_{cm} = r_g - P_z/C_z; \quad (9.227)$$

$$r_k = V_0/w_k; \quad (9.228)$$

$$r_d = M_k/P_k, \quad (9.229)$$

де  $D_0$  – зовнішній діаметр шини;

$P_z$  – нормальне навантаження на колесо;

$C_z$  – радіальна жорсткість шини;

$V_0$  – лінійна швидкість осі колеса, що дорівнює лінійній швидкості автомобіля;

$w_k$  – кутова швидкість колеса;

$M_k$  – крутний момент на колесі;

$P_k$  – тягова сила на колесі.

Поділом лівої та правої частини рівняння (9.224) на  $w_k$ , автори відомих робіт отримали з врахуванням співвідношення (9.228) (при  $V_a = V_0$ ) наступне рівняння

$$M_f = M_k - P_x r_k, \quad (9.230)$$

де  $M_f$  – момент опору коченню колеса,

$$M_f = R_z a. \quad (9.231)$$

Після підстановки (9.231) в (9.230) отримаємо

$$R_z a = M_k - R_x r_k. \quad (9.232)$$

Порівнюючи вирази (9.225) та (9.232) видно, що є протиріччя, оскільки  $r_o \neq r_k$ . На цій підставі можна зробити висновок, що момент опору коченню (9.232), що отримується із рівняння балансу потужності (9.224), відрізняється від моменту опору у рівнянні (9.225) силового балансу. При цьому різниця в моментах, що отримуються відповідно з рівнянь силового балансу та балансу потужності, виражається формулою

$$\Delta M_f = R_x (r_o - r_k). \quad (9.233)$$

Цьому результату ми дали ім'я «парадокс Петрушова» за прізвиськом автора, який його отримав.

У роботі одного з авторів пояснюється розглянуте протиріччя неправильним тлумаченням фізичного змісту моменту опору коченню  $M_f$ , що входить до рівняння (9.230), та отриманого від поділу  $N_f$  (потужності опору коченню) на кутову швидкість колеса  $w_k$ . На думку одного з раніше вказаних авторів момент опору коченню включає у себе не тільки гістерезисні втрати, але і втрати на тертя у плямі контакту. Однак в цій роботі показано, що тертя в плямі контакту також

призводить до зміщення вектору нормальної реакції дороги. На наш погляд, вказане протиріччя викликано тим, що автори відомих робіт підходили до динаміки колеса автомобіля з позицій класичної механіки. Класична механіка розглядає тільки тверде тіло (тіла), відстань між точками якого незмінна. З цієї точки зору завжди справедлива рівність  $r_o = r_k$  і виникаюче протиріччя зникає (див. рівняння (9.225) та (9.232)).

Для того, щоб пояснити «парадокс Петрушова» необхідно підходити до процесу кочення колеса автомобіля з позиції теорії пружності та врахувати енергетичні (потужнісні) втрати з врахуванням деформацій елементів шини.

При вирішенні вказаної задачі необхідно зв'язати між собою ККД колеса, кінематичний та динамічний радіуси.

Кочення колеса є процесом, що визначає динаміку автомобіля. У своїх роботах Є. А. Чудаков розглядав динаміку ведучого колеса у відповідності зі схемою сил та моментів, представлених на рис. 9.8.

При рівномірному русі  $P_j = 0$  та  $M_j = 0$ . Практика наступних (після Є. А. Чудакова) досліджень показала, що опір повітря, який виникає при коченні колеса несуттєвий і тому їм можна знехтувати.

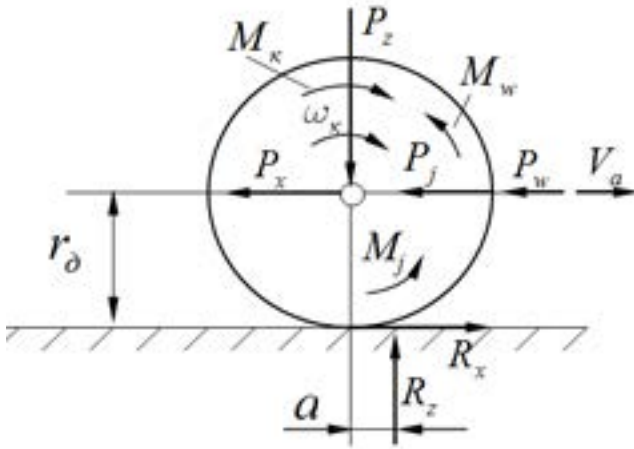
Колесо автомобіля є елементом системи «автомобіль–дорога» і при визначенні його ККД слід чітко розподілити всі зусилля на зовнішні та внутрішні (по відношенню до колеса).

В роботі [4] розглянута кінематична схема ходової частини автомобіля. При такому приведенні кінематичного ланцюга з вищими парами до кінематичного ланцюга з нижчими парами стає зрозуміло, що крутний момент по відношенню до механізму, що розглядається є зовнішнім зусиллям. Це протирічить існуючій думці про те, що крутний момент на ведучому колесі є внутрішнім зусиллям, а дотична реакція у плямі контакту з дорогою – зовнішнім. Виникає також питання про те чи є момент опору коченню колеса зовнішнім або внутрішнім зусиллям по відношенню до колеса як ланки двохкоромислового механізму. Тут можливі два варіанти підходу.

**Перший варіант підходу.** Розглядаючи колесо як вихідну ланку двохкоромислового механізму вважаємо кінематичну пару колесо–стійка ідеальною. В цьому випадку можна вважати момент опору

коченню  $M_f$  зовнішнім зусиллям. Тоді миттєвий (потужнісний) ККД може бути визначено як

$$r_{\kappa}^{mut} = \frac{P_k V_a}{M_k w_k} = \frac{P_k V_a}{M_a w_k}. \quad (9.234)$$



$P_j; M_j$  – сила інерції та інерційний момент, що діють на колесо;  
 $P_w; M_w$  – сила та момент аеродинамічного опору

Рис. 9.8. Схема сил, моментів та реакцій, що діють на ведуче колесо автомобіля при його коченні по горизонтальній жорсткій поверхні

Після підстановки співвідношень (9.228) та (9.229) у рівняння (9.234) отримаємо вираз

$$h_{\kappa}^{mut} = r_{\kappa} / r_0. \quad (9.235)$$

Рівняння (9.224) з врахуванням співвідношення (9.235) матиме вигляд

$$N_f = h_k^{mum} M_k w_k - P_x V_a. \quad (9.236)$$

Рівняння (9.236) відрізняється від рівняння (9.224) тим, що до нього введений параметр  $h_k^{mum}$ . Поділивши ліву та праву частини рівняння (9.236) на  $w_k$  і, враховуючи рівняння (9.235), отримаємо

$$M_f = \frac{N_f}{w_k} = \frac{r_k}{r_\partial} M_k - P_x r_k = \frac{r_k}{r_\partial} (M_k - P_x r_d). \quad (9.237)$$

Рівняння силового балансу (9.225) уточнимо та представимо у вигляді

$$M_f = R_z a = h_k^{cull} M_k - P_x r_d, \quad (9.238)$$

де  $h_k^{cull}$  – силовий ККД колеса.

З рівняння (9.238) визначимо

$$h_k^{cull} = \frac{M_f + P_x r_d}{M_k}. \quad (9.239)$$

З рівняння (9.237) визначимо крутний момент  $M_k$  на колесі

$$M_k = \frac{r_\partial}{r_k} M_f + P_x r_d. \quad (9.240)$$

Підставляючи рівняння (9.240) у співвідношення (9.239) отримаємо

$$h_k^{cul} = \frac{M_f + P_x r_d}{\frac{r_\partial}{r_\kappa} M_f + P_x r_d} = \frac{1 + \frac{P_x r_d}{M_f}}{\frac{r_\partial}{r_\kappa} + \frac{P_x r_d}{M_f}}. \quad (9.241)$$

З рівняння (9.241) видно, що силовий ККД колеса залежить від моменту опору коченню  $M_f$ , що є зовнішнім зусиллям по відношенню до колеса. При  $M_f = 0$  величина  $h_k^{cul} = 1$ . У цьому проглядається протиріччя, оскільки силовий ККД характеризує внутрішні втрати у механізмі.

**Другий варіант підходу.** Вважаємо кінематичну пару «колесо–дорога» не ідеальною. У цьому випадку момент опору коченню колеса  $M_f$  буде моментом тертя в опорі, тобто внутрішнім зусиллям.

При вказаному підході миттєвий ККД колеса буде визначений наступним чином

$$h_k^{mum} = \frac{P_x V_a}{M_k w_k} = \frac{\left( P_\kappa - \frac{M_f}{r_\partial} \right) r_\kappa}{M_\kappa} = \frac{r_\kappa}{r_\partial} \left( 1 - \frac{M_f}{M_k} \right). \quad (9.242)$$

Вираз у дужках – це миттєвий ККД, що враховує втрати на опір коченню

$$h_f^{mum} = 1 - \frac{R_z a}{M_k}. \quad (9.243)$$

Рівняння балансу потужності в цьому випадку матиме вигляд

$$M_k w_k h_k^{mut} = P_x V_a. \quad (9.244)$$

Поділяючи ліву та праву частини рівняння (9.244) на  $w_k$ , отримаємо

$$M_k h_k^{mut} = P_x r_k. \quad (9.245)$$

Після підстановки у рівняння (9.245) співвідношення (9.242) отримаємо

$$M_k \frac{r_\kappa}{r_\partial} \left( 1 - \frac{M_f}{M_k} \right) = P_x r_\kappa \quad (9.246)$$

або

$$M_k - M_f = P_x r_\partial. \quad (9.247)$$

Отриманий результат свідчить про те, що «парадокс Петрушова» знайшов своє пояснення. Для конкретного рішення задачі переходу від рівняння балансу потужності до рівняння силового балансу необхідно враховувати пружні втрати енергії, обумовлені окружною деформацією шини. При цьому момент опору коченню необхідно вважати внутрішнім зусиллям в колесі.

Рівняння силового балансу представимо у вигляді

$$M_k h_k^{cul} = P_x r_\partial; \quad (9.248)$$

$$h_k^{cul} = \frac{P_x r_\partial}{M_k}. \quad (9.249)$$

Після підстановки (9.247) у (9.249) отримаємо

$$h_k^{cul} = \frac{P_x r_\delta}{M_f + P_x r_\delta} = \frac{1}{1 + \frac{M_f}{P_x r_\delta}}. \quad (9.250)$$

Аналіз виразу (9.250) показує, що зі збільшенням моменту опору коченню колеса  $M_f$  силовий ККД колеса зменшується. Це є логічним. Тому другий підхід є більш коректним.

Отримані результати свідчать про те, що окрім затрат потужності на подолання моменту опору коченню необхідно враховувати втрати, обумовлені податливістю шини (пружні втрати). Ця складова ККД колеса може бути визначена з рівняння (9.235).

При першому підході

$$h_k^{np} = h_k^{mum}. \quad (9.251)$$

Коефіцієнт додаткових втрат енергії, обумовлених податливістю шини

$$y_k^{np} = 1 - h_k^{np} = 1 - \frac{r_k}{r_d}. \quad (9.252)$$

Додаткові втрати потужності

$$\Delta N_k = M_k \omega_k \left( 1 - \frac{r_k}{r_d} \right). \quad (9.253)$$

Таким чином, можливо зробити наступні висновки:

– в результаті проведеного дослідження визначено кінематичні і динамічні параметри жорсткого і еластичного коліс при дії постійного і змінного за гармонійним законом крутильних моментів;

– отримані аналітичні вирази дозволяють оцінювати вплив амплітудно-частотних характеристик крутильного моменту на колесі і пружних характеристик шин на стійкість поступального руху автомобіля;

– у міру наближення колової частоти коливань крутильного моменту на колесі до колової частоти власних коливань шини відбувається різке збільшення відносного буксування і величини поздовжнього коефіцієнта зчеплення, який використовується, що може привести до втрати стійкості поступального руху;

– використання відносного ковзання шини в плямі контакту в якості характеристики взаємодії колеса з дорогою не дає можливості його точного визначення при експериментальних дослідженнях. Це пов'язано з труднощами виміру динамічного радіуса колеса, особливо при русі дорогами з покриттям, що деформується. Запропонований метод експериментальної оцінки параметрів контакту коліс автомобіля з дорогою, що використовує замість відносного ковзання  $S_x$  кінематичний параметр  $K$ , дозволяє визначити характеристики контакту коліс автомобіля з дорогою. Пропонується будувати залежності коефіцієнта зчеплення коліс з дорогою не від відносного ковзання  $S_x$ , а від кінематичного параметра  $K$  контакту шини з дорогою;

– параметр радіальної деформації колеса  $\lambda_z$ , що враховується при визначенні кінематичного параметра  $K$ , для більшості шин нормального профілю буде лежати в діапазоні від 0 до 0,4;

– побудова графіка залежності коефіцієнта зчеплення коліс з дорогою від кінематичного параметра  $K$  контакту шини з дорогою дозволить надалі використовувати його в алгоритмах роботи анти-блокувальних і проти-буксовочних пристроїв.

– отримані аналітичні вирази, що дозволяють визначити ККД ведучого колеса автомобіля та додаткові затрати потужності, обумовлені податливістю шини.

## **РОЗДІЛ 10. ВПЛИВ БІЧНОЇ ЕЛАСТИЧНОСТІ ШИН НА СТІЙКІСТЬ АВТОМОБІЛЯ ПРОТИ РИСКАННЯ**

### **10.1. Оцінка керованості вантажного автомобіля при малих коливальних відхиленнях напрямних коліс від нейтрального положення**

При прямолінійному русі керованість є складовою складнішої властивості – курсової стійкості автомобіля, оскільки рух автомобіля завжди є криволінійним, з кривизною траєкторії, що постійно змінюється. Автомобіль постійно перебуває під впливом різноманітних збурень, що призводять до відхилення його траєкторії від прямолінійної. Тому водій змушений постійно коригувати траєкторію руху, повертаючи кермо.

Тривісні вантажні автомобілі набули поширення в народному господарстві та в армії. Третій міст у цих автомобілів дозволяє підвищити прохідність, збільшити вантажопідйомність, знизити навантаження на шини та тиск на ґрунт. З іншого боку, наявність третього мосту знижує ККД трансмісії, збільшує витрату палива та, найважливіше, погіршує керованість автомобіля.

#### ***10.1.1. Математичне моделювання зміни кутової швидкості та кутового прискорення при прямолінійному русі***

Критерієм керованості автомобіля є кутове прискорення, що розвивається при повороті, а критерієм поворотливості – кутова швидкість повороту [5]. Кутова швидкість повороту автомобіля в площині дороги з урахуванням бокового уводу шин передніх та задніх коліс може бути визначена як [5]

$$\omega_z = V_{x_1} \frac{\operatorname{tg} \bar{\alpha} + \delta_1 - \delta_2}{L} = V_{x_1} \frac{\operatorname{tg} \bar{\alpha}}{L} + V_{x_1} \frac{\delta_2 - \delta_1}{L} = \omega_z' + \omega_z'', \quad (10.1)$$

де  $V_{x_1}$  – лінійна швидкість автомобіля в напрямку його поздовжньої осі, м/с;

$L$  – поздовжня база автомобіля, м;

$\bar{\alpha}$  – середній кут повороту напрямних коліс, град;

$\omega_z'$  – кутова швидкість повороту, яку мав би автомобіль із абсолют-но жорсткими колесами 1/с,

$$\omega_z' = V_{x_1} \frac{\operatorname{tg} \bar{\alpha}}{L}; \quad (10.2)$$

$\omega_z''$  – додаткова кутова швидкість, яку має автомобіль з еластични-ми в бічному напрямку колесами,

$$\omega_z'' = V_{x_1} \frac{\delta_2 - \delta_1}{L}. \quad (10.3)$$

Припустимо, що коливальний характер повороту напрямних ко-ліс описується гармонійним законом виду

$$\bar{\alpha} = A_\alpha \sin(\Omega \cdot t), \quad (10.4)$$

де  $A_\alpha$  – амплітуда коливань напрямних коліс;

$\Omega$  – кругова частота коливань напрямних коліс;

$t$  – час, с .

При малих відхиленнях напрямних коліс від нейтрального поло-ження можна прийняти

$$\operatorname{tg} \bar{\alpha} \approx \bar{\alpha}. \quad (10.5)$$

Вираз (10.1), з урахуванням (10.4) та припущення (10.5), набуде вигляду

$$\omega_z = \frac{V_{x_1}}{L} \left[ A_\alpha \sin(\Omega \cdot t) + \delta_2 - \delta_1 \right]. \quad (10.6)$$

При повороті напрямних коліс відбувається зменшення лінійної швидкості автомобіля. Лінійна швидкість автомобіля у напрямі його поздовжньої осі змінюється за наступним законом [5]:

$$\begin{aligned} V_{x_1} &= \frac{V_0}{\sqrt{1 + \frac{i_z^2}{L^2} \cdot (\operatorname{tg} \bar{\alpha} + \delta_2 - \delta_1)^2}} \approx \\ &\approx \frac{V_0}{\sqrt{1 + \frac{i_z^2}{L^2} \cdot [A_\alpha \sin(\Omega \cdot t) + \delta_2 - \delta_1]^2}}, \end{aligned} \quad (10.7)$$

де  $i_z$  – радіус інерції остова автомобіля щодо вертикальної осі;  
 $V_0$  – лінійна швидкість автомобіля при  $\bar{\alpha} = 0$ .

Для визначення найімовірніших значень  $i_z$  у роботі [5] запропоновано формулу

$$i_z = \sqrt{\frac{1}{2} a \cdot b + \frac{B^2}{12}}, \quad (10.8)$$

де  $a$  – проекція на опорну поверхню відстані від передньої осі до центру мас автомобіля, м;

$b$  – проекція на опорну поверхню відстані від задньої осі до центру мас автомобіля, м;

$B$  – колія, м.

Вираз (10.6), після підстановки до нього (10.7) та (10.8), набуде вигляду

$$\omega_z = \frac{V_0}{L} \cdot \frac{A_\alpha \sin(\Omega \cdot t) + \delta_2 - \delta_1}{\sqrt{1 + \left( \frac{ab}{2L^2} + \frac{B^2}{12L^2} \right) \cdot [A_\alpha \sin(\Omega \cdot t) + \delta_2 - \delta_1]^2}}. \quad (10.9)$$

Кутове прискорення автомобіля у площині дороги

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{V_0}{L} \times$$

$$\times \frac{A_\alpha \cdot \Omega \cos(\Omega \cdot t) + \frac{d\delta_2}{dt} - \frac{d\delta_1}{dt}}{\sqrt{\left\{ 1 + \left( \frac{ab}{2L^2} + \frac{B^2}{12L^2} \right) \cdot [A_\alpha \sin(\Omega \cdot t) + \delta_2 - \delta_1]^2 \right\}^3}}. \quad (10.10)$$

У роботі [1] визначено бічні реакції на передній та задній осях автомобіля з урахуванням бокового уводу шин

$$R_{\delta_1} = m_a \cdot \sec \bar{\alpha} \cdot \left\{ \left[ \frac{R_{k_2} + R_{k_1} \cdot \sec \bar{\alpha}}{m} - \frac{V_{x_1}}{L} \cdot (\operatorname{tg} \bar{\alpha} + \delta_2 - \delta_1) \right] \cdot \left( \frac{b}{L} \cdot \delta_2 + \right. \right.$$



$$R_{\delta_2} = K_{y_2} \cdot \delta_2, \quad (10.14)$$

де  $m_a$  – маса автомобіля, кг;

$R_{k_1}, R_{k_2}$  – сумарні дотичні реакції дороги на колесах передньої та задньої осей (відповідають руху коліс у тяговому режимі), Н;

$K_{y_1}, K_{y_2}$  – сумарні коефіцієнти опору уводу коліс передньої та задньої осей, відповідно, Н/рад.

При  $\bar{\alpha} \rightarrow 0$ , тобто при невеликих кутах повороту керованих коліс, виконується умова (10.5), а також можна прийняти  $\sec \bar{\alpha} \approx 1$ . У цьому випадку рівняння (10.11) та (10.12), виражені відносно  $\delta_1$  та  $\delta_2$ , з урахуванням (10.7) та (10.8) набудуть вигляду

$$\delta_1 = \frac{m_a}{K_{y_1}} \left\{ \left[ \frac{R_{K_2} + R_{K_1}}{m_a} - \frac{V_0^2}{L} \cdot \frac{\frac{b}{L} \delta_2 + \frac{a}{L} \delta_1}{\sqrt{\frac{ab}{2L^2} + \frac{B^2}{12L^2} + (\bar{a} + \delta_2 - \delta_1)^{-2}}} \right] \times \right. \\ \times \left[ \bar{a} + \left[ \left( \frac{b^2}{L^2} + \frac{ab}{2L^2} + \frac{B^2}{12L^2} \right) \cdot (\bar{a} + \delta_2 - \delta_1) - \frac{b}{L} \delta_2 \right]^{-1} \right]^{-1} + \\ \left. + \frac{V_0^2}{L} \cdot \frac{\frac{b}{L}}{\sqrt{\frac{ab}{2L^2} + \frac{B^2}{12L^2} + (\bar{a} + \delta_2 - \delta_1)^{-2}}} - \frac{R_{k_1}}{m_a} \bar{a} \right\}. \quad (10.15)$$

$$\delta_2 = \frac{m_a}{K_{y_2}} \cdot \left\{ \left[ \frac{R_{K_2} + R_{K_1}}{m_a} - \frac{V_0^2}{L} \cdot \frac{\frac{b}{L} \delta_2}{\sqrt{\frac{ab}{2L^2} + \frac{B^2}{12L^2} + (\bar{a} + \delta_2 - \delta_1)^{-2}}} \right] \times \right. \\ \times \frac{\left( \frac{ab}{2L^2} - \frac{B^2}{12L^2} \right) (\bar{a} + \delta_2 - \delta_1) - \frac{a}{L} \delta_2}{1 + \bar{a} \left[ \frac{b}{L} (\bar{a} - \delta_1) - \left( \frac{ab}{2L^2} - \frac{B^2}{12L^2} \right) (\bar{a} + \delta_2 - \delta_1) \right]} + \\ \left. + \frac{V_0^2}{L} \cdot \frac{\frac{a}{L}}{\sqrt{\frac{ab}{2L^2} + \frac{B^2}{12L^2} + (\bar{a} + \delta_2 - \delta_1)^{-2}}} \right\}. \quad (10.16)$$

Визначити величини  $\delta_1$  і  $\delta_2$  з рівнянь (10.15) та (10.16) можливо лише чисельними методами. Підставляючи рівняння (10.4) у (10.15) і (10.16), отримаємо  $\delta_1$  і  $\delta_2$  при заданих конструктивних параметрах конкретного автомобіля. На наступних етапах розрахунку можливе визначення закону зміни  $\omega_z$  і  $\varepsilon_z$  за формулами (10.9) та (10.10).

### 10.1.2. Моделювання процесу руху на прикладі автомобіля Урал-4320

Автомобіль має у спорядженому стані параметри, наведені у таблиці 10.1.

**Таблиця 10.1. Геометричні параметри та параметри маси автомобіля Урал-4320 [5]**

Стан автомобіля	Параметри автомобіля					
	$m$ , кг	$a$ , м	$h$ , м	$L$ , м	$B$ , м	$i_z$ , м
Споряджений	8100	2,390	1,270	4,225	2,0	1,598
Повністю навантажений	13025	2,97	1,23	4,225	2,0	—

На рис. 10.1 показаний автомобіль Урал-4320 у тривісному виконанні



Рис. 10.1. Автомобіль Урал-4320 у тривісному виконанні

Результати розрахунків наведено на рисунках 10.2 – 10.5. Теоретичне дослідження виконано для синусоїдального закону повороту керованих коліс автомобіля при різних значеннях  $T_M$  і  $A_a$  ( $T_M$  – період зміни кута повороту напрямних коліс).

Отримана математична модель дозволяє здійснити оцінку керованості вантажних автомобілів, що рухаються прямолінійно, при малих коливальних відхиленнях напрямних коліс від нейтрального положення.

## 10.2. Керованість автомобіля при усталеному прямолінійному русі

Забезпечення постійного курсового кута і заданого радіусу повороту автомобіля при усталеному русі, здійснюється водієм шляхом постійного впливу на рульове колесо. Зазначений вплив має коливальний характер із частотою, що досягає 0,7 Гц. Частота власних коливань у площині дороги автомобілів з недостатньою поворотністю також може перебувати у вказаному діапазоні, що створює умови для виникнення резонансу та зсуву коливань по фазі на  $180^\circ$ . Це призводить до порушення керованості та стійкості автомобілів.

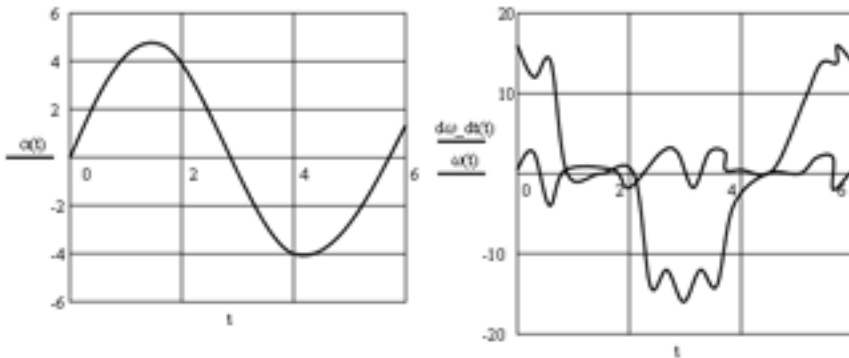


Рис. 10.2. Зміна кута повороту напрямних коліс, кутової швидкості та кутового прискорення автомобіля Урал-4320 від часу при прямолінійному русі і  $T_M = 0,1$  с;  $A_a = 5$  град

У роботі [5] наведено результати експериментальних досліджень керованості автомобілів, що показали, що частота синусоїдальної кривої, що використовується для здійснення маневру по траєкторії усіченої синусоїди за рахунок відповідного повороту рульового колеса становить 0,7 Гц. Використання цієї частоти призво-

дить до того, що час від завершення першого повороту рульового колеса (перший пік) до завершення повороту у зворотному напрямку (другий пік) становить приблизно 0,714 секунд незалежно від заданої величини кута повороту рульового колеса [1]. Ці результати були отримані [1] на підставі численних досліджень верхньої межі здатності людини робити поворот при маневрах з подвійним переходом з однієї смуги на іншу. Результати зазначених досліджень використані у міжнародному стандарті [1] щодо умов проведення випробувань автомобілів на стійкість.

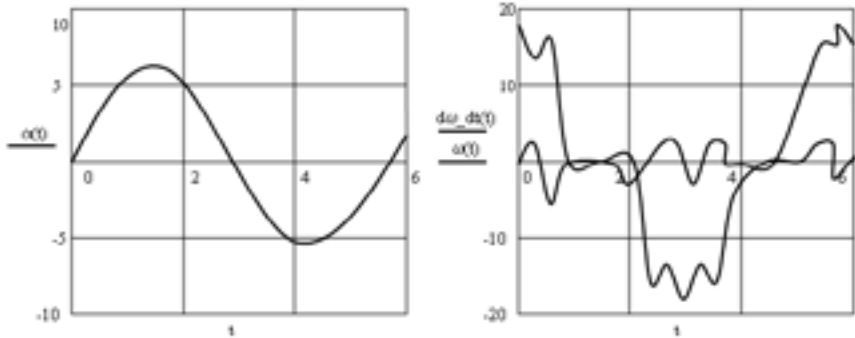


Рис. 10.3. Зміна кута повороту напрямних коліс, кутової швидкості та кутового прискорення автомобіля Урал-4320 від часу при прямолінійному русі і  $T_M = 0,1$  с;  $A_a = 6$  град

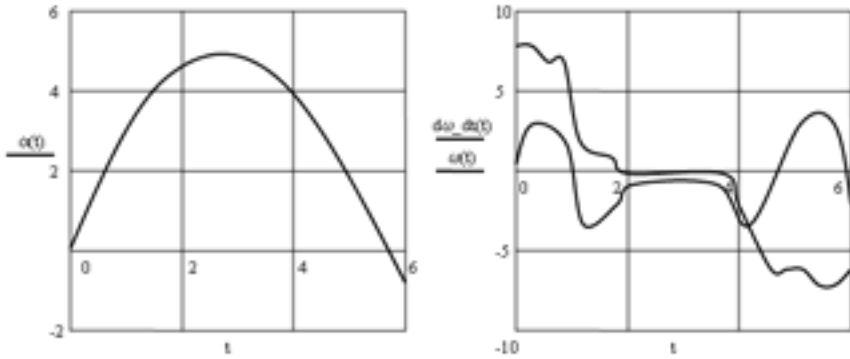


Рис. 10.4. Зміна кута повороту напрямних коліс, кутової швидкості та кутового прискорення автомобіля Урал-4320 від часу при прямолінійному русі і  $T_M = 0,2$  с;  $A_a = 5$  град

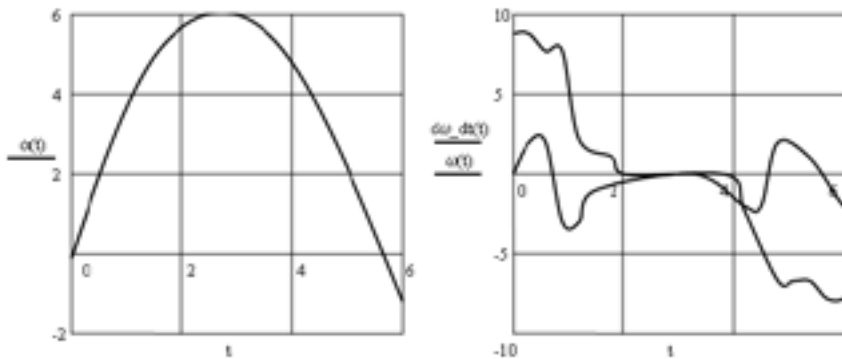
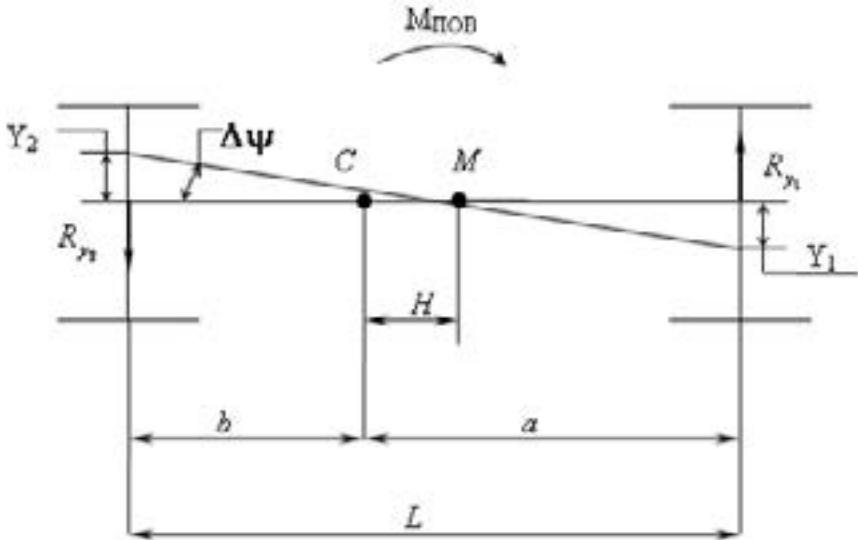


Рис. 10.5. Зміна кута повороту напрямних коліс, кутової швидкості та кутового прискорення автомобіля Урал-4320 від часу при прямолінійному русі і  $T_M = 0,2$  с;  $A_a = 6$  град

### 10.2.1. Визначення частоти власних коливань у площині дороги під час прямолінійного руху автомобіля

На рис. 10.6 наведена схема навантаження автомобіля моментом, що повертає, при прямолінійному русі, при прямолінійному усталеному русі.



$C$  – центр мас автомобіля;  $M$  – центр пружності автомобіля у площині дороги; сумарні бічні реакції дороги на передніх  $R_{y1}$  та задніх  $R_{y2}$  колесах

Рис. 10.6. Схема навантаження автомобіля повертальним моментом

З рис. 10.6 визначимо  $\Delta\psi$

$$\Delta\psi = \frac{Y_2}{b + H} = \frac{Y_1}{a - H}, \quad (10.17)$$

де  $Y_1, Y_2$  – бічні деформації шин, зумовлені дією бічних реакцій дороги  $R_{y_1}$  та  $R_{y_2}$ ;

$$Y_1 = \frac{R_{y_1}}{C_{y_1}}; \quad (10.18)$$

$$Y_2 = \frac{R_{y_2}}{C_{y_2}}, \quad (10.19)$$

$C_{y_1}, C_{y_2}$  – сумарні бічні жорсткості передніх та задніх коліс автомобіля;

$H$  – координата центру пружності автомобіля.

Підставляючи (10.18) та (10.19) у (10.17), отримаємо

$$\Delta\Psi = \frac{R_{y_2}}{C_{y_2}(b+H)} = \frac{R_{y_1}}{C_{y_1}(a-H)}. \quad (10.20)$$

Сумарні бічні реакції дороги на передніх та задніх колесах

$$R_{y_1} = R_{y_2} = R_y = \frac{M_{\text{ПОВ}}}{L}, \quad (10.21)$$

де  $M_{\text{ПОВ}}$  – повертальний момент, в площині дороги.

Кутова жорсткість автомобіля у площині дороги

$$C_{\text{кут}} = \frac{M_{\text{пов}}}{\Delta\psi}. \quad (10.22)$$

Підставляючи вирази (10.20) та (10.21) у (10.22), отримаємо

$$C_{\text{кут}} = L(b + H)C_{y_2} = L(a - H)C_{y_1}. \quad (10.23)$$

Координату центру пружності  $H$  знаходимо з виразу (10.20)

$$H = \frac{aC_{y_1} - bC_{y_2}}{C_{y_1} + C_{y_2}}. \quad (10.24)$$

Власна частота коливань автомобіля в площині дороги при прямолінійному усталеному русі

$$\nu_{\text{власн}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_{\text{кут}}}{I_{Z_M}}}, \quad (10.25)$$

де  $I_{Z_M}$  – момент інерції автомобіля в площині дороги щодо центру пружності  $M$ ;

$$I_{Z_M} = I_{Z_C} + mH^2 = m(i_Z^2 + H^2). \quad (10.26)$$

Вираз (10.25) з урахуванням (10.23), (10.24), (10.26) набуде вигляду

$$v_{\text{власн}} = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{C_{y_1} / m_a}{\left(1 + \frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right) \left[ i_Z^2 + a^2 \left( \frac{\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}} - \frac{b}{a}}{1 + \frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}} \right)^2 \right]}}}. \quad (10.27)$$

Аналіз виразу (10.27) показує, що зі зростанням поздовжньої колісної бази  $L$  відбувається зростання  $v_{\text{власн}}$  за лінійним законом. Зі збільшенням загальної маси автомобіля  $m_a$  відбувається зменшення частоти власних коливань автомобіля у площині дороги.

Керованість і стійкість прямолінійного руху автомобіля буде забезпечена при виконанні наступної умови:

$$v_{\text{збуд}}^{\text{max}} < v_{\text{власн}}. \quad (10.28)$$

З виразу (10.27) визначимо область значень  $C_{y_1}$ , що забезпечують виконання умови (10.28)

$$C_{y_1} > \frac{4\pi^2 (v_{\text{збуд}}^{\text{max}})^2 m_a}{L^2} \left(1 + \frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right) \left[ i_Z^2 + a^2 \left( \frac{\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}} - \frac{b}{a}}{1 + \frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}} \right)^2 \right]. \quad (10.29)$$

Перетворимо (10.29) на вигляд

$$C_{y_1} > \frac{4\pi^2 m_a (v_{зб\text{уд}}^{\max})^2}{L^2} F\left(\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right), \quad (10.30)$$

де  $F\left(\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right)$  – функція відношення  $\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}$

$$F\left(\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right) = i_Z^2 \left(1 + \frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right) + a^2 \frac{\left(\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}} - \frac{b}{a}\right)^2}{1 + \frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}}. \quad (10.31)$$

Функція  $F\left(\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right)$  має мінімум. Точка мінімуму

$$\left(\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right)^* = \frac{L}{\sqrt{i_Z^2 + a^2}} - 1. \quad (10.32)$$

Мінімальне значення функції  $F\left(\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right)$  отримаємо після підстановки (10.32) у (10.31)

$$\left[F\left(\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right)\right]_{\min} = L \cdot \frac{i_Z^2 + \left(a - \sqrt{i_Z^2 + a^2}\right)^2}{\sqrt{i_Z^2 + a^2}}. \quad (10.33)$$

Мінімальне значення  $C_{y_{1\min}}$ , що відповідає  $\left[F\left(\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right)\right]_{\min}$

$$C_{y_1 \min} = \frac{4\pi^2 m_a (v_{збуд}^{\max})^2}{L} \cdot \frac{i_Z^2 + \left(a - \sqrt{i_Z^2 + a^2}\right)^2}{\sqrt{i_Z^2 + a^2}}. \quad (10.34)$$

Необхідна сумарна бічна жорсткість коліс задньої осі в цьому випадку визначається з умови

$$C_{y_2} > \frac{C_{y_1 \min}}{\left(\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right)^*}. \quad (10.35)$$

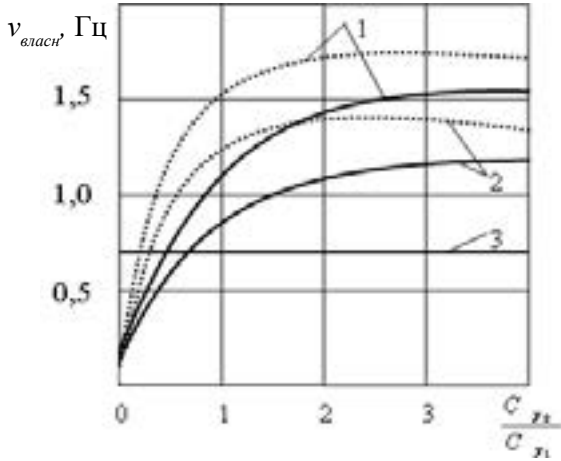
Після підстановки (10.32) та (10.34) у (10.35) отримаємо

$$C_{y_2} > \frac{4\pi^2 m_a (v_{збуд}^{\max})^2}{L} \cdot \frac{i_Z^2 + \left(a - \sqrt{i_Z^2 + a^2}\right)^2}{L - \sqrt{i_Z^2 + a^2}}. \quad (10.36)$$

### 10.2.2. Визначення частоти власних коливань автомобіля Урал-4320 у площині дороги

На рис. 10.7 наведено графіки залежності  $v_{\text{власн}} \frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}$ , побудовані для спорядженого та навантаженого автомобіля Урал-4320 при різних значеннях  $C_{y_1}$ . Вихідні розрахункові параметри автомобіля Урал-4320 наведено у таблиці 10.1. Автомобіль умовно приведено до двовісного.

Аналіз рис. 10.7 дозволяє визначити значення сумарних бічних жорсткостей коліс передньої та задньої осей, при яких частота власних коливань досліджуваного автомобіля в площині дороги відповідатиме верхній межі здатності людини робити поворот при маневрах з подвійним переходом з однієї смуги на іншу.



— повністю завантажений автомобіль, --- споряджений автомобіль;

$$1 - p_{\text{ш}} = 350 \text{ кПа } (C_{y1} = 2,264 \times 10^5 \text{ Н/м});$$

$$2 - p_{\text{ш}} = 70 \text{ кПа } (C_{y1} = 1,475 \times 10^5 \text{ Н/м}); \quad 3 - v_{\text{власн}} = 0,7 \text{ Гц}$$

Рис. 10.7. Залежність частоти власних коливань автомобіля Урал-4320 у площині дороги від відношення  $C_{y2}/C_{y1}$  при прямолінійному усталеному русі

На рис. 10.8 наведено графіки залежності  $C_{y1}$  ( $C_{y1}/C_{y2}$ ) та  $C_{y2}$  ( $C_{y1}/C_{y2}$ ) для спорядженого та навантаженого автомобіля Урал-4320 при  $v_{\text{збуд}}^{\text{max}} = 0,7$  Гц.

Оптимальними значеннями з точки зору забезпечення керованості та стійкості спорядженого автомобіля Урал-4320 при русі є значення  $C_{y1} = C_{y2} = 4,584 \times 10^4 \text{ Н/м}$ . Для повністю навантаженого досліджуваного автомобіля оптимальними значеннями є  $C_{y1} = C_{y2} = 9,293 \times 10^4 \text{ Н/м}$ .

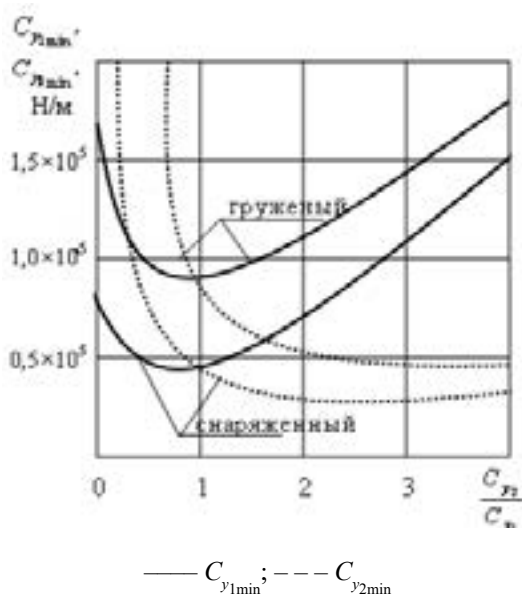


Рис. 10.8. Залежність мінімальних сумарних бічних жорсткостей передніх  $C_{y1}$  та задніх  $C_{y2}$  коліс автомобіля Урал-4320 від відношення  $C_{y2}/C_{y1}$  при  $v_{зб\ddot{u}д}^{max} = 0,7$  Гц

### 10.3. Вплив конструктивних параметрів на стійкість та керованість автомобіля при прямолінійному русі

#### 10.3.1. Оцінка можливості отримання максимальної частоти власних коливань автомобіля у площині дороги

Аналіз рівняння (10.27) показує, що збільшення  $v_{власн}$  можливе або при збільшенні  $C_{y1}$  або при виконанні рівності

$$\frac{C_{y1}}{C_{y2}} - \frac{b}{a} = 0. \quad (10.37)$$

Якщо припустити, що відношення сумарних бічних жорсткостей передніх і задніх коліс автомобіля дорівнює відношенню коефіцієнтів опору бічному відходу, тобто

$$\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}} \cong \frac{K_{y_1}}{K_{y_2}}, \quad (10.38)$$

то умова (10.37) визначає умову забезпечення нейтральної поворотності автомобіля. При нейтральній поворотності автомобіля  $\delta_1 = \delta_2$ .

Таким чином, забезпечення нейтральної поворотності автомобіля дозволяє отримати максимальне значення частоти власних коливань  $v_{\max}$  у площині дороги.

З рівняння (10.27) також видно, при виконанні умов

$$\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}} - \frac{b}{a} = 0 \quad (10.39)$$

і

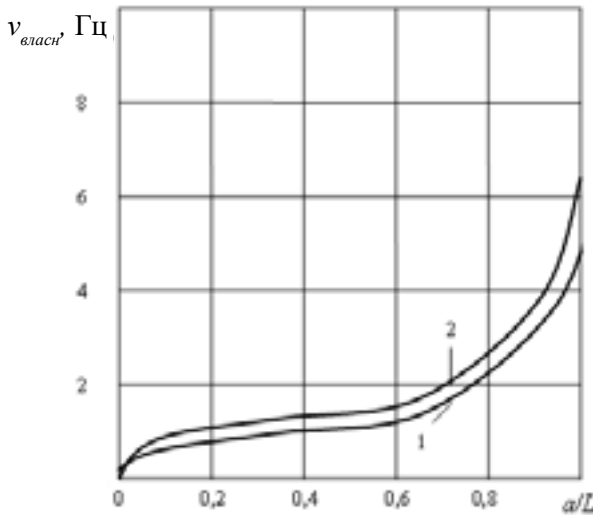
$$\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}} \cong \frac{K_{y_1}}{K_{y_2}} \quad (10.40)$$

частота власних коливань менша, ніж при виконанні умови (10.37). Це означає, що автомобілі з недостатньою і надмірною поворотністю мають частоту власних коливань меншу, ніж автомобілі з нейтральною поворотністю. Очевидно, що при експлуатації двовісних автомобілів з одинарними колесами на ведучих мостах при зміні положення центру мас можливе виконання умови (10.37) шляхом регулювання внутрішнього тиску повітря в шинах передніх і задніх коліс.

Рівняння (10.27) з урахуванням співвідношень (10.8) та (10.37) набуде вигляду

$$v_{\text{власн}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{L} \frac{2C_{y_1} / m_a}{\frac{a}{L} \left(1 - \frac{a}{L}\right) + \frac{B^2}{6L^2}}}. \quad (10.41)$$

На рис. 10.9 наведено графік залежності  $v_{\text{власн}} \left(\frac{a}{L}\right)$  при  $m = 8100$  кг;  
 $L = 4,2$  м;  $B = 2,0$  м;  $C_{y_1} = 1,475 \times 10^5$  Н/м та  $C_{y_2} = 2,264 \times 10^5$  Н/м.



$m_a = 8100$  кг;  $L = 4,2$  м;  $B = 2,0$  м;  $C_{y_1} = 1,475 \times 10^5$  Н/м (крива 1)  
та  $C_{y_2} = 2,264 \times 10^5$  Н/м (крива 2)

Рис. 10.9. Залежність  $v_{\text{власн}} \left(\frac{a}{L}\right)$  для автомобіля з нейтральною поворотністю

Аналіз графіків, наведених на рис. 10.9, показує, що з автомобілів з нейтральною повертаністю збільшення параметра  $\frac{a}{L}$  (зміщення центру мас до передньої осі) призводить до збільшення власної частоти коливань у площині дороги.

### 10.3.2. Визначення бічних реакцій дороги на колесах автомобіля при малих коливальних відхиленнях напрямних коліс від свого нейтрального положення

У роботі [6] отримані залежності для визначення бічних реакцій на колесах автомобіля при повороті з урахуванням бічного уводу шин

$$R_{\delta_1} = \frac{m_a}{\cos \bar{\alpha}} \cdot \left\{ \left[ \frac{dV_{x_1}}{dt} (tg \bar{\alpha} + \delta_2 - \delta_1) + V_{x_1} \left( \sec^2 \bar{\alpha} \frac{d\bar{\alpha}}{dt} + \frac{d\delta_2}{dt} - \frac{d\delta_1}{dt} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{b}{L} \frac{tg \bar{\alpha} - \delta_1}{tg \bar{\alpha} + \delta_2 - \delta_1} - \frac{ab - i_z^2}{L^2} \right) + \frac{b}{L^2} V_{x_1}^2 (tg \bar{\alpha} + \delta_2 - \delta_1) \right\} - R_{K_1} \cdot tg \bar{\alpha}; \quad (10.42)$$

$$R_{\delta_1} = m_a \cdot \left\{ \left( \frac{ab - i_z^2}{L^2} - \frac{a}{L} \frac{\delta_2}{tg \bar{\alpha} + \delta_2 - \delta_1} \right) \left[ \frac{dV_{x_1}}{dt} (tg \bar{\alpha} + \delta_2 - \delta_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + V_{x_1} \left( \sec^2 \bar{\alpha} \frac{d\bar{\alpha}}{dt} + \frac{d\delta_2}{dt} - \frac{d\delta_1}{dt} \right) \right] + \frac{a}{L^2} V_{x_1} (tg \bar{\alpha} + \delta_2 - \delta_1) \right\}. \quad (10.43)$$

Якщо автомобіль має нейтральну поворотність, то  $\delta_1 = \delta_2$  і  $d\delta_2/dt = d\delta_1/dt$ . Враховуючи що,

$$\delta_1 = R_{\delta_1} / K_{y_1} ; \quad (10.44)$$

$$\delta_2 = R_{\delta_2} / K_{y_2} , \quad (10.45)$$

перетворюємо вирази (10.42) та (10.43) до виду

$$R_{\delta_1} = 2m_a V_{x_1} K_{y_1} \times \frac{\frac{b^2 + i_z^2}{L^2} \operatorname{tg} \bar{\alpha} \frac{d\bar{\alpha}}{dt} + V_{x_1} \frac{b}{L^2} \sin^2 \bar{\alpha} - \frac{1}{2} R_{K_1} \sin \bar{\alpha} \cdot \sin 2\bar{\alpha}}{K_{y_1} \sin 2\bar{\alpha} \cos \bar{\alpha} + 2m_a V_{x_1} \frac{b}{L} \frac{d\bar{\alpha}}{dt}} ; \quad (10.46)$$

$$R_{\delta_2} = 2m_a V_{x_1} K_{y_2} \frac{\frac{ab - i_z^2}{L^2} \operatorname{tg} \bar{\alpha} \frac{d\bar{\alpha}}{dt} + V_{x_1} \frac{a}{L^2} \sin^2 \bar{\alpha}}{K_{y_2} \sin 2\bar{\alpha} + 2m_a V_{x_1} \frac{a}{L} \frac{d\bar{\alpha}}{dt}} . \quad (10.47)$$

У рівнянні (10.4) кругова частота коливань напрямних коліс може бути визначена як

$$\Omega = 2\pi \nu_{зб\text{уд}} . \quad (10.48)$$

Підставляючи (10.48) у (10.4), отримаємо

$$\bar{\alpha} = A_{\alpha} \sin(2\pi \nu_{зб\text{уд}} \cdot t) . \quad (10.49)$$

Кутова швидкість повороту напрямних коліс

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = 2\pi\nu_{зб\text{уд}} A_{\alpha} \cos(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t). \quad (10.50)$$

Підставляючи вирази (10.49) та (10.50) у рівняння (10.46) та (10.47), отримаємо

$$\begin{aligned} R_{\delta_1} = & 2m_a V_{x_1} \cdot K_{y_1} \times \\ & \times \frac{\frac{b^2 + I_Z^2}{L^2} \operatorname{tg}[A_{\alpha} \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)] 2\pi\nu_{зб\text{уд}} A_{\alpha} \cos(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t) +}{K_{y_1} \sin[2 A_{\alpha} \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)] \cos[A_{\alpha} \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)] +} \\ & + \frac{V_{x_1} \frac{b}{L^2} \sin^2[A_{\alpha} \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)] - \frac{1}{2} R_{K_1} \times}{+ 4m_a V_{x_1} \frac{b}{L} \pi\nu_{зб\text{уд}} A_{\alpha} \cos(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)} \\ & \times \frac{\sin[A_{\alpha} \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)] \sin[2 A_{\alpha} \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)]}{}, \quad (10.51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\delta_2} = & 2m_a V_{x_1} \cdot K_{y_2} \times \\
 & \times \frac{\frac{ab - i_Z^2}{L^2} \operatorname{tg}[A_\alpha \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)] 2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot A_\alpha \cos(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t) +}{K_{y_2} \sin[2A_\alpha \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)] +} \\
 & \frac{+ V_{x_1} \frac{a}{L^2} \sin^2[A_\alpha \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)]}{+ 4m_a V_{x_1} \frac{a}{L} \pi\nu_{зб\text{уд}} A_\alpha \cos(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)}. \quad (10.52)
 \end{aligned}$$

При прямолінійному усталеному русі автомобіля можна знехтувати дотичними реакціями на колесах, прийнявши  $R_{K_1} \approx 0$  і  $R_{K_2} \approx 0$ .

У цьому випадку умови забезпечення стійкості коліс проти бокового ковзання можна подати у вигляді

$$R_{\delta_1} \leq \varphi R_{Z_1}; \quad (10.53)$$

$$R_{\delta_2} \leq \varphi R_{Z_2}. \quad (10.54)$$

Сумарні нормальні реакції на колесах передньої та задньої осей автомобіля можна визначити як

$$R_{Z_1} = m_a g \frac{b}{L}; \quad (10.55)$$

$$R_{Z_2} = m_a g \frac{a}{L}, \quad (10.56)$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння,  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

Після підстановки (10.46), (10.47), (10.55), (10.56) у нерівності (10.53) та (10.54) визначимо умови відсутності бічного ковзання коліс передніх і задніх осей при малих коливальних відхиленнях напрямних коліс від свого нейтрального положення

$$\frac{\frac{b^2 + I_Z^2}{L^2} \operatorname{tg} [A_\alpha \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)] \cdot 2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot A_\alpha \cos(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t) + K_{y_1} \sin[2A_\alpha \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)] \cos[A_\alpha \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)] + V_{x_1} \frac{b}{L^2} \sin^2 [A_\alpha \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)]}{+ 4m_a V_{x_1} \frac{b}{L} \pi\nu_{зб\text{уд}} A_\alpha \cos(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)} \leq 0,5 \quad (10.57)$$

$$\frac{\frac{ab + I_Z^2}{L^2} \operatorname{tg} [A_\alpha \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)] \cdot 2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot A_\alpha \cos(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t) + K_{y_2} \sin[2A_\alpha \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)] + V_{x_1} \frac{a}{L^2} \sin^2 [A_\alpha \sin(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)]}{+ 4m_a V_{x_1} \frac{a}{L} \pi\nu_{зб\text{уд}} A_\alpha \cos(2\pi\nu_{зб\text{уд}} \cdot t)} \leq 0,5 \quad (10.58)$$

## 10.4. Оцінка керованості автомобіля за коефіцієнтом динамічності

### 10.4.1. Визначення коефіцієнта динамічності автомобіля

Прямолінійний усталений рух колісної машини відбувається при постійних періодичних коливаннях направляючих коліс, що обумовлено необхідністю забезпечення курсової стійкості за рахунок корекції курсового кута.

Таким чином, у площині дороги колісна машина є пружною коливальною системою, що здійснює вимушені коливання. Рівняння зазначених коливань має вигляд [5]

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2 \cdot n \cdot \frac{d\psi}{dt} + K_1^2 \cdot \psi = h \cdot \sin pt, \quad (10.59)$$

де  $\psi$  – курсовий кут машини в даний момент часу;

$\frac{d\psi}{dt} = \omega_z$  – кутова швидкість машини в площині дороги;

$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \dot{\omega}_z$  – кутове прискорення машини в площині дороги;

$h$  – відношення амплітуди збурюючого моменту  $M_{нов}$  колісної машини до моменту інерції останньої в площині дороги щодо вертикальної осі, що проходить через центр пружності  $I_{Z_M}$ ,

$$h = \frac{M_{нов}}{I_{Z_M}}; \quad (10.60)$$

$K_1$  – кругова частота власних коливань пружної системи,

$$K_1 = \sqrt{\frac{C_{кут}}{I_{Z_M}}}, \quad (10.61)$$

$p$  – кругова частота вимушених коливань (у розглянутій задачі – частота впливів водія або автоматичного керуючого пристрою на кермо);

$2n$  – відношення коефіцієнта демпфування  $\alpha_d$  до моменту інерції  $I_{Z_M}$ .

Вимушені коливання відбуваються з частотою збурюючої сили (в розглянутому завданні – збурюючого моменту), при цьому, якщо частота власних коливань більше частоти збурюючої сили, зсув фаз між коливаннями і силою (моментом) відсутня. Якщо частота збурюючої сили більша за свою частоту, має місце зсув фаз на  $\pi$  ( $180^\circ$ ) [5].

При рівності частот власних та вимушених коливань відбувається різке зростання амплітуди вимушених коливань, що отримало назву резонансу [5].

За відсутності демпфування ( $\alpha_d = 0$  і  $2n = 0$ ) амплітуда вимушених коливань  $A$  зростає до нескінченності. Навколо точки резонансу величина амплітуди вимушених коливань оцінюється за допомогою коефіцієнта динамічності  $K_d$  [5]

$$A = A_0 \cdot \left| \frac{1}{1 - \frac{p^2}{K_1^2}} \right| = A_0 \cdot K_d, \quad (10.62)$$

де  $A_0$  – амплітуда статичного повороту системи при амплітудному значенні збурюючого моменту рівного  $M_{нов}$ .

За наявності демпфування (сил опору в'язкого тертя) величина амплітуди коливань визначається залежністю

$$A = A_0 \left| \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{K_1^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 \cdot p^2}{K_1^4}}} \right| \quad (10.63)$$

і до нескінченності у точці резонансу зрости не може.

Для забезпечення стійкості і керованості при прямолінійному усталеному русі, необхідно забезпечити умову (10.28), при якій максимальна частота збудуючого моменту  $v_{збуд}^{\max}$  не повинна перевищувати частоти власних коливань автомобіля в площині дороги  $v_{власн}$ .

При виконанні умови (10.28), при збільшенні  $v_{збуд}$  від 0 до  $v_{власн}$  відбувається зростання амплітуди  $A$  (див. залежність (10.63)). Після переходу від кругових частот  $p$  і  $K_1$  до частот коливань вирази (10.62) та (10.63) набудуть вигляду

$$A = A_0 \cdot \left| \frac{1}{1 - \frac{v_{збуд}^2}{v_{власн}^2}} \right|; \quad (10.64)$$

$$A = A_0 \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v_{збуд}^2}{v_{власн}^2}\right)^2 + \frac{n^2}{4\pi^2} \frac{v_{збуд}^2}{v_{власн}^4}}} \right|. \quad (10.65)$$

### 10.4.2. Аналіз залежності коефіцієнта динамічності від конструктивних параметрів автомобіля

Зі зростанням  $v_{збуд}$  відбувається збільшення коефіцієнта динамічності, залежність для визначення якого має вигляд

$$K_D = \left[ \left( 1 - \frac{v_{збуд}^2}{v_{власн}^2} \right)^2 + \frac{n^2}{4\pi^2} \frac{v_{збуд}^2}{v_{власн}^4} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (10.66)$$

Оскільки дія моменту  $M_{пов}$ , є збурюючою, то збільшення амплітуди  $A$  вимушених коливань призводить до появи непропорційності між керуючим впливом і реакцією на нього автомобіля. Таким чином, при  $v_{збуд} < v_{власн}$ , чим ближче значення коефіцієнта динамічності  $K_D$  до одиниці, тим краще керуваність і, відповідно, стійкість прямолінійного усталеного руху автомобіля.

Розглянемо найгірший випадок, коли у рівнянні (10.66) величина  $n = 0$ . Зазначене рівняння в цьому випадку набуде вигляду

$$K_D = \left| \frac{1}{1 - \frac{v_{збуд}^2}{v_{власн}^2}} \right|. \quad (10.67)$$

Після підстановки виразу (10.27) у рівняння (10.67) отримаємо

$$K_D = \frac{1}{1 - v_{збуд}^2 \frac{4\pi^2 m_a}{L^2 C_{y1}} \left(1 + \frac{C_{y1}}{C_{y2}}\right) \left[ i_Z^2 + a^2 \left( \frac{\frac{C_{y1}}{C_{y2}} - \frac{b}{a}}{1 + \frac{C_{y1}}{C_{y2}}} \right)^2 \right]} \cdot \quad (10.68)$$

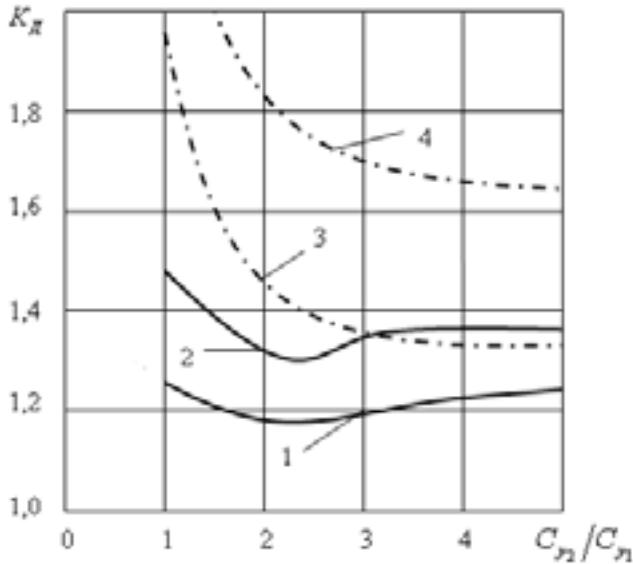
Аналіз виразу (10.68) показує, що зі зростанням  $v_{збуд}$  відбувається збільшення  $K_D$ . За  $v_{збуд} = 0$  величина  $K_D = 1$ . Зі збільшенням бази автомобіля  $L$  відбувається зменшення коефіцієнта динамічності  $K_D$ , а зі збільшенням його загальної маси  $K_D$  зростає. Зростання  $K_D$  відбувається також зі збільшенням радіусу інерції автомобіля  $i_z$  щодо вертикальної осі, а також зі зменшенням  $C_{y1}$ . На рис. 10.10 наведено

графіки залежності  $K_D \left( \frac{C_{y1}}{C_{y2}} \right)$  для автомобіля Урал-4320 при різних

значеннях  $C_{y1}$  (вихідні дані для побудови графіків представлені в таблиці 10.1). Аналіз зазначених графіків показує наявність мінімуму значення  $K_D$ .

При забезпеченні нейтральної поворотності автомобіля ( $C_{y2}/C_{y1} = b/a$ ) права частина рівняння (10.68) зменшується. У цьому випадку зазначене рівняння (10.68) набуде наступного вигляду

$$K_D^{**} = \frac{1}{1 - v_{збуд}^2 \frac{4\pi^2 m_a}{L \cdot a \cdot C_{y1}} i_Z^2} \cdot \quad (10.69)$$



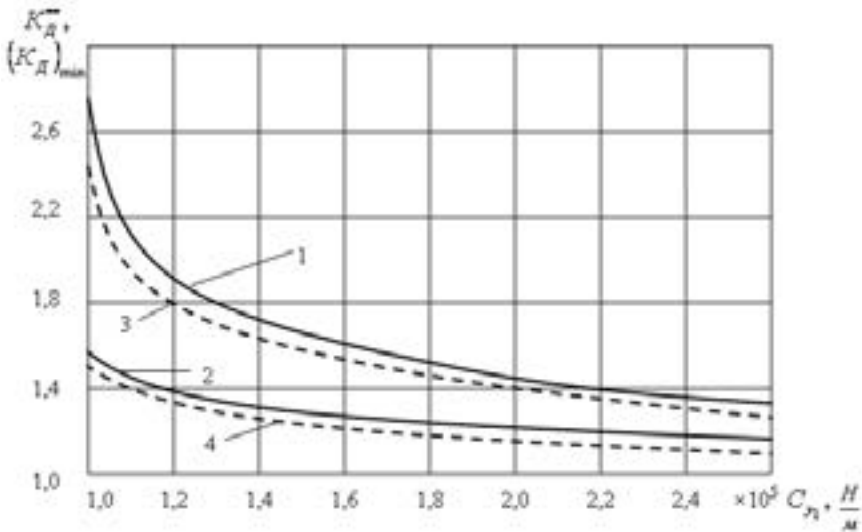
1, 2 – споряджений автомобіль; 3, 4 – повністю завантажений автомобіль;  
 1, 3 – при  $C_{y1} = 2,264 \cdot 10^5$  Н/м; 2, 4 – при  $C_{y1} = 1,475 \cdot 10^5$  Н/м.

Рис. 10.10. Залежність коефіцієнта динамічності від відношення  $C_{y2}/C_{y1}$

Приймаємо  $v_{зб\ddot{y}d} = v_{зб\ddot{y}d}^{\max} = 0,7$  Гц. Рівняння (10.69) перетворюється на вид

$$K_D^{**} = \left| \frac{1}{1 - 19,34 \cdot \frac{m_a}{L \cdot a \cdot C_{y1}} i_Z^2} \right|. \quad (10.70)$$

На рис. 10.11 наведено графіки залежності  $K_D^{**}(C_{y1})$  для спорядженого та повністю завантаженого автомобіля Урал-4320.



1, 2 –  $K_D^{**}(C_{y1})$ ; 3, 4 –  $(K_D)_{\min}(C_{y1})$ ; 1, 3 – навантажений автомобіль Урал-4320; 2, 4 – споряджений автомобіль Урал-4320

Рис. 10.11. Залежність коефіцієнта динамічності від сумарної бічної жорсткості шин передніх коліс

Аналіз графіків, наведених на рис. 10.11, показує, що у повністю завантаженого автомобіля Урал-4320 коефіцієнт динамічності вище, ніж у спорядженого.

Зі зростанням  $C_{y1}$  для зазначених завантажень автомобіля Урал-4320 різниця значень  $K_D^{**}$  зменшується.

Права частина рівняння (10.68) мінімальна під час виконання умови (10.32). Після підстановки рівняння (10.31) у (10.68) останнє набуде вигляду

$$K_D = \left| \frac{1}{1 - v_{збуд}^2 \frac{4\pi^2 m_a}{L^2 \cdot C_{y_1}} F\left(\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right)} \right|. \quad (10.71)$$

Мінімальне значення  $(K_D)_{\min}$  визначимо після підстановки (10.33) у (10.71)

$$(K_D)_{\min} = \left| \frac{1}{1 - v_{збуд}^2 \frac{4\pi^2 m_a}{L \cdot C_{y_1}} \frac{i_Z^2 + \left(a - \sqrt{i_Z^2 + a^2}\right)^2}{\sqrt{i_Z^2 + a^2}}} \right|. \quad (10.72)$$

На рис. 10.11 наведено також графіки залежності  $(K_D)_{\min} \left(\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right)$  для автомобіля Урал-4320 у спорядженому та повністю завантаженому стані. Для автомобіля Урал-4320, у відповідності до рівняння (10.32) співвідношення бічної жорсткості шин  $\left(\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}\right)^*$  становить 0,47 для спорядженого автомобіля та 0,22 для навантаженого автомобіля.

У автомобіля Урал-4320 при забезпеченні нейтральної поворотності співвідношення сумарної бічної жорсткості передніх коліс та коліс балансірної підвіски становить:

$$\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}} = 0,531 - \text{для спорядженого автомобіля;}$$

$$\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}} = 0,757 - \text{для повністю завантаженого автомобіля.}$$

Порівнюючи між собою графіки на рис. 10.11, можна зробити висновок про те, що  $(K_D)_{\min}$  трохи відрізняється від  $K_D^{**}$ . Але при цьому

співвідношення  $\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}$  значно відрізняються. Для спорядженого автомобіля  $\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}} = 0,531$  при нейтральній поворотності. При  $K_D = (K_D)_{\min}$  ве-

личина  $\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}$  дорівнює 0,47. Для повністю навантаженого автомобіля

ці значення становлять відповідно, 0,414 та 0,22. Тому для спорядженого автомобіля Урал-4320, що має одинарні шини на всіх колесах, може бути рекомендовано забезпечення  $K_D = K_D^*$  при нейтральній поворотності машини. При рівних бічних жорсткостях всіх шести коліс у цьому випадку  $C_{y_1} / C_{y_2} = 1/2 = 0,5$  близько до значення 0,531.

При повністю завантаженому автомобілі Урал-4320 необхідно збільшувати  $C_{y_1}$  відносно  $C_{y_2}$  за рахунок регулювання внутрішнього тиску повітря в шинах.

Для автомобілів Урал-4320, що мають здвоєні шини на колесах балансірного візка при рівній бічній жорсткості всіх шин маємо  $C_{y_1} / C_{y_2} = 1/4 = 0,25$ , що дозволяє забезпечити  $(K_D)_{\min}$  при завантаженому автомобілі. Для спорядженого автомобіля необхідно зменшити тиск повітря в шинах коліс балансірного візка по відношенню до тиску повітря в шинах передніх коліс. Це дозволить наблизити відношення

$\frac{C_{y_1}}{C_{y_2}}$  до величини 0,47, що забезпечить отримання  $(K_D)_{\min}$ .

Для двовісних автомобілів, щоб забезпечувати нейтральну поворотність машини, необхідно регулювати співвідношення тиску повітря в шинах передніх і задніх коліс.

## 10.5. Вплив дисбалансу та окружного люфту напрямних коліс на стійкість та керованість автомобіля

### 10.5.1. Визначення частоти збурюючих впливів за наявності дисбалансу напрямних коліс та їх окружного люфту

На рис. 10.12 наведено динамічну модель напрямного колеса автомобіля за наявності дисбалансу (маса  $m_0$  розташована на радіусі  $r_m$ ) та його кутового люфту з амплітудою  $A_\alpha$ .

Збурюючий момент, зумовлений наявністю дисбалансу

$$S_0 = m_0 \cdot r_m, \quad (10.73)$$

може бути визначений як

$$M_{збурд} = S_0 \cdot \omega_k^2 \cdot a_{ш} \cdot \sin \beta, \quad (10.74)$$

де  $\beta$  – кут відхилення радіусу розташування невірноваженої маси  $m_0$  від осі OZ (рис. 10.12)

$$\beta = \omega_k \cdot t, \quad (10.75)$$

де  $\omega_k$  – кутова швидкість напрямного колеса

$$\omega_k = \frac{V_0}{r_k}, \quad (10.76)$$

$V_0$  – лінійна швидкість напрямного колеса;

$r_k$  – кінематичний радіус напрямного колеса;

$a_{ш}$  – відстань від вертикальної осі симетрії колеса до осі шкворня.

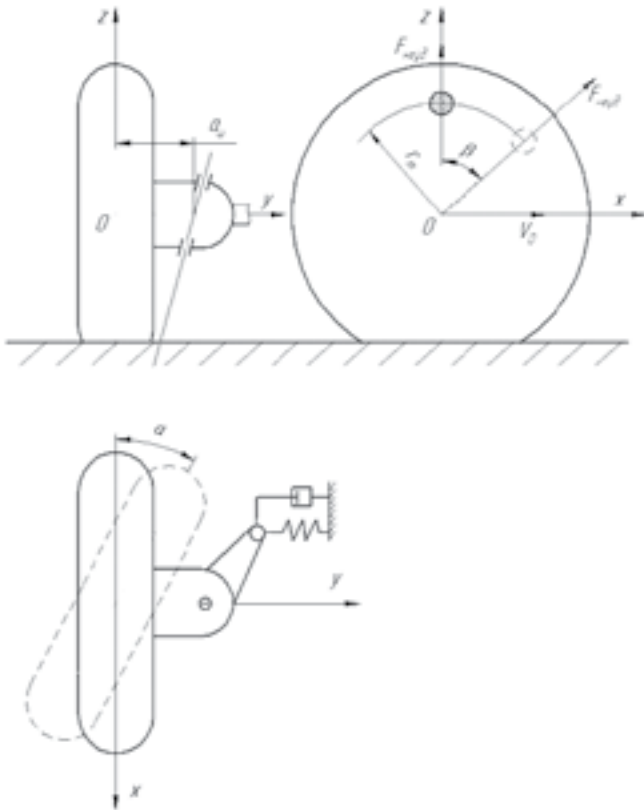


Рис. 10.12. Динамічна модель напрямного колеса автомобіля за наявності дисбалансу та окружного люфту

При вирішенні поставленої задачі приймемо припущення, що відсутній розвал коліс і опорна поверхня дороги ідеально гладка, і на ній відсутні будь-які нерівності, що призводять до бокового нахилу площини обертання напрямного колеса. Нахил, як відомо, призводить до появи гіроскопічного моменту, що також генерує вимушені коливання напрямного колеса щодо осі шворня.

Рівняння динаміки коливань напрямного колеса (рис. 10.12)

$$I_{kz} \cdot \ddot{\alpha} + c_{кут} \alpha + \gamma \cdot \dot{\alpha} = M_{збуди}, \quad (10.77)$$

де  $\alpha$  – кутове переміщення напрямного колеса автомобіля;

$I_{kz}$  – момент інерції напрямного колеса щодо осі шворня;

$c_{yzt}$  – кутова жорсткість опору кутового переміщення колеса;

$\gamma$  – коефіцієнт в'язкого тертя в пружних елементах при кутових коливаннях напрямного колеса.

Розділивши ліву та праву частини рівняння (10.77) на  $I_{kz}$ , отримаємо з урахуванням (10.73)–(10.76)

$$\ddot{\alpha} + k\alpha + 2n\dot{\alpha} = \frac{S_0 \cdot a_{uz}}{I_{kz} \cdot r_k} V_0 \sin\left(\frac{V_0}{r_k} t\right), \quad (10.78)$$

де  $k$  – кругова частота власних (вільних) коливань напрямного колеса щодо осі шворня

$$k = \sqrt{\frac{c_{yzt}}{I_{kz}}}, \quad (10.79)$$

$2n$  – відносний коефіцієнт, що характеризує в'язке тертя та згасання коливань

$$2n = \frac{\gamma}{I_{kz}}. \quad (10.80)$$

Рішення неоднорідного диференціального рівняння (10.78) складається із загального та окремого рішень. При тривалому збудуючому впливі загальне рішення диференціального рівняння другого порядку (10.78) можна прийняти рівним нулю.

У цьому випадку знаходимо лише окреме рішення у наступному вигляді

$$\alpha = A \sin\left(\frac{V_0}{r_k} t\right) + B \cos\left(\frac{V_0}{r_k} t\right). \quad (10.81)$$

З рівняння (10.81) визначимо

$$\dot{\alpha} = A \frac{V_0}{r_k} \cos\left(\frac{V_0}{r_k} t\right) - B \frac{V_0}{r_k} \sin\left(\frac{V_0}{r_k} t\right); \quad (10.82)$$

$$\ddot{\alpha} = -A \frac{V_0^2}{r_k^2} \sin\left(\frac{V_0}{r_k} t\right) - B \frac{V_0^2}{r_k^2} \cos\left(\frac{V_0}{r_k} t\right). \quad (10.83)$$

Підставляючи рівняння (10.81)–(10.83) у вираз (10.78), отримаємо

$$\begin{aligned} & \left[ \left( k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2} \right) A - 2nB \frac{V_0}{r_k} \right] \sin\left(\frac{V_0}{r_k} t\right) + \\ & + \left[ \left( k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2} \right) B - 2nA \frac{V_0}{r_k} \right] \cos\left(\frac{V_0}{r_k} t\right) = \frac{S_0 \cdot a_{uu}}{I_{kz} \cdot r_k^2} V_0^2 \sin\left(\frac{V_0}{r_k} t\right). \end{aligned} \quad (10.84)$$

З виразу (10.84) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A \left( k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2} \right) - 2nB \frac{V_0}{r_k} = \frac{S_0 \cdot a_{uu}}{I_{kz} \cdot r_k^2} V_0^2; \\ B \left( k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2} \right) + 2nA \frac{V_0}{r_k} = 0. \end{cases} \quad (10.85)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (10.85), визначимо

$$A = \frac{S_0 \cdot a_{uu} \cdot V_0^2}{I_{kz} \cdot r_k^2} \frac{k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2}}{\left( k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2} \right)^2 + 4n^2 \frac{V_0^2}{r_k^2}}; \quad (10.86)$$

$$B = -\frac{S_0 \cdot a_{uu} \cdot V_0^3}{I_{kz} \cdot r_k^3} \frac{2n}{\left( k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2} \right)^2 + 4n^2 \frac{V_0^2}{r_k^2}}. \quad (10.87)$$

Після підстановки (10.86) та (10.87) у (10.81) отримаємо

$$\alpha = \frac{S_0 \cdot a_{uu} \cdot \frac{V_0^2}{r_k^2}}{I_{kz} \left[ \left( k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2} \right)^2 - 4n \frac{V_0^2}{r_k^2} \right]} \left[ \left( k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2} \right) \sin \left( \frac{V_0}{r_k} t \right) - \right. \\ \left. - 2n \frac{V_0}{r_k} \cos \left( \frac{V_0}{r_k} t \right) \right] \quad (10.88)$$

або

$$\alpha = \frac{S_0 \cdot a_{uu} \cdot V_0^2}{I_{kz} \cdot \sqrt{\left(k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2}\right)^2 + 4n \frac{V_0^2}{r_k^2}}} \sin\left(\frac{V_0}{r_k} t - \Delta\right), \quad (10.89)$$

де  $\Delta$  – кут зсуву по фазі між коливаннями напрямного колеса та збурюючого моменту

$$\Delta = \arctg\left(\frac{2n \frac{V_0}{r_k}}{k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2}}\right). \quad (10.90)$$

### 10.5.2. Визначення умов збереження автомобілем стійкості та керованості

Рівняння (10.9) з урахуванням (10.8) можна записати як

$$\omega_z = \frac{V_0/L}{\sqrt{\frac{i_z^2}{L^2} + [A_\alpha \sin(\Omega \cdot t) + \delta_2 - \delta_1]^{-2}}}. \quad (10.91)$$

Амплітуда  $A_\alpha$  кутових коливань напрямних коліс автомобіля може бути визначена з рівняння (10.89)

$$A_\alpha = \frac{S_0 \cdot a_{uu} \cdot V_0^2}{I_{kz} \cdot r_k^2 \cdot \sqrt{\left(k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{V_0^2}{r_k^2}}}. \quad (10.92)$$

З рівняння (10.89) видно, що кругова частота коливань напрямних коліс дорівнює

$$\Omega = \frac{V_0}{r_k}. \quad (10.93)$$

Після підстановки (10.92) та (10.93) у (10.91) отримаємо з урахуванням (10.89)

$$\omega_z = \frac{V_0/L}{\sqrt{\frac{i_z^2}{L^2} + \left[ \frac{S_0 \cdot a_{uu} \cdot V_0^2}{I_{kz} \cdot r_k^2 \cdot \sqrt{\left(k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{V_0^2}{r_k^2}}} \sin\left(\frac{V_0}{r_k} t - \Delta\right) + \delta_2 - \delta_1 \right]^2}}. \quad (10.94)$$

Максимальне значення кутової швидкості  $\omega_k$  реалізується  $\sin\left(\frac{V_0}{r_k} t - \Delta\right) = 1$  при

$$\omega_{z \max} = \frac{V_0/L}{\sqrt{\frac{i_z^2}{L^2} + \frac{S_0 \cdot a_u \cdot V_0^2}{I_{kz} \cdot r_k^2 \cdot \sqrt{\left(k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{V_0^2}{r_k^2}} + \delta_2 - \delta_1}}}. \quad (10.95)$$

Рівняння (10.94) перетворюємо на вигляд

$$\frac{d\psi_z}{dt} = \frac{V_0}{L} \times \frac{S_0 \cdot a_u \cdot V_0^2}{I_{kz} \cdot r_k^2 \cdot \sqrt{\left(k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{V_0^2}{r_k^2}}} \sin\left(\frac{V_0}{r_k} t - \Delta\right) + \delta_2 - \delta_1$$

$$\sqrt{1 + \frac{i_z^2}{L^2} \left[ \frac{S_0 \cdot a_u \cdot V_0^2}{I_{kz} \cdot r_k^2 \cdot \sqrt{\left(k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{V_0^2}{r_k^2}}} \sin\left(\frac{V_0}{r_k} t - \Delta\right) + \delta_2 - \delta_1 \right]^2}. \quad (10.96)$$

де  $\psi_z$  – курсовий кут автомобіля.

Прийmemo припущення, що  $\delta_2 - \delta_1 \cong 0$ .

Рішення диференціального рівняння (10.96) з урахуванням прийнятих припущень має вигляд

$$\psi_z = \frac{r_k}{i_z} \left[ \begin{array}{l} \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{i_z^2} \frac{I_{kz}^2 r_k^2 \left[ \left( k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2} \right)^2 + 4n^2 \frac{V_0^2}{r_k^2} \right]}{S_0^2 \cdot a^2 u V_0^4}}} \right) \\ - \arcsin \left( \frac{\cos \left( \frac{V_0}{r_k} t - \Delta \right)}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{i_z^2} \frac{I_{kz}^2 r_k^2 \left[ \left( k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2} \right)^2 + 4n^2 \frac{V_0^2}{r_k^2} \right]}{S_0^2 \cdot a^2 u V_0^4}}} \right) \end{array} \right] \quad (10.97)$$

Максимальне значення  $\psi_{z\max}$  курсового кута, що є кутом рискання автомобіля за наявності дисбалансу та люфту напрямного колеса, реалізується при

$$\cos \left( \frac{V_0}{r_k} t - \Delta \right) = -1 \quad (10.98)$$

або

$$t = \frac{(\Delta + \pi) \cdot r_k}{V_0} \quad (10.99)$$

Таким чином

$$\psi_{z \max} = \frac{2r_k}{i_z} \arccos ec \sqrt{1 + \frac{L^2 I_{kz}^2 r_k^2 \left[ \left( k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2} \right)^2 + 4n^2 \frac{V_0^2}{r_k^2} \right]}{i_z^2 S_0^2 \cdot a_{uu}^2 V_0^4}}. \quad (10.100)$$

Якщо нормувати величину максимального відхилення курсового кута  $\psi_{z \max}$  (кута рискання), то з рівняння (10.100), приймаючи  $\psi_{z \max} = [\psi_z]$ , можна визначити допустимий сумарний дисбаланс  $[S_{0z}]$  напрямних коліс. Зазначений дисбаланс  $[S_{0z}]$  відповідає найбільш несприятливому відносному розташуванню неврівноважених мас на лівому та правому колесах

$$[S_{0\Sigma}] = \frac{L I_{kz} r_k}{i_z a_{uu}^2 V_0^2} \sqrt{\left( k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2} \right)^2 + 4n^2 \frac{V_0^2}{r_k^2}} \operatorname{tg} \left( \frac{i_z}{2r_k} [\psi_z] \right). \quad (10.101)$$

Максимально допустимий дисбаланс на одному напрямному колесі

$$[S_0] = 0,5 [S_{0\Sigma}] = \frac{L I_{kz} r_k}{2i_z a_{uu}^2 V_0^2} \sqrt{\left( k^2 - \frac{V_0^2}{r_k^2} \right)^2 + 4n^2 \frac{V_0^2}{r_k^2}} \operatorname{tg} \left( \frac{i_z}{2r_k} [\psi_z] \right). \quad (10.102)$$

Визначимо залежність  $[S_0]$  від максимально допустимого кута рискання  $\psi_z$  автомобіля Урал-4320.

Момент інерції направляючого колеса можна визначити за формулою

$$I_{kz} = m_k a_{uu}^2, \quad (10.103)$$

де  $m_k$  – маса колеса; для автомобіля Урал-4320  $m_k = 165$  кг.

Величина  $a_{iu}$  для автомобіля Урал-4320 (за кресленням) становить 155 мм, а радіус колеса  $r_k = 0,555$  м. Максимальна швидкість руху автомобіля Урал-4320 дорівнює  $V_{0\max} = 23,61$  м/с (85 км/год). Таким чином,  $I_{kz}$ , визначений за формулою (10.103) для автомобіля, що розглядається, дорівнює  $3,964$  кг·м<sup>2</sup>.

Радіус інерції автомобіля, розрахований за формулою (10.8) з використанням параметрів автомобіля Урал-4320, наведених у таблиці 10.2:

- $i_z = 1,598$  м – для спорядженого автомобіля;
- $i_z = 1,482$  м – для повністю завантаженого автомобіля.

Для визначення кругової частоти власних (вільних) коливань прямого колеса щодо осі шворня (див. вираз (10.79)) необхідно знати куту жорсткість  $c_{уст}$  шини розміром 14-20 (370-508). За дани-

ми літератури [5]:  $C_{\text{кут}} = 8045 \frac{H \cdot \text{м}}{\text{рад}}$ . І тут  $k = 45,05 \text{ с}^{-1}$ .

У таблиці 10.2 наведено результати розрахунку  $[S_0]$  Напрямних коліс автомобіля Урал-4320.

**Таблиця 10.2. Максимально допустимий дисбаланс напрямних коліс автомобіля Урал-4320**

$[\psi_z]$ , град		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
$[S_0]$ , кг м	Споряджений автомобіль	0,185	0,372	0,559	0,746	0,939	1,124	1,315	1,507	1,702	1,898	4,066
	Повністю навантажений автомобіль	0,186	0,372	0,559	0,746	0,934	1,123	1,313	1,505	1,698	1,893	4,012

Аналіз результатів розрахунку, наведених у таблиці 10.2, показує, що завантаження автомобіля практично не впливає на величину максимально допустимого дисбалансу  $[S_0]$  напрямних коліс автомобіля Урал-4320.

У відомій літературі наведено формулу для розрахунку допустимого дисбалансу для вантажних автомобілів

$$[S_0] = 0,0000043G_{ш}r_0, \text{кг}\cdot\text{м}. \quad (10.104)$$

Навантаження на напрямне колесо можна визначити як

$$G_{ш} = mg \frac{b}{L}. \quad (10.105)$$

Для спорядженого та повністю завантаженого автомобіля Урал-4320 величина  $G_{ш}$  знаходиться від 17,256 до 18,958 кН. Відповідно (10.104) і величина  $[S_0]$  знаходиться від 0,041 до 0,045 кг·м.

На рис. 10.13 наведено графік залежності максимального допустимого дисбалансу  $[S_0]$  напрямного колеса автомобіля Урал-4320 від максимально допустимого кута рискання  $[\psi_z]$  зазначеної машини. Аналіз зазначеного графіка показує, що він близький до прямої, рівняння якої можна подати у вигляді

$$[S_0] = 0,2006[\psi_z]. \quad (10.106)$$

Рівняння (10.106) можна використовувати під час проведення спрощених розрахунків. Для інших автомобілів зазначене рівняння також може бути використане, але з іншим значенням числового коефіцієнта.

За даними заводу виробника, допустимий дисбаланс переднього колеса у зборі автомобіля становить 0,030 кг·м. За загальноприйнятих величин максимально допустимого дисбалансу  $[S_0] = 0,030-0,045$  кг·м величина максимального кута рискання вантажного автомобіля не повинна перевищувати величини  $\psi_{z\max} = [2^\circ; 3^\circ]$ .

Результати проведеного дослідження дозволили визначити взаємозв'язок між максимальним кутом рискання автомобіля, викликаного дисбалансом напрямних коліс вантажного автомобіля та максимально допустимим значенням зазначеного дисбалансу. При існуючих нормативних значеннях дисбалансу напрямних коліс ван-

тажних автомобілів, що знаходяться від 0,030 до 0,045 кг·м, величина максимального кута рискання  $\psi_{\text{зmax}}$  в межах  $[2^\circ; 3^\circ]$ .

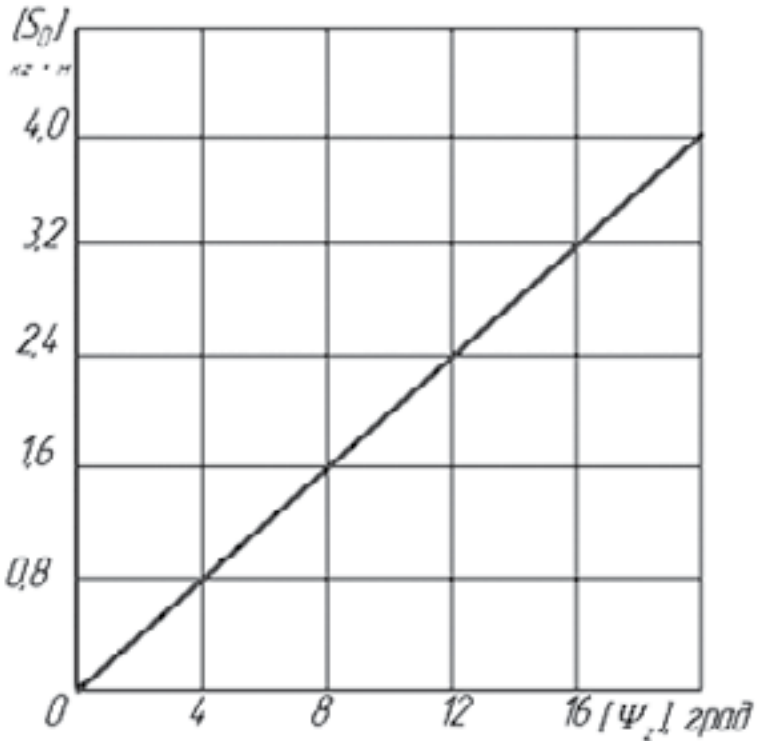


Рис. 10.13. Залежність максимального допустимого дисбалансу  $[S_0]$  напрямного колеса автомобіля Урал-4320 від максимального допустимого кута рискання  $[\psi_z]$

Результати проведеного дослідження дозволили визначити взаємозв'язок між максимальним кутом нищпорення автомобіля, викликаного дисбалансом та кутовим люфтом напрямних коліс вантажного автомобіля, та максимально допустимим значенням зазначеного дисбалансу. При існуючих нормативних значеннях дисбалан-

су напрямних коліс вантажних автомобілів, що знаходяться в межах від 0,030 до 0,045 кг·м, величина максимального кута рискання становить  $\psi_{z\max}$  в межах  $[2^\circ; 3^\circ]$ .

Таким чином, можна зробити наступні висновки.

1. Запропонований показник – частота власних коливань автомобіля у площині дороги може бути критерієм його стійкості та керованості. Дослідження показали, що частота власних коливань у площині дороги може набувати значення менше 0,7 Гц, що створює умови для виникнення резонансу та зсуву коливань по фазі, а значить – порушення керованості та стійкості автомобіля.

2. Отримані залежності дозволяють визначити співвідношення сумарних бічних жорсткостей шин передніх та задніх коліс автомобіля, за яких частота власних коливань автомобіля у площині дороги відповідатиме верхній межі здатності людини робити поворот при маневрах з подвійним переходом з однієї смуги на іншу. Оптимальними значеннями з точки зору забезпечення керованості та стійкості спорядженого автомобіля Урал-4320 при русі є значення  $C_{y1} = C_{y2} = 4,584 \times 10^4$  Н/м. Для повністю навантаженого досліджуваного автомобіля оптимальними значеннями є  $C_{y1} = C_{y2} = 9,293 \times 10^4$  Н/м.

3. Якщо вибрати значення сумарних бічних жорсткостей передніх та задніх коліс автомобіля досягти  $v_{зб\ddot{y}d}^{\max} = 0,7$  Гц не вдається, то рекомендується застосування системи динамічної стабілізації курсового кута.

4. При  $v_{зб\ddot{y}d}^{\max} < v_{собств}$  оцінку керованості та стійкості автомобіля можна здійснювати за допомогою коефіцієнта динамічності  $K_d$ , що є відношенням амплітуди вимушених коливань до статичного повороту системи при амплітудному значенні крутного моменту, що дорівнює  $M_{пов}$ . Забезпечення нейтральної поворотності автомобіля шляхом регулювання співвідношення бічних жорсткостей шин, передніх і задніх коліс за рахунок внутрішнього тиску повітря в них дозволяє зменшити коефіцієнт динамічності при  $v_{зб\ddot{y}d}^{\max} < v_{власн}$ .

5. Для автомобіля Урал-4320 при  $C_{y1} = 2,2 \cdot 10^5$  Н/м та забезпеченні його нейтральної поворотності ( $C_{y1}/C_{y2} = b/a$ ) коефіцієнт динамічності  $K_d$  становить 1,185 – для спорядженого автомобіля та 1,402 – для повністю завантаженого. Чим більше відрізняється кое-

фіцієнт динамічності від одиниці, тим гірша керованість та стійкість автомобіля при  $v_{збуд}^{\max} < v_{власн}$ .

6. Результати проведеного дослідження дозволили визначити взаємозв'язок між максимальним кутом рискання автомобіля, викликаного дисбалансом та кутовим люфтом напрямних коліс вантажного автомобіля, та максимально допустимим значенням зазначеного дисбалансу. При існуючих нормативних значеннях дисбалансу напрямних коліс вантажних автомобілів, що знаходяться в межах від 0,030 до 0,045 кг·м, величина максимального кута рискання становить  $\psi_{Zmax} = [2^{\circ}; 3^{\circ}]$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Forkenbrock, Garrick I. and Devin Elsasser, An Assessment of Human Driver Steering Capability, NHTSA Technical Report, DOT HS 809875, October 2005. — Режим доступа: [http://www-nrd.nhtsa.dot.gov/vrtc/ca/capubs/HTSA\\_forkenbrock\\_driversteeringcapabilityrpt.pdf](http://www-nrd.nhtsa.dot.gov/vrtc/ca/capubs/HTSA_forkenbrock_driversteeringcapabilityrpt.pdf).
2. Подригало Н. М. Концепція забезпечення ефективності і контролю функціональної стабільності моторно-трансмісійних установок транспортно-тягових засобів : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. техн. наук: 05.22.20 / Н. М. Подригало. — Харків, 2016. 36 с.
3. Кайдалов Р. О. Наукові основи створення автомобілів з комбінованою енергетичною установкою : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: 05.22.02 / Р. О. Кайдалов. — Харків, 2018. 40 с.
4. Динаміка колеса автомобіля / А. У. Абдулгазіс, Д. В. Абрамов та інші; под ред. М. А. Подригало, О. С. Полянського. — Харків : ХНАДУ, 2019. 199 с.
5. Гацько В. І. Вплив експлуатаційних факторів на керованість вантажного автомобіля при сталому русі : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: 05.22.20 / В. І. Гацько. — Харків, 2015. 20 с.
6. Бобошко О. А. Наукові основи підвищення показників маневреності автомобілів : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. техн. наук: 05.22.02 / О. А. Бобошко. — Харків, 2019. 40 с.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	4
РОЗДІЛ 1. РЕЖИМИ РУХУ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН .....	5
1.1. Загальні положення .....	5
1.2. Усталений рух .....	5
1.3. Енергетика усталеного руху .....	8
1.4. Неусталений рух, його параметри та характеристики .....	16
1.5. Точність руху та її оцінка .....	19
РОЗДІЛ 2. КОЕФІЦІЄНТ КОРИСНОЇ ДІЇ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН ...	21
2.1. Визначення поняття коефіцієнта корисної дії механізмів і машин .....	21
2.2. Вплив інерційних, пружних ланок та дисипативного зв'язку на ККД механізмів і машин .....	24
2.3. Динамічна модель механізму з пружними ланками, що рухаються поступально .....	26
РОЗДІЛ 3. ДИНАМІКА І МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ МАШИННИХ АГРЕГАТИВ .....	35
3.1. Динамічна модель трансмісії з інерційними та пружними ланками і дисипативними зв'язками .....	35
3.2. Системи з розподіленими та зосередженими параметрами .....	38
3.3. Ефект Зоммерфельда–Кононенко .....	39
РОЗДІЛ 4. ДВИГУН ВНУТРІШНЬОГО ЗГОРЯННЯ ЯК ДЖЕРЕЛО МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ В ТРАНСМІСІЇ .....	42
4.1. Нерівномірність крутного моменту та її залежність від кількості циліндрів ДВЗ .....	42
4.2. Моделювання зміни індикаторного крутного моменту гармонійним законом .....	45
4.3. Оцінка нерівномірності обертання валу двигуна .....	50
4.4. Моделювання зміни індикаторної потужності ДВЗ .....	54
4.5. Моделювання зміни ефективних потужності та крутного моменту ДВЗ .....	57
РОЗДІЛ 5. ВПЛИВ ПРУЖНИХ ЛАНОК ТРАНСМІСІЇ НА ВИХІДНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИГУНА ВНУТРІШНЬОГО ЗГОРЯННЯ .....	643
5.1. Вплив пружних ланок трансмісії на нерівномірність обертання колінчастого валу .....	64

5.2. Визначення індикаторної потужності двигуна з урахуванням впливу пружних ланок .....	71
5.3. Визначення ефективних потужності і крутного моменту ДВЗ з урахуванням впливу пружних ланок у трансмісії .....	72
<b>РОЗДІЛ 6. УДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДІВ ОЦІНКИ ВІБРОСТІЙКОСТІ МОТОРНО-ТРАНСМІСІЙНИХ УСТАНОВОК АВТОМОБІЛІВ І ТРАКТОРІВ .....</b>	<b>73</b>
6.1. Уточнення апроксимуючої залежності коефіцієнту нерівномірності крутного моменту від кількості циліндрів ДВЗ .....	74
6.2. Уточнення умов забезпечення вібростійкості силового агрегату .....	82
6.3. Оцінка стійкості роботи автомобільного двигуна за умови постійної кутової швидкості колінчастого валу .....	86
6.3.1. Аналіз останніх досягнень і публікацій .....	86
6.3.2. Стійкість роботи двигуна на усталеному режимі руху автомобіля .....	89
6.3.3. Стійкість роботи двигуна на неусталеному режимі руху автомобіля .....	94
<b>РОЗДІЛ 7. ВПЛИВ МУФТИ ЗЧЕПЛЕННЯ І ДЕМПФЕРА КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ НА ЕНЕРГЕТИЧНІ ВТРАТИ У ТРАНСМІСІЇ ...</b>	<b>105</b>
7.1. Визначення дисипативних втрат енергії у демпфері крутильних коливань зчеплення .....	105
<b>РОЗДІЛ 8. ВПЛИВ НЕРІВНОМІРНОСТІ КРУТНОГО МОМЕНТУ ДВЗ І ТЯГОВОЇ СИЛИ НА ДОДАТКОВІ ВТРАТИ ЕНЕРГІЇ ПРИ УСТАЛЕНОМУ РУСІ АВТОМОБІЛЯ .....</b>	<b>118</b>
8.1. Загальний підхід .....	118
8.2. Транспортні операції .....	118
8.3. Технологічні операції .....	123
8.4. Оцінка зниження енергетичних втрат автомобіля з комбінованою енергетичною установкою .....	130
8.4.1. Метод оцінювання непродуктивних втрат енергії на рух автомобіля, які обумовлені нерівномірністю крутного моменту ДВЗ .....	130
8.4.2. Коефіцієнт непродуктивних втрат енергії автомобіля з комбінованою енергетичною установкою .....	134
8.4.3. Оцінка впливу поздовжньої податливості ходової частини на додаткові втрати енергії для комбінованої енергетичної установки при сталому русі автомобіля .....	136

РОЗДІЛ 9. ДИНАМІКА ВЕДУЧОГО КОЛЕСА АВТОМОБІЛЯ .....	139
9.1. Усталений рух жорсткого колеса автомобіля .....	139
9.1.1. Рух при постійному значенні крутного моменту .....	139
9.1.2. При зміні крутного моменту за гармонійним законом .....	142
9.2. Усталений рух еластичного колеса автомобіля .....	145
9.2.1. Рух при постійному значенні крутного моменту .....	145
9.2.2. Рух при зміні крутного моменту за гармонійним законом ....	148
9.3. Рух жорсткого колеса автомобіля в неусталеному режимі .....	154
9.3.1. Рух при зміні крутного моменту за лінійним законом .....	154
9.3.2. Рух при зміні крутного моменту за гармонійним законом, а се- реднього значення крутного моменту – за лінійним законом ..	155
9.4. Рух еластичного колеса автомобіля в неусталеному режимі ....	158
9.4.1. Рух при зміні крутного моменту за лінійним законом .....	158
9.4.2. Рух при зміні крутного моменту за гармонійним законом, а його середнього значення – за лінійним .....	164
9.5. Рух жорсткого колеса автомобіля при реалізації граничної за зчепленням дотичної реакції дороги .....	172
9.5.1. Усталений рух при зміні крутного моменту за гармонійним законом .....	172
9.5.2. Рух в неусталеному режимі при зміні крутного моменту за гармонійним законом .....	182
9.6. Рух еластичного колеса автомобіля при реалізації граничної за зчепленням дотичної реакції дороги .....	184
9.6.1. Неусталений рух при зміні крутного моменту за лінійним законом .....	184
9.6.2. Усталений рух при зміні крутного моменту за гармонійним законом .....	195
9.6.3. Неусталений рух при зміні крутного моменту за гармоній- ним законом, а його середнього значення – за лінійним .....	197
9.7. Метод експериментального оцінювання параметрів контакту коліс автомобіля з дорогою .....	196
9.7.1. Послідовність визначення кінематичного параметра кон- такту колеса з дорогою .....	197
9.7.2. Визначення залежності коефіцієнта зчеплення шини з опо- рною поверхнею від кінематичного параметра колеса .....	205
9.8. Механіка одиночного колеса при рівномірному русі .....	207

РОЗДІЛ 10. ВПЛИВ БІЧНОЇ ЕЛАСТИЧНОСТІ ШИН НА СТІЙКІСТЬ АВТОМОБІЛЯ ПРОТИ РИСКАННЯ .....	217
10.1. Оцінка керованості вантажного автомобіля при малих коливальних відхиленнях напрямних коліс від нейтрального положення .....	217
10.1.1. Математичне моделювання зміни кутової швидкості та кутового прискорення при прямолінійному русі .....	217
10.1.2. Моделювання процесу руху на прикладі автомобіля Урал-4320 .....	223
10.2. Керованість автомобіля при усталеному прямолінійному русі	225
10.2.1. Визначення частоти власних коливань у площині дороги під час прямолінійного руху автомобіля .....	228
10.2.2. Визначення частоти власних коливань автомобіля Урал-4320 у площині дороги .....	233
10.3. Вплив конструктивних параметрів на стійкість та керованість автомобіля при прямолінійному русі .....	235
10.3.1. Оцінка можливості отримання максимальної частоти власних коливань автомобіля у площині дороги .....	235
10.3.2. Визначення бічних реакцій дороги на колесах автомобіля при малих коливальних відхиленнях напрямних коліс від свого нейтрального положення .....	238
10.4. Оцінка керованості автомобіля за коефіцієнтом динамічності	243
10.4.1. Визначення коефіцієнта динамічності автомобіля .....	243
10.4.2. Аналіз залежності коефіцієнта динамічності від конструктивних параметрів автомобіля .....	246
10.5. Вплив дисбалансу та окружного люфту напрямних коліс на стійкість та керованість автомобіля .....	252
10.5.1. Визначення частоти збурюючих впливів за наявності дисбалансу напрямних коліс та їх окружного люфту .....	252
10.5.2. Визначення умов збереження автомобілем стійкості та керованості .....	257
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ .....	267

*Наукове видання*

**А. У. Абдулґазіс, Д. В. Абрамов, М. П. Артґомов, М. В. Байцур,  
В. І. Гацько, Р. О. Кайдалов, Д. М. Клец, О. О. Коряк, М. А. Подриґало,  
Н. М. Подриґало, О. С. Полянський, М. Л. Шуляк**

# **ДИНАМІКА МАШИН З ПРУЖНИМИ ЛАНКАМИ.**

**На прикладі автомобілів і тракторів**

Колективна моноґрафія

За редакцією д-ра техн. наук, професора М. А. Подриґало  
та д-ра техн. наук, професора О. С. Полянського

Комп'ютерна верстка: О. Б. Мальцев

Підписано до друку 10.03.2024. Формат 60 x 84 1/16.

Умов. др. арк. 15,8. Об. вид арк. 15,9.

Зам. № ЕП-0904241. Тираж 100 прим.

Видавництво «Естет Прінт»

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

ДК № 6381 від 3.09.2018

тел.: +38 (050) 831-58-36

*Віддруковано у друкарні ТОВ «Естет Прінт»*

*Україна, 61002, м. Харків, вул. Рилєєва, 60*